5 – Spazi L^p

Esercizio (applicazioni compatte). Siano E, F spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un operatore lineare e continuo. Si considerino le affermazioni:

(a) Per ogni sottoinsieme limitato $B \subset E$, l'immagine $T(B)$ ha chiusura compatta (rispetto alla topologia forte) in F;

(b) Per ogni successione $\{x_n\} \subset E$ tale che $x_n \to x$ debolmente in E, si ha che $T(x_n) \to T(x)$ fortemente in F.

Mostrare che in generale (a) implica (b). Trovare una condizione sufficiente su E affinché (b) implichi (a).

Esercizio (Lemma di Ehrling). Siano X, B, Y spazi di Banach e si supponga che $X \subset B$ e $B \subset Y$ con inclusioni continue, ovvero che esistano costanti $c, c' > 0$ tali che

$$\|u\|_B \leq c\|u\|_X \ \ \forall\, u \in X, \qquad \|u\|_Y \leq c'\|u\|_B \ \ \forall\, u \in B.$$

Si supponga inoltre che l'inclusione $X \subset B$ sia compatta, ovvero che soddisfi la proprietà (a) dell'esercizio precedente. Mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c_\varepsilon > 0$ tale che

$$\|u\|_B \leq \varepsilon\|u\|_X + c_\varepsilon\|u\|_Y \ \ \forall\, u \in X.$$

Esercizio (spazi L^p con $p \in (0,1)$). Sia $p \in (0,1)$ e sia I un intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Costruire gli spazi $L^p(I)$ svolgendo i seguenti passaggi:

1. Dimostrare che $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ per ogni $a, b \geq 0$.

2. Dimostrare che (identificando come di consueto le coppie di funzioni che coincidono q.o. su I), la relazione

$$\mathrm{d}(f,g) := \int_I |f(x) - g(x)|^p \ \mathrm{d}x$$

   definisce una metrica sullo spazio

$$L^p(I) := \left\{ u : I \to \mathbb{R} \text{ misurabile e t.c. } \int_I |u(x)|^p \ \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

3. Adattando la dimostrazione data nel caso $p \in [1, \infty)$, dimostrare che d è una metrica completa.

4. Dimostrare, riferendosi per semplicità al caso $I = (0,1)$, che la bolla aperta $V := \{u \in L^p : \ \mathrm{d}(u, 0) < 1\}$ non è convessa (per esempio, si può provare a dimostrare che *ogni* funzione $f \in L^p(0,1)$ può essere scritta come una combinazione convessa di un numero finito n di funzioni $g_1, \dots, g_n \in V$).

5. Dedurre che L^p non contiene alcun insieme aperto convesso a parte l'insieme vuoto e l'intero spazio.

6. Dimostrare che, se $f : L^p(I) \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare e continuo, allora $f \equiv 0$.

Esercizio (spazi di funzioni Hölderiane, applicazione di Ascoli). Si consideri, per $\alpha \in (0,1]$ e I un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, lo spazio

$$C^{0,\alpha}(I) := \left\{ u \in C^0(I) : \sup_{x,x+h\in I,\ h\neq 0} \frac{|u(x+h)-u(x)|}{|h|^\alpha} < \infty \right\}.$$

1. Mostrare che tale spazio è di Banach rispetto alla norma

$$\|u\|_\alpha := \|u\|_\infty + \sup_{x,x+h\in I,\ h\neq 0} \frac{|u(x+h)-u(x)|}{|h|^\alpha},$$

   dove $\|u\|_\infty$ è l'usuale norma del massimo.

2. Mostrare che se $\mathcal{F}$ è un insieme limitato in $C^{0,1}(I)$ allora esso è relativamente compatto in $C^{0,\alpha}(I)$ per ogni $\alpha \in (0,1)$ (in altre parole l'inclusione di $C^{0,1}(I)$ in $C^{0,\alpha}(I)$ è un'applicazione compatta).

3. Si consideri ora lo spazio $C^1(I)$. Questo è uno spazio di Banach (grazie a quale teorema?) una volta munito della norma

$$\|u\|_{C^1} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty.$$

   Si consideri una successione $\{u_n\} \subset C^1(I)$ e si supponga che u_n tenda in $C^{0,1}$ a un limite u. Si può concludere che $u \in C^1$? Si può concludere che u_n tende a u in C^1? Che cosa succede se metto su C^1 la norma di $C^{0,1}$?

Esercizio (spazi L^p con peso). Sia I un intervallo limitato e $m \in L^2(I)$ con $m(x) > 0$ quasi ovunque. Costruire lo spazio $L^p_m(I)$ dotato della norma

$$\|u\|^p_{p,m} := \int_I |u(x)|^p m(x)\ \mathrm{d}x,$$

con le ovvie modifiche nel caso $p = \infty$. Discutere le proprietà dello spazio L^p_m e le relazioni (per esempio di tipo inclusione) tra $L^p_m(I)$ e $L^r(I)$ al variare di p ed r tra 1 e ∞ (limitarsi a qualche caso significativo).