ANALISI MATEMATICA 3

Scritto del 21 gennaio 2020

Esercizio 1. (a) Si consideri il problema di Cauchy in avanti per l'equazione autonoma scalare $y' = f(y)$. Per ogni $\alpha > 0$ si determini un'espressione esplicita di f tale che $f(y) = 0$ se e solo se $y = 0$ e per cui valga la seguente proprietà: per ogni $y_0 \neq 0$ esiste $C = C(y_0) > 0$ tale che la soluzione y del problema di Cauchy associato alla condizione $y(0) = y_0$ verifichi

$$\lim_{t \nearrow +\infty} |y(t)| t^\alpha = C \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\},$$

ovvero le soluzioni non costanti tendano all'unico equilibrio $y = 0$ con velocità di tipo potenza con esponente assegnato.

(b) Si determini ora un'espressione di f in modo tale che la soluzione y associata al generico dato iniziale $y_0 \neq 0$ tenda a 0 con velocità di tipo logaritmico, ovvero si abbia

$$\lim_{t \nearrow +\infty} |y(t)| = 0, \qquad \lim_{t \nearrow +\infty} |y(t)| \log^p t = +\infty \ \text{ per qualche } p > 0.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x' = 3y^2, \\ y' = 2x. \end{cases}$$

Studiare la stabilità dei punti critici e determinare l'andamento qualitativo delle traiettorie. Si consideri inoltre il problema di Cauchy (bilaterale) ottenuto associando al sistema la generica condizione iniziale $(x, y)(0) = (x_0, y_0)$. Determinare, al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il dominio della soluzione massimale di tale problema, specificando per quali dati iniziali questo è una semiretta, per quali dati iniziali è tutto $\mathbb{R}$, e per quali dati iniziali è un intervallo limitato.

Esercizio 3. Calcolare il

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos nt} \, \mathrm{d}t.$$

Esercizio 4. (a) Si consideri la funzione $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$. Dimostrare che esistono una semiretta chiusa $S \subset \mathbb{C}$ ed una funzione $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus S)$ tali che $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus S$. Determinare l'espressione di F.

(b) Sia ora $g(z) = \dfrac{1}{z^4 - 1}$. Trovare insiemi aperti Ω_j, $j = 2, 3, 4$, del piano complesso aventi le seguenti proprietà: Ω_j è connesso; Ω_j è costituito da tutto il piano complesso tolte j semirette chiuse; esiste una funzione $G_j \in \mathcal{H}(\Omega_j)$ (di cui si chiede di determinare l'espressione) tale che $G_j'(z) = g(z)$ per ogni $z \in \Omega_j$; G_j non può essere estesa in modo olomorfo ad alcun aperto strettamente più grande di Ω_j.