

4 – Topologie deboli, riflessività, separabilità

Esercizio. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$. Posto $f_n(x) := f(x + n)$, si discuta la convergenza della successione $\{f_n\}$ rispetto alle topologie forte e debole di $L^2(\mathbb{R})$.

Esercizio. Sia $\{u^{(n)}\}$ una successione di elementi di ℓ^2 . Si supponga che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $u_k^{(n)}$ tenda a un limite u_k e che il limite $u = (u_k)$ appartenga a ℓ_2 . È vero che allora $u^{(n)} \rightarrow u$ debolmente in ℓ^2 ?

Esercizio. Cercare una successione $\{u^{(n)}\}$ limitata in ℓ^1 tale che nessuna sua sottosuccessione converga debolmente.

Esercizio. Determinare una successione $\{x^{(n)}\} \subset \ell^\infty$ tale che $x^{(n)}$ tenda a un limite x debolmente-* in ℓ^∞ ma non debolmente in ℓ^∞ . Determinare la chiusura di c_0 in ℓ^∞ rispetto alla topologia debole-*.

Esercizio. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione convessa, s.c.i., pari e tale che $\varphi(0) = 0$.
(a) Dimostrare che φ induce un funzionale convesso

$$\Phi : \ell^p \rightarrow [0, +\infty], \quad \Phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x_k)$$

su ℓ^p , $1 \leq p \leq \infty$ (si noti che la serie può divergere, ma non oscillare). Discutere la semicontinuità inferiore di ℓ^p rispetto alle varie topologie (forte, debole, debole-*) significative.

(b) Si consideri ora il caso $p = 2$. Si assuma inoltre che φ sia di classe C^1 e si ponga $\beta(r) = \varphi'(r)$. Identificando ℓ^2 al suo duale per mezzo dell'usuale prodotto scalare, si determini il sottodifferenziale $\partial\Phi$.

(c) Nelle ipotesi di cui al punto (b), si supponga che $u^{(n)}$ e $v^{(n)}$ siano successioni di elementi di ℓ^2 tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $v^{(n)} \in \partial\Phi(u^{(n)})$. Si supponga inoltre:

$$\begin{aligned} u^{(n)} &\rightarrow u \quad \text{debolmente in } \ell^2, \\ v^{(n)} &\rightarrow v \quad \text{debolmente in } \ell^2, \\ \limsup_{n \nearrow \infty} (v^{(n)}, u^{(n)}) &\leq (v, u), \end{aligned}$$

dove $(\cdot, \cdot)$ indica il prodotto scalare di ℓ^2 . Indicando $v = (v_k)$ e $u = (u_k)$, si mostri che sotto tali ipotesi si ha che $v_k = \beta(u_k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (utilizzare il punto (b) e la definizione di sottodifferenziale).

Esercizio (dal tema d'esame 2014). Sia $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(r) = (r-1)^2$. Si definisca il funzionale J nel seguente modo:

$$J(u) := \begin{cases} \int_0^1 g(u(x)) \, dx & \text{se } u \geq 0 \text{ q.o. e } \int_0^1 g(u(x)) \, dx < +\infty, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1) \quad \boxed{\text{defi:J}}$$

- (a) Discutere la semicontinuità inferiore e la continuità di $J : L^2(0, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty]$.
- (b) Dire se $J : L^1(0, 1) \rightarrow (-\infty, +\infty]$ è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole di $L^1(0, 1)$.
- (c) Rispondere alle domande (a) e (b) sostituendo (1) con la seguente

$$J(u) := \begin{cases} \int_0^1 g(|u(x)|) \, dx & \text{se } \int_0^1 g(|u(x)|) \, dx < +\infty, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2) \quad \boxed{\text{defi:J:2}}$$

Esercizio. Siano $\{f_n\} \subset C([0, 1])$, $f \in C([0, 1])$. È vero che se $f_n \rightarrow f$ debolmente in $C([0, 1])$ allora $f_n \rightarrow f$ puntualmente? Viceversa, è vero che se $f_n \rightarrow f$ puntualmente allora $f_n \rightarrow f$ debolmente in $C([0, 1])$?

Esercizio. Sia E uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{P}$ una famiglia separata di seminorme (ovvero per ogni $x \in E \setminus \{0\}$ esista $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathcal{P}$ si definisca

$$V(p, n) := \{x \in E : p(x) < 1/n\}.$$

Sia $\mathcal{U}$ la famiglia composta dalle intersezioni finite degli insiemi della forma $V(p, n)$. Sia infine $\mathcal{B}$ la famiglia degli insiemi della forma $x + U$, ove $U \in \mathcal{U}$, $x \in E$. Si mostri che $\mathcal{B}$ è la base di una topologia τ su E (in altre parole, τ è composta, secondo la nomenclatura di Brezis, dalle “unioni qualunque” degli insiemi di $\mathcal{B}$). Caratterizzare inoltre la convergenza di una successione $\{x_n\} \subset E$ rispetto alla topologia τ in termini delle seminorme in $\mathcal{P}$. Supponendo che $\mathcal{P}$ sia numerabile, si può dire qualcosa sulla metrizzabilità di τ ? Meditare infine sul seguente esempio:

$$E = C(\mathbb{R}), \quad p_n(f) := \max_{x \in [-n, n]} |f(x)|, \quad \mathcal{P} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

N.B.: La dimostrazione è un esercizio di teoria degli insiemi che non differisce molto dal procedimento usato nella costruzione della topologia debole. In più, occorre tener presente della presenza delle traslazioni. Si suggerisce di verificare che, dati due insiemi A e B della topologia τ e dato un punto $z \in A \cap B$, esiste un insieme della forma $x + U_x$ tale che $U_x \in \mathcal{U}$ e $z \in x + U_x \subset A \cap B$.