ANALISI FUNZIONALE

Scritto del 21/1/2016: cenni di soluzione

Esercizio 1.

(a) Che A sia densamente definito è ovvio. A non è chiuso. Sia infatti $u_n = (x + n^{-1})^{1/2}$. Allora $u_n \to u = x^{1/2}$ in L^2, $Au_n \to x^{1/2}/2$ in L^2, ma $u \notin D(A)$. Il dominio dell'operatore A^* si vede essere dato da

$$D(A^*) = \left\{ v \in L^2(0,1) : \ (xv) \in H^1_0(0,1) \right\} .$$

Corrispondentemente si ha $A^*(v) = -(xv)'$.

(b) Poiché $v \in H^1(\varepsilon, 1)$ per ogni $\varepsilon > 0$, si ha, per ogni $x, s \in (0,1]$

$$\frac{v(x)}{x} - \frac{v(s)}{s} = \int_s^x \left(\frac{v(r)}{r} \right)' \mathrm{d}r \le c$$

dato che la derivata debole di $v(x)/x$ è sommabile. Segue che $z(x) = v(x)/x$ è limitata su $(0,1)$ e dunque sta in particolare in L^2 (e quindi in H^1 poiché la sua derivata è in L^2 per ipotesi). Poiché z e x stanno in H^1 anche il prodotto $v = zx$ sta in H^1.

(c) Poichè $C^\infty_c(0,1)$ è contenuto in $D(B)$, B risulta densamente definito. Osservando che se $u_n \to u$ e $Bu_n \to v$ in L^2 allora si ha anche $u'_n \to xv$ in L^2 segue che $u \in H^1$ e $u' = xv$, da cui $v = x^{-1}u'$, $u \in D(B)$ e $v = Bu$. Dunque B è chiuso. Applicando (b) vediamo che

$$D(B^*) = \left\{ v \in H^1(0,1) : \ x^{-1}v \in H^1_0(0,1) \right\} .$$

Analogamente a prima, $B^*v = -(x^{-1}v)'$.

Esercizio 2.

(a) Le condizioni 1. e 3. sono equivalenti tra loro, mentre 2. è strettamente più forte. Si ha infatti:

1.⇒2. **Falso**. Si prenda ad esempio

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{e_n}{\log(2+n)} \right\}_{n \in \mathbb{N}} .$$

2.⇒3. **Vero**. Evidente.

3.⇒1. **Vero**. Non è difficile mostrare che, se vale 3., allora $\mathcal{F}$ è totalmente limitato in ℓ^p. Alternativamente è possibile "vedere" gli elementi di $\mathcal{F}$ come funzioni definite su $(0, +\infty)$ e applicare il Teorema di Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

1.⇒3. **Vero**. Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista $a^{(n)} \in \mathcal{F}$ tale che

$$\|a^{(n)}\|^p_{\ell^p(n+1,\infty)} := \sum_{k=n+1}^{\infty} |a^{(n)}_k|^p \ge \varepsilon^p.$$

Possiamo allora supporre che esista una sottosuccessione (che chiamiamo sempre $a^{(n)}$) che tenda in ℓ^p a un certo limite a^∞. Ma allora

$$\begin{aligned}\|a^\infty\|_{\ell^p(n+1,\infty)} &\geq \|a^{(n)}\|_{\ell^p(n+1,\infty)} - \|a^{(n)} - a^\infty\|_{\ell^p(n+1,\infty)} \\ &\geq \|a^{(n)}\|_{\ell^p(n+1,\infty)} - \|a^{(n)} - a^\infty\|_{\ell^p} \geq \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2\end{aligned}$$

per ogni n sufficientemente grande, il che contraddice il fatto che $a^\infty \in \ell^p$.

(b) Ragionando come nel punto precedente si può vedere che $\mathcal{F}$ è relativamente compatto se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{k \geq n+1} |a_k| \leq \varepsilon \quad \forall\, a \in \mathcal{F}.$$

Esercizio 3.

(a) Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy in Z^p. Allora $u_n(0) \to a$ in $\mathbb{R}$ e $u_n' \to v$ in L^p. Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale si vede allora che per ogni $x \geq 0$ esiste finito

$$u(x) := \lim_{n\to\infty}\left(u_n(0) + \int_0^x u_n'(s)\, \mathrm{d}s\right) = a + \int_0^x v(s)\, \mathrm{d}s$$

da cui per un risultato noto $u \in C([0,\infty))$, $u(0) = a$ e la derivata debole di u è v.

(b) Se $p > 1$ è facile trovare $\alpha \in (0,1)$ dipendente da p tale che $u(x) = (1+x)^\alpha$ appartiene a Z^p, ma ovviamente non è limitata. Per $p = 1$ gli elementi di Z^1 sono limitati grazie alla sommabilità della derivata e al teorema fondamentale del calcolo (da cui segue anche facilmente la continuità dell'immersione).

(c) Segue facilmente dal fatto, dimostrato a lezione, che $W^{1,p}(0,\infty)$ è immerso con continuità in $C([0,\infty))$.

(d) Per $p > 1$, $W^{1,p}$ è denso in Z^p (e dunque non può essere chiuso). Sia infatti $u \in Z^p$. Prendo allora u_n pari a u in $[0,n]$ e $u_n = 0$ per $x \geq n + \alpha_n$. Nell'intervallo $(n, n+\alpha_n)$ scelgo u_n come una funzione lineare affine in modo tale che u_n risulti continua su $(0,+\infty)$. Un conto diretto mostra che è possibile scegliere $\alpha_n > 0$ (che dipenderà dal valore non noto, ma finito $u(n)$) in modo tale che u_n converga a u in Z^p.

Per $p = 1$, $W^{1,1}$ non è né chiuso né denso in Z^1. Non è denso perché se $(u_n) \subset W^{1,1}$ tende a u in Z^1 allora tende a u uniformemente (grazie a (b)) e dunque u deve essere infinitesima per $x \to \infty$ (in quanto le funzioni di $W^{1,1}$ lo sono). Dunque la funzione $u(x) \equiv 1$ sta in Z^1 ma non appartiene alla chiusura di $W^{1,1}$ in Z^1. Infine $W^{1,1}$ non è neanche chiuso in Z^1. Per esempio la funzione $u(x) = (1+x)^{-1}$ appartiene a Z^1 ma non a $W^{1,1}$. Procedendo per troncatura in modo simile a quanto fatto sopra si può trovare una successione di $W^{1,1}$ che tende a u in Z^1.

Esercizio 4.

(a) Che φ sia convessa e propria è chiaro. La semicontinuità inferiore segue dai risultati di compattezza debole e dalla semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole. In particolare, si vede che se u_n tende a u in L^2 e la successione

$\varphi(u_n)$ è superiormente limitata (cosa che si può sempre supporre volendo dimostrare la semicontinuità inferiore), allora u_n è limitata in H^1.

(b) Distinguendo i casi $t > 0$ e $t < 0$ si vede che se $\xi \in \partial\varphi(u)$ allora

$$\int_0^1 \xi h = \int_0^1 u_x h_x \quad \forall\, h \in H_0^1(0,1).$$

Prendendo in particolare $h \in \mathcal{D}(0,1)$ segue che $\xi \in H^2(0,1)$. È quindi possibile integrare per parti il secondo integrale nella formula precedente, ottenendo che $\xi = -u_{xx}$. Pertanto, si ha che $D(\partial\varphi) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ e $\partial\varphi(u) = -u_{xx}$ per $u \in D(\partial\varphi)$.

(c) Procedendo come nel punto precedente, si vede che

$$\int_0^1 \xi h = \int_0^1 u_x^3 h_x \quad \forall\, h \in W_0^{1,4}(0,1).$$

Segue allora $\xi = -(u_x^3)_x$ e

$$D(\partial\varphi) = \left\{ u \in W_0^{1,4}(0,1) : \; u_x^3 \in H^1(0,1) \right\}.$$

Esercizio 5.

(a, b) Il punto di partenza è la formula

$$u(x) = \int_a^x u'(s) \, \mathrm{d}s.$$

Da qui si ha facilmente

$$|u(x)| \leq (x-a)^{1/2} \|u'\|_{L^2(a,x)}$$

e dunque, quadrando e integrando, si ha

$$\int_a^b |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \|u'\|^2_{L^2(a,b)} \int_a^b (x-a) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b-a)^2 \|u'\|^2_{L^2(a,b)}.$$

(c) Per migliorare la stima della costante di Poincaré, basta procedere con maggiore cura. Nel caso dell'intervallo $(0,1)$ prendendo $x \in (0, 1/2)$, si ha

$$\int_0^{1/2} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \|u'\|^2_{L^2(0,1/2)} \int_0^{1/2} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \|u'\|^2_{L^2(0,1/2)} = \frac{1}{8} \int_0^{1/2} |u'(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Procedendo in modo analogo sull'intervallo $(1/2, 1)$ si ottiene

$$\int_{1/2}^1 |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{8} \int_{1/2}^1 |u'(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Sommando le due relazioni e prendendo la radice, si ottiene la stima voluta.

(d) Si consideri la forma bilineare su $V := H^1_0(0,1)^2$ definita da

$$a\big((u,v),(s,t)\big) = \int_0^1 (u's' + v't' + vs + \lambda ut)\,.$$

Posto $F := (f,g) \in V'$, il problema dato ammette la formulazione variazionale $a\big((u,v),(s,t)\big) = \langle F,(s,t)\rangle$ per ogni $(s,t) \in V$. È facile vedere che a è continua. Affinché a sia coerciva (e dunque siano verificate le ipotesi di Lax-Milgram), occorre che

$$\int_0^1 (1+\lambda)vu \le (1-\varepsilon)\int_0^1 \big(|u'|^2 + |v'|^2\big)\,,$$

per qualche $\varepsilon > 0$, il che, applicando le disuguaglianze di Hölder, Young e Poincaré, si vede valere se $|1+\lambda|$ è sufficientemente piccolo.

(e) Per $f = g = 0$ il problema ha sempre la soluzione nulla. Prendendo $u(x) = \sin \pi x$ e v, λ di conseguenza, si trova facilmente una soluzione non nulla.