# ANALISI FUNZIONALE

## Scritto del 26/1/2017: cenni di soluzione

**Esercizio 1.**

($a$) Vero: si può valutare direttamente

$$\|a^{(n)} - a\|_p^p = \sum_{k=n}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|^p \leq c \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p \to 0.$$

($b$) Vero: se $b \in \ell^1$, si ha

$$\left|\langle b, a^{(n)} - a\rangle\right| \leq C \sum_{k=n}^{\infty} |b_k| \to 0.$$

($c$) Vero: infatti, se $l$ è il limite della successione $a_k$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che $|a_n - l| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Utilizzando la disuguaglianza triangolare abbiamo dunque

$$\|a^{(n)} - a\|_\infty = \sup_{k \geq n} |a_{k+1} - a_k| \leq 2 \sup_{k \geq n} |a_k - l| \leq 2\varepsilon.$$

($d$) Falso: sia $x = (x_k)$ tale che la serie $\sum x_k$ converge ma non converge assolutamente. Allora è possibile considerare un riordinamento $(y_k)$ della successione $(x_k)$ tale che la corrispondente successione $s = (s_k)$ delle somme parziali sia limitata e oscillante (per esempio non è difficile verificare che si può sempre costruire il riordinamento $(y_k)$ in modo tale che si abbia $\liminf s_k \in [-2, -1]$ e $\limsup s_k \in [1, 2]$. Si ha allora che $s \in \ell^\infty$, ma $s \notin c$. Inoltre

$$\|s^{(n)} - s\|_\infty = \sup_{k \geq n} |y_{k+1} - y_k| \leq 2 \sup_{k \geq n} |y_k|$$

e il secondo membro tende a 0 per $n \to \infty$ in quanto la successione $(y_k)$ è infinitesima.

**Esercizio 2.**

($a$) Il sottospazio $H_0$ è denso in $H$. Per vedere questo basta mostrare che $c_{00}$ è contenuto nella chiusura di $H_0$. Sia $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots) \in c_{00}$ e sia $S = \sum_{j=1}^{k} a_j$. Allora la successione

$$b^{(n)} = (a_1, \ldots, a_k, -S/n, \ldots, -S/n, 0, 0 \ldots)$$

ove il termine $-S/n$ si ripete esattamente $n$ volte, giace in $c_{00} \cap H_0$ e tende ad $a$ in $H$.

($b$) Se $a^{(n)} \to a$ in $H$ e $Aa^{(n)} \to b$ in $H$ segue facilmente (per esempio ragionando per induzione) che $b_n = a_1 + \cdots + a_n$ per ogni $n$, da cui $b = Aa$. Si noti che l'argomento garantisce in particolare che $b \in H$, da cui $a \in D(A)$.

$(c)$ Il ragionamento fatto al punto $(a)$ mostra che $c_{00} \cap H_0$ è denso in $H$. È facile verificare che $c_{00} \cap H_0$ è contenuto in $D(A)$.

$(d)$ Il sottospazio $H_0$ non è contenuto in $D(A)$. Considero infatti la successione

$$a = (a_k) \quad \text{dove } \; a_k = \frac{(-1)^{\sigma_k}}{k}$$

e $\sigma_k \in \{1, 2\}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Qualsiasi sia la scelta degli esponenti $\sigma_k$ si ha che $a \in H$. Scelgo $\sigma_1 = 2$. Utilizzando il fatto che $\sum a_k$ non è assolutamente convergente, per induzione si può verificare che è possibile scegliere gli esponenti $\sigma_k$ in modo tale che, posto $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, esista una sottosuccessione $n_j$ tale che per ogni $j \in \mathbb{N}$ si abbia

$$|s_{n_j}| \geq \frac{1}{j^{1/2}} \tag{1}$$

e allo stesso tempo $s_n$ sia infinitesima. Per esempio, essendo $s_1 = a_1 = 1$, scelgo $\sigma_k = 1$ (ovvero prendo termini negativi) fino a che non è $s_n \leq -1/2^{1/2}$, quindi scelgo $\sigma_k = 2$ fino a che non è $s_n \geq 1/3^{1/2}$, e così via. Si noti che la (1) implica che $a \notin D(A)$.

**Esercizio 3.**

$(a)$ Data $\phi \in L^\infty(I)$, è facile verificare direttamente che

$$\langle v_n z_n - zv, \phi \rangle = \int_I (v_n z_n - zv)\phi \to 0.$$

$(b)$ L'esistenza di $u_n$ segue dal teorema di Lax-Milgram, dato che, a $n$ fissato, la forma bilineare $a_n(\cdot, \cdot)$ è continua e coerciva. La funzione $u_n$ risolve il problema ai limiti

$$u_n \in V, \qquad (\alpha_n u_n')' = f \;\text{ in } I.$$

Poiché $f$ sta in $L^2$, abbiamo per confronto che $\alpha_n u_n' \in H^1$. Si verifica direttamente che la funzione $1/\alpha_n$ sta (a $n$ fissato) in $H^1$. Poiché $H^1$ è un'algebra, segue allora che $u_n' \in H^1(I)$ e dunque $u_n \in H^2(I)$.

$(c)$ Utilizzando $u_n$ come test-funzione nel problema ai limiti e sfruttando il fatto che $\alpha_n(x) \geq 1$ per ogni $n$ e per ogni $x$ otteniamo

$$\|u_n'\|_{L^2}^2 \leq \int_I \alpha_n(x)|u_n'(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^2}\|u_n\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}\|u_n'\|_{L^2}^2 + c, \tag{2}$$

dove $c$ dipende solo da $f$ e abbiamo usato le disuguaglianze di Poincaré e di Young.

$(d)$ Ragioniamo, per fissare le idee, su una sottosuccessione (che chiamiamo sempre $u_n$) che tenda a $u$ debolmente in $V$. Ora, grazie al teorema della convergenza dominata, si ha che $\alpha_n$ tende a $|x|^{-1/4}$ fortemente in $L^2$. Dal punto $(a)$ segue che $\alpha_n u_n'$ tende ad $|x|^{-1/4}u'$ debolmente in $L^1$. Osservando che, *per ogni* $n$, si ha che $(\alpha_n u_n')' = f \in L^2$, otteniamo facilmente che $\alpha_n u_n'$ è uniformemente limitata in $H^1$ e dunque, grazie ai teoremi di immersione compatta, tende ad $|x|^{-1/4}u'$ fortemente in $L^2$ (si noti che il limite è già identificato e dunque non è necessario estrarre un'ulteriore sottosuccessione). Poiché $u_n'$ tende a $u'$ debolmente in $L^2$ otteniamo infine che

$$\int \alpha_n |u_n'|^2 = (\alpha_n u_n', u_n')_{L^2} \to \int \frac{|u'|^2}{|x|^{1/4}},$$

da cui in particolare la tesi. Altre dimostrazioni sono possibili; si noti comunque che non è possibile applicare direttamente il lemma di Fatou, in quanto non sappiamo dire se $u_n'$ tenda ad $u'$ quasi ovunque (questo non segue dalla convergenza debole).

**Esercizio 4.**

($a$) Sia $\phi \in \mathcal{D}(0,1)$ e si ponga $\psi_n(y) := \phi(y/n)$ per $y \in (0,n)$. Allora si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_n(x)\phi'(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\int_0^n u(y)\phi'(y/n)\ \mathrm{d}y = \int_0^n u(y)\psi_n'(y)\ \mathrm{d}y \\ &= -\int_0^n u'(y)\psi_n(y)\ \mathrm{d}y = -\int_0^n u'(y)\phi(y/n)\ \mathrm{d}y \\ &= -n\int_0^1 u'(nx)\phi(x)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

($b$) **Vero.** Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $|u(x) - L| \leq \epsilon$ per ogni $x \geq M$. Scegliendo $n \geq M^2 \in \mathbb{N}$ si ha

$$\|u_n - L\|_2^2 = \int_0^{M/n} |u_n - L|^2 + \int_{M/n}^1 |u_n - L|^2 \leq \int_0^{M/n} |u_n - L|^2 + \epsilon^2$$

e il rimanente integrale tende a 0 per Lebesgue dato che $u$ è supposta limitata.

($c$) **Vero.** Se $u$ non è quasi ovunque pari ad $L$ esiste (ad esempio) un insieme $A \subset (0,+\infty)$ di misura strettamente positiva $\delta > 0$ tale che $u(x) \geq L + \epsilon$ per qualche $\epsilon > 0$ e per quasi ogni $x \in A$. Inoltre $A$ può essere supposto limitato, dato che $A = \cup_n (A \cap [0,n])$ e dunque $|A \cap [0,n]| > 0$ per qualche $n$, altrimenti $A$ avrebbe misura nulla. Si verifica facilmente che, almeno per $n$ sufficientemente grande, $|u(nx) - L| \geq \epsilon$ su un sottoinsieme di $(0,1)$ di misura pari almeno a $\delta/n > 0$.

($d$) **Vero.** Poiché $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $H^1(0,+\infty)$ segue che $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$. Dunque $u_n \to 0$ in $L^2(0,1)$ per ($b$). Dato che $u_n$ è uniformemente limitata segue subito anche la convergenza forte in $L^4$.

($e$) **Falso.** Usando il punto ($a$) si ha

$$\|u_n'\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 n^2 |u'(nx)|^2\ \mathrm{d}x = \int_0^n n|u'(y)|^2\ \mathrm{d}y$$

e in generale il secondo membro tende addirittura a infinito.

**Esercizio 5.**

$(a)$ Il funzionale $\Phi$ non è convesso. Prendendo infatti $U = \chi_{(-1,0)}$ e $V = \chi_{(0,1)}$ si ottiene facilmente un controesempio alla convessità confrontando $\Phi\left(\frac{U+V}{2}\right)$ e $\frac{\Phi(U)+\Phi(V)}{2}$. D'altra parte $\Phi$ è addirittura continuo. Grazie al fatto che $\Phi$ è di crescita quadratica si verifica infatti facilmente che se $u_n$ tende a $u$ in $L^2$ allora $\Phi(u_n)$ tende a $\Phi(u)$.

$(b)$ Si osservi innanzitutto che la funzione $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(a,b) = a^2+2ab+b^2$ è convessa (infatti la sua matrice Hessiana è semidefinita positiva). Dal momento che

$$\Psi(u,v) = \int_0^1 \psi(u(x), v(x))\ \mathrm{d}x,$$

segue facilmente che $\Psi$ è convesso. Procedendo come sopra, si vede che $\Psi$ è continuo. Calcolando il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Psi(u+th, v+tk) - \Psi(u,v)}{t}, \qquad \text{dove } h,k \in L^2(0,1)$$

si verifica facilmente che $\Psi$ è differenziabile secondo Gâteaux e $d\Psi(u,v) = (2u + 2v, 2u+2v)$. Dato che $\Psi$ è convesso, il suo sottodifferenziale coincide col differenziale di Gâteaux.

$(c)$ Posta $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $\psi(a,b) = (a+b)^2$, si verifica che $\psi^*(x,y) = +\infty$ se $x \neq y$ (infatti in tale caso è possibile scegliere $a, b$ tali che $a+b=0$ e $(a,b)\cdot(x,y)$ sia grande a piacere). Viceversa, si verifica che $\psi^*(x,x) = x^2/4$. Sulla base di questa osservazione, vogliamo dimostrare che

$$\Psi^*(z,w) = \begin{cases} 1/4 \displaystyle\int_0^1 z^2(x)\ \mathrm{d}x & \text{se } z(x) = w(x) \text{ q.o.,} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La prima proprietà si dimostra facilmente imitando il procedimento fatto per $\psi$. Supponiamo ora che esistano un insieme di misura strettamente positiva $I \subset (0,1)$ tale che (ad esempio) $z(x) - w(x) \geq \epsilon > 0$ per ogni $x \in I$. Per ogni $a \in L^2$ si ha allora

$$\Psi^*(z,w) \geq \int_0^1 (z,w)\cdot(a,-a) \geq \int_0^1 a(z-w)$$

e il secondo membro tende a $+\infty$ quando si sceglie $a(x) = t\chi_I$ e si fa tendere $t$ a $+\infty$.

$(d)$ Si può preliminarmente osservare che, posto per $x \in (0,1)$ $u(x) := U|_{(0,1)}(x)$ e $v(x) := U|_{(-1,0)}(-x)$, si ha che $J(U) = \Psi(u,v)$. Di qui segue facilmente che $J$ è convesso, differenziabile secondo Gâteaux e continuo. Calcolando il differenziale di Gâteaux, si vede infine che

$$\partial J(U) = \left\{2U + 2\hat{U}\right\}, \quad \text{dove } \hat{U}(x) := U(-x).$$