6 – Spazi di Hilbert, spazi di Sobolev, applicazioni

Esercizio. Sviluppare una dimostrazione diretta del teorema di Lax-Milgram utilizzando la teoria degli operatori e seguendo lo schema nell'Osservazione V.6 del testo.

Esercizio. Si consideri lo spazio

$$V := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) : \ \|u\|_1^2 := \|u\|_{L^2}^2 + \int |\xi|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi < \infty \right\},$$

dove $\widehat{u}$ è la trasformata di Fourier di u, munito della norma $\|\cdot\|_1$ definita sopra. Dimostrare che V è uno spazio di Hilbert. Nel caso in cui u è una funzione regolare, si può caratterizzare $\|u\|_1$ in termini della derivata di u? Si consideri ora, al variare di $s \in (0,\infty)$, gli spazi

$$V_s := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) : \ \|u\|_s^2 := \|u\|_{L^2}^2 + \int |\xi|^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi < \infty \right\},$$

Che relazioni ci sono tra i V_s al variare di s? È possibile dimostrare delle disuguaglianze di interpolazione tra le norme $\|\cdot\|_s$?

Esercizio. Dimostrare (Oss. V.4) che, se $a(\cdot,\cdot)$ è una forma bilineare semidefinita positiva, allora la funzione $v \mapsto a(v,v)$ è convessa su H.

Esercizio. Sia data $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \chi_{[n,n+1)}$ e, per $n \in \mathbb{N}$, sia $\xi_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ la restrizione all'intervallo $[0,1)$ della funzione $x \mapsto f(2^n x)$. Dimostrare che $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale di $L^2(0,1)$ (la completezza non è elementare).

Esercizio (comprensione della definizione). Sia (a,b) un intervallo limitato. Sia $u \in C^1(a,b)$ e sia u' la derivata classica di u. Dimostrare in dettaglio che, se $u' \in L^p(a,b)$ $(1 \le p \le \infty)$, allora $u \in W^{1,p}(a,b)$ e u' è anche derivata debole di u.

Esercizio (comprensione della definizione e costruzione di esempi). Sia (a,b) un intervallo limitato. Sia $u \in C^0([a,b]) \cap C^1(a,b)$. Per quali $p \in [1,\infty]$ possiamo concludere che $u \in W^{1,p}(a,b)$?

Esercizio. Sia I un intervallo limitato. Allora sappiamo che $H^1(I)$ è immerso in modo continuo (e compatto) in $C(\overline{I})$, ovvero si ha

$$\|v\|_{C(\overline{I})} \le C(I) \|v\|_{H^1(I)}.$$

In che modo la costante di immersione dipende dalla lunghezza di I? In altre parole, è possibile scegliere C in modo indipendente da $|I|$? Cosa succede se $|I|$ diventa grande? E se diventa piccola?

Esercizio. Sia I un intervallo limitato e $u \in W^{1,\infty}(I)$ una funzione tale che $u(x) \geq 0$ per ogni $x \in \overline{I}$. Si ponga $v(x) = G(u(x))$ dove $G(r) = r^{1/2}$. È possibile dimostrare che v appartiene a qualche spazio di Sobolev? Dove sorgono le difficoltà? Provare a illustrare la situazione con qualche esempio (**N.B.:** si tratta di una questione non elementare; non si pretende pertanto una risposta completa, ma soltanto qualche esempio significativo).

Esercizio. Si consideri l'equazione

$$-u'' + u^3 = f \qquad \text{in } I = (0,1), \qquad (1) \quad \boxed{\texttt{eq}}$$

dove $f \in L^2(I)$. Dimostrare che il problema ai limiti ottenuto imponendo le condizioni di Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$ ha una e una sola soluzione seguendo il seguente schema:

- Considerare il funzionale

  $$F : H_0^1(I) \to \mathbb{R}, \qquad F(v) := \int_0^1 \Big(\frac{1}{2}|v'(x)|^2 + \frac{1}{4}|v(x)|^4 - f(x)v(x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

  e mostrare che F ha uno (e un solo) punto di minimo u.

- Se u è il minimo trovato sopra, dimostrare che, per ogni $v \in H_0^1(I)$,

  $$\lim_{t \to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = 0.$$

- Esplicitando l'espressione della "derivata direzionale" a primo membro, dedurre che u risolve l'equazione (1).

- Dimostrare, attraverso una stima contrattiva, che la soluzione è unica[1].

Si consideri infine l'equazione *ellittica semilineare*

$$-u'' + g(u) = f \qquad \text{in } I = (0,1), \qquad (2) \quad \boxed{\texttt{eq2}}$$

sempre associata alle condizioni di Dirichlet omogenee. Sotto quali condizioni su g possiamo ripetere il ragionamento? Provare a considerare i casi $g(u) = -u^3$, $g(u) = u^3 - u$, $g(u) = e^u$, $g(u) = \ln(1+u) - \ln(1-u)$ (quest'ultimo per $u \in (-1,1)$), ciascuno dei quali mette in luce almeno un fenomeno interessante.

[1] Questo infatti non segue, almeno direttamente, dall'unicità del punto di minimo. A priori potrebbero esserci soluzioni dell'equazione che non sono punti di minimo del funzionale F