

Enrico Vitali
Università degli Studi di Pavia

Analisi Matematica 3

(Corso di Laurea in Matematica)

Programma di Analisi Complessa

A.A. 2012/2013

Quella che segue è una concisa descrizione del programma di Analisi Complessa svolto all'interno dell'insegnamento di Analisi Matematica 3 del corso di Laurea in Matematica dell'Università di Pavia negli a.a. 2011/2012 e 2012/2013.

Testi di riferimento consigliati:

- Raghavan Narasimhan, *Complex analysis in one variable*, Birkhuser, 1985.
- Reinhold Remmert, *Theory of complex functions*, Springer, 1991.
- Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis II, Princeton University Press, 2003.

Indice

1	\mathbb{C}-differenziabilità e analiticità	1
1.1	Equazioni di Cauchy-Riemann	2
2	Serie di potenze	4
3	Integrazione lungo le curve.	7
4	Analiticità delle funzioni \mathbb{C}-differenziabili	9
5	Olomorfia e primitive. Teorema di Cauchy	14
5.1	Esistenza di una primitiva locale	14
5.2	Esistenza di una primitiva globale	16
5.3	Forma omotopica del Teorema di Cauchy	17
5.4	Formule integrali per le derivate	20
6	Funzioni meromorfe e singolarità	21
6.1	Sviluppo di Laurent	22
6.2	Funzioni meromorfe. Singolarità	26
6.3	Calcolo dei residui	31
7	Logaritmo in campo complesso. Indice di avvolgimento	32
7.1	Rami del logaritmo	32
7.2	Indice di avvolgimento	35
8	Teorema dei residui. Applicazione al calcolo di integrali	36
8.1	Teorema dei residui	36
8.2	Calcolo di integrali mediante il teorema dei residui	37
9	Ulteriori proprietà di base delle funzioni olomorfe	46
9.1	Principio del prolungamento analitico	46
9.2	Principio dell'argomento e Teorema di Rouché	47
9.3	Successioni di funzioni olomorfe	49
10	Proprietà geometriche	51
10.1	Il teorema dell'applicazione aperta. Trasformazioni conformi.	51
10.2	Esempi di trasformazioni conformi	54
10.3	Il teorema della mappa conforme di Riemann	57
11	Il problema di Dirichlet su una striscia	59
	Appendice: integrali impropri	62
11.1	Integrali su \mathbb{R}	62
11.2	Singolarità al finito. Integrale in valor principale	63
	Appendice: Teorema di Ascoli-Arzelà	64

1 \mathbb{C} -differenziabilità e analiticità

DEFINIZIONE 1.1 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Diciamo che una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è \mathbb{C} -differenziabile in un punto $a \in \Omega$ se esiste

$$f'(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Diciamo che f è \mathbb{C} -differenziabile in Ω se è tale in ogni punto di Ω .

DEFINIZIONE 1.2 Sia f come sopra. Diciamo che f è analitica in Ω se per ogni punto $a \in \Omega$ esiste un intorno U di a e una successione $(c_n)_{n \geq 0}$ in \mathbb{C} tali che:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

per ogni $z \in U \cap \Omega$.

Dimostriamo che f è \mathbb{C} -differenziabile in Ω se e solo se f è ivi analitica. Ci riferiremo a queste funzioni con il termine di *funzioni olomorfe*.

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~

Come per le funzioni differenziabili di variabile reale si ottiene subito la continuità delle funzioni \mathbb{C} -differenziabili. Ancora in analogia con il caso reale si dimostra il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.3 Se f e g sono funzioni \mathbb{C} -differenziabili nel punto $z = a$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora

– le funzioni $f \pm g$, λf e fg sono \mathbb{C} -differenziabili nel punto $z = a$ e in tale punto

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (\lambda f)' = \lambda f', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

– se $g(a) \neq 0$ allora f/g è \mathbb{C} -differenziabile nel punto $z = a$ e in tale punto

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Inoltre, se Ω e G sono aperti in \mathbb{C} , a è un punto di Ω , $f: \Omega \rightarrow G$ è \mathbb{C} -differenziabile in a e $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ è \mathbb{C} -differenziabile in $f(a)$, allora $g \circ f$ è \mathbb{C} -differenziabile in a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

ESEMPIO. La funzione identità è \mathbb{C} -differenziabile in tutto \mathbb{C} , quindi tali sono tutti i polinomi. Pertanto le funzioni razionali sono \mathbb{C} -differenziabili in ogni punto in cui non si annulla il denominatore. La funzione $z \mapsto \bar{z}$ non è \mathbb{C} -differenziabile (considerare il rapporto incrementale).

1.1 Equazioni di Cauchy-Riemann

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione \mathbb{C} -differenziabile. Tralasciando la struttura di campo di \mathbb{C} , la funzione f è una funzione a valori in \mathbb{R}^2 definita sull'aperto Ω di \mathbb{R}^2 . Dato $a = x_0 + iy_0 \in \Omega$ risulta:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (h \in \mathbb{C})}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ (\delta \in \mathbb{R})}} \frac{f(a+\delta) - f(a)}{\delta} \\ &= \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ (\delta \in \mathbb{R})}} \frac{f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ (\delta \in \mathbb{R})}} \frac{f(a + \delta i) - f(a)}{\delta i} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ (\delta \in \mathbb{R})}} \frac{f(x_0, y_0 + \delta) - f(x_0, y_0)}{\delta} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Otteniamo quindi le seguenti relazioni

$$(1.1) \quad f'(a) = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(a)}.$$

Se utilizziamo la parte reale e la parte immaginaria di f , cioè le funzioni reali:

$$u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f,$$

allora la (1.1) si può scrivere, in modo equivalente, come

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 1.4 Se f è una funzione \mathbb{C} -differenziabile poniamo

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

La motivazione per questa definizione è che, se esprimiamo la funzione $f(z)$ mediante la parte reale e la parte immaginaria di z , cioè $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, allora

$$f(z) = f(x, y) = f((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/(2i)),$$

per cui le definizioni di $\partial f / \partial z$ e di $\partial f / \partial \bar{z}$ sono coerenti con l'usuale regola di derivazione delle funzioni composte.

Se utilizziamo gli operatori $\partial f / \partial z$ e $\partial f / \partial \bar{z}$ le equazioni (1.1) sono equivalenti alla condizione

$$(1.3) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

o anche alla seguente:

$$(1.4) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Le equazioni (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4), fra loro equivalenti, sono dette *equazioni (o condizioni) di Cauchy-Riemann*.

Le condizioni di Cauchy-Riemann sono, in certo senso, sufficienti per la \mathbb{C} -differenziabilità. Più precisamente, vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.5 *Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione per la quale esistano continue le derivate parziali $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ e che queste soddisfino le condizioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{in } \Omega.$$

Allora f è \mathbb{C} -differenziabile in Ω .

Dimostrazione. Sia $f = u + iv$. Fissiamo $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. Per ogni $h = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ tale che $a + h \in \Omega$ abbiamo:

$$\begin{aligned} u(a+h) - u(a) &= u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\beta + o(|h|). \end{aligned}$$

Analogamente

$$v(a+h) - v(a) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\beta + o(|h|).$$

Quindi, utilizzando le equazioni di Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\beta + o(|h|) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)\alpha + i \frac{\partial f}{\partial x}(a)\beta + o(|h|) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(\alpha + i\beta) + o(|h|), \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{o(|h|)}{h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a). \quad \square$$

OSSERVAZIONE 1.6 Come risulta dalla dimostrazione, l'ipotesi di esistenza delle derivate parziali continue può essere sostituita dalla differenziabilità di f come funzione di due variabili reali. In realtà vale il seguente risultato più forte, secondo cui è sufficiente la continuità della funzione e la semplice esistenza delle derivate prime (vedi, ad esempio, Narasimhan, *Complex analysis in one variable*, Cap. 1).

TEOREMA 1.7 (LOOMAN-MENCHOFF) *Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua sull'aperto Ω di \mathbb{C} . Sia f dotata delle derivate parziali prime $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ soddisfacenti le condizioni di Cauchy-Riemann su Ω . Allora f è \mathbb{C} -differenziabile in Ω .*

2 Serie di potenze

Passiamo in rassegna alcuni dei risultati di base sulle serie di potenze:

$$(2.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

TEOREMA 2.1 *Esiste $R \in [0, +\infty]$ tale che:*

- la serie (2.1) converge assolutamente in modo uniforme sui compatti del cerchio

$$D_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}.$$

- la serie (2.1) non converge se $|z-a| > R$.

Il valore R è detto raggio di convergenza della serie (2.1) e l'insieme $D(a, R)$ cerchio di convergenza.

Con la convenzione $1/0 = \infty$ e $1/\infty = 0$ il raggio di convergenza della serie (2.1) è dato da

$$1/R = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $L := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in (0, +\infty)$ (nel caso $L = 0$ o $L = +\infty$ la dimostrazione è facilmente adattabile). Sia $R = 1/L$.

Sia z tale che $|z-a| = \varrho > R$; allora $1/\varrho < L$ per cui esiste una sottosuccessione $(c_{n_k})_k$ tale che $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > 1/\varrho$. Pertanto

$$|c_{n_k} (z-a)^{n_k}| = |c_{n_k}| \varrho^{n_k} \geq 1 \quad \text{per ogni } k,$$

da cui deduciamo che la serie (2.1) non converge.

Sia ora $\varrho < R$ e dimostriamo che la serie converge totalmente nel cerchio $D_\varrho(a)$. Poiché $1/\varrho > L$ possiamo scegliere un valore $\beta \in (L, 1/\varrho)$; allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|c_n| < \beta$ per ogni $n \geq N$. Di conseguenza

$$|c_n (z-a)^n| = |c_n| \varrho^n \leq (\beta \varrho)^n$$

per ogni $z \in D_\varrho(a)$ e $n \geq N$. Poiché $\beta \varrho < 1$ (quindi la serie $\sum (\beta \varrho)^n$ è convergente), la serie (2.1) converge assolutamente in modo uniforme in $D_\varrho(a)$. \square

Nel calcolo del raggio di convergenza di una serie può essere utile il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.2 *Sia (α_n) una successione di numeri reali positivi. Allora*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}.$$

ESEMPIO.

• Mediante la proposizione precedente è immediato verificare che la *serie esponenziale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ha raggio di convergenza $+\infty$. La somma è la funzione esponenziale e^z .

In modo analogo si verifica che le seguenti serie hanno raggio di convergenza $+\infty$:

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Per la proprietà associativa delle serie convergenti otteniamo subito la seguente relazione:

$$\cos z + i \sin z = e^{iz},$$

da cui le *formule di Eulero*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

• Come nel caso reale, la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge se e solo se $|z| < 1$ e ha per somma $1/(1-z)$.

Il comportamento sul bordo del cerchio di convergenza va studiato caso per caso. Si pensi alle serie:

$$\sum z^n, \quad \sum \frac{z^n}{n}, \quad \sum \frac{z^n}{n^2}.$$

TEOREMA 2.3 (SERIE DERIVATA) Sia $R > 0$ il raggio di convergenza della serie (2.1). Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1},$$

detta serie derivata della (2.1), ha lo stesso raggio R di convergenza. Inoltre, detta $f(z)$ la somma della serie (2.1) in $D_R(a)$, la funzione f risulta \mathbb{C} -differenziabile e

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

Dimostrazione. Poiché

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1/R,$$

la serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza della serie (2.1).

Non è restrittivo supporre $a = 0$. Fissiamo ora $w_0 \in D_R(0)$ e scegliamo r tale che $|w_0| < r < R$. Sia $h \in \mathbb{C}$ tale che $|w_0 + h| < r$. Valutiamo il rapporto incrementale $[f(w_0 + h) - f(w_0)]/h$ per $h \rightarrow 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n z^n, \quad R_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n z^n.$$

Allora

$$\frac{1}{h}[f(w_0 + h) - f(w_0)] = \frac{1}{h}[S_N(w_0 + h) - S_N(w_0)] + \frac{1}{h}[R_N(w_0 + h) - R_N(w_0)].$$

Per la \mathbb{C} -differenziabilità dei polinomi, risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_N(w_0 + h) - S_N(w_0)}{h} = S'_N(w_0).$$

Inoltre

$$\left| \frac{1}{h}[R_N(w_0 + h) - R_N(w_0)] \right| \leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| |(w_0 + h)^n - w_0^n|.$$

Osserviamo ora che

$$(w_0 + h)^n - w_0^n = h[(w_0 + h)^{n-1} + (w_0 + h)^{n-2}w_0 + \dots + (w_0 + h)w_0^{n-2} + w_0^{n-1}].$$

Quindi, poiché $|w_0 + h|, |w_0| < r$, abbiamo:

$$|(w_0 + h)^n - w_0^n| \leq |h| n r^{n-1}.$$

Allora, tenendo conto che r è minore del raggio di convergenza R della serie derivata:

$$\left| \frac{1}{h}[R_N(w_0 + h) - R_N(w_0)] \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Posto

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}, \quad z \in D_R(0),$$

ne segue che

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(w_0 + h) - f(w_0)}{h} - g(w_0) \right| \leq |S'_N(w_0) - g(w_0)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}$$

per ogni $N \in \mathbb{N}$. Ora si conclude passando al limite per $N \rightarrow +\infty$, poiché $S'_N(w_0)$ è la somma parziale N -ima di $g(w_0)$. \square

COROLLARIO 2.4 *Ogni funzione analitica è infinitamente differenziabile in senso complesso.*

Come nel caso reale si dimostra che se $f(z)$ è la somma della serie (2.1) allora

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a), \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Quindi f è la somma della sua *serie di Taylor*.

Dalla Proposizione sulla serie derivata ricaviamo subito che

$$D e^z = e^z, \quad D \cos z = -\sin z, \quad D \sin z = \cos z.$$

3 Integrazione lungo le curve.

DEFINIZIONE 3.1 Diciamo curva parametrica (o semplicemente curva) in \mathbb{C} ogni applicazione continua da un intervallo chiuso e limitato dell'asse reale in \mathbb{C} :

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}.$$

I valori $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ sono detti punto iniziale e punto finale di γ , rispettivamente. La curva è chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

L'immagine di γ è anche detta supporto della curva (e indicata anche con $\text{spt}(\gamma)$).

Nel seguito con il termine curva intenderemo una curva parametrica che sia anche di classe C^1 -tratti.

Introduciamo le seguenti ulteriori definizioni:

- diremo *inversa* della curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ la curva

$$\gamma^{-1}: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t).$$

- se $\gamma_k: [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$ ($k = 1, 2$) sono due curve tali che $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ (cioè il punto finale di γ_1 coincide con il punto iniziale di γ_2), definiamo la curva $\gamma_1 \cdot \gamma_2$, detta curva ottenuta percorrendo prima γ_1 e poi γ_2 , la curva $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2: [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a_1, b_1], \\ \gamma_2(a_2 + (t - b_1)) & \text{se } t \in [b_1, b_1 + (b_2 - a_2)]. \end{cases}$$

DEFINIZIONE 3.2 Date due curve $\gamma_k: [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$ ($k = 1, 2$) diciamo che γ_2 è una riparametrizzazione di γ_1 se esiste una funzione $\phi: [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ di classe C^1 -tratti strettamente crescente, biiettiva e con derivata mai nulla (dove definita) tale che $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$.

Chiaramente, se γ_2 è una riparametrizzazione di γ_1 anche γ_1 è una riparametrizzazione di γ_2 .

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~

DEFINIZIONE 3.3 Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva (C^1 -tratti) e f una funzione continua a valori complessi definita sul supporto di γ . Definiamo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

PROPOSIZIONE 3.4 Sia $\tilde{\gamma}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ una riparametrizzazione di $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Allora

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Dimostrazione. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$, con $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z_1$. Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \, dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad \square \end{aligned}$$

Da ciò segue subito che:

COROLLARIO 3.8 *Sia f dotata di primitiva in Ω e sia γ una curva chiusa in Ω . Allora*

$$\int_{\gamma} f \, dz = 0.$$

Nella dimostrazione dell'analiticità delle funzioni \mathbb{C} -differenziabili utilizzeremo il Corollario 3.8 nel caso particolare in cui f è un polinomio, che è chiaramente dotato di primitiva.

COROLLARIO 3.9 *Se Ω è connesso e f è una funzione \mathbb{C} -differenziabile tale che $f' = 0$ in Ω allora f è costante.*

Dimostrazione. Dati $z_0, z_1 \in \Omega$, sia γ una curva C^1 -tratti che li unisce. Per la proposizione precedente (f' è continua poiché nulla)

$$0 = \int_{\gamma} f'(z) \, dz = f(z_1) - f(z_0),$$

quindi $f(z_0) = f(z_1)$. \square

Una conseguenza immediata è che se Ω è connesso due primitive differiscono per una costante.

4 Analiticità delle funzioni \mathbb{C} -differenziabili

Sia Ω un aperto di \mathbb{C} . Con R indicheremo un rettangolo chiuso di \mathbb{C} con i lati paralleli agli assi (reale ed immaginario). Il bordo ∂R verrà inteso percorso in senso antiorario.

TEOREMA 4.1 (CAUCHY-GOURSAT) *Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione \mathbb{C} -differenziabile. Per ogni rettangolo chiuso R in Ω risulta:*

$$\int_{\partial R} f \, dz = 0.$$

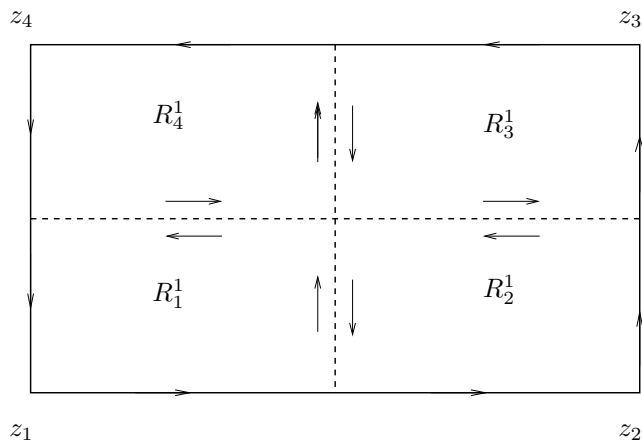


Figura 1 - Suddivisione di R nella dimostrazione del Teorema di Cauchy-Goursat

Dimostrazione. Poniamo $A = \left| \int_{\partial R} f dz \right|$. Suddividiamo il rettangolo R (vedi Figura 1) in quattro rettangoli R_j^1 ($j = 1, \dots, 4$). Osserviamo che

$$\int_{\partial R} f dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial R_j^1} f dz,$$

per cui

$$A \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\partial R_j^1} f dz \right|.$$

Esiste allora j_1 tale che

$$\left| \int_{\partial R_{j_1}^1} f dz \right| \geq \frac{1}{4} A.$$

Ripetiamo ora l'operazione di suddivisione a partire dal rettangolo $R_{j_1}^1$:

$$R_{j_1}^1 = R_1^2 \cup R_2^2 \cup R_3^2 \cup R_4^2.$$

Esiste allora j_2 tale che

$$\left| \int_{\partial R_{j_2}^2} f dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_{j_1}^1} f dz \right| \geq \frac{1}{4^2} A.$$

Così procedendo si ottiene una successione di rettangoli

$$R_{j_1}^1 \supseteq R_{j_2}^2 \supseteq \dots \supseteq R_{j_k}^k \supseteq \dots$$

tali che

$$\left| \int_{\partial R_{j_k}^k} f dz \right| \geq \frac{1}{4^k} A.$$

Inoltre:

$$\text{diam } R_{j_k}^k = \frac{1}{2^k} \text{diam } R; \quad \text{lungh } \partial R_{j_k}^k = \frac{1}{2^k} \text{lungh } \partial R.$$

Per la compattezza dei rettangoli l'intersezione $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_{j_k}^k$ è non vuota e, poiché di diametro necessariamente nullo, deve contenere un solo elemento; sia esso a :

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_{j_k}^k = \{a\}.$$

Utilizziamo ora la \mathbb{C} -differenziabilità di f :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \sigma(z), \quad \text{con } \sigma(z) = o(|z - a|).$$

Poiché il polinomio $P_1(z - a) = f(a) + f'(a)(z - a)$ ammette primitiva, per il Corollario 3.8 risulta:

$$\int_{\partial R_{j_k}^k} P_1(z - a) dz = 0.$$

Quindi:

$$\int_{\partial R_{j_k}^k} f dz = \int_{\partial R_{j_k}^k} \sigma(z) dz.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che

$$|\sigma(z)| \leq \varepsilon |z - a| \quad \text{per } |z - a| < \delta.$$

Sia k sufficientemente grande in modo tale che $\text{diam } R_{j_k}^k < \delta$. Allora, per ogni $z \in \partial R_{j_k}^k$

$$|\sigma(z)| \leq \varepsilon |z - a| \leq \varepsilon \text{diam } R_{j_k}^k,$$

da cui

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R_{j_k}^k} \sigma(z) dz \right| &\leq \varepsilon \text{diam } R_{j_k}^k \cdot \text{lungh}(\partial R_{j_k}^k) \\ &\leq \varepsilon 2^{-k} 2^{-k} \text{diam } R \cdot \text{lungh}(\partial R) \\ &= \varepsilon 4^{-k} \text{diam } R \cdot \text{lungh}(\partial R). \end{aligned}$$

Quindi

$$4^{-k} A \leq \varepsilon 4^{-k} \text{diam } R \cdot \text{lungh}(\partial R).$$

Per l'arbitrarietà di ε deve essere $A = 0$. \square

Estendiamo il Teorema di Cauchy-Goursat al caso in cui f sia \mathbb{C} -differenziabile in Ω escluso al più un punto.

TEOREMA 4.2 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $a \in \Omega$. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua e supponiamo che f sia \mathbb{C} -differenziabile in $\Omega \setminus \{a\}$. Allora per ogni rettangolo chiuso $R \subseteq \Omega$ si ha*

$$\int_{\partial R} f dz = 0.$$

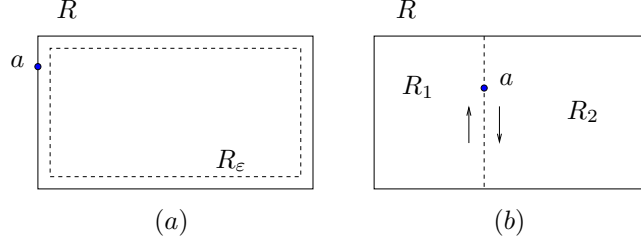


Figura 2 - Estensione del Teorema di Cauchy-Goursat al caso di una singolarità

Dimostrazione. Se $a \notin R$ il risultato è immediato per il Teorema di Cauchy-Goursat.

Se $a \in \partial R$ si consideri una famiglia $(R_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ tale che $R_\varepsilon \uparrow R$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ (vedi Figura 2 (a)). Risulta

$$0 = \int_{\partial R_\varepsilon} f \, dz \rightarrow \int_{\partial R} f \, dz.$$

Se il punto a è interno a R , si consideri la suddivisione in due rettangoli come in Figura 2 (b). A ciascuno di tali rettangoli si applica il risultato della singolarità sul bordo, per cui

$$\int_{\partial R} f \, dz = \int_{\partial R_1} f \, dz + \int_{\partial R_2} f \, dz = 0. \quad \square$$

LEMMA 4.3 *Sia R un rettangolo chiuso in \mathbb{C} e $z = a$ un punto interno a R . Allora*

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z - a} \, dz = 2\pi i.$$

Dimostrazione. La funzione $\varrho(\vartheta)$ che esprime, tramite la coordinata angolare ϑ , la distanza da a del punto z variabile su ∂R è una funzione C^1 -tratti. Esprimiamo allora l'integrale su ∂R mediante la parametrizzazione $\vartheta \mapsto a + \varrho(\vartheta)e^{i\vartheta}$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \frac{1}{z - a} \, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varrho(\vartheta)e^{i\vartheta}} (\varrho'(\vartheta) + i\varrho(\vartheta))e^{i\vartheta} \, d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\varrho'(\vartheta)}{\varrho(\vartheta)} \, d\vartheta + i \int_0^{2\pi} \, d\vartheta = 2\pi i. \quad \square \end{aligned}$$

TEOREMA 4.4 (FORMULA DI CAUCHY PER UN RETTANGOLO) *Sia Ω un aperto di \mathbb{C} e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione \mathbb{C} -differenziabile. Sia $R \subseteq \Omega$ un rettangolo chiuso. Allora per ogni punto $z = a$ interno a R risulta:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - a} \, dz.$$

Dimostrazione. Sia

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} & \text{se } z \in \Omega \setminus \{a\}, \\ f'(a) & \text{se } z = a. \end{cases}$$

Poiché f è \mathbb{C} -differenziabile, la funzione g è continua in Ω ; inoltre g è \mathbb{C} -differenziabile in $\Omega \setminus \{a\}$. Quindi per il Teorema 4.2:

$$\int_{\partial R} g(z) dz = 0,$$

da cui, per il Lemma precedente

$$\int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a) \int_{\partial R} \frac{1}{z - a} dz = 2\pi i f(a). \quad \square$$

La formula di Cauchy di cui al Teorema 4.4 fornisce una formula di rappresentazione integrale per una funzione \mathbb{C} -differenziabile da cui è possibile dedurre l'analiticità.

TEOREMA 4.5 (ANALITICITÀ DELLE FUNZIONI \mathbb{C} -DIFFERENZIABILI) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia f una funzione \mathbb{C} -differenziabile in Ω . Allora f è analitica in Ω .*

Dimostrazione. Dimostriamo che comunque preso $a \in \Omega$ la funzione f è esprimibile come somma di una serie di potenze in un intorno di a . Sia $R \subseteq \Omega$ un rettangolo chiuso, con a interno a R . Sia $\overline{D}_r(a)$ un disco chiuso di centro a contenuto nell'interno di R . Per la formula di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{per ogni } z \in D_r(a).$$

Sviluppiamo ora la funzione integranda in potenze di $z - a$; tenendo conto che $|(z - a)/(\zeta - a)| < 1$ se $z \in D_r(a)$ e $\zeta \in \partial R$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} \\ &= \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n. \end{aligned}$$

Notiamo che, dal momento che il cerchio chiuso $\overline{D}_r(a)$ è contenuto all'interno di R , esiste $0 < \alpha < 1$ tale che

$$\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| \leq \alpha \quad \text{per ogni } z \in D_r(a) \text{ e } \zeta \in \partial R.$$

Allora, poiché $|\zeta - a| > r$ se $\zeta \in \partial R$, concludiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^n$$

converge uniformemente per $\zeta \in \partial R$. Pertanto possiamo integrare per serie, ottenendo:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta. \quad \square$$

A questo punto abbiamo dimostrato l'equivalenza fra \mathbb{C} -differenziabilità e analiticità: diremo *olomorfa* una funzione che gode di tale proprietà e, se Ω è un aperto di \mathbb{C} , indicheremo con $\mathcal{H}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni olomorfe su Ω .

5 Olomorfia e primitive. Teorema di Cauchy

La teoria esposta fino ad ora mirava a dimostrare l'equivalenza fra le proprietà di \mathbb{C} -differenziabilità e di analiticità. Centrale è stato il Teorema di Cauchy-Goursat (da cui scende subito la formula di Cauchy), secondo il quale è nullo l'integrale di una funzione olomorfa sul bordo di un rettangolo contenuto nel dominio di olomorfia. Sviluppiamo ora questo risultato, mostrando come, più in generale, sia nullo l'integrale di una funzione olomorfa lungo una curva chiusa che "racchiude" una regione contenuta nel dominio di olomorfia. Questa proprietà di annullamento è a sua volta strettamente collegata all'esistenza di una primitiva.

5.1 Esistenza di una primitiva locale

Iniziamo dimostrando che

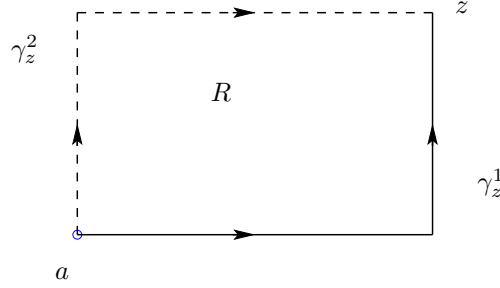
$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \implies \quad f \text{ ammette localmente una primitiva.}$$

Più precisamente: dimostreremo che in ogni cerchio contenuto in Ω la funzione f ammette una primitiva; la dimostrazione utilizzerà l'olomorfia di f nella forma di annullamento dell'integrale sui rettangoli. Ricordiamo che l'esistenza di una primitiva implica immediatamente l'annullarsi dell'integrale lungo le curve chiuse (Corollario 3.8).

TEOREMA 5.1 (TEOREMA DI CAUCHY PER IL CERCHIO) *Sia $D = D_r(a)$ e $f \in \mathcal{H}(D)$. Allora f ammette una primitiva in D . In particolare*

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

per ogni curva chiusa γ in D .



Dimostrazione. Per ogni $z = x + iy \in D_r(a)$ consideriamo le due curve (vedi Figura 5.1)

$$\gamma_z^1 = [a, a + x] \cdot [a + x, z], \quad \gamma_z^2 = [a, a + iy] \cdot [a + iy, z]$$

Definiamo

$$F(z) = \int_{\gamma_z^1} f(\zeta) d\zeta,$$

e osserviamo che, per il Teorema di Cauchy-Goursat, risulta

$$F(z) = \int_{\gamma_z^2} f(\zeta) d\zeta.$$

Valutiamo le derivate parziali di f utilizzando queste due espressioni. Mediante la curva γ_z^1 abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{F(z + ih) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+ih]} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f(x + it) i dt \\ &= \frac{i}{h} \int_y^{y+h} f(x, t) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} if(x, y). \end{aligned}$$

Quindi $\frac{\partial F}{\partial y} = if$.

Mediante la curva γ_z^2 valutiamo la derivata rispetto a x :

$$\begin{aligned} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t + iy) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t, y) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x, y). \end{aligned}$$

Quindi: $\frac{\partial F}{\partial x} = f$, per cui

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -i \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Allora F è una funzione continua dotata di derivate prime soddisfacenti le condizioni di Cauchy-Riemann per cui (Teorema di Looman-Menchoff) F è \mathbb{C} -differenziabile, quindi olomorfa (qui è sufficiente la Proposizione 1.5, in quanto è continua la funzione f , e quindi sono continue le derivate di F); inoltre

$$F' = \frac{\partial F}{\partial x} = f,$$

per cui F è una primitiva di f . \square

Da quanto ora dimostrato seguono vari risultati.

TEOREMA 5.2 (MORERA) *Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione continua per la quale*

$$\int_{\partial R} f dz = 0$$

per ogni rettangolo chiuso R contenuto in Ω , allora f è olomorfa.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che in ogni punto a di Ω la funzione f è \mathbb{C} -differenziabile. Se $D = D_r(a)$ è un cerchio contenuto in Ω , la dimostrazione precedente fornisce una primitiva F di f in D , quindi $F' = f$: allora anche f è olomorfa. \square

5.2 Esistenza di una primitiva globale

Abbiamo visto come l'olomorfia di una funzione f in un aperto Ω assicura l'annullarsi dell'integrale di f lungo le curve chiuse contenute in un cerchio di Ω , ed è di fatto ad essa equivalente (Teorema di Morera). Mostriamo ora che l'annullarsi di $\int_{\gamma} f dz$ per ogni curva chiusa in Ω implica l'esistenza di una primitiva (globale) in tutto Ω :

$$\forall \gamma \text{ chiusa in } \Omega \quad \int_{\gamma} f dz = 0 \quad \implies \quad f \text{ ammette (globalmente) una primitiva in } \Omega.$$

TEOREMA 5.3 *Sia Ω un aperto connesso di \mathbb{C} e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua tale che*

$$\int_{\gamma} f dz = 0 \quad \text{per ogni curva chiusa } \gamma \text{ in } \Omega.$$

Allora f ammette una primitiva in Ω .

Dimostrazione. Fissiamo un punto $a \in \Omega$ e, per ogni $z \in \Omega$, definiamo

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta,$$

dove γ_z è una curva che unisce a a z : per l'ipotesi di annullamento dell'integrale lungo le curve chiuse tale definizione è indipendente dal cammino scelto. Dimostriamo che F è una primitiva di f in Ω .

Fissiamo un punto $w = \alpha + i\beta \in \Omega$ e mostriamo che $F' = f$ in un intorno di w . Sia $\overline{D}_r(w)$ un cerchio chiuso contenuto in Ω e sia γ_w una curva che unisce a a w . Per ogni $z = x + iy \in D_r(w)$ consideriamo la curva

$$\gamma_z = \gamma_w \cdot \gamma_z^1, \quad \text{dove } \gamma_z^1 = [w, x + i\beta] \cdot [x + i\beta, z].$$

Allora

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f dz = F(w) + \int_{\gamma_z^1} f d\zeta.$$

La funzione $\phi(z) = \int_{\gamma_z^1} f d\zeta$ è la stessa utilizzata nella dimostrazione del Teorema di Cauchy per il cerchio: abbiamo dimostrato che $\phi'(z) = f(z)$, per cui $F'(z) = f(z)$. \square

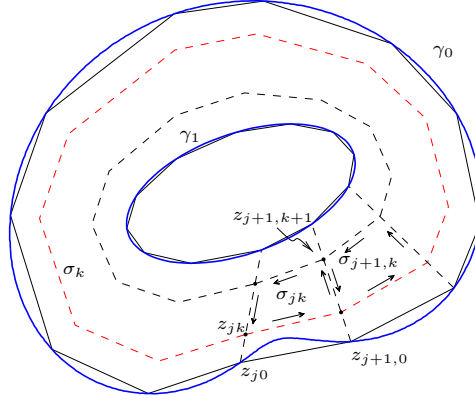


Figura 3 - Dimostrazione della forma omotopica del Teorema di Cauchy

5.3 Forma omotopica del Teorema di Cauchy

DEFINIZIONE 5.4 Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \Omega$ continue. Diciamo che γ_0 e γ_1 sono omotope (rispetto a Ω) se esiste $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ continua tale che

$$\gamma_0 = H(\cdot, 0), \quad \gamma_1 = H(\cdot, 1).$$

Quindi due curve sono omotope (rispetto a Ω) se “possono essere deformate con continuità una nell’altra senza uscire da Ω ”. Si dice che la funzione H è un’omotopia fra γ_0 e γ_1 .

Nel caso in cui γ_0 e γ_1 siano curve chiuse richiediamo che l’omotopia H sia tale che ogni curva $H(\cdot, s)$ sia anch’essa chiusa.

TEOREMA 5.5 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Siano γ_0 e γ_1 curve (C^1 -tratti) chiuse in Ω , omotope relativamente a Ω . Allora

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

Osserviamo esplicitamente che non si richiede che le curve $H(\cdot, s)$ siano C^1 -tratti.

Dimostrazione. Possiamo supporre (invarianza dell’integrale per riparametrizzazione) che γ_0 e γ_1 siano definite su uno stesso intervallo, che possiamo assumere essere $[0, 1]$. Allora esiste $H: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ continua e tale che

$$\begin{aligned} H(\cdot, 0) &= \gamma_0, & H(\cdot, 1) &= \gamma_1 \\ H(0, s) &= H(1, s) & \text{per ogni } s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Poiché $K := H([0, 1]^2)$ è un compatto di Ω , risulta $\varepsilon := \text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$; per l’uniforme continuità di H esiste $\delta > 0$ tale che, comunque presi $(t, s), (t', s') \in [0, 1]^2$, si ha

$$|(t, s) - (t', s')| < \delta \quad \Rightarrow \quad |H(t, s) - H(t', s')| < \varepsilon.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$z_{jk} = H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right). \quad j, k \in \mathbb{N}.$$

Consideriamo inoltre le spezzate chiuse

$$\begin{aligned} \sigma_{jk} &= [z_{jk}, z_{j+1,k}, z_{j+1,k+1}, z_{j,k+1}, z_{jk}] \\ \sigma_k &= [z_{0k}, z_{1k}, \dots, z_{n-1,k}, z_{nk}]. \end{aligned}$$

Poiché i vertici di ogni quadrato in cui abbiamo suddiviso $[0, 1]^2$ distano fra loro al più $\sqrt{2}/n$, se $n > \sqrt{2}/\delta$ allora i vertici della spezzata σ_{jk} sono tutti contenuti nel disco $D_\varepsilon(z_{jk})$, il quale, in quanto convesso, contiene tutta la spezzata σ_{jk} . Così pure, le curve γ_0 e γ_1 ristrette all'intervallo $[j/n, (j+1)/n]$ stanno nei dischi $D_\varepsilon(z_{j0})$ e $D_\varepsilon(z_{jn})$, rispettivamente. A loro volta i dischi $D_\varepsilon(z_{jk})$ sono contenuti in Ω ; pertanto il Teorema di Cauchy per il cerchio (Teorema 5.1) implica che

$$\int_{\sigma_{jk}} f dz = 0, \quad \int_{\eta} f dz = 0.$$

dove η è ciascuna delle curve chiuse formate da γ_0 ristretta a $[j/n, (j+1)/n]$ seguita dal segmento $[z_{j+1,0}, z_{j0}]$ (oppure γ_1 ristretta a $[j/n, (j+1)/n]$ seguita dal segmento $[z_{j+1,n}, z_{jn}]$). Dalla seconda di queste uguaglianze (considerata per la curva γ_0), otteniamo che l'integrale di f lungo il tratto di γ_0 fra z_{j0} e $z_{j+1,0}$ coincide con l'integrale sul segmento fra gli stessi punti. Ne segue che $\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\sigma_0} f dz$. In modo analogo si procede per la curva γ_1 . Quindi:

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\sigma_0} f dz, \quad \int_{\gamma_1} f dz = \int_{\sigma_n} f dz$$

A questo punto è sufficiente dimostrare che l'integrale sulla spezzata σ_k coincide con l'integrale su σ_{k+1} , qualunque sia $k = 0, \dots, n-1$.

Osserviamo che per ogni j le spezzate σ_{jk} e $\sigma_{j+1,k}$ presentano in comune il segmento di estremi i punti $z_{j+1,k}$ e $z_{j+1,k+1}$, percorso però in senso opposto (vedi Figura 3). Allora, tenendo conto dell'annullarsi dell'integrale su ogni σ_{jk} , abbiamo

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\sigma_{jk}} f dz = \int_{\sigma_k} f dz - \int_{\sigma_{k+1}} f dz,$$

da cui l'uguaglianza richiesta fra l'integrale su σ_k e σ_{k+1} . \square

Dal momento che in un aperto semplicemente connesso ogni curva chiusa è omotopa a una costante, dal risultato ora dimostrato ricaviamo subito il seguente fatto.

COROLLARIO 5.6 *Se Ω è un aperto semplicemente connesso e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ allora*

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

per ogni curva chiusa γ in Ω . In particolare f ammette primitiva in Ω .

Il Teorema 5.5 ammette una versione per curve non necessariamente chiuse, ma con gli stessi estremi. Con riferimento alla Definizione 5.4, diremo che le curve γ_0 e γ_1 , che presentino gli stessi punti iniziali e terminali, sono omotope mediante un'omotopia che fissa gli estremi se l'omotopia H è tale che

$$H(0, s) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \quad H(1, s) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$$

per ogni $s \in [0, 1]$.

COROLLARIO 5.7 *Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sia Ω un aperto di \mathbb{C} e siano $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \Omega$ curve aventi gli stessi punti iniziale e terminale. Se γ_0 e γ_1 sono omotope relativamente a Ω mediante un'omotopia che fissa gli estremi, allora*

$$\int_{\gamma_0} f \, dz = \int_{\gamma_1} f \, dz.$$

Dimostrazione. Supponiamo $[a, b] = [0, 1]$ e sia $H: [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ un'omotopia in Ω fra γ_0 e γ_1 che fissa gli estremi $z_0 = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ e $z_1 = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

È sufficiente dimostrare che è nullo l'integrale di f sulla curva $\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1}$. Indichiamo con $\eta: [0, 1] \rightarrow \Omega$ la curva chiusa

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma_0(3t) & \text{se } t \in [0, 1/3] \\ z_1 & \text{se } t \in [1/3, 2/3] \\ \gamma_1(3(1-t)) & \text{se } t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

ottenuta facendo seguire alla curva γ_0 la costante z_1 e poi la curva γ_1^{-1} , ciascuna riscalata su un terzo dell'intervallo $[0, 1]$.

La curva η è omotopa a $\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1}$ mediante l'omotopia

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \gamma_0((3-s)t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{3-s}] \\ z_1 & \text{se } t \in [\frac{1}{3-s}, \frac{2-s}{3-s}] \\ \gamma_1((3-s)(1-t)) & \text{se } t \in [\frac{2-s}{3-s}, 1]. \end{cases}$$

Si può poi verificare direttamente che la funzione

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} H(3t, 0) & \text{se } t \in [0, \frac{1-s}{3}] \\ H(1-s, \frac{3t-(1-s)}{1+2s}) & \text{se } t \in [\frac{1-s}{3}, \frac{2+s}{3}] \\ H(3(1-t), 1) & \text{se } t \in [\frac{2+s}{3}, 1] \end{cases}$$

dà un'omotopia fra η e la curva costante con valore z_0 . Pertanto $\gamma_0 \cdot \gamma_1^{-1}$ è omotopa ad una costante in Ω , per cui ha integrale nullo per il Teorema 5.5. \square

Il Teorema 5.5 permette di estendere facilmente risultati come la formula di Cauchy per un rettangolo (Teorema 4.4) ad altre geometrie. Ad esempio:

TEOREMA 5.8 (FORMULA DI CAUCHY PER IL CERCHIO) *Sia Ω un aperto di \mathbb{C} , sia \bar{D} un cerchio chiuso contenuto in Ω e sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora per ogni $z \in D$*

$$(5.1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Dimostrazione. Fissato $z \in D$, la funzione $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ è olomorfa in $\Omega \setminus \{z\}$. Sia R un rettangolo chiuso contenuto in D e contenente z al suo interno. Poiché ∂R e ∂D sono curve chiuse omotope relativamente a $\Omega \setminus \{z\}$, per il Teorema 5.5 risulta

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz = \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz.$$

Per quanto già dimostrato (formula di Cauchy per un rettangolo: Teorema 4.4) il primo membro vale $2\pi i f(z)$, da cui la tesi. \square

OSSERVAZIONE 5.9 Come appare chiaro dalla dimostrazione, nel Teorema 5.8 la curva ∂D può essere rimpiazzata da un qualunque “contorno” (triangolo, ecc.) per il quale si riesca a realizzare l’omotopia con il bordo di un rettangolo in $\Omega \setminus \{z\}$.

5.4 Formule integrali per le derivate

Da quanto dimostrato nel paragrafo precedente discendono alcuni risultati rilevanti sulla possibilità di esprimere le derivate di una funzione olomorfa tramite formule integrali come la formula di Cauchy del Teorema 5.8. Iniziamo con una precisazione sull’ampiezza del cerchio di convergenza in cui possiamo sviluppare in serie di potenze una funzione olomorfa.

TEOREMA 5.10 Sia Ω un aperto di \mathbb{C} e $a \in \Omega$. Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. La serie di Taylor di f relativa al punto $z = a$ converge nel più grande cerchio $D_r(a)$ contenuto in Ω .

Dimostrazione. Sia $r = \text{dist}(a, \partial\Omega)$: il cerchio $D_r(a)$ è il più grande cerchio di centro a contenuto in Ω . Fissiamo $0 < \varrho < r$. Per la formula di Cauchy per il cerchio

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

per ogni $z \in D_\varrho(a)$. A questo punto si sviluppi la funzione integranda in potenze di $z - a$ come nella dimostrazione del Teorema 4.5. Si ottiene:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad \text{per ogni } z \in D_\varrho(a),$$

con

$$(5.2) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad \text{con } 0 < \varrho < r = \text{dist}(a, \partial\Omega).$$

Concludiamo per l’arbitrarietà di ϱ . \square

Ricordando che il coefficiente c_n dello sviluppo di Taylor di f centrato nel punto $z = a$ è dato da $f^{(n)}(a)/n!$, la formula (5.2) dà:

$$(5.3) \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad \text{con } 0 < \varrho < r = \text{dist}(a, \partial\Omega).$$

Sia ora \overline{D} un disco chiuso contenuto in Ω e sia z un punto di D ; applichiamo la (5.3) al punto z relativamente ad un disco $D_\varrho(z)$ contenuto in D :

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varrho(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Per l'invarianza dell'integrale per omotopia, possiamo rimpiazzare $\partial D_\varrho(z)$ con ∂D . Abbiamo quindi il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 5.11 *Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e \overline{D} un disco chiuso contenuto in Ω . Allora, per ogni $z \in D$*

$$(5.4) \quad \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Questa generalizza la formula di Cauchy (5.1) (dalla quale si poteva anche ricavare direttamente per derivazione).

La forma integrale dei coefficienti dello sviluppo di Taylor di una funzione olomorfa permettono di ottenere rapidamente le seguenti stime.

PROPOSIZIONE 5.12 (DISUGUAGLIANZE DI CAUCHY) *Sia f una funzione olomorfa in un cerchio $D_r(a)$ e sia*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

lo sviluppo di Taylor di f in $D_r(a)$. Allora per ogni $0 < \varrho < r$

$$|c_n| \leq M(\varrho) \varrho^{-n}, \quad \text{per ogni } n \geq 0,$$

dove

$$M(\varrho) = \max_{|z-a| \leq \varrho} |f(z)|.$$

Dimostrazione. Dalla (5.2) segue:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} M(\varrho) \varrho^{-(n+1)} \text{lungh } \partial D_\varrho(a) = M(\varrho) \varrho^{-n}. \quad \square$$

OSSERVAZIONE 5.13 La stima sui coefficienti c_n si trasferisce ovviamente ad una stima per le derivate $f^{(n)}(a)$.

Conseguenze immediate delle soprascritte stime per i coefficienti dello sviluppo di Taylor sono il Teorema di Liouville e il Teorema fondamentale dell'Algebra.

6 Funzioni meromorfe e singolarità

Nei risultati che seguono la convergenza di una serie bilatera di funzioni

$$(6.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(z)$$

è intesa come convergenza delle serie

$$(6.2) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z), \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n(z)$$

(la seconda serie è intesa come $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-1}^{-N} f_n(z)$). Il valore della serie (6.1) è in tal caso la somma dei valori in (6.2). Anche la convergenza assoluta o uniforme è riferita a quella delle singole serie (6.2).

6.1 Sviluppo di Laurent

TEOREMA 6.1 (SVILUPPO DI LAURENT) *Siano $a \in \mathbb{C}$ e $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ e sia*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\}.$$

Esiste un'unica famiglia $(c_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ in \mathbb{C} tale che

$$(6.3) \quad f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m (z - a)^m \quad \text{per ogni } z \in \Omega.$$

La serie converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di Ω .

Vale inoltre la formula

$$(6.4) \quad c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz$$

per ogni $m \in \mathbb{Z}$, dove ρ è un qualunque valore compreso fra r_1 e r_2 .

OSSERVAZIONE 6.2 Lo sviluppo in serie di cui al teorema precedente dipende dal dominio Ω . Ad esempio se

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

risulta

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \quad \text{in } \Omega = \{z : |z| > 1\},$$

mentre

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots \quad \text{in } \Omega = \{z : 0 < |z| < 1\}.$$

DEFINIZIONE 6.3 *Sia f come nel Teorema 6.1. Lo sviluppo (6.3) è detto sviluppo in serie di Laurent della funzione f relativo all'insieme Ω . Nel caso in cui $\Omega = D_r^*(a)$ (dove $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$), si parla di sviluppo in serie di Laurent della funzione f relativo al punto a .*

Osserviamo che nel caso in cui Ω è della forma $D_r^*(a)$ lo sviluppo (6.3) non dipende dal raggio r a motivo della formula (6.4).

Dimostrazione. (del Teorema 6.1) Per semplicità supponiamo $a = 0$. Cominciamo con il ricavare una formula di rappresentazione per la funzione f mediante integrali su circonferenze concentriche. Fissiamo ϱ_1, ϱ_2 tali che $r_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < r_2$ e dimostriamo che

$$(6.5) \quad f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varrho_2} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varrho_1} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

per ogni w tale che $\varrho_1 < |w| < \varrho_2$.

Definiamo

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{se } z \in \Omega \setminus \{w\}; \\ f'(w) & \text{se } z = w. \end{cases}$$

La funzione g è olomorfa in Ω . Ciò segue dal fatto che lo sviluppo di Taylor di f in w dà:

$$f(z) - f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - w)^n,$$

da cui

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (z - w)^n,$$

con $c_1 = f'(w)$. Il secondo membro definisce una funzione olomorfa in un intorno di w che estende il primo membro con valore $f'(w)$.

Allora (omotopia)

$$\int_{|z|=\varrho_2} g(z) dz = \int_{|z|=\varrho_1} g(z) dz,$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_{|z|=\varrho_2} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \int_{|z|=\varrho_2} \frac{1}{z-w} dz \\ = \int_{|z|=\varrho_1} \frac{f(z)}{z-w} dz - f(w) \int_{|z|=\varrho_1} \frac{1}{z-w} dz. \end{aligned}$$

Utilizzando la formula di Cauchy per il cerchio (Teorema 5.8) (o svolgendo direttamente il calcolo), il secondo integrale a primo membro vale $2\pi i$. Invece, poiché la funzione $z \mapsto 1/(z-w)$ è olomorfa in un intorno di $\{|z| = \varrho_1\}$, il secondo integrale a secondo membro è nullo. Si ricava pertanto la (6.5).

Sviluppiamo ora la funzione integranda negli integrali della (6.5). Fissiamo w tale che $\varrho_1 < |w| < \varrho_2$. Se $|z| = \varrho_2$ allora $|w/z| < 1$, per cui

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{w}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}}.$$

Quindi

$$\int_{|z|=\varrho_2} \frac{f(z)}{z-w} dz = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \int_{|z|=\varrho_2} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

e anche

$$\int_{|z|=\varrho_2} \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n,$$

avendo posto

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varrho_2} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad (n \geq 0).$$

In modo analogo calcoliamo il secondo integrale nella (6.5). Se $|z| = \varrho_1$ allora $|z/w| < 1$, per cui

$$\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = -\frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{|z|=\varrho_1} \frac{f(z)}{z-w} dz &= -\sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1} \int_{|z|=\varrho_1} f(z) z^n dz \\ &= -\sum_{k=-\infty}^0 w^{k-1} \int_{|z|=\varrho_1} f(z) z^{-k} dz \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{-1} w^m \int_{|z|=\varrho_1} f(z) z^{-m-1} dz \end{aligned}$$

Se poniamo

$$c_m = \int_{|z|=\varrho_1} \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz \quad (m < 0),$$

allora

$$\int_{|z|=\varrho_1} \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi i \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m w^m.$$

Notiamo che gli integrali che definiscono c_m , sia per $m \geq 0$ che per $m < 0$, possono essere estesi a qualunque circonferenza di centro l'origine e raggio ϱ con $r_1 < \varrho < r_2$ si tratta infatti di curva omotope relativamente all'insieme di olomorfia della funzione integranda.

Prima di dimostrare l'unicità dello sviluppo (6.3) osserviamo come la convergenza di tale serie ne implichi anche la convergenza assoluta uniforme sui compatti di Ω . Infatti le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^{-n}$$

convergono per ogni z con $|z| = \varrho \in (r_1, r_2)$; pertanto, fissato $r_1 < \varrho < r_2$ sono convergenti le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varrho^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (1/\varrho)^n.$$

Per l'arbitrarietà di ϱ , tenendo conto delle proprietà delle serie di potenze, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di D_{r_2} , mentre

$$(6.6) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (1/w)^n$$

converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \overline{D_{r_1}}$. Ne segue la convergenza assoluta uniforme della serie (6.3) sui compatti di Ω .

L'uniforme convergenza ora dimostrata permette di integrare per serie nell'espressione che definisce c_m :

$$\int_{|z|=\varrho} \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{|z|=\varrho} \frac{z^k}{z^{m+1}} dz;$$

l'unico integrale non nullo è quello con $k = m$, che vale $2\pi i$. Otteniamo pertanto necessariamente la formula (6.4) per c_m . \square

Sia f una funzione olomorfa in $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$. Come dimostrato in merito alla discussione della convergenza della serie (6.6), se

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m (z-a)^m$$

è lo sviluppo di Laurent di f relativo al punto a allora la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n,$$

ha raggio di convergenza ∞ . Pertanto definisce una funzione $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Allora

$$(6.7) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} 1/(z-a)^n = \phi(1/(z-a))$$

definisce una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Riassumendo:

PROPOSIZIONE 6.4 *Sia f una funzione olomorfa in $D_r^*(a) = D_r(a) \setminus \{a\}$. Se $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m (z-a)^m$ è lo sviluppo di Laurent di f relativo al punto a allora la serie*

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} c_m (z-a)^m,$$

che converge assolutamente in modo uniforme sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, definisce una funzione olomorfa $g: \mathbb{C} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ detta parte principale di f in a .

PROPOSIZIONE 6.5 *Sia f come sopra. La parte principale g di f in a è l'unica funzione g tale che*

- a) $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$ e $g(z) \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$;
- b) $f - g$ è olomorfa in a .

Dimostrazione. La funzione ϕ di cui alla (6.7) si annulla per $z = 0$; pertanto $g(z) = \phi(1/(z-a)) \rightarrow 0$ se $|z| \rightarrow +\infty$. Quindi vale (a). Inoltre

$$f(z) - g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m,$$

per cui $f - g$ è olomorfa in $z = a$ e vale (b).

Viceversa, se g_1, g_2 sono due funzioni entrambe soddisfacenti le condizioni (a) e (b), allora $g_1 - g_2$ è una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ che è anche olomorfa in $z = a$, poiché si può esprimere come somma di funzioni olomorfe in tale punto: $g_1 - g_2 = (g_1 - f) + (f - g_2)$. Quindi $g_1 - g_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$; inoltre $g_1(z) - g_2(z) \rightarrow 0$ per $|z| \rightarrow \infty$. Per il Teorema di Liouville la funzione $g_1 - g_2$ è costante; tale costante deve essere nulla poiché sia g_1 che g_2 sono infinitesime per $|z| \rightarrow \infty$. \square

Nel calcolo dell'integrale di una funzione f lungo una curva chiusa che gira attorno a una sua singolarità $z = a$, l'unico termine dello sviluppo di Laurent relativo ad a che dà un contributo non nullo è $c_{-1}/(z-a)$, poiché tutti gli altri ammettono primitiva. Quest'osservazione giustifica la seguente definizione.

DEFINIZIONE 6.6 *Il coefficiente c_{-1} dello sviluppo in serie di Laurent di una funzione relativo a un punto $z = a$ è detto residuo della funzione f in a e indicato con $\text{Res}(f, a)$.*

6.2 Funzioni meromorfe. Singolarità

DEFINIZIONE 6.7 *Sia Ω un aperto di \mathbb{C} ed $E \subseteq \mathbb{C}$ un insieme discreto (cioè un insieme chiuso e per il quale ogni punto è isolato) contenuto in Ω . Una funzione $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$ è detta meromorfa in Ω se per ogni punto $a \in E$ esiste $r > 0$ e due funzioni $g, h \in \mathcal{H}(D_r(a))$ tali che h non è identicamente nulla e*

$$h \cdot f = g \quad \text{in } D_r(a) \setminus E.$$

Sia

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

lo sviluppo di Taylor di h relativo al punto a . Poiché h non è identicamente nulla esiste $N = \min\{n \geq 0 : a_n \neq 0\}$. Allora

$$h(z) = (z-a)^N \sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n} (z-a)^n =: (z-a)^N \phi(z).$$

Poiché $\phi(a) = a_N \neq 0$, esiste un intorno V di a nel quale $\phi \neq 0$, per cui in tale intorno, escluso il punto a , risulta:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^N \phi(z)}.$$

Pertanto la condizione posta alla funzione f , relativamente al punto a , per essere meromorfa si può esprimere dicendo che f può essere espressa in un intorno di a come quoziente g/h di due funzioni olomorfe, di cui h si annulla al più in a .

Inoltre, dall'espressione precedente, se

$$\frac{g(z)}{\phi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

è lo sviluppo di Taylor di g/ϕ relativo al punto a , allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^{n-N} = \sum_{m=-N}^{\infty} b_{m+N}(z-a)^m,$$

cioè f ammette attorno al punto a lo sviluppo

$$f(z) = \sum_{m=-N}^{\infty} c_m(z-a)^m.$$

Viceversa, se supponiamo che f sia così rappresentabile, allora

$$(z-a)^N f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-N}(z-a)^n =: g(z),$$

con g olomorfa in un intorno di a . Pertanto f soddisfa la Definizione 6.7. Abbiamo così dimostrato il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 6.8 Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ e sia

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

lo sviluppo di Laurent di f in a . Allora f è meromorfa in $D_r(a)$ se e solo se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$c_n = 0 \quad \text{per ogni } n < -N.$$

Analizziamo ora il comportamento di f nei punti singolari. Premettiamo:

TEOREMA 6.9 (DI ESTENSIONE DI RIEMANN) Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$. Supponiamo che

$$(6.8) \quad \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0.$$

Allora esiste $\tilde{f} \in \mathcal{H}(D_r(a))$ che estende f .

OSSERVAZIONE 6.10 Alla luce di questo risultato, per una funzione olomorfa in $D_r^*(a)$ la condizione (6.8) equivale alla richiesta che f sia limitata in un intorno del punto $z = a$. Infatti, se f è limitata in un intorno di a allora chiaramente vale la (6.8). Viceversa, il teorema garantisce l'esistenza di una funzione olomorfa \tilde{f} che estende f in $z = a$: allora \tilde{f} , e quindi f , è limitata in un intorno di a .

Dimostrazione. (del Teorema 6.9). Per semplicità poniamo $a = 0$. Sappiamo che

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad (0 < \varrho < r).$$

Sia $M(\varrho) = \max_{|z|=\varrho} |f(z)|$. Per ipotesi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\varrho_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall \varrho < \varrho_\varepsilon \quad \forall z \quad (|z| < \varrho \Rightarrow |z||f(z)| < \varepsilon),$$

per cui

$$\forall \varrho < \varrho_\varepsilon \quad \forall z \quad (|z| = \varrho \Rightarrow \varrho|f(z)| < \varepsilon).$$

Ne segue che

$$(6.9) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho M(\varrho) = 0.$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \varrho \max_{|\zeta|=\varrho} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}} = \varrho^{-n} M(\varrho).$$

Tale stima vale per ogni ϱ sufficientemente piccolo. Per i valori $n \leq -1$ risulta $\varrho^{-n} M(\varrho) \rightarrow 0$ per la (6.9). Pertanto $c_n = 0$ per $n \leq -1$, quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{per } 0 < |z| < r.$$

Il secondo membro definisce una funzione olomorfa in tutto un intorno di $a = 0$ per cui rimane dimostrata l'estendibilità di f in modo olomorfo anche nel punto $z = 0$. \square

DEFINIZIONE 6.11 Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Si dice che f ha una singolarità eliminabile in $z = a$ se esiste $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $\tilde{f} = f$ in Ω .

Se $z = a$ è una singolarità eliminabile scriveremo semplicemente $f(a)$ per il valore in a dell'estensione olomorfa di f .

Da quanto precede otteniamo subito che:

COROLLARIO 6.12 Una funzione f ha una singolarità eliminabile in $z = a$ se e solo se f è limitata in un intorno di a .

Il seguente risultato analizza i tipi di singolarità di una funzione meromorfa.

TEOREMA 6.13 Sia Ω un aperto di \mathbb{C} e sia E un sottoinsieme discreto di Ω . Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$. Allora f è meromorfa in Ω se e solo se per ogni $a \in E$:

- esiste un intorno $U \subseteq \Omega$, con $U \cap E = \{a\}$, tale che $f|_{U \setminus \{a\}}$ è limitata (quindi a è una singolarità eliminabile),

oppure

- $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$.

Dimostrazione. Sia f meromorfa in Ω , con E insieme dei punti di singolarità. Sia $U = D_r(a) \subset\subset \Omega$ un cerchio contenente solo il punto a di E . Per la Proposizione 6.8 lo sviluppo di Laurent di f relativo al punto $z = a$ è della forma

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n(z-a)^n = (z-a)^{-N} \sum_{m=0}^{+\infty} c_{m-N}(z-a)^m =: (z-a)^{-N}g(z),$$

con $c_{-N} \neq 0$. La funzione g così definita è olomorfa in U e non si annulla in a . Pertanto:

- se $N \leq 0$ allora f è limitata in U ;
- se $N > 0$ allora $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow a} \frac{|g(z)|}{|z-a|^N} = +\infty$.

Viceversa, se f è limitata in un intorno U di a , per il Teorema di estensione di Riemann f può essere estesa in $z = a$ a una funzione olomorfa g , per cui $1 \cdot f = g$ in $U \setminus \{a\}$: è soddisfatta la condizione di funzione meromorfa (con $h \equiv 1$). Se invece $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$ allora esiste un intorno U di a tale che $|f(z)| \geq 1$ per $z \in U \setminus \{a\}$. Allora la funzione $1/f$ è limitata in $U \setminus \{a\}$ per cui si estende in $z = a$ a una funzione olomorfa h ; allora $h \cdot f = 1$ in $U \setminus \{a\}$: ancora è soddisfatta la condizione di funzione meromorfa (con $g \equiv 1$). \square

DEFINIZIONE 6.14 *Sia f una funzione olomorfa in un insieme $D_r^*(a)$. Diciamo che a è un polo di f se $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$.*

DEFINIZIONE 6.15 *Sia f una funzione olomorfa in un insieme $D_r^*(a)$ non identicamente nulla. Supponiamo che f sia meromorfa. Diciamo ordine di f in $z = a$ il numero intero*

$$\text{ord}_a(f) = \min\{n \in \mathbb{Z} : c_n \neq 0\}$$

(la definizione è ben data per la Proposizione 6.8). Se $f \equiv 0$ diciamo che $\text{ord}_a(f) = \infty$.

Osserviamo che:

- il punto $z = a$ è un polo se e solo se $\text{ord}_a(f) < 0$. In tal caso si dice anche che a è un *polo di ordine* $-\text{ord}_a(f)$. Se $\text{ord}_a(f) = -1$ si parla anche di *polo semplice*, mentre se $\text{ord}_a(f) = -2$ si parla di *polo doppio*, ...
- la funzione f è olomorfa in $z = a$ e $f(a) = 0$ se e solo se $\text{ord}_a(f) > 0$. In tal caso si dice anche che f ha uno zero di ordine $\text{ord}_a(f)$ in $z = a$. Si parla di *zero semplice (doppio, ...)* se $\text{ord}_a(f) = 1, 2, \dots$

DEFINIZIONE 6.16 *Sia f una funzione olomorfa in un insieme $D_r^*(a)$. Si dice che f ha una singolarità essenziale in $z = a$ se nello sviluppo di Laurent di f relativo a $z = a$ vi sono infiniti indici $n < 0$ per i quali $c_n \neq 0$.*

In base alla Proposizione 6.8, $z = a$ è una singolarità essenziale se e solo se f non è meromorfa in $D_r(a)$ per ogni $r > 0$.

TEOREMA 6.17 (CASORATI-WEIERSTRASS) *Sia $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ e sia $z = a$ una singolarità essenziale. Allora l'insieme immagine $f(D_r^*(a))$ è denso in \mathbb{C} .*

Dimostrazione. Se l'insieme $f(D_r^*(a))$ non fosse denso in \mathbb{C} esisterebbe $c \in \mathbb{C}$ e $\delta > 0$ tali che

$$f(D_r^*(a)) \cap D_\delta(c) = \emptyset.$$

Allora $g := 1/(f - c)$ sarebbe olomorfa in $D_r^*(a)$ e $|g| \leq 1/\delta$: per il Teorema di estensione di Riemann esiste $\tilde{g} \in \mathcal{H}(D_r(a))$ che estende g . Allora

$$\tilde{g} \cdot (f - c) = 1 \quad \text{su } D_r^*(a).$$

Pertanto $f - c$, e quindi f , sarebbe meromorfa in $D_r(a)$, contro quanto assunto. \square

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~

Sia f una funzione olomorfa all'esterno di un disco $D_r(a)$. Allora la funzione $\tilde{f}(z) = f(1/z)$ è olomorfa in $D_{1/r}(0)$; come tale possiamo studiarne il tipo di singolarità che presenta in $z = 0$. Diremo che f ha una singolarità eliminabile, un polo o una singolarità essenziale in $z = \infty$ se tale è la singolarità di \tilde{f} in $z = 0$.

Sia ora E un insieme discreto (in \mathbb{C}) *limitato*. In particolare E deve avere un numero finito di elementi; infatti, se così non fosse, per compattezza esisterebbe una sottosuccessione convergente: il limite non sarebbe isolato se fosse un punto di E , mentre porterebbe ad avere E non chiuso se non appartenesse a E . Sia f olomorfa in $\mathbb{C} \setminus E$. Diciamo che f è *meromorfa nel piano complesso esteso* se è meromorfa in \mathbb{C} e se $z = \infty$ è una singolarità eliminabile o un polo.

TEOREMA 6.18 *Le funzioni meromorfe nel piano complesso esteso sono le funzioni razionali.*

Dimostrazione. Sia $E = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$. Indichiamo con g_j la parte principale dello sviluppo di Laurent di f relativamente al punto a_j (per $j = 1, \dots, q$). Posto $\tilde{f}(z) = f(1/z)$, indichiamo con \tilde{g}_∞ la parte principale dello sviluppo di Laurent di \tilde{f} nel punto $z = 0$ e poniamo $g_\infty(z) = \tilde{g}_\infty(1/z)$; si noti che g_∞ è un polinomio. Consideriamo ora la funzione

$$h = f - (g_1 + g_2 + \dots + g_q + g_\infty).$$

La funzione h è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus E$; inoltre, per ogni $j = 1, \dots, q$ possiamo esprimere h come somma della funzione $f - g_j$, che è olomorfa in un intorno di a_j (si ricordi la Proposizione 6.5), e della funzione $-g_\infty - \sum_{k \neq j} g_k$ anch'essa olomorfa in un intorno di a_j . Pertanto h è olomorfa in tutto \mathbb{C} . Inoltre, per $|z| \rightarrow +\infty$, ogni g_j è infinitesima. Del resto la funzione $\tilde{f} - \tilde{g}_\infty$ è olomorfa, per cui limitata, in un intorno di $z = 0$; ne segue che $f - g_\infty$ è limitata in un intorno di $z = \infty$. Allora h è costante in quanto olomorfa su \mathbb{C} e limitata.

Ora è sufficiente osservare che $f = g_1 + g_2 + \dots + g_q + g_\infty + h$ è una funzione razionale in quanto tale è ogni g_j , mentre g_∞ è un polinomio. \square

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~

6.3 Calcolo dei residui

Nel calcolo del residuo di una funzione in un punto possono essere utili le seguenti osservazioni.

PROPOSIZIONE 6.19 *Sia f una funzione olomorfa in un disco $D_r^*(a)$ privato del centro. Allora a è un polo semplice se e solo se*

$$(6.10) \quad \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = l \neq 0.$$

In tali ipotesi l è il residuo di f nel punto a .

Dimostrazione. Se a è un polo semplice allora

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + h(z), \quad \text{con } c_{-1} \neq 0 \text{ e } h \in \mathcal{H}(D_r(a)).$$

Da questa segue subito (6.10). Viceversa, se vale (6.10) allora

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^2 f(z) = 0,$$

per cui, in base al Teorema di estensione di Riemann, esiste una funzione $h \in \mathcal{H}(D_r(a))$ tale che

$$(z - a)f(z) = h(z) \quad \text{per ogni } z \in D^*(a, r).$$

Poichè risulta $h(a) = \lim_{z \rightarrow a} h(z) = l \neq 0$, se $\sum_n c_n (z - a)^n$ è lo sviluppo di Taylor di g di centro a , abbiamo:

$$f(z) = \frac{c_0}{z - a} + c_1 + c_2(z - a) + c_3(z - a)^2 + \dots, \quad \text{con } c_0 = h(a) = l \neq 0.$$

Quindi a è un polo semplice e il residuo di f in a è l . \square

ESEMPIO. $z/(z^2 + 1)$, $a = i$.

Con un ragionamento perfettamente analogo si dimostra la seguente generalizzazione a poli di ordine superiore.

PROPOSIZIONE 6.20 *Sia f una funzione olomorfa in un disco $D^*(a, r)$ privato del centro. Allora a è un polo di ordine k se e solo se*

$$(6.11) \quad \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = l \neq 0.$$

In tali ipotesi il residuo di f in a è dato da

$$\text{Res}(f, a) = \frac{\phi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!},$$

dove $\phi(z) = (z - a)^k f(z)$.

ESEMPIO. $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$, con $a = 1$, $f(z) = \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$, con $a = i$.

Un altro risultato spesso utile nel calcolo dei residui è il seguente.

PROPOSIZIONE 6.21 *Siano f, g olomorfe in un intorno di un punto $z = a$. Supponiamo che $g(a) \neq 0$ e $h(a) = 0$, con $h'(a) \neq 0$. Allora $f = g/h$ ha un polo semplice in $z = a$ e*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Dimostrazione. Nelle ipotesi poste la funzione h può essere scritta come $(z-a)\tilde{h}(z)$, con \tilde{h} olomorfa e tale che $\tilde{h}(a) = h'(a) \neq 0$. Allora la funzione g/\tilde{h} è olomorfa in $z = a$: se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ è il suo sviluppo di Taylor nel punto a allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n-1}.$$

Per unicità questo è lo sviluppo di Laurent, per cui $\operatorname{Res}(f, a) = c_0 = g(a)/h'(a)$.

Alternativamente, possiamo dimostrare il risultato osservando che $(z-a)f(z) = g(z)/\tilde{h}(z) \rightarrow g(a)/\tilde{h}(a) = g(a)/h'(a)$ per $z \rightarrow a$: si utilizzi ora la Proposizione 6.19. \square

ESEMPIO. $f(z) = 1/(1+z^{2n})$.
 $(e^z - 1)/z^2$

7 Logaritmo in campo complesso. Indice di avvolgimento

7.1 Rami del logaritmo

Poiché la funzione esponenziale $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ non è una funzione iniettiva non possiamo avere un'inversa globale. L'insieme delle controimmagini di un numero $z = re^{i\vartheta}$ con $r \neq 0$ tramite l'esponenziale è dato dai valori

$$\log r + i(\vartheta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

dove \log indica l'usuale logaritmo dei numeri reali positivi. A volte ci si riferisce con il termine *logaritmo principale* alla funzione

$$\log: z = re^{i\vartheta} \mapsto \log r + i\vartheta : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}, \quad (|\vartheta| < \pi),$$

cioè

$$(7.1) \quad \log z = \log r + i\vartheta, \quad \text{se } z = re^{i\vartheta} \text{ con } |\vartheta| < \pi.$$

Una domanda naturale è se tale funzione è olomorfa o, più in generale, se dato un aperto Ω di \mathbb{C} si possa definire una funzione olomorfa $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ che sia un'inversa della funzione esponenziale. A tal fine conviene analizzare le primitive della funzione $1/z$. Infatti, se Ω è un aperto di \mathbb{C} non contenente lo zero, la

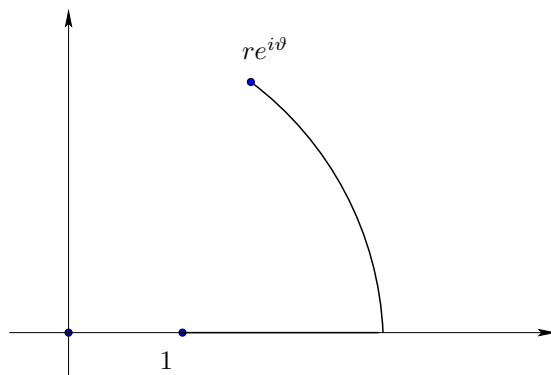


Figura 4 - Curva per il calcolo della determinazione principale del logaritmo.

funzione $1/z$ è olomorfa in Ω , per cui se questo è semplicemente connesso ha primitiva e abbiamo

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0 \quad \text{per ogni curva chiusa } \gamma \text{ in } \Omega.$$

Abbiamo dimostrato (vedi Teorema 5.3) che in queste ipotesi, posto

$$(7.2) \quad \phi(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

dove γ_z è una qualunque curva in Ω che unisce un fissato punto z_0 a z , risulta $\phi'(z) = 1/z$. Pertanto

$$\frac{d}{dz}(ze^{-\phi(z)}) = e^{-\phi(z)} - z\phi'(z)e^{-\phi(z)} = 0.$$

Ne segue che $ze^{-\phi(z)}$ è una costante non nulla: detta e^c tale costante (si scelga una qualunque controimmagine di c tramite l'esponenziale), abbiamo:

$$e^{\phi(z)+c} = z,$$

quindi $\phi + c$ è un'inversa di $z \mapsto e^z$ su Ω . Tale inversa è definita a meno di un multiplo intero di $2\pi i$. Infatti, se g_1 e g_2 sono due inverse di e^z su Ω , risulta:

$$e^g = 1, \quad \text{con } g = g_1 - g_2.$$

Quindi $g'e^g = 0$, da cui $g' = 0$ e quindi $g = c$ con c costante. Poiché $e^c = 1$, deve essere $c = 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Ad esempio, sia $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Calcoliamo l'integrale in (7.2) assumendo come z_0 il punto 1. Utilizziamo la curva γ_z in Figura 4. Risulta:

$$\int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \int_1^r \frac{1}{\varrho} d\varrho + \int_0^{\vartheta} e^{-it} i e^{it} dt = \log r + i\vartheta.$$

Ne segue, in particolare, che la funzione logaritmo di cui alla (7.1) è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Più in generale vale il seguente risultato.

TEOREMA 7.1 *Sia Ω un aperto semplicemente connesso e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una funzione mai nulla. Allora esiste $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $e^g = f$ in Ω . La funzione g è univocamente individuata a meno di una costante additiva della forma $2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$, e risulta $g' = f'/f$.*

Dimostrazione. La funzione f'/f è olomorfa nell'aperto semplicemente connesso Ω , per cui ammette una primitiva ϕ . Risulta:

$$\frac{d}{dz}(fe^{-\phi}) = f'e^{-\phi} - f\phi'e^{-\phi(z)} = 0.$$

Allora $fe^{-\phi}$ è una costante non nulla: detta e^c tale costante, risulta $e^{\phi+c} = f$, quindi la funzione $g = \phi + c$ soddisfa la condizione enunciata. Come nel caso $f(z) \equiv z$ si dimostra l'unicità a meno di una costante additiva della forma $2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$. \square

DEFINIZIONE 7.2 *Ogni funzione g di cui al teorema precedente è detta una determinazione o un ramo del logaritmo di f in Ω .*

COROLLARIO 7.3 *Sia Ω un aperto semplicemente connesso e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una funzione mai nulla. Se γ è una curva in Ω di punto iniziale z_0 e punto terminale z_1 allora*

$$\exp \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}.$$

Dimostrazione. Sia g una determinazione del logaritmo di f in Ω . Allora g è primitiva di f'/f . Quindi

$$\int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = g(z_1) - g(z_0),$$

per cui

$$\exp \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = e^{g(z_1)} / e^{g(z_0)} = f(z_1) / f(z_0),$$

poiché $e^g = f$. \square

COROLLARIO 7.4 *Il risultato di cui al corollario precedente continua a sussistere anche se Ω non è semplicemente connesso.*

Osserviamo quindi esplicitamente che $\int_{\gamma} f'/f dz$ non è in generale indipendente dal cammino che unisce gli estremi di γ , ma $\exp \int_{\gamma} f'/f dz$ invece ne è indipendente.

Dimostrazione. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva di punto iniziale z_0 e punto terminale z_1 . È possibile individuare un numero finito di punti $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e n cerchi D_0, D_1, \dots, D_{n-1} in Ω tali che

$$\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]} \subseteq D_k \quad \text{per ogni } k = 0, \dots, n-1.$$

Poiché l'integrale su γ si spezza nella somma degli integrali sui singoli tratti $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$, abbiamo:

$$\exp\left(\int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\int_{\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}} \frac{f'}{f} dz\right).$$

Teniamo ora conto del fatto che per ciascun prodotto possiamo applicare il risultato del Corollario 7.3, per cui

$$\exp\left(\int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{f(\gamma(t_{k+1}))}{f(\gamma(t_k))} = \frac{f(z_1)}{f(z_0)}. \quad \square$$

COROLLARIO 7.5 *Sia γ una curva chiusa in Ω e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una funzione mai nulla su γ . Allora*

$$\int_{\gamma} f'/f \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Mediante il logaritmo è possibile definire, ad esempio, anche le determinazioni olomorfe della radice n -ima per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se f è una funzione olomorfa e mai nulla su un aperto semplicemente connesso Ω e g è una determinazione di $\log f$, allora $\exp(g/n)$ è una determinazione della radice n -ima di f . Infatti si tratta di una funzione olomorfa e

$$[\exp(g/n)]^n = e^g = f \quad \text{in } \Omega.$$

7.2 Indice di avvolgimento

DEFINIZIONE 7.6 *Sia γ una curva chiusa in \mathbb{C} e sia $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Diciamo indice di avvolgimento di γ rispetto al punto a il valore*

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz.$$

Alcune proprietà di facile verifica:

- L'indice di avvolgimento è un numero intero. Infatti per il Corollario 7.4

$$\exp\left(\int_{\gamma} f'/f dz\right) = 1, \quad \text{con } f(z) = z - a,$$

per cui $\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

- la funzione $z \mapsto n(\gamma, z)$ è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Ciò discende dalla continuità di $n(\gamma, \cdot)$ e dal fatto che i valori assunti sono discreti.

- Sull'unica componente connessa illimitata U di $\mathbb{C} \setminus \gamma$ la funzione $n(\gamma, \cdot)$ è nulla. Infatti se D_R è un disco contenente la curva γ , detto a un punto che non stia in D_R allora $a \in U$ e la funzione $z \mapsto 1/(z - a)$ è olomorfa in D_R , per cui ha integrale nullo su γ . Pertanto nei punti di U l'indice di avvolgimento vale $n(\gamma, a) = 0$.

8 Teorema dei residui. Applicazione al calcolo di integrali

8.1 Teorema dei residui

TEOREMA 8.1 *Sia Ω un aperto di \mathbb{C} e sia E un sottoinsieme discreto di Ω (cioè un sottoinsieme chiuso e tale che tutti i suoi punti siano isolati). Sia γ una curva chiusa in Ω che sia omotopa a una costante come curva in Ω .*

Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$. Allora l'insieme $\{a \in E : n(\gamma, a) \neq 0\}$ è finito e

$$\int_{\gamma} f \, dz = 2\pi i \sum_{a \in E} \text{Res}(f, a) n(\gamma, a).$$

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ e $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ un'omotopia di γ in una costante. Sia $K = H([a, b] \times [0, 1])$; allora K è compatto e contiene solo un numero finito di elementi di E (altrimenti esisterebbe una successione di elementi di E convergente a un punto di E che pertanto non risulterebbe isolato). Se a è un punto di E non in K allora la curva γ è omotopa a una costante in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, per cui su γ la funzione olomorfa $1/(z - a)$ ha integrale nullo, cioè $n(\gamma, a) = 0$. Ne segue che $\{a \in E : n(\gamma, a) \neq 0\}$ è contenuto in K , per cui è un insieme finito. Poniamo $E \cap K = \{a_1, \dots, a_q\}$. Per ogni $j = 1, \dots, q$ consideriamo lo sviluppo di Laurent di f relativo al punto a_j :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^j (z - a_j)^n.$$

Indichiamo con g_j la parte principale di f nel punto a_j , cioè

$$g_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^j (z - a_j)^n.$$

Sappiamo che $g_j \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_j\})$ e che $f - g_j$ è olomorfa in un intorno di a_j . Allora la funzione

$$f - g_1 - g_2 - \dots - g_q$$

è olomorfa in $(\Omega \setminus E) \cup \{a_1, \dots, a_q\}$, quindi in particolare in un intorno di K . In tale intorno γ è omotopa a una costante, per cui

$$\int_{\gamma} (f - \sum_j g_j) \, dz = 0, \quad \text{cioè} \quad \int_{\gamma} f \, dz = \int_{\gamma} \sum_j g_j \, dz.$$

Poichè la serie che definisce g_j è uniformemente convergente su γ , abbiamo

$$\int_{\gamma} g_j \, dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^j \int_{\gamma} (z - a_j)^n \, dz.$$

Teniamo ora conto che $(z - a_j)^n$ è dotata di primitiva se $n \neq -1$, per cui il corrispondente integrale su γ è nullo. Allora

$$\int_{\gamma} g_j dz = c_{-1}^j \int_{\gamma} \frac{1}{z - a_j} dz = \text{Res}(f, a_j) 2\pi i n(\gamma, a_j),$$

da cui quanto volevasi dimostrare. \square

8.2 Calcolo di integrali mediante il teorema dei residui

1. Integrali trigonometrici

Consideriamo integrali della forma

$$(8.1) \quad \int_0^{2\pi} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta,$$

dove R è una funzione razionale (quoziente di polinomi):

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

con P e Q polinomi in x, y , con la condizione che

$$Q(\cos \vartheta, \sin \vartheta) \neq 0 \quad \text{per ogni } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Gli integrali della forma (8.1) possono essere espressi in modo naturale mediante un integrale sulla circonferenza unitaria. Notiamo che se $|z| = 1$ allora $z = e^{i\vartheta}$, per cui

$$\cos \vartheta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin \vartheta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Definita la funzione

$$(8.2) \quad f(z) = R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \frac{1}{z},$$

calcoliamo:

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) \frac{1}{e^{i\vartheta}} i e^{i\vartheta} d\vartheta = i \int_0^{2\pi} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta.$$

Allora, applicando il Teorema dei residui:

$$(8.3) \quad \int_0^{2\pi} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta = 2\pi \sum_{|a|<1} \text{Res}(f, a).$$

OSSERVAZIONE 8.2 *Formalmente la posizione $z = e^{i\vartheta}$ dà*

$$dz = i e^{i\vartheta} d\vartheta = iz d\vartheta.$$

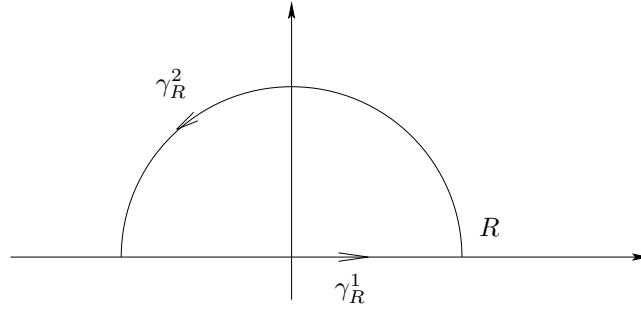


Figura 5 - Circuito per il calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

ESEMPIO. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+a^2-2a\cos\vartheta)} d\vartheta, \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+\sin^2\vartheta)} d\vartheta$
 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\vartheta)} \cos(4\vartheta) d\vartheta$: si considera la parte reale di $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\vartheta)} e^{4i\vartheta} d\vartheta$

2. Integrali della forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Sia f una funzione olomorfa, con l'eccezione di un numero finito di singolarità a_1, a_2, \dots, a_q , su un aperto contenente $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$. Supponiamo che nessuno di tali punti stia sull'asse reale.

PROPOSIZIONE 8.3 *Esista $p > 1$ tale che*

$$(8.4) \quad \limsup_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ z \in H}} |f(z)| |z|^p < +\infty.$$

Allora $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ è convergente e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, a_k).$$

Dimostrazione. La condizione (8.4) assicura l'integrabilità di f su \mathbb{R} (vedi (11.7)).

Fissato $R > 0$ consideriamo la curva $\gamma_R = \gamma_R^1 \cdot \gamma_R^2$ indicata in Figura 5. Abbiamo

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\gamma_R^1} f(z) dz + \int_{\gamma_R^2} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R^2} f(z) dz$$

Per R sufficientemente grande il circuito γ_R include tutte le singolarità di f , per cui l'integrale a primo membro vale

$$2\pi i \sum_k \text{Res}(f, a_k)$$

per il Teorema dei residui. Poiché f è integrabile su \mathbb{R} il primo dei due integrali a secondo membro converge a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Rimane pertanto da dimostrare

che l'integrale su γ_R^2 converge a zero. Per ipotesi esistono $M, R_M > 0$ tali che

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p} \quad \text{per } |z| \geq R_M.$$

Allora, se $R > R_M$

$$\left| \int_{\gamma_R^2} f \, dz \right| \leq \frac{M}{R^p} \pi R = \frac{M\pi}{R^{p-1}} \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty. \quad \square$$

OSSERVAZIONE 8.4 Le ipotesi sono soddisfatte, in particolare, se $f(z) = P(z)/Q(z)$ e $\deg Q \geq \deg P + 2$.

ESEMPIO. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} \, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} \, dx = \frac{\pi}{2n \sin(\pi/2n)}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} \, dx.$$

3. Integrali della forma $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) \, dx$

Sia f una funzione assolutamente integrabile su \mathbb{R} . Allora risulta ben definita su \mathbb{R} la funzione

$$(8.5) \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) \, dx.$$

La funzione f è detta *trasformata di Fourier* di f . Fra le proprietà rilevanti che motivano la definizione di \hat{f} vi è la seguente. Supponiamo che $f \in C^1(\mathbb{R})$, che anche f' sia assolutamente integrabile su \mathbb{R} e che $f(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow +\infty$. Allora, integrando per parti abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f'(x) \, dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\omega) e^{-i\omega x} f(x) \, dx = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Pertanto $\hat{f}' = i\omega \hat{f}$: l'operazione di derivazione viene trasformata, a meno di un fattore, in moltiplicazione per la variabile indipendente ω . Ciò permette di trasformare equazioni differenziali lineari in equazioni algebriche.

In alcuni casi gli integrali della forma (8.5), e quindi gli integrali della forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x \, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

(ottenuti dalla parte reale e immaginaria di (8.5)) possono essere calcolati mediante il Teorema dei residui.

PROPOSIZIONE 8.5 Sia f una funzione olomorfa, con l'eccezione di un numero finito di singolarità, su un aperto contenente $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Supponiamo che nessuno di tali punti stia sull'asse reale e che valgano le seguenti condizioni:

a) $\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ z \in H}} f(z) = 0;$

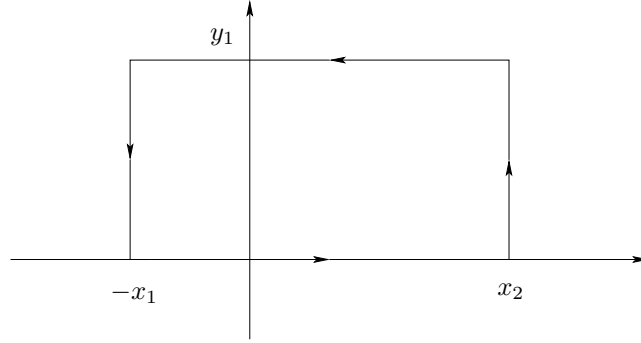


Figura 6 - Circuito per il calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx$.

b) $\omega > 0$.

Allora la funzione $e^{i\omega x} f(x)$ è integrabile su \mathbb{R} (nel senso che tali sono sia la parte reale che la parte immaginaria) e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{a \in H} \text{Res}(e^{i\omega z} f(z), a).$$

Dimostrazione. Sia γ il circuito indicato in Figura 6; per $x_1, x_2, y_1 > 0$ sufficientemente grandi in modo che il circuito includa tutti i punti di singolarità abbiamo:

$$\int_{\gamma} e^{i\omega z} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in H} \text{Res}(e^{i\omega z} f(z), a).$$

Il contributo all'integrale corrispondente al lato sull'asse reale non è altro che

$$\int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x) dx.$$

Consideriamo ora gli altri tre lati:

$$I_1 = \int_0^{y_1} e^{i\omega(x_2+iy)} f(x_2+iy) i dy$$

$$I_2 = \int_{x_2}^{-x_1} e^{i\omega(x+iy_1)} f(x+iy_1) dx$$

$$I_3 = \int_{y_1}^0 e^{i\omega(-x_1+iy)} f(-x_1+iy) i dy.$$

Siano x_1, x_2 e y_1 sufficientemente grandi in modo che su ciascuno dei tre lati la funzione $|f|$ non superi ε . Allora:

$$|I_1| \leq \varepsilon \int_0^{y_1} e^{-\omega y} dy = \varepsilon(1 - e^{-\omega y_1})/\omega \leq \varepsilon/\omega.$$

In modo del tutto analogo si ottiene $|I_3| \leq \varepsilon/\omega$. Infine

$$|I_2| \leq \varepsilon \int_{-x_1}^{x_2} e^{-\omega y_1} dx \leq \varepsilon e^{-\omega y_1} (x_1 + x_2).$$

Possiamo scegliere y_1 sufficientemente grande in modo che $e^{-\omega y_1}(x_1 + x_2) < 1$.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ per x_1 e x_2 sufficientemente grandi risulta:

$$\left| \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x) dx - 2\pi i \sum_{a \in H} \operatorname{Res}(e^{i\omega z} f(z), a) \right| \leq 2 \frac{\varepsilon}{\omega} + \varepsilon.$$

Concludiamo che

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty \\ x_2 \rightarrow +\infty}} \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{a \in H} \operatorname{Res}(e^{i\omega z} f(z), a). \quad \square$$

OSSERVAZIONE 8.6 Se $\omega < 0$ vale un risultato perfettamente analogo a quello precedente, ma relativamente al semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}$.

ESEMPIO.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-b}}{2b}.$$

Il seguente risultato può essere utile nell'applicazione del Teorema dei residui al calcolo di integrali. Come corollario vedremo una dimostrazione alternativa della Proposizione 8.5.

LEMMA 8.7 (DI JORDAN) *Sia f una funzione olomorfa in un intorno di $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ per un qualche $R_0 > 0$. Supponiamo che*

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} f(z) = 0.$$

Dato $\omega > 0$ e la curva

$$\gamma_R: \vartheta \mapsto Re^{i\vartheta} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C},$$

risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{i\omega z} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, fissiamo $R_\varepsilon > R_0$ sufficientemente grande in modo che $|f(z)| < \varepsilon$ per $|z| \geq R_\varepsilon$ (e $\operatorname{Im} z \geq 0$). Allora per ogni $R \geq R_\varepsilon$:

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{i\omega z} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \int_0^\pi |e^{i\omega R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} i R e^{i\vartheta}| d\vartheta \leq \varepsilon R \int_0^\pi e^{-\omega R \sin \vartheta} d\vartheta.$$

Utilizziamo ora la disuguaglianza

$$\sin \vartheta \geq \frac{2}{\pi} \vartheta \quad \text{per } 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},$$

e la simmetria della funzione seno (che permette di ricondursi ad un integrale su $[0, \pi/2]$); allora

$$\int_0^\pi e^{-\omega R \sin \vartheta} d\vartheta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2\omega R \vartheta/\pi} d\vartheta = \frac{\pi}{\omega R} (1 - e^{-\omega R}),$$

da cui

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{i\omega z} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \frac{\pi}{\omega}. \quad \square$$

Nelle ipotesi della Proposizione 8.5, l'utilizzo del circuito $\gamma_R = \gamma_R^1 \cdot \gamma_R^2$, dove

$$\gamma_R^1 = [-R, R], \quad \gamma_R^2: \vartheta \mapsto Re^{i\vartheta} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C},$$

e un'applicazione del Lemma di Jordan (che permette di ottenere l'annullamento al limite di $\int_{\gamma_R^2}$) fornisce la seguente (più debole) versione della Proposizione 8.5:

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{a \in H} \text{Res}(e^{i\omega z} f(z), a).$$

4. Poli semplici sull'asse reale

Consideriamo ora la situazione in cui alcune delle singolarità sia situate sull'asse reale.

PROPOSIZIONE 8.8 *Sia f una funzione olomorfa, con l'eccezione di un numero finito di singolarità, su un aperto contenente $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$. Supponiamo che le singolarità a_1, a_2, \dots, a_q sull'asse reale siano tutte poli semplici. Supponiamo che valga una delle seguenti condizioni:*

- f soddisfa la condizione di crescita (8.4) della Proposizione 8.3;
- f è della forma $f(z) = e^{i\omega z} g(z)$, e sono soddisfatte le condizioni (a) (per la funzione g) e (b) della Proposizione 8.5.

Allora esiste p.v. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ e

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } a > 0} \text{Res}(f, a) + \pi i \sum_{\text{Im } a = 0} \text{Res}(f, a).$$

Alla dimostrazione premettiamo un lemma.

LEMMA 8.9 *Sia $z = a$ un polo per una funzione f . Dati $\alpha \in [0, 2\pi]$ e $\varepsilon > 0$, sia*

$$\gamma_\varepsilon: \vartheta \mapsto a + \varepsilon e^{i\vartheta} : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{C}$$

un arco di circonferenza di centro a , raggio ε e ampiezza α . Allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \alpha i \text{Res}(f, a).$$

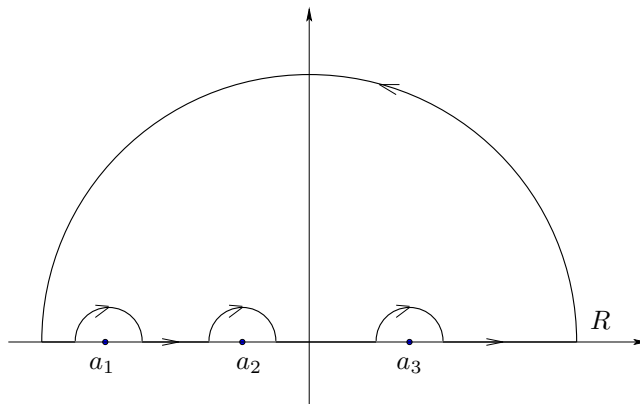


Figura 7 - Singolarità sull'asse reale

Dimostrazione. Poiché $z = a$ è un polo semplice per f possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-a)} + h(z),$$

con h funzione olomorfa. Per quanto riguarda il primo addendo, risulta

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{c_{-1}}{(z-a)} dz = c_{-1} \int_0^\alpha \frac{\varepsilon i e^{i\vartheta}}{\varepsilon e^{i\vartheta}} d\vartheta = \alpha c_{-1} i.$$

Del resto h è limitata in un intorno di a , per cui:

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} h(z) dz \right| \leq \varepsilon \alpha \max_{\gamma_\varepsilon} |h| \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Concludiamo con quanto richiesto. \square

Dimostrazione. (della Proposizione 8.8). La dimostrazione ripercorre quella delle Proposizioni 8.3 e 8.5, “indentando”, mediante semicirconfereze di raggio ε , il tratto di curva sull'asse reale in modo da escludere le singolarità su tale asse: vedi la Figura 7, nel caso in cui si ripercorra la dimostrazione della Proposizione 8.3. Al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, tale integrale tende a (il valor principale è inteso relativamente ad ogni singolarità):

$$\text{p.v.} \int_{-R}^R f(x) dx - \pi i \sum_{a \in \mathbb{R}} \text{Res}(f, a)$$

(le semicirconfereze sono orientate in senso orario, da cui il segno negativo); ne segue la formula richiesta. \square

5. Integrazione attorno a un punto di diramazione

Nel calcolo di alcuni integrali reali il ricorso a un opportuno circuito, e al conseguente utilizzo del Teorema dei residui, necessita di una corrispondente estensione complessa della funzione integranda. Nell'esempio che segue si utilizza una determinazione della potenza complessa, definita mediante un ramo del logaritmo.

Dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \quad (0 < \alpha < 1).$$

L'esponente $\alpha \in (0, 1)$ assicura l'integrabilità in $x = 0$, mentre l'ulteriore fattore polinomiale $1 + x$ (privo di zeri in \mathbb{R}^+) assicura l'integrabilità in $+\infty$.

Osserviamo che, se $l(z)$ è una determinazione del logaritmo in un aperto Ω , la funzione $h(z) = \exp(\alpha l(z))$ è una determinazione della potenza z^α nello stesso aperto. Consideriamo $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ e

$$l(z) = \log \varrho + i\vartheta, \quad \text{se } z = \varrho e^{i\vartheta} \text{ con } \vartheta \in (0, 2\pi).$$

Allora, per ogni $x > 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} h(x + iy) = x^\alpha, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} h(x + iy) = x^\alpha e^{2\pi i \alpha}.$$

Ciò suggerisce che l'integrale dato possa essere ottenuto (eventualmente a meno del fattore $e^{-2\pi i \alpha}$) come limite dell'integrale di $1/(h(z)(1+z))$ su una linea parallela all'asse reale. Consideriamo pertanto il circuito in Figura 8: fissati $r, R, \varepsilon > 0$ (si tenga conto che si considererà $\varepsilon \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow +\infty$), si ha $r_\varepsilon = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2}$ e $R_\varepsilon = \sqrt{R^2 + \varepsilon^2}$. Sia $f(z) = 1/(h(z)(1+z))$ e γ il circuito $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4$. Per r sufficientemente piccolo e R sufficientemente grande possiamo supporre che la singolarità $z = -1$ di f sia interna a γ . Il residuo di f in tale punto è $1/h(-1) = e^{-\pi i \alpha}$. Per il Teorema dei residui

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i e^{-\pi i \alpha}.$$

Consideriamo ora l'integrale su ciascuno dei tratti γ_j . Come già osservato, per $x > 0$ risulta $f(x + iy) \rightarrow 1/(x^\alpha(1+x))$ per $y \rightarrow 0^+$, mentre $f(x + iy) \rightarrow e^{-2i\alpha\pi}/(x^\alpha(1+x))$ per $y \rightarrow 0^-$; tale convergenza è uniforme per $x \in [r, R]$. Allora, per r, R fissati, si ha

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz \rightarrow \int_r^R \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

e

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz \rightarrow -e^{-2\pi i \alpha} \int_r^R \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Supponiamo $\varepsilon < r$ e valutiamo f lungo γ_2 e γ_4 . Se $z = R_\varepsilon e^{i\vartheta}$ è un punto di γ_2 , risulta

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{R_\varepsilon^\alpha e^{i\alpha\vartheta}(1 + R_\varepsilon e^{i\vartheta})} \right| \leq \frac{1}{R_\varepsilon^\alpha (R_\varepsilon - 1)} \leq \frac{1}{R^\alpha (R - 1)},$$

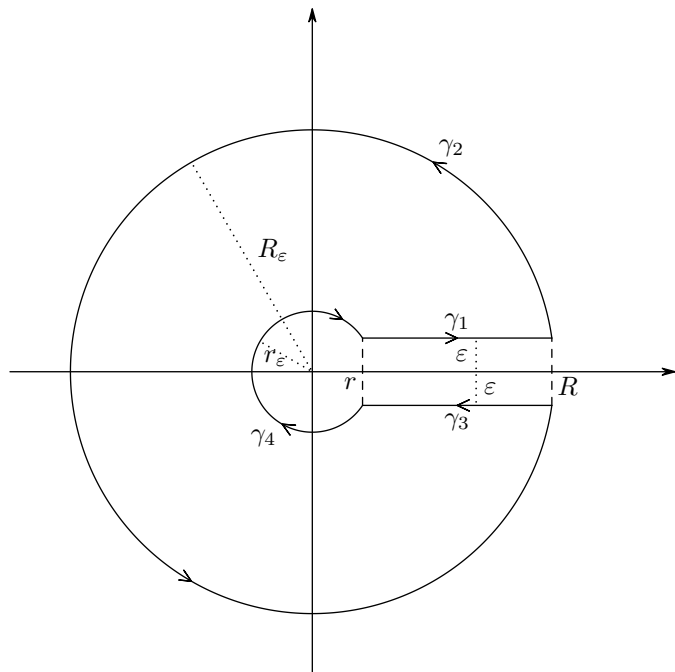


Figura 8 - Integrazione attorno a un punto di diramazione

quindi ($R_\epsilon < 2R$)

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \frac{4\pi R}{R^\alpha(R-1)} \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty.$$

Analogamente ($r_\epsilon < 2r$)

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z) dz \right| \leq \frac{4\pi r}{r^\alpha(1-2r)} \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow 0.$$

Pertanto, comunque presi r, R, ϵ , con $\epsilon < r < R$, risulta

$$\left| 2\pi i e^{-\pi\alpha i} - \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_3} f(z) dz \right| \leq \frac{4\pi R}{R^\alpha(1-R)} + \frac{4\pi r}{r^\alpha(1-2r)}.$$

Se passiamo al limite per $\epsilon \rightarrow 0$ si ha

$$\left| 2\pi i e^{-\pi\alpha i} - (1 - e^{-2\pi\alpha i}) \int_r^R \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx \right| \leq \frac{4\pi R}{R^\alpha(1-R)} + \frac{4\pi r}{r^\alpha(1-2r)}.$$

Consideriamo ora il limite per $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow +\infty$:

$$(1 - e^{-2\pi\alpha i}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx = 2\pi i e^{-\pi\alpha i}.$$

Da questa uguaglianza si ricava subito l'integrale richiesto.

9 Ulteriori proprietà di base delle funzioni olomorfe

In questo paragrafo raccogliamo alcune ulteriori proprietà fondamentali delle funzioni olomorfe.

9.1 Principio del prolungamento analitico

Il seguente risultato afferma che una funzione olomorfa è univocamente individuata dai valori che assume su un arbitrario sottoinsieme aperto del suo dominio.

TEOREMA 9.1 (PRINCIPIO DEL PROLUNGAMENTO ANALITICO) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se esiste un aperto $U \subseteq \Omega$ sul quale $f \equiv 0$ allora $f \equiv 0$ in tutto Ω .*

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $E_n = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0\}$; poniamo $E = \bigcap_n E_n$. Poiché ogni $f^{(n)}$ è continua, ogni insieme E_n è chiuso, quindi anche E è chiuso. Mostriamo che E è anche aperto. Fissato $a \in E$, sia $D_r(a)$ un cerchio contenuto in Ω e su cui f sia sviluppabile in serie di potenze di centro a . Tale serie è la serie di Taylor di f relativa al punto a : poiché $a \in E$, tutti i coefficienti dello sviluppo sono nulli, per cui $f \equiv 0$ in $D_r(a)$. Di conseguenza $f^{(n)}(z) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $z \in D_r(a)$; ne segue che $D_r(a) \subseteq E$.

Dal momento che U è aperto, risulta $U \subseteq E$, quindi E è non vuoto. Il fatto che Ω sia connesso implica che $\Omega = E$. \square

TEOREMA 9.2 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non identicamente nulla. L'insieme*

$$Z_f = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

è un insieme discreto, cioè è un insieme chiuso tutti i cui punti sono isolati.

Dimostrazione. L'insieme E è chiuso poichè f è continua. Fissiamo ora $a \in Z_f$ e sia U un intorno di a in cui f si possa sviluppare in serie di potenze di centro a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad (z \in U).$$

Per ipotesi $c_0 = 0$, ma non possono essere nulli tutti i coefficienti c_n , altrimenti $f \equiv 0$ su U e quindi, per il Principio del prolungamento analitico (Teorema 9.1) dovrebbe essere $f \equiv 0$ in Ω . Sia $N = \min\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$. Allora possiamo scrivere f nella forma

$$f(z) = (z-a)^N g(z), \quad g \in \mathcal{H}(U).$$

Poiché $g(a) = c_N \neq 0$, esiste un intorno $V \subseteq U$ di a in cui $g \neq 0$. Allora $f \neq 0$ in V , per cui $Z_f \cap V = \{a\}$. \square

COROLLARIO 9.3 *Siano f e g funzioni olomorfe in un insieme aperto connesso Ω di \mathbb{C} . Se l'insieme $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ ha un punto di accumulazione in Ω , allora $f \equiv g$ in Ω .*

Dimostrazione. Si applichi il teorema precedente alla funzione $f - g$. \square

Fra le conseguenze immediate di quest'ultimo risultato vi sono le estensioni al campo complesso di varie formule notevoli che sono valide in campo reale e che coinvolgono funzioni dotate di estensione olomorfa in \mathbb{C} . Rientrano in questa categoria le formule di trigonometria come l'identità fondamentale, le formule di addizione e sottrazione di seno e coseno, e le formule da esse derivate. Ad esempio, le funzioni $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ e $f(z) = 1$ sono olomorfe su tutto \mathbb{C} e coincidono su \mathbb{R} : di conseguenza devono coincidere su tutto \mathbb{C} , per cui $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

9.2 Principio dell'argomento e Teorema di Rouché

Premettiamo un lemma sulle singolarità della funzione f'/f .

LEMMA 9.4 *Sia Ω un aperto di \mathbb{C} e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione meromorfa non identicamente nulla. Allora per ogni $a \in \Omega$ si ha:*

$$\text{Res}(f'/f, a) = \text{ord}_a(f).$$

Inoltre le singolarità di f'/f possono essere solo poli semplici.

Dimostrazione. Sia $N = \text{ord}_a(f) \in \mathbb{Z}$. Sia $D_r(a)$ un intorno di a in cui f sia sviluppabile in serie di Taylor di centro a . Allora esiste una funzione $g \in \mathcal{H}(D_r(a))$ tale che

$$f(z) = (z - a)^N g(z) \quad \text{in } D_r(a),$$

con $g(a) \neq 0$. Ne segue che

$$f'(z) = N(z - a)^{N-1}g(z) + (z - a)^N g'(z)$$

(la formula sussiste anche se $N = 0$). Quindi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{N}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Poiché $g(a) \neq 0$, la funzione g'/g è olomorfa in un intorno di a , per cui $\text{Res}(f'/f, a) = N$. Il punto a è una singolarità (non eliminabile) se e solo se $N \neq 0$: in tal caso si tratta di polo semplice. \square

TEOREMA 9.5 (PRINCIPIO DELL'ARGOMENTO) *Sia Ω un aperto connesso di \mathbb{C} e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione meromorfa non identicamente nulla. Sia γ una curva chiusa in Ω che sia omotopa a una costante. Detti Z_f e P_f l'insieme degli zeri e dei poli, rispettivamente, della funzione f , supponiamo che*

$$\gamma \cap (Z_f \cup P_f) = \emptyset.$$

Allora

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{a \in Z_f \cup P_f} n(\gamma, a) \cdot \text{ord}_a(f),$$

dove la somma a secondo membro è una somma finita.

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata applicando il Teorema dei residui e il lemma precedente. \square

Un caso particolare è quello in cui sia l'indice di avvolgimento che la molteplicità di zeri e poli sia 1:

COROLLARIO 9.6 *Sia f una funzione meromorfa in Ω e $\gamma \subseteq \Omega$ il bordo di un disco contenuto in Ω (più in generale γ può essere una curva chiusa semplice), percorso in senso antiorario. Se f presenta solo zeri e poli semplici, nessuno dei quali su γ allora*

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (\#Z_f - \#P_f)$$

OSSERVAZIONE 9.7 Abbiamo visto che l'indice $n(\gamma, a)$ precisa il significato di “numero di avvolgimenti della curva γ attorno al punto a ”. Pertanto, data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ in un aperto Ω e una funzione $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, il “numero di avvolgimenti della curva immagine” $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma$ attorno ad un fissato punto $w \in \mathbb{C} \setminus \tilde{\gamma}$ è fornito dal valore:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{\zeta - w} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t)) - w} f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz, \end{aligned}$$

dove $g(z) = f(z) - w$. Nel caso particolare in cui $w = 0$, il calcolo ora svolto mostra che il valore $(1/2\pi i) \int_{\gamma} (f'/f)$ può essere interpretato come “numero di volte che il punto $f(z)$ gira attorno all'origine” mentre z percorre la curva γ , quindi $\int_{\gamma} (f'/f)$ dà (a meno del fattore i) la variazione dell'argomento di $f(z)$ mentre z percorre la curva γ .

Una conseguenza importante del Principio dell'argomento è il Teorema di Rouché. Nell'enunciato che segue la funzione g può essere pensata come una perturbazione della funzione f .

TEOREMA 9.8 (TEOREMA DI ROUCHÉ PER UN CERCHIO) *Sia Ω un aperto di \mathbb{C} e $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sia $\overline{D}_R(a)$ un cerchio chiuso contenuto in Ω . Se*

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{su } \partial D_R(a)$$

allora f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri in $D_R(a)$, contati con la relativa molteplicità.

La dimostrazione utilizza la formula integrale, fornita dal Principio dell'argomento, per il numero degli zeri all'interno di una circonferenza.

Dimostrazione. Per ogni $t \in [0, 1]$ definiamo $f_t = f + tg$. Sia n_t il numero degli zeri di f_t , contati con la relativa molteplicità; più precisamente, sia

$$n_t = \sum_{a \in Z_{f_t}} \text{ord}_a(f_t)$$

(dove Z_{f_t} indica l'insieme degli zeri di f_t). Le ipotesi poste assicurano che f_t non ha zeri su $\partial D_R(a)$, dal momento che se $w \in \partial D_R(a)$ fosse tale da annullare f_t allora $f(w) = -tg(w)$, da cui $|f(w)| \leq t|g(w)| \leq |g(w)|$, contro l'ipotesi. Poiché sia f che g non hanno poli, possiamo allora applicare il Principio dell'argomento alla funzione f_t relativamente alla curva $\partial D_R(a)$, ottenendo:

$$n_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R} \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} dz = \int_{\partial D_R} \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz.$$

La continuità della funzione integranda nelle due variabili z e t assicura la continuità di $t \mapsto n_t$; poiché tale applicazione assume valori in \mathbb{N} , ne segue che è costante su $[0, 1]$: in particolare $n_0 = n_1$, che è quanto volevasi dimostrare. \square

Nei prossimi paragrafi avremo occasione di utilizzare i teoremi ora illustrati.

9.3 Successioni di funzioni oloomorfe

I risultati di questo paragrafo (Teoremi di Weierstrass, di Montel e di Hurwitz) mettono bene in evidenza il differente comportamento della proprietà di differenziabilità in senso complesso rispetto al caso reale.

TEOREMA 9.9 (WEIERSTRASS) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia (f_n) una successione di funzioni oloomorfe in Ω convergente uniformemente sui compatti a una funzione f . Allora $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Inoltre $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente sui compatti di Ω .*

Dimostrazione. La funzione f è continua come limite uniforme (sui compatti) di funzioni continue. Sia D un cerchio la cui chiusura sia contenuta in Ω ; poiché ogni f_n è oloomorfa, detta γ una curva qualunque chiusa in D , risulta $\int_\gamma f_n = 0$ (Corollario 5.6). Per la convergenza uniforme di (f_n) si ha $\int_\gamma f_n \rightarrow \int_\gamma f$, quindi $\int_\gamma f = 0$: per il Teorema di Morera f è oloomorfa nel disco (quindi in Ω per l'arbitrarietà di D).

Sia ora $\overline{D}_\rho(a)$ un disco chiuso tutto contenuto in Ω . Mostriamo che (f_n) converge uniformemente a f in $D_\rho(a)$ (come conseguenza, mediante ricoprimento, si dimostra la convergenza uniforme su un generico compatto). Per la formula (5.4), per ogni $z \in D_\rho(a)$

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta, \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta.$$

Quindi

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{(r-\rho)^2} \max_{\partial D_r(a)} |f_n - f|.$$

Il secondo membro non dipende da $z \in D_\rho(a)$ e converge a zero: ciò dimostra la convergenza uniforme in tale insieme. \square

TEOREMA 9.10 (MONTEL) *Sia Ω un aperto di \mathbb{C} , e sia \mathcal{F} una famiglia di funzioni in $\mathcal{H}(\Omega)$ equilimitata sui compatti. Allora ogni successione di elementi di \mathcal{F} ammette una sottosuccessione uniformemente convergente sui compatti di Ω (si dice anche che \mathcal{F} è una famiglia normale).*

Dimostrazione. Con l'obiettivo di applicare il Teorema di Ascoli-Arzelà (vedi Appendice, Teorema ...), dimostriamo che \mathcal{F} è una famiglia equicontinua sui compatti. Fissiamo pertanto $f \in \mathcal{F}$ e $K \subseteq \Omega$ compatto, e sia $r < d(K, \partial\Omega)/3$. Dati $z, w \in K$ con $|z - w| < r$, per la formula di Cauchy (5.1)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2r}(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2r}(w)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta.$$

Pertanto

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} 4\pi r \sup_{\zeta \in \partial D_{2r}(w)} |f(\zeta)| \left| \frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - z} \right|.$$

Risulta:

$$\left| \frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - z} \right| = \frac{|w - z|}{|\zeta - w||\zeta - z|} \leq 2 \frac{|w - z|}{r^2}.$$

Quindi

$$|f(z) - f(w)| \leq 2 \frac{|z - w|}{r} \sup_{\zeta \in \partial D_{2r}(w)} |f(\zeta)|.$$

Osserviamo ora che $D_{2r}(w) \subseteq K_{2r}$, dove $K_{2r} = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leq 2r\}$. Per come abbiamo scelto r l'insieme K_{2r} è un compatto di Ω , per cui esiste M_K tale che $|g| \leq M_K$ su K per ogni $g \in \mathcal{F}$. Quindi

$$|f(z) - f(w)| \leq 2 \frac{|z - w|}{r} M_K.$$

Ciò dimostra la equicontinuità della famiglia \mathcal{F} .

A questo punto si conclude applicando il teorema di Ascoli-Arzelà (Teorema 11.10). \square

TEOREMA 9.11 (HURWITZ) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia (f_n) una successione di funzioni olomorfe in Ω convergenti uniformemente sui compatti di Ω ad una funzione f . Se ciascuna f_n non si annulla mai su Ω allora $f \equiv 0$ oppure f non si annulla mai in Ω .*

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass risulta $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supponiamo che non sia $f \equiv 0$, ma che f abbia almeno uno zero $a \in \Omega$. Per il Teorema 9.2 il punto a è uno zero isolato, per cui esiste $r > 0$ tale che $\overline{D}_r(a) \subseteq \Omega$ e f non si annulla mai in $\overline{D}_r(a) \setminus \{a\}$. Per il Principio dell'argomento

$$\int_{\partial D_r(a)} \frac{f'}{f} dz = 2\pi i \operatorname{ord}_a(f) \neq 0.$$

Del resto $\int_{\partial D_r(a)} \frac{f'_n}{f_n} dz = 2\pi i \text{ord}_a(f)$ perché f_n non si annulla mai (quindi f'_n/f_n è olomorfa). Inoltre $f'_n/f_n \rightarrow f'/f$ uniformemente in $\overline{D}_r(a)$ (Teorema di Weierstrass). Quindi

$$0 = \int_{\partial D_r(a)} \frac{f'_n}{f_n} \rightarrow \int_{\partial D_r(a)} \frac{f'}{f},$$

che è contro quanto precede. \square

COROLLARIO 9.12 *Siano Ω e (f_n) come nel teorema precedente. Se ogni f_n è iniettiva allora f , se non costante, è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia f non costante e supponiamo esistano $z_1, z_2 \in \Omega$ tali che $f(z_1) = f(z_2) =: w_0$. Siano $D_r(z_1)$ e $D_r(z_2)$ dischi disgiunti contenuti in Ω . Per il Principio del prolungamento analitico $f|_{D_r(z_1)}$ non è costante, quindi

$$(f - w_0)|_{D_r(z_1)} \text{ non è identicamente nulla, ma presenta uno zero.}$$

Poiché $f_n - w_0$ converge a $f - w_0$ uniformemente sui compatti, quindi per il Teorema di Hurwitz da un certo indice in poi le funzioni $(f_n - w_0)|_{D_r(z_1)}$ devono avere uno zero. Poiché lo stesso ragionamento vale anche per il disco $D_r(z_2)$ concludiamo che esistono due punti distinti in cui f_n assume il valore w_0 , il che va contro le ipotesi. \square

10 Proprietà geometriche

10.1 Il teorema dell'applicazione aperta. Trasformazioni conformi.

Il seguente risultato, che presentiamo come conseguenza del Teorema di Rouché, fornisce una proprietà 'geometrica' delle funzioni olomorfe come trasformazioni del piano complesso in sè.

TEOREMA 10.1 (TEOREMA DELL'APPLICAZIONE APERTA) *Ogni funzione olomorfa e non costante su un aperto connesso è un'applicazione aperta, cioè trasforma aperti in aperti.*

Dimostrazione. Sia Ω aperto di \mathbb{C} e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Fissiamo $z_0 \in \Omega$ e sia $w_0 = f(z_0)$. Dimostriamo che esiste $\delta > 0$ tale che $D_\delta(w_0)$ è contenuto nell'immagine di f .

Fissato $w \in \mathbb{C}$ definiamo la funzione $g_w(z) = f(z) - w$. Allora

$$g_w(z) = (f(z) - w_0) + (w_0 - w) =: F(z) + G(z).$$

Poiché gli zeri di una funzione olomorfa formano un insieme discreto, esiste $\varrho > 0$ tale che

$$\delta := \min_{|z-z_0|=\varrho} |f(z) - w_0| > 0.$$

Supponiamo ora che $|w - w_0| < \delta$. Allora

$$|F(z)| > |G(z)| \quad \text{su } \partial D_\varrho(z_0).$$

Per il Teorema di Rouché la funzione $F+G$, cioè g_w , ha lo stesso numero di zeri di F in $D_\varrho(z_0)$. Ma F ha almeno uno zero in $D_\varrho(z_0)$, essendo $f(z_0) = w_0$. Quindi w ha una controimmagine in $D_\varrho(z_0)$. Per come è stato scelto w concludiamo che $D_\delta(w_0)$ è contenuto nell'immagine di f . \square

Dal fatto che le funzioni olomorfe sono applicazioni aperte si possono dedurre facilmente i seguenti risultati.

COROLLARIO 10.2 (PRINCIPIO DEL MASSIMO MODULO) *Sia f una funzione olomorfa non costante su un aperto connesso Ω . Allora la funzione $|f|$ non può avere massimo in Ω .*

Dimostrazione. Fissiamo $z_0 \in \Omega$. Poiché $w_0 = f(z_0)$ è interno all'immagine di f (che è aperta per il Teorema 10.1), esiste un cerchio $D_\delta(w_0)$ tutto contenuto nell'immagine di f . Sia $w \in D_\delta(w_0)$ con $|w| > |w_0|$: poiché w è immagine di un punto $z \in \Omega$, risulta $|f(z)| > |f(z_0)|$. Ciò dimostra che nessun punto di Ω può essere di massimo per la funzione $|f|$. \square

COROLLARIO 10.3 *Sia Ω un aperto limitato connesso di \mathbb{C} e sia $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua che sia olomorfa in Ω . Allora*

$$\sup_{\Omega} |f| = \max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|.$$

Dimostrazione. Sia z_0 un punto di massimo per $|f|$ in $\overline{\Omega}$. Per il corollario precedente deve essere $z_0 \in \partial\Omega$ (ciò possiamo assumerlo anche nel caso in cui f sia costante); quindi

$$\sup_{\Omega} |f| \leq \max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|.$$

Del resto esiste una successione $(z_k)_k$ in Ω convergente a z_0 , per cui

$$|f(z_0)| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |f(z_k)| \leq \sup_{\Omega} |f|,$$

da cui la conclusione. \square

Se f è una funzione olomorfa *biiettiva* dall'aperto Ω all'insieme $G \subseteq \mathbb{C}$, per il Teorema dell'applicazione aperta sappiamo che anche G è aperto. È rilevante osservare che l'applicazione inversa $f^{-1}: G \rightarrow \Omega$ è automaticamente olomorfa: ciò discende dal seguente teorema.

TEOREMA 10.4 *Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa sull'aperto Ω . Se f è iniettiva allora $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$. Ne segue che, posto $G = f(\Omega)$, la funzione inversa $f^{-1}: G \rightarrow \Omega$ è olomorfa e*

$$(f^{-1})'(w_0) = 1/f'(z_0), \quad \text{con } w_0 = f(z_0).$$

Dimostrazione. Supponiamo che esista un punto $z_0 \in \Omega$ per il quale $f'(z_0) = 0$. Allora, sviluppando attorno a z_0 possiamo scrivere

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0)^k + G(z),$$

con $c \neq 0$, $k \geq 2$ e G tale che $G(z)/|z - z_0|^k \rightarrow 0$ per $z \rightarrow z_0$ (la funzione G si annulla almeno all'ordine $k + 1$ in z_0). Per ogni $w \in \mathbb{C}$ abbiamo

$$f(z) - f(z_0) - w = [c(z - z_0)^k - w] + G(z) =: F(z) + G(z).$$

Sia $\varrho > 0$ sufficientemente piccolo affinché

$$|G(z)| < \frac{1}{2}|c(z - z_0)^k| = \frac{1}{2}|c|\varrho^k \quad \text{per } |z - z_0| = \varrho.$$

Fissiamo ora $\delta < \frac{1}{2}|c|\varrho^k$. Allora, se $|w| < \delta$ abbiamo

$$|G(z)| < |F(z)| \quad \text{per } |z - z_0| = \varrho.$$

Per il teorema di Rouché la funzione $F + G$, cioè $f(z) - f(z_0) - w$, ha lo stesso numero di zeri (contati con molteplicità) di F in $D_\varrho(z_0)$. Poiché $k \geq 2$, la funzione F ha almeno due zeri (della forma $z_0 + \zeta$ con ζ radice k -ima di w/c), i quali stanno in $D_\varrho(z_0)$ se scegliamo δ sufficientemente piccolo. Pertanto, $h_w: z \mapsto f(z) - f(z_0) - w$ ha almeno due zeri in $D_\varrho(z_0)$; non può trattarsi di uno zero con molteplicità superiore a 1 perché altrimenti in quel punto la derivata di h_w , e quindi di f , dovrebbe annullarsi: ciò è escluso se ϱ è scelto sufficientemente piccolo; infatti sappiamo (vedi Teorema 9.2) che l'insieme degli zeri della funzione olomorfa f' è discreto (f' non è costante perché altrimenti, avendo supposto $f'(z_0) = 0$, avremmo $f' \equiv 0$ e f non sarebbe iniettiva). Allora, in un intorno sufficientemente piccolo di z_0 non vi sono altri punti in cui f' si annulla. Concludiamo che la funzione h_w , e quindi la funzione f , non è iniettiva, contro l'ipotesi.

La dimostrazione che la funzione inversa è \mathbb{C} -differenziabile e che la sua derivata è come enunciato, si svolge come nel caso reale. \square

La condizione di non annullamento della derivata assicura, del resto, l'invertibilità locale della funzione. Più precisamente vale il seguente risultato.

TEOREMA 10.5 *Sia Ω un aperto di \mathbb{C} e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sia $z_0 \in \Omega$ un punto per il quale $f'(z_0) \neq 0$; allora esiste un intorno aperto U di z_0 e un intorno aperto V di $f(z_0)$ tali che $f: U \rightarrow V$ è biiettiva.*

Dimostrazione. Sviluppiamo f attorno a z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + G(z);$$

la funzione G è tale che $G(z)/|z - z_0| \rightarrow 0$ per $z \rightarrow z_0$. Utilizzeremo il Teorema di Rouché per mostrare come la funzione G possa essere vista, per z vicino a z_0 e ai fini dell'iniettività, come una perturbazione della parte linearizzata.

Per ogni $w \in \mathbb{C}$ possiamo scrivere

$$f(z) - w = [f(z_0) - w + f'(z_0)(z - z_0)] + G(z) =: F(z) + G(z).$$

Sia $\varrho > 0$ sufficientemente piccolo affinché

$$|G(z)| < \frac{1}{2}|f'(z_0)(z - z_0)| \quad \text{per } |z - z_0| = \varrho.$$

Sia $0 < \delta < \frac{1}{2}|f'(z_0)(z - z_0)|$. Se $|w - f(z_0)| < \delta$, allora

$$|G(z)| < |F(z)| \quad \text{per } |z - z_0| = \varrho.$$

Pertanto $F + G$ ha lo stesso numero di zeri di F in $D_\varrho(z_0)$. Poiché $f'(z_0) \neq 0$, la funzione F si annulla in uno e un solo punto comunque preso w ; se scegliamo δ sufficientemente piccolo possiamo assumere che F si annulli in $D_\varrho(z_0)$. Ne segue che $z \mapsto f(z) - w$ ha uno e un solo zero in $D_\varrho(z_0)$ per ogni $w \in D_\delta(w_0)$, dove $w_0 = f(z_0)$. Posto $V = D_\delta(w_0)$ e $U = f^{-1}(V)$, concludiamo che $f: U \rightarrow V$ è biiettiva. \square

Mettiamo ora in evidenza una semplice proprietà geometrica delle funzioni olomorfe nei punti in cui la derivata non si annulla. Sia f una funzione olomorfa su un aperto Ω e $z_0 \in \Omega$, con $f'(z_0) \neq 0$. Sia $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \Omega$ una curva passante per z_0 : supponiamo $\gamma(0) = z_0$. La derivata $\gamma'(0)$, se non nulla, può essere interpretata come vettore tangente a γ in z_0 . La curva immagine $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ ha pertanto il vettore (non nullo)

$$\tilde{\gamma}'(0) = f'(z_0)\gamma'(0) = f'(z_0)v$$

come vettore tangente. Notiamo che la trasformazione $v \mapsto f'(z_0)v$ è indipendente da γ ed è individuata soltanto dal valore $f'(z_0)$: posto $f'(z_0) = re^{i\vartheta}$, si tratta della roto-omotetia di parametri r e $\vartheta \in \arg f'(z_0)$. In particolare, se due linee si tagliano in z_0 formando un angolo α , allora le immagini sono linee per $f(z_0)$ che si tagliano secondo lo stesso angolo, in quanto le tangenti sono state ruotate dello stesso valore $\vartheta \in \arg f'(z_0)$. Ci si riferisce spesso a questa proprietà geometrica di *conservare gli angoli* dicendo che la funzione f è *conforme* nel punto z_0 .

Nel seguito diremo che un'applicazione $f: \Omega \rightarrow G$ fra due aperti di \mathbb{C} è *conforme* se è olomorfa e biiettiva, quindi biolomorfa.

10.2 Esempi di trasformazioni conformi

(Si veda principalmente il Capitolo 8 del libro Elias M. Stein, Rami Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis II, Princeton University Press, 2003)

a) Ricordiamo innanzitutto l'applicazione

$$\exp: \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

L'applicazione inversa è una determinazione del logaritmo

$$z = \varrho e^{i\vartheta} \mapsto \log \varrho + i\vartheta.$$

b) Consideriamo la funzione olomorfa

$$f(z) = \frac{i - z}{i + z}, \quad f: \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

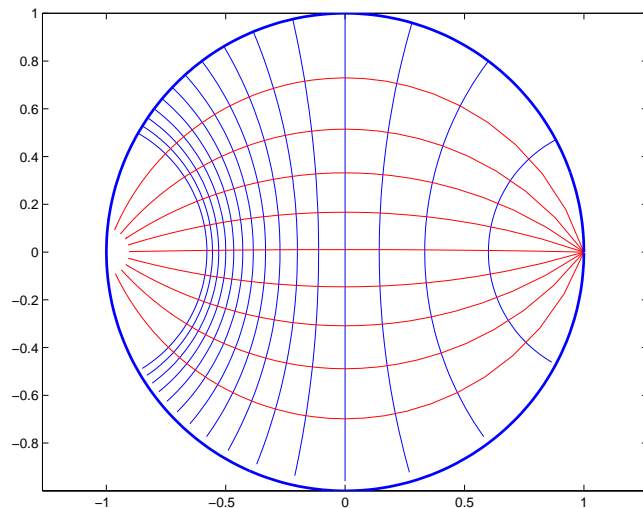


Figura 9 - Immagine del reticolato delle coordinate polari in H tramite l'applicazione $(i - z)/(i + z)$.

Posto

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}, \quad D = D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

Si verifica subito che f assume valori in D (infatti $|i - z| < |i + z|$ se $z \in H$). Verifichiamo che la funzione $f: H \rightarrow D$ è biettiva. Un calcolo diretto mostra che se $f(z_1) = f(z_2)$ allora $z_1 = z_2$. Inoltre la funzione

$$g(w) = i \frac{1 - w}{1 + w} \quad (w \in D)$$

assume valori in H ed è tale che $f \circ g = id$, quindi f è suriettiva.

Osserviamo anche

$$f: \partial H \rightarrow \partial D$$

In Figura 9 sono tracciate alcune delle immagini del reticolato delle coordinate polari tramite la funzione f .

c) (Applicazioni conformi del disco unitario in sé). Premettiamo un semplice risultato:

LEMMA 10.6 Siano $z, w \in \mathbb{C}$, con $\bar{w}z \neq 1$. Allora

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| < 1 \quad \text{se } |z| < 1 \text{ e } |w| < 1.$$

Inoltre l'uguaglianza vale se e solo se $|z| = 1$ oppure $|w| = 1$.

Dimostrazione. Sia $z = \rho e^{i\vartheta}$. Allora

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| = \left| e^{i\vartheta} \frac{we^{-i\vartheta} - \rho}{1 - (we^{-i\vartheta})\rho} \right| = \left| \frac{\zeta - \rho}{1 - \bar{\zeta}\rho} \right|$$

con $\zeta = we^{-i\vartheta}$ (ciò equivale a considerare direttamente soltanto il caso $z \in \mathbb{R}$). Svolgendo i calcoli (si elevi a quadrato) si ottiene subito che la disuguaglianza $|\zeta - \rho| / |1 - \bar{\zeta}\rho| < 1$ equivale a

$$(1 - \rho^2) \cdot (1 - |\zeta|^2) > 0,$$

che è verificata se e solo se $\rho < 1$ e $|\zeta| < 1$. Vale invece l'uguaglianza se $\rho = 1$ oppure $|\zeta| = 1$. Si conclude ricordando che $\rho = |z|$ e $|\zeta| = |w|$. \square

Dato $\alpha \in \mathbb{C}$, con $|\alpha| < 1$, poniamo

$$\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z},$$

che risulta ben definita se $|z| \leq 1$. In base al lemma precedente

$$\psi_\alpha: D \rightarrow D, \quad \psi_\alpha: \partial D \rightarrow \partial D.$$

PROPOSIZIONE 10.7 *L'applicazione $\psi_\alpha: D \rightarrow D$ è olomorfa e biiettiva. Inoltre $(\psi_\alpha)^{-1} = \psi_\alpha$.*

Dimostrazione. È sufficiente osservare che $\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = id|_D$. \square

È rilevante notare che, a meno di rotazioni, le funzioni ψ_α esauriscono le applicazioni conformi del disco unitario in sé.

PROPOSIZIONE 10.8 *Se f è un'applicazione conforme del disco unitario in sé allora esistono $\vartheta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in D$ tali che*

$$f(z) = e^{i\vartheta} \psi_\alpha(z).$$

Prima di passare alla dimostrazione esponiamo un lemma che utilizzeremo anche nella dimostrazione del Teorema di Riemann nel paragrafo successivo. Questo risultato mostra la "rigidità" delle trasformazioni conformi dal disco in sé stesso.

LEMMA 10.9 (SCHWARZ) *Sia $f: D \rightarrow D$ una trasformazione olomorfa per la quale $f(0) = 0$. Allora:*

- a) $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in D$.
- b) Se esiste $z_0 \neq 0$ per il quale $|f(z_0)| = |z_0|$ allora f è una rotazione.
- c) $|f'(0)| \leq 1$ e se $|f'(0)| = 1$ allora f è una rotazione.

Dimostrazione. Per ogni $z \neq 0$ si ponga $g(z) = f(z)/z$. Per il Teorema di estensione di Riemann (oppure si utilizzi lo sviluppo di Taylor di f di centro 0) la funzione g è estendibile in modo olomorfo in 0. Inoltre, per ogni $r \in (0, 1)$ e $|z| = r$ risulta

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r},$$

poiché f assume valori in D . Per il Principio del massimo modulo (Teorema (10.2)) deve essere $|g| \leq 1/r$ su $D_r(0)$. Per l'arbitrarietà di r concludiamo che $|g| \leq 1$ su D , da cui la proprietà (a).

Se $|f(z_0)| = |z_0|$ per un qualche $z_0 \in D$, con $z_0 \neq 0$, allora $|g(z_0)| = 1$, cioè $|g|$ ha un massimo in D : deve pertanto essere $g = c$, con c tale che $|c| = |g| = 1$. Allora $f(z) = cz$, con $|c| = 1$, cioè f è una rotazione.

Infine, per come è definita g , risulta $g(0) = f'(0)$, quindi $|f'(0)| \leq 1$. Se vale l'uguaglianza $|f'(0)| = 1$ allora $|g(0)| = 1$: come sopra si conclude che g deve essere costante e f una rotazione. \square

Dimostrazione. (della Proposizione 10.8). Sia α la controimmagine di 0 tramite f . Allora la funzione $g := f \circ \psi_\alpha : D \rightarrow D$ fissa l'origine ed è bigettiva. Per il Lemma di Schwarz abbiamo $|g(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in D$. Del resto lo stesso lemma può essere applicato alla funzione inversa g^{-1} per cui risulta anche $|z| \leq |g(z)|$. Allora $|g(z)| = |z|$, da cui (Lemma di Schwarz) g è una rotazione: $g(z) = e^{i\theta} z$. Ricordando che $\psi_\alpha^{-1} = \psi_\alpha$, concludiamo che

$$f(z) = (g \circ \psi_\alpha^{-1})(z) = e^{i\theta} \psi_\alpha(z),$$

che è quanto volevasi dimostrare. \square

10.3 Il teorema della mappa conforme di Riemann

Il teorema che segue è costituisce un risultato fondamentale di partenza per gli sviluppi nella teoria delle superficie di Riemann.

TEOREMA 10.10 (TEOREMA DELLA MAPPA CONFORME DI RIEMANN) *Sia Ω un sottoinsieme proprio di \mathbb{C} che sia aperto e semplicemente connesso. Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Fissato $z_0 \in \Omega$ esiste un'unica applicazione conforme $f: \Omega \rightarrow D$ tale che*

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) \in \mathbb{R}, \quad f'(z_0) > 0.$$

Dimostrazione. Occupiamoci innanzitutto dell'esistenza di un'applicazione conforme $f: \Omega \rightarrow D$ che porta z_0 in 0.

Passo 1. Dimostriamo che possiamo ridurci al caso in cui Ω è un sottoinsieme aperto di D contenente 0, e assumere $z_0 = 0$.

Osserviamo che se $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è un'applicazione olomorfa iniettiva per la quale esiste $\delta > 0$ tale che

$$|h(z)| > \delta \quad \text{per ogni } z \in \Omega,$$

allora l'applicazione $1/h$ è olomorfa, iniettiva e limitata su Ω , risultando $|1/h| < 1/\delta$. Quindi, traslando e riscaldando $1/h$, possiamo ottenere un'applicazione conforme fra Ω e un sottoinsieme aperto di D che contiene 0: la funzione

$$f = \frac{1}{2}\delta \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h(z_0)} \right)$$

è un'applicazione $\Omega \rightarrow D$ olomorfa e iniettiva e tale che $f(z_0) = 0$. Pertanto cerchiamo di costruire un'applicazione h con le proprietà ora descritte.

Per ipotesi esiste un punto $\alpha \notin \Omega$. Indichiamo con g una determinazione del logaritmo di $z \mapsto z - \alpha$ in Ω (che è semplicemente connesso):

$$e^{g(z)} = z - \alpha, \quad z \in \Omega.$$

Osserviamo che g è iniettiva (se $g(z_1) = g(z_2)$ allora $z_1 - \alpha = e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)} = z_2 - \alpha$). Fissiamo ora un punto $w \in \Omega$ e mostriamo che esiste $\delta > 0$ tale che

$$(10.1) \quad |g(z) - (g(w) + 2\pi i)| > \delta.$$

Infatti, se esistesse una successione (z_n) di punti in Ω per la quale $g(z_n) \rightarrow g(w) + 2\pi i$, allora

$$z_n - \alpha = e^{g(z_n)} \rightarrow e^{g(w) + 2\pi i} = e^{g(w)} = w - \alpha,$$

da cui $z_n \rightarrow w$ e quindi $g(z_n) \rightarrow g(w)$, che è assurdo.

La (10.1) assicura che la funzione $h: z \mapsto g(z) - (g(w) + 2\pi i)$ soddisfa le condizioni richieste.

Passo 2. Per quanto precede possiamo supporre che Ω sia un sottoinsieme aperto di D contenente 0, e che sia $z_0 = 0$.

Consideriamo la famiglia \mathcal{F} delle funzioni

$$f: \Omega \rightarrow D, \quad \text{olomorfe, iniettive e tali che } f(0) = 0.$$

Tale famiglia è non vuota poiché vi appartiene l'identità. L'applicazione cercata deve appartenere a \mathcal{F} ed essere suriettiva. L'idea che viene seguita è quella di individuare il candidato come la funzione f in cui "sia massimo il coefficiente di dilatazione in 0". Consideriamo quindi il valore

$$(10.2) \quad S = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|.$$

Sia (f_n) una successione in \mathcal{F} per la quale $|f'_n(0)| \rightarrow S$. La successione è equi-limitata poiché ogni f_n assume valori in D . Per il Teorema di Montel (f_n) converge uniformemente sui compatti (a meno di sottosuccessioni) a una funzione olomorfa f . Inoltre (Weierstrass) $|f'(0)| = \lim |f'_n(0)| = S$; dal momento che l'identità sta in \mathcal{F} , risulta $S \geq 1$, per cui f non è costante. Per il corollario al Teorema di Hurwitz (Corollario 9.12) la funzione f è iniettiva. Inoltre, per continuità risulta $|f| \leq 1$ e quindi (Principio del massimo modulo) il fatto che f non sia costante implica che $|f| < 1$, cioè f assume valori in D . Infine, è chiaramente $f(0) = 0$, per cui concludiamo che $f \in \mathcal{F}$: l'estremo superiore che definisce S è raggiunto dalla funzione f .

Passo 3. Dimostriamo ora che la funzione f che realizza il massimo in (10.2) è anche suriettiva, realizzando così un'applicazione conforme fra Ω e D . Procediamo per assurdo (l'idea intuitiva è che se l'immagine di f non esaurisse D ,

vi sarebbe spazio per un'ulteriore fattore di dilatazione dell'applicazione f in 0 contro la proprietà di massimalità di f). Supponiamo che esista un punto $\alpha \in D$ che non appartenga a $f(\Omega)$. Mediante l'automorfismo ψ_α (di cui alla Proposizione 10.7) portiamo α in 0:

$$f \circ \psi_\alpha: \Omega \rightarrow \Omega' := f(\psi_\alpha(\Omega)), \quad 0 \notin \Omega'.$$

Componiamo ora mediante un'applicazione di "dilatazione" rispetto all'origine: una determinazione della radice quadrata, definita in Ω' (che è semplicemente connesso) come

$$g(z) = e^{\frac{1}{2} \log z},$$

dove $\log z$ indica una determinazione del logaritmo in Ω' . Componendo successivamente con la funzione $\psi_{g(\alpha)}$ l'origine ritorna ad essere punto fisso. Più precisamente, la funzione

$$F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f: \Omega' \rightarrow D$$

è una funzione olomorfa e iniettiva (come composizione di funzioni iniettive) che fissa l'origine; si tratta pertanto di una funzione di \mathcal{F} . Mostriamo ora che $|F'(0)| > S$. Risulta

$$f = \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1} \circ F = \Phi \circ f,$$

dove h è la funzione quadrato e $\Phi = \psi_\alpha^{-1} \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1}$. La funzione $\Phi: D \rightarrow D$ fissa l'origine, ma non è iniettiva poiché h non lo è. Allora il Lemma di Schwarz (Lemma 10.9) implica che $|\Phi'(0)| < 1$ (altrimenti Φ sarebbe una rotazione, quindi iniettiva). Ne segue che

$$|f'(0)| = |\Phi'(0)||F'(0)| < |F'(0)|$$

e si andrebbe contro alla proprietà di massimalità di f .

L'applicazione conforme $f: \Omega \rightarrow D$ che fissa l'origine ora costruita può facilmente essere modificata in modo da soddisfare la condizione che $f'(0)$ sia un numero reale positivo. Infatti, posto $f'(0) = re^{i\vartheta}$, è sufficiente sostituire f con $e^{-i\vartheta} f$.

Verifichiamo infine l'unicità dell'applicazione. Siano $f_1, f_2: \Omega \rightarrow D$ conformi e tali che

$$f_j(0) = 0, \quad f'_j(0) > 0 \quad (j = 1, 2).$$

La funzione $f = f_2 \circ f_1^{-1}$ è un automorfismo del disco unitario che fissa l'origine. Dalla Proposizione (10.8) ricaviamo che f deve essere una rotazione: $f(z) = cz$, con c complesso unitario. Dovendo essere $f'(0)$ reale positivo, deve essere $c = 1$, quindi f è l'identità, cioè $f_1 = f_2$. \square

11 Il problema di Dirichlet su una striscia

Sviluppiamo un esempio di come l'utilizzo di un'opportuna trasformazione conforme possa rivelarsi utile per ridurre un problema al caso di una geometria

nota. Nello specifico supporremo di conoscere la soluzione del cosiddetto *problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace* sul cerchio unitario; si tratta del problema di determinare la soluzione u del problema

$$(P_0) \quad \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } D \\ v = g & \text{su } \partial D \end{cases}$$

dove $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e g è una funzione continua assegnata su ∂D . Si dimostra che la soluzione è data da

$$(11.1) \quad v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\varrho}(\vartheta - \varphi) g(\varphi) d\varphi,$$

dove $z = \varrho e^{i\vartheta}$ e

$$P_{\varrho}(\vartheta) = \frac{1 - \varrho^2}{1 - 2\varrho \cos \vartheta + \varrho^2} \quad (\text{nucleo di Poisson}).$$

Consideriamo ora l'analogo del problema (P_0) su una striscia. Più precisamente, posto $S = \mathbb{R} \times (0, 1)$, cerchiamo le funzioni u tali che

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } S \\ v = f & \text{su } \partial S \end{cases}$$

dove f è assegnata su ∂S . Mediante un'opportuna trasformazione conforme, ricondurremo il problema (P) a un problema (P_0) sul disco unitario. Per poter avere un dato al bordo g continuo, sarà necessario porre la seguente condizione sul dato f : posto

$$f_0 = f(\cdot, 0), \quad f_1 = f(\cdot, 1),$$

richiediamo che

$$(11.2) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f_0(x) = 0 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f_1(x).$$

Consideriamo ora le funzioni

$$z \mapsto e^{\pi z} : S \rightarrow H, \quad z \mapsto \frac{i - z}{i + z} : H \rightarrow D$$

considerata nel paragrafo 10.2. Per quanto visto, la funzione composta fornisce un'applicazione conforme tra S e D :

$$G(z) = \frac{i - e^{\pi z}}{i + e^{i z}}, \quad G : S \rightarrow D.$$

Inoltre, la funzione G è definita anche su ∂S : l'immagine del punto $x + i$ descrive la semicirconferenza inferiore di D al variare di $x \in \mathbb{R}$, mentre l'immagine del punto $x \in \mathbb{R}$ descrive la semicirconferenza superiore. Se v è una funzione reale definita in \overline{D} , poniamo $u = v \circ G$. Allora u è una funzione definita su \overline{S} ; inoltre, se definiamo

$$g = G^{-1} \circ f \quad \text{su } \partial D,$$

la funzione g è continua su ∂D (per la condizione (11.2)) e

$$v = g \quad \text{su } \partial D \quad \Rightarrow \quad u = f \quad \text{su } \partial S.$$

Infine, verifichiamo che

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } D \quad \Rightarrow \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } S.$$

Ciò discende dal seguente risultato generale:

PROPOSIZIONE 11.1 Sia $\Phi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una trasformazione conforme tra due aperti di \mathbb{C} . Se u è una funzione armonica su Ω_2 allora $u \circ \Phi$ è una funzione armonica su Ω_1 .

Dimostrazione. Verifica diretta utilizzando le equazioni di Cauchy-Riemann. \square

A questo punto possiamo affermare che il problema (P) ha come soluzione la funzione $u = v \circ G$ con v soluzione del problema (P_0) su D relativamente al dato al bordo $g = G^{-1} \circ f$. Pertanto:

$$u(z) = v(G(z)), \quad \text{con } v \text{ data da (11.1)}$$

Svolgendo adeguatamente i calcoli si può dimostrare che risulta:

$$u(x, y) = \frac{\sin \pi y}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f_0(x-t)}{\cosh \pi t - \cos \pi y} dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{f_1(x-t)}{\cosh \pi t + \cos \pi y} dt \right)$$

Appendice: integrali impropri

11.1 Integrali su \mathbb{R}

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua (o, comunque, per la quale sia ben definito l'integrale sugli intervalli limitati).

DEFINIZIONE 11.2 Chiamiamo integrale improprio di f esteso a \mathbb{R} il seguente valore limite, se esiste:

$$(11.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ S \rightarrow +\infty}} \int_{-S}^R f(x) \, dx.$$

Diciamo che f è integrabile su \mathbb{R} (o che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$ è convergente) se tale valore esiste finito.

L'esistenza del limite in (11.3) è da intendersi nel seguente senso: nel caso, ad esempio, di valore finito (analogamente per i casi infiniti), richiediamo che esista $I \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon > 0 \quad \forall R, S > a_\varepsilon \quad \left| \int_{-S}^R f(x) \, dx - I \right| < \varepsilon.$$

OSSERVAZIONE 11.3 Chiaramente l'integrale improprio esiste se f è una funzione non negativa.

PROPOSIZIONE 11.4 La funzione f è integrabile su \mathbb{R} se e solo se esistono finiti

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) \, dx, \quad \int_{-\infty}^0 f(x) \, dx := \lim_{S \rightarrow +\infty} \int_{-S}^0 f(x) \, dx$$

Dimostrazione. È immediato verificare che l'esistenza finita dei due integrali implica l'integrabilità di f su \mathbb{R} . Viceversa l'integrabilità di f implica che per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon > 0$ tale che

$$R'' \geq R' > a_\varepsilon, \quad S'' \geq S' > a_\varepsilon \quad \left| \int_{-S''}^{R''} f(x) \, dx - \int_{-S'}^{R'} f(x) \, dx \right| < \varepsilon;$$

in particolare, per $S' = S''$ si ottiene

$$R'' \geq R' > a_\varepsilon, \quad \left| \int_{R'}^{R''} f(x) \, dx \right| < \varepsilon,$$

che dà la condizione di Cauchy per l'esistenza finita di $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) \, dx$. \square

PROPOSIZIONE 11.5 Se $|f|$ è integrabile allora anche f è integrabile.

Dimostrazione. Per la proposizione precedente limitiamoci a considerare l'integrale su $[0, +\infty)$. Comunque presi $R'' > R' > 0$ risulta

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x) dx \right| \leq \int_{R'}^{R''} |f(x)| dx \longrightarrow 0 \quad \text{per } R', R'' \rightarrow +\infty$$

poiché, per ipotesi, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R |f(x)| dx$ esiste finito. Allora è soddisfatta la condizione di Cauchy per l'esistenza finita del $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) dx$. \square

PROPOSIZIONE 11.6 *Se esiste $p > 1$ tale che*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x|^p} \quad \text{se } |x| \geq R$$

per opportuni M, R , allora f è integrabile su \mathbb{R} .

Dimostrazione. Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = 1/(p-1) < +\infty$, l'integrale di $|f|$, e quindi l'integrale di f , è convergente. \square

OSSERVAZIONE 11.7 La condizione posta su f nella proposizione precedente può essere anche espressa nella forma

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} |f(x)x^p| < +\infty$$

per qualche $p > 1$.

11.2 Singolarità al finito. Integrale in valor principale

Sia $[a, b]$ un intervallo limitato e x_0 un punto di (a, b) . Sia f una funzione reale continua in $[a, b] \setminus \{x_0\}$. In modo analogo a come abbiamo proceduto nell'introdurre gli integrali impropri su \mathbb{R} , poniamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 11.8 *Diciamo che f è integrabile su $[a, b]$ se esiste finito il*

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \sigma \rightarrow 0^+}} \int_{[a, b] \setminus (x_0 - \sigma, x_0 + \varepsilon)} f(x) dx.$$

Come nel caso degli integrali impropri su \mathbb{R} valgono i seguenti risultati:

PROPOSIZIONE 11.9 • *La funzione f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se esistono finiti i limiti:*

$$\int_a^{x_0} f(x) dx := \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0 - \sigma} f(x) dx, \quad \int_{x_0}^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx.$$

- *Se $|f|$ è integrabile allora anche f è integrabile.*
- *Se esiste $0 < p < 1$ tale che*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x - x_0|^p} \quad \text{se } |x - x_0| \leq \delta$$

per opportuni $M, \delta > 0$, allora f è integrabile su $[a, b]$.

Se nella definizione 11.3 e 11.8 si assume $R = S$ e $\varepsilon = \sigma$, rispettivamente, si ottiene una nozione più debole di integrabilità: si parla di integrale nel senso del *valor principale di Cauchy*:

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad \text{p.v.} \int_a^b f(x) dx.$$

Il concetto di integrale in valor principale riveste un ruolo fondamentale nella teoria della Trasformata di Fourier.

Appendice: Teorema di Ascoli-Arzelà

Il teorema che segue costituisce uno dei risultati elementari più importanti di compattezza in spazi funzionali.

TEOREMA 11.10 (ASCOLI-ARZELÀ) *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e (f_n) una successione di funzioni reali continue su Ω soddisfacente le seguenti proprietà: comunque preso $K \subseteq \Omega$ compatto*

- (equicontinuità) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

comunque presi $x, y \in K$ con $|x - y| < \delta$ e comunque preso $n \in \mathbb{N}$.

- esiste $M_K \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f_n| \leq M_K \quad \text{su } K$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In tali ipotesi esiste una sottosuccessione di (f_n) uniformemente convergente sui compatti di Ω .

Non è difficile dimostrare che, in ipotesi di equicontinuità, la condizione di equilimitatezza sui compatti equivale alla condizione di equilimitatezza puntuale.