ANALISI MATEMATICA 3

Prova scritta del 25 settembre 2018

Esercizio 1. Sia $f(y) := y \ln |y|$ (prolungata per continuità nell'origine ponendo $f(0) := 0$). Studiare l'equazione

$$y' = f(y)$$

determinando in particolare il comportamento qualitativo delle traiettorie. Discutere i risultati ottenuti alla luce della teoria generale (teoremi di esistenza in piccolo e in grande, unicità).

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y^3 - y, \\ y'(t) = -x^3 + x. \end{cases}$$

(a) Determinare i punti di equilibrio e la loro stabilità.

(b) Determinare un integrale primo per il sistema e dimostrare che esistono orbite eterocline (ovvero che connettono diversi punti di equilibrio).

$(c$ - difficile$)$ Dimostrare che tutte le orbite nonstazionarie del sistema sono eterocline oppure periodiche. Determinare il numero delle orbite eterocline. Tracciare infine l'andamento qualitativo delle traiettorie del sistema.

Esercizio 3. Detta C_R la circonferenza di centro 0 e raggio R percorsa una volta in senso antiorario, calcolare il

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{\sin(1/z)}.$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$z = f(w) = \tan w := \frac{\sin w}{\cos w},$$

definita almeno in un intorno (nel piano complesso) di $w = 0$. Osservando che $f(0) = 0$, determinare una funzione $w = g(z)$ che sia olomorfa almeno in un intorno Ω_0 di $z = 0$ e che funga da inversa locale di f (ovvero g sia biettiva da Ω_0 a $g(\Omega_0)$ e le relazioni $z = f(w)$ e $w = g(z)$ siano equivalenti per $z \in \Omega_0$ e $w \in f(\Omega_0)$). Determinare inoltre un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ contenente Ω_0 tale che g si possa estendere in modo olomorfo a tutto Ω. Scegliere Ω il più grande possibile.