ANALISI MATEMATICA 3

Scritto del 21 gennaio 2019

Esercizio 1. (a) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{t-3y} + 1/3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(b) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'' = e^{t-3v}(1 - 3v'), \\ v(0) = 0, \\ v'(0) = 4/3. \end{cases}$$

Esercizio 2. (a) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''' + x' = 0, \\ x(0) = 2, \\ x'(0) = 1, \\ x''(0) = 0. \end{cases}$$

Dire se la soluzione genera un'orbita periodica nello spazio delle fasi (x, x', x'').

(b) Si risponda alla domanda precedente considerando invece il problema

$$\begin{cases} x''' + 2(x')^3 = 0, \\ x(0) = 2, \\ x'(0) = 1, \\ x''(0) = 0 \end{cases}$$

(può essere utile tracciare il grafico della funzione

$$A(s) = \int_0^s (1 - r^4)^{-1/2}\, \mathrm{d}r, \quad s \in [-1, 1],$$

e considerare anche la funzione inversa A^{-1}).

Esercizio 3. Calcolare
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x(x^6+1)}\,\mathrm{d}x,$$
dove si intende che l'integranda è prolungata a 0 per continuità.

Esercizio 4. Sia data una successione di funzioni $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(B(0,2))$. Si supponga inoltre che esista $M > 0$ tale che $|f_n(z)| \leq M$ per ogni z tale che $|z| = 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(a) Dimostrare che esistono una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ e una funzione $f \in \mathcal{H}(B(0,1))$ tale che f_{n_k} tende a f uniformemente sui compatti di $B(0,1)$.

(b) Mostrare con un esempio che la funzione f data da (a) potrebbe non ammettere alcuna estensione olomorfa a $\overline{B}(0,1+\delta)$, $\delta > 0$.