

## ANALISI MATEMATICA 3

Scritto del 17 giugno 2019

**Esercizio 1.** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si denoti con  $y_n$  la soluzione del problema di Cauchy in avanti

$$\begin{cases} y' + ty^{n+1} = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Calcolare  $y_n$  e, per ogni  $t \geq 0$ , determinare il  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$  specificando il tipo di convergenza (puntuale, uniforme, ecc.).

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x' = \sin x - \sin y, \\ y' = \sin x. \end{cases}$$

Studiare la stabilità dei punti critici contenuti nel quadrato  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . Determinare inoltre l'andamento qualitativo della traiettoria corrispondente alla condizione iniziale  $(x, y)(0) = (\pi/2, \pi/2)$ .

Può essere utile ricordare la formula di prostaferesi

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right).$$

**Esercizio 3.** Dimostrare che 0 è un punto di singolarità isolato per la funzione

$$f(z) = \frac{z}{e^z - \cos z - \sin z^2 - z}$$

e determinare  $\text{Res}(f, 0)$ .

**Esercizio 4.** Determinare l'insieme dei numeri  $z \in \mathbb{C}$  tali che le quantità  $\sin z$  e  $\cos iz$  siano entrambe simultaneamente reali.