2 – Teorema di Hahn-Banach, funzioni convesse, sottodifferenziali

Esercizio. Sia E uno spazio vettoriale normato su $\mathbb{R}$. Dimostrare che le applicazioni $\oplus : E \times E \to E$ e $\otimes : \mathbb{R} \times E \to E$ definite rispettivamente da $\oplus : (x, y) \mapsto x + y$ e da $\otimes : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sono continue. Sono anche Lipschitz?

Esercizio. Sia $E = \mathbb{R}^N$ dotato della norma $|x|_1 := \sum_{i=1}^N |x_i|$.

(a) Esplicitare la norma nello spazio duale E' (ovvero, se $\xi = \sum_{i=1}^N \lambda_i e^i \in E'$, esprimere $|\xi|_{E'}$ in termini delle componenti λ_i).

(b) Caratterizzare, al variare di $x \in E$, la dualità $\mathcal{F}(x)$. Per quali $x \in E$ si ha che $\mathcal{F}(x)$ contiene un solo elemento?

(c) Rispondere alle domande (a) e (b) nel caso in cui invece $E = \mathbb{R}^N$ sia dotato della norma $|x|_\infty := \max_{i=1}^N |x_i|$.

Esercizio. Sia ℓ^∞ lo spazio delle successioni limitate dotato dell'usuale norma del sup, indicata con $\|\cdot\|_\infty$. Determinare, al variare di $u \in \ell^\infty$, l'insieme $\mathcal{F}(u) \subset (\ell^\infty)'$ (dove $\mathcal{F}$) denota la mappa di dualità. Si ricordi che il duale di ℓ^∞ contiene una copia isometrica di ℓ^1 (tuttavia, tale inclusione è *stretta*).

Esercizio. (a) Si consideri, su $\mathbb{R}^N$ dotato dell'usuale topologia euclidea, il funzionale $\varphi(x) := |x|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$. Determinare il sottodifferenziale $\partial\varphi(x)$.

(b) Si consideri ora, il funzionale $\varphi : \ell^2 \to [0, +\infty]$ definito da

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^\infty |x_i| & \text{se } x \in \ell^1 = D(\varphi), \\ +\infty & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

Determinare il sottodifferenziale $\partial\varphi(x)$ e, in particolare, il dominio $D(\partial\varphi) = \{x \in \ell^2 : \partial\varphi(x) \neq \emptyset\}$. Si usi il fatto che ℓ^2 è uno spazio di Hilbert e può essere identificato al suo duale usando il prodotto scalare (questo fatto verrà dimostrato più avanti nel corso).

Esercizio (esercizio 1.9 Brezis). Dimostrare che, per uno spazio vettoriale normato E di dimensione finita è sempre possibile separare in senso largo due insiemi convessi disgiunti A e B tramite un iperpiano, senza ipotesi aggiuntive. Procedere secondo il seguente schema:

(a) Sia $C \subset E$ un convesso tale che $0 \notin C$. Sia anche $\{x_n\}$ un sottoinsieme numerabile denso di C. Sia C_n l'*inviluppo convesso dei primi n punti*, ovvero

$$C_n := \left\{ x = \sum_{i=1}^n t_i x_i : \ t_i \in [0, 1], \ \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}.$$

Dimostrare che C_n è compatto e che $C_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ è denso in C.

(b) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $f_n \in E'$ tale che $\|f_n\|_{E'} = 1$ e $\langle f_n, x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in C_n$ (qual è il significato geometrico di questa relazione?).

(c) Dimostrare che è possibile separare C e $\{0\}$ (in senso largo) tramite un iperpiano, o più precisamente che esiste $f \in E'$ tale che $\|f\|_{E'} = 1$ e $\langle f, x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in C$.

(d) Dimostrare che è sempre possibile separare due insiemi convessi disgiunti A e B non vuoti di E in senso largo tramite un iperpiano.

Esercizio (parzialmente tratto dall'esercizio 1.18 Brezis). Determinare la convessa coniugata e il sottodifferenziale delle seguenti funzioni:

(a) $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ definita, per $p \in (1, \infty)$, da

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}|x|^p & \text{se } x \geq 0, \\ +\infty & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

(b) $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ definita, per $p \in (0, 1)$, da

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{p}|x|^p & \text{se } x \geq 0, \\ +\infty & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

(c) $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ definita, per $p \in (0, 1)$, da

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}|x|^p & \text{se } x \geq 0, \\ +\infty & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(in questo caso φ non è convessa...).

Esercizio. Sia E uno spazio vettoriale normato su $\mathbb{R}$. Sia $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione propria (non necessariamente convessa, né s.c.i.). Dimostrare che φ^* è propria se e solo se esistono $g \in E'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi(x) \geq \langle g, x\rangle + \alpha \quad \text{per ogni } x \in E.$$

Esercizio. Sia E uno spazio vettoriale topologico e sia $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dimostrare che f è sequenzialmente s.c.i. in ogni punto $x_0 \in E$ se e soltanto se $\operatorname{epi}\varphi$ è sequenzialmente chiuso.

Esercizio. Sia $H = L^2(0, 1)$, identificato al suo duale tramite l'usuale prodotto scalare. Sia $\varphi : H \to [0, +\infty]$ definita da

$$\varphi(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 |u'(x)|^2 \, \mathrm{d}x & \text{se } u \in C^1(0,1) \text{ e } u' \in L^2(0,1), \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In particolare, il dominio $D(\varphi)$ è per definizione dato dalle funzioni $u \in C^1(0, 1)$ tali che u e u' siano di quadrato sommabile.

(a) Dire se φ è convessa e se è semicontinua inferiormente.

(b) Determinare una classe di funzioni $u \in H$ per le quali il sottodifferenziale $\partial\varphi(u)$ certamente non è vuoto (la caratterizzazione completa di $D(\partial\varphi)$ non è possibile a questo livello del corso). Congetturare inoltre “come è fatto” $\partial\varphi(u)$.

Esercizio. Sia E uno spazio vettoriale normato. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa, s.c.i., propria e **pari**. Si ponga

$$\Phi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \Phi(u) := \varphi(\|u\|_E).$$

Dimostrare che Φ è convessa, s.c.i. e propria. Caratterizzare inoltre $\Phi^* : E' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. **Suggerimento:** può essere utile osservare che $\varphi = \varphi^{**}$ grazie al teorema di Fénchel-Moreau.