

3 – Completezza, Banach-Steinhaus, operatori chiusi

Esercizio. Sia E uno spazio di Banach e siano K, M sottospazi chiusi di E con $\dim K < \infty$. Dimostrare che anche $K + M$ è chiuso.

Esercizio. Sia $H = L^2(1, +\infty)$ e si consideri l'operatore lineare non limitato $B : D(B) \rightarrow H$ definito da

$$H \supset D(B) := \{u \in H : u(\sqrt{x}) \in H\}, \quad Bu(x) := u(\sqrt{x}).$$

1. Dimostrare che B è chiuso e densamente definito.
2. Identificando H al suo duale tramite l'usuale prodotto scalare, determinare il dominio e l'espressione dell'operatore aggiunto $B^* : D(B^*) \rightarrow H$.

Esercizio (Brezis, 2.21). Sia E un qualunque spazio di Banach di dimensione infinita e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale *lineare non continuo*. Sia a un qualunque (fissato) elemento di E , con $a \neq 0$. Si consideri l'operatore lineare non limitato $A : E \rightarrow E$ definito da

$$D(A) = E, \quad Au := u - f(u)a.$$

1. Determinare $N(A)$ e $R(A)$.
2. Dire se A è chiuso.
3. Determinare $D(A^*)$ e A^* .
4. Determinare $N(A^*)$ e $R(A^*)$.
5. È vero che $N(A^*) = R(A)^\perp$? È vero che $N(A) = R(A^*)^\perp$?

Esercizio (Brezis, 2.22). Si ponga $E = \ell^1$ e si noti che $E' = \ell^\infty$ (questo fatto sarà dimostrato nel seguito). Si definisca l'operatore lineare non limitato $A : D(A) \rightarrow E$ dato da

$$E \supset D(A) := \{u = (u_n) \in E : (nu_n) \in E\}, \quad Au := (nu_n).$$

1. Dimostrare che A è chiuso e densamente definito.
2. Determinare $D(A^*)$ e A^* . È vero che A^* è densamente definito?