ANALISI MATEMATICA 3

Prova scritta del 4 settembre 2018

Esercizio 1. Determinare, al variare di $n \in \mathbb{N}$, l'integrale generale dell'equazione

$$-y'' + y = t^n.$$

Esercizio 2. Si consideri l'equazione

$$y' = e^y - 2t.$$

(a) Studiare l'andamento qualitativo delle traiettorie.

(b) Considerare il problema di Cauchy ottenuto associando la condizione iniziale

$$y(0) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

e indicare con $y_a(t)$ la corrispondente soluzione. Calcolare il valore $\bar{a}$ definito nel seguente modo

$$\bar{a} := \sup \left\{ a \in \mathbb{R} : \lim_{t \to +\infty} y_a(t) = -\infty \right\}$$

e determinare il $\lim_{t \to +\infty} y_{\bar{a}}(t)$.

Esercizio 3. (a) Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Sia $z_0 \in \Omega$ e siano $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dato $n \in \mathbb{N}$, si supponga che z_0 sia uno zero di ordine n per f e uno zero di ordine $n+1$ per g. Posto $h := f/g$, si dimostri che z_0 è un polo di ordine 1 per h e si determini un'espressione di $\mathrm{Res}(h, z_0)$ in termini delle derivate di f e di g in z_0.

(b) Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Sia $z_0 \in \Omega$ e siano $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si supponga che $f(z_0) \neq 0$ e che z_0 sia uno zero di ordine 2 per g. Posto $h := f/g$, si dimostri che z_0 è un polo di ordine 2 per h e si determini un'espressione di $\mathrm{Res}(h, z_0)$ in termini delle derivate di f e di g in z_0.

Esercizio 4. Determinare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\sin^4 z - \cos^4 z = 0.$$