ANALISI FUNZIONALE

Scritto del 20/1/2015: cenni di soluzione

Esercizio 1.

(a) Distinguendo i casi $s \geq 0$ e $s < 0$ si vede facilmente che

$$\varphi^*(s) = \begin{cases} \frac{s^2}{2} & \text{se } s \geq 0, \\ +\infty & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

(b) Che Φ sia convessa e propria è evidente. La semicontinuità inferiore segue dal lemma di Fatou.

(c) Si vede che $\Phi^*(v) = \int_I \varphi^*(v(x))\, \mathrm{d}x$. Per verificare ciò, si può procedere osservando che, se esiste un insieme $E \subset I$ di misura strettamente positiva in cui $v < 0$, allora $\Phi^*(v) = +\infty$; in caso contrario $\Phi^*(v) = \int_I \frac{v^2(x)}{2}\, \mathrm{d}x$.

(d) L'espressione di Φ^* è sempre data da $\Phi^*(v) = \int_I \varphi^*(v(x))\, \mathrm{d}x$. Si ha ora che

$$D(\Phi^*) = \big\{ v \in L^2(I) : v(x) \geq 0 \text{ a.e. in } I \big\}.$$

In particolare, l'integrale che definisce Φ^* vale $+\infty$ anche nel caso in cui v è quasi ovunque non negativa e $v \in L^{4/3}(I) \setminus L^2(I)$.

Esercizio 2.

(a) La chiusura di A segue dal fatto che se u_n, fu_n tendono rispettivamente a u e v in H, allora esiste una sottosuccessione n_k tale che $u_{n_k} \to u$ e $fu_{n_k} \to v$ quasi ovunque. Dunque, per confronto $v = fu$ quasi ovunque. Poiché f assume quasi ovunque valori finiti, si ha che la successione $\chi_n := \chi_{\{f \geq n\}}$ tende a 1 quasi ovunque. Se $u \in H$ si verifica allora facilmente che $u\chi_n \in D(A)$; inoltre $u\chi_n \to u$ in H (grazie per esempio al teorema di Lebesgue). Dunque $D(A)$ è denso.

(b) Non è difficile verificare che A è autoaggiunto, ovvero $D(A) = D(A^*)$ e $A = A^*$.

(c) Si vede subito che se $f \in L^\infty(0,1)$ allora A è limitato. Vale anche il viceversa (ovvero A è limitato solo se $f \in L^\infty(0,1)$). Per verificare questo si può procedere direttamente, mostrando che se f non è in $L^\infty(0,1)$ allora si può costruire $u \in H$ tale che $fu \notin H$ (la costruzione è un po' tecnica, ma non difficile). Alternativamente si può osservare che, se f induce un operatore limitato, allora il funzionale

$$L^1(0,1) \to \mathbb{R}, \qquad m \mapsto \int_0^1 f^2 m$$

è ben definito e limitato. Infatti, se $m \in L^1$ allora $|m|^{1/2} \in L^2$ da cui per ipotesi $f|m|^{1/2} \in L^2$. Dal teorema di rappresentazione di Riesz (caso L^1) segue allora facilmente che $f^2 \in L^\infty$, da cui $f \in L^\infty$.

Esercizio 3.

(a) Per $p = 1$, $s^1 = \ell^1$. Se $p > 1$, allora $c_{00} \subset s^p$. Ne segue che per $p \in (1, \infty)$ la chiusura di s^p in ℓ^p è tutto ℓ^p. Invece la chiusura di s^∞ in ℓ^∞ coincide con c_0.

(b) Il funzionale S *non* è limitato. Per vedere questo, si prenda una successione $a = (a_k)$ tale che $\sum a_k^2 = 1$ e $\sum a_k^+ = \sum a_k^- = +\infty$ (per esempio (a_k) potrebbe essere la successione che genera la serie armonica a segni alterni, opportunamente rinormalizzata). Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ è possibile considerare un riordinamento $a^{(n)}$ di a tale che $S(a^{(n)}) = n$.

(c) Sia a come al punto (b) e si supponga, inoltre, che $S(a)$ sia finita e non nulla. Si definisca una successione $(a^{(n)})$ come segue: i primi n termini di $a^{(n)}$ coincidano coi primi n termini di a. I successivi termini di $(a^{(n)})$ siano ottenuti riordinando i termini di a dal $(n+1)$-esimo in poi in modo tale che $S(a^{(n)}) = 0$. È allora chiaro che $a^{(n)} \to a$ in ℓ^2 e $S(a^{(n)}) = 0 \neq S(a)$.

Esercizio 4.

(a) Si noti innanzitutto che K contiene solo successioni non negative. Che K sia convesso e non vuoto è evidente. La chiusura di K segue dal fatto che se $a^{(n)} \to a$ in ℓ^2, allora $a_k^{(n)} \to a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

($b1$) Se $b \notin H$, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{k=1}^n b_k > 0$. Si scelga allora $a^{(N)}$ come la successione tale che $a_k^{(N)} = N$ per $k \leq n$ $a_k^{(N)} = 0$ per $k > n$. Allora $a^{(N)} \in K$ e dunque $\varphi(a^{(N)}) = 0$; inoltre,

$$\varphi^*(b) \geq \left(b, a^{(N)}\right) = N \sum_{k=1}^{n} b_k$$

e il secondo membro tende a $+\infty$ per $N \to +\infty$.

($b2$) Sia $b \in H$. Allora per ogni $a \in K$ si ha

$$\begin{aligned}
0 &\geq (b_1 + b_2 + \cdots + b_k)a_k = (b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-1})a_k + b_k a_k \\
&\geq (b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-1})a_{k-1} + b_k a_k \\
&= (b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-2})a_{k-1} + b_{k-1}a_{k-1} + b_k a_k \\
&\geq (b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-2})a_{k-2} + b_{k-1}a_{k-1} + b_k a_k \geq \cdots \geq \sum_{j=1}^{k} b_j a_j.
\end{aligned}$$

Esercizio 5.

(a) Segue facilmente dalla Lipschitzianità di f (che a sua volta segue dalle ipotesi).

(b) T è sempre continuo tranne nel caso in cui $p \neq \infty$ e $r = \infty$. La continuità, quando sussiste, può essere mostrata usando il teorema della convergenza dominata (nel caso $p = r = \infty$ ovviamente essa segue da (a)). Per quanto riguarda il caso $p \neq \infty$ e $r = \infty$, si prenda ad esempio $u_n = x^n$ e f una funzione che soddisfi le ipotesi e tale che $f(r) \equiv r$ almeno per $r \in [-1, 1]$.

(c) Si osservi innanzitutto che, poiché f è Lipschitz, la derivata debole di $f(u)$ è $f'(u)u'$ laddove $u \in W^{1,p}$. Data dunque $u_n \to u$ in $W^{1,p}$, grazie ad (a) è sufficiente mostrare che $f'(u_n)u_n' \to f'(u)u'$ (fortemente) in L^p. Ora, per le immersioni di Sobolev, abbiamo che $u_n \to u$ uniformemente; dunque dalla regolarità di f segue che $f'(u_n) \to f'(u)$ uniformemente (si noti che questo segue dalla continuità di f' e dall'uniforme limitatezza di $\{u_n\}$; non serve che f' sia Lipschitz). Un facile conto mostra allora che

$$\|f'(u_n)u_n' - f'(u)u'\|_p \leq \|(f'(u_n) - f'(u))u'\|_p + \|f'(u)(u_n' - u')\|_p \to 0.$$

(d) Poichè $H^1(0,1)$ è immerso con continuità in $C^0([0,1])$ e $f \in C^2$, esiste $M \geq 0$ dipendente da B tale che $|u(x)| + |f'(u(x))| + |f''(u(x))| \leq M$ per ogni $u \in B$ e per ogni $x \in [-1,1]$. Di qui segue allora

$$\begin{aligned}\|(f'(u_n) - f'(u))u'\|_2 + \|f'(u)(u_n' - u')\|_2 &\leq M\|u_n - u\|_\infty \|u'\|_2 + M\|u_n' - u'\|_2 \\ &\leq C\|u_n - u\|_{H^1},\end{aligned}$$

dove C dipende solo da B.