ANALISI MATEMATICA 3

Scritto del 18 febbraio 2020

Esercizio 1. (a) Si consideri il seguente sistema non lineare:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e^x \\ e^y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dove si intende che la matrice A è a coefficienti costanti. Determinare, eventualmente utilizzando cambiamenti di variabile, una strategia che consenta di determinare l'equazione delle **orbite** del sistema nello spazio delle fasi.

(b) Determinare quindi in modo esplicito l'equazione delle orbite nei seguenti due casi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Esercizio 2. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, l'andamento qualitativo delle traiettorie del seguente sistema espresso in coordinate polari:

$$\begin{cases} \rho' = \rho(1-\rho), \\ \theta' = k\rho(1-\rho). \end{cases} \tag{1}$$

Determinare inoltre (sempre al variare di k) la soluzione esplicita nelle coordinate polari $(\rho(t), \theta(t))$ nel caso il sistema sia associato alle condizioni iniziali $\rho(0) = 1/2$, $\theta(0) = 0$.

Esercizio 3. (a) Sia dato un polinomio a coefficienti complessi di grado $n \geq 2$ della forma $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Dimostrare che esiste $R > 0$ tale che la funzione

$$f(z) := \frac{1}{P(z)}$$

è olomorfa e ammette primitiva su $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, R)$.

(b) Siano ora dati due polinomi a coefficienti complessi $P(z)$ e $Q(z)$ con $P(z)$ di grado $n \geq 2$. Determinare condizioni necessarie e sufficienti su P e Q affinché il quoziente

$$h(z) := \frac{Q(z)}{P(z)}$$

sia olomorfo e ammetta primitiva su $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, R)$ per $R > 0$ sufficientemente grande.

Esercizio 4. Sia data una successione $\{f_n\}$ di funzioni definite e continue da un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false fornendo nel primo caso una dimostrazione e nel secondo un controesempio:

(a) Se la serie $\sum f_n$ converge uniformemente in I allora $f_n \to 0$ uniformemente in I.

(b) Se la serie $\sum f_n$ converge uniformemente in I allora la serie $\sum f_n^2(x)$ converge uniformemente in I.

(c) Se la serie $\sum |f_n|$ converge uniformemente in I allora la serie $\sum f_n^2(x)$ converge uniformemente in I.

(d) Se la serie $\sum |f_n|$ converge uniformemente in I allora la serie $\sum |f_n|^n(x)$ converge totalmente in I.

Tempo a disposizione per la prova: **3 ore**.

N.B.: Dal momento che l'Esercizio 4 riguarda argomenti che quest'anno sono stati parte del programma di Analisi 3, mentre erano parte di Analisi 2 in anni precedenti, gli studenti che non hanno seguito il corso quest'anno possono, se credono, svolgere solo i primi 3 Esercizi (essendo valutati ovviamente solo su questi). In questo caso, il tempo a disposizione **è però ridotto a 2.15 ore**.