Gianni Gilardi

Analisi Funzionale

(un possibile Corso di Analisi Funzionale)

aggiornamento del 4 febbraio 2011

Indice

Introduzione

Un normale corso di Analisi Funzionale non può che vertere su argomenti scelti. Inoltre il docente può privilegiare l'aspetto teorico e massimizzare il numero dei temi trattati e dei risultati dimostrati oppure limitare questa gamma a favore di qualche applicazione significativa. Queste pagine, ispirate inizialmente al corso tenuto dall'autore nell'anno accademico 2007/08 e successivamente riviste e arricchite, seguono la seconda delle due direzioni prospettate e riguardano argomenti scelti della teoria degli spazi di Banach, di Hilbert e vettoriali topologici che possono costituire il materiale per un primo corso. Prima di tutto presentiamo le nozioni fondamentali su spazi normati e prehilbertiani, completezza e operatori lineari e diamo le basi della teoria degli spazi di Hilbert. Successivamente trattiamo il Teorema di Hahn-Banach, nelle sue forme analitiche e geometriche, e ne diamo parecchie applicazioni. Ciò ci induce ad abbozzare l'inizio di altrettante teorie. Dopo un breve capitolo dedicato ai punti salienti della teoria degli spazi riflessivi introduciamo altri teoremi fondamentali che fanno capo ancora a Banach, quali il Teorema di Banach-Steinhaus e il Teorema di Banach-Schauder dell'applicazione aperta, anche in questo caso con applicazioni significative. Terminiamo con qualche nozione sugli spazi localmente convessi, con particolare riguardo alle topologie deboli degli spazi normati e agli spazi funzionali più importanti.

Come si vede, abbiamo rinunciato a parlare di alcuni argomenti, anche molto importanti, come quella di spettro di un operatore, a favore di qualche applicazione concreta. Un particolare riguardo, ad esempio, è stato riservato alle questioni di compattezza, ai problemi di minimo e all'introduzione degli spazi funzionali di uso corrente. Il testo contiene infine numerosi esercizi.

Ora qualche informazione di carattere generale che riteniamo opportuno dare subito.

Nel seguito trattiamo di spazi vettoriali reali o complessi. Se non viene specificato nulla al riguardo, resta inteso che lo spazio da considerare è indifferentemente reale o complesso. In tal caso $\mathbb{K}$ denota il campo degli scalari che, dunque, è indifferentemente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Il simbolo $\square$ segnala la fine di una definizione, o dell'enunciato di un teorema, eccetera, oppure la fine di una dimostrazione. Lo stesso simbolo è poi usato in generale per meglio evidenziare la fine di una unità logica e staccare tale unità dal discorso successivo.

Per dare un minimo di autosufficienza a queste pagine, riuniamo nell'appendice vari richiami su spazi topologici e teoria della misura e dell'integrazione, nonché un breve paragrafo sul Lemma di Zorn. Naturalmente questa appendice non pretende di essere in alcun modo esaustiva.

Nel corso dei vari capitoli i paragrafi vengono numerati progressivamente all'interno di ogni capitolo, mentre teoremi, lemmi, corollari, osservazioni, definizioni, esempi, esercizi vengono numerati progressivamente e senza distinzione di tipo all'interno di ogni paragrafo. Il contrassegno dei paragrafi è un numero p e il contrassegno di teoremi (o lemmi, eccetera) del Paragrafo p ha la forma $p\,.\,n$, ove n è il numero progressivo del teorema (o lemma, eccetera). Per quanto riguarda le formule, vale una regola analoga che differisce dalla precedente solo per l'aggiunta di una coppia di parentesi tonde. La citazione del Paragrafo p o del Teorema $p\,.\,n$ (o lemma, eccetera) o della formula $(p\,.\,n)$ è testuale se questa avviene nel corso dello stesso capitolo. Nel caso di citazioni da altri capitoli o dall'Appendice usiamo rispettivamente le scritture $N.p$, $N.p\,.\,n$ e $(N.p\,.\,n)$ ove N è il numero romano maiuscolo del capitolo o il simbolo A di Appendice.

Infine ringrazio gli studenti che mi hanno segnalato errori e refusi delle versioni precedenti.

G. Gilardi

Capitolo 1
Norme e prodotti scalari

Come abbiamo anticipato nell'Introduzione, considereremo spazi vettoriali indifferentemente reali o complessi, salvo avviso contrario. Ritenendo che i punti fondamentali della relativa teoria facciano parte del bagaglio del lettore, abbiamo evitato di scrivere nell'appendice un paragrafo apposito. D'altra parte è opportuno fissare almeno alcune notazioni.

1. Spazi vettoriali

Innanzi tutto il simbolo $\mathbb{K}$ denota il campo degli scalari dello spazio vettoriale considerato, campo che, dunque, è sempre $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$. Se V è uno spazio vettoriale e X è un suo sottoinsieme non vuoto, poniamo

$$\operatorname{span} X = \left\{ \sum_i \lambda_i x_i : \ \lambda_i \in \mathbb{K}, \ x_i \in X \right\} \tag{1.1}$$

ove è inteso che le somme siano finite. L'insieme $\operatorname{span} X$ è un sottospazio vettoriale di V, precisamente il più piccolo sottospazio che include X. Se Y è un altro sottoinsieme di V, x_0 è un punto di V e $\lambda \in \mathbb{K}$ è uno scalare non nullo, poniamo

$$X + Y = \{x + y : \ x \in X \text{ e } y \in Y\} = \{v \in V : \ \exists\, x \in X \ \exists\, y \in Y : \ v = x + y\} \tag{1.2}$$

$$x_0 + Y = \{x_0\} + Y = \{x_0 + y : \ y \in Y\} = \{v \in V : \ v - x_0 \in Y\} \tag{1.3}$$

$$\lambda X = \{\lambda x : \ x \in X\} = \{v \in V : \ v/\lambda \in X\}. \tag{1.4}$$

Se X e Y sono sottospazi, anche $X + Y$ è un sottospazio, detto *sottospazio somma*. Se poi $X \cap Y = \{0\}$ la rappresentazione del generico punto di $X + Y$ nella forma $x + y$ con $x \in X$ e $y \in Y$ è unica e la somma viene chiamata *diretta* (e si scrive anche $X \oplus Y$ anziché $X + Y$). Inoltre, se V e W sono due spazi vettoriali e $L : V \to W$ è lineare, denotiamo con $G(L)$, $N(L)$ e $R(L)$ il grafico, il nucleo e l'immagine di L. Questi sono sottospazi vettoriali di $V \times W$, V e W rispettivamente. Poniamo poi $D(L) = V$, il dominio di L. Poniamo infine

$$\operatorname{Hom}(V; W) = \{L : V \to W \text{ lineari}\}. \tag{1.5}$$

Anche $\operatorname{Hom}(V; W)$ diventa uno spazio vettoriale con le operazioni definite nel modo abituale.

2. Seminorme, norme e prodotti scalari

Le nozioni di norma e di prodotto scalare sono già note al lettore, almeno nelle situazioni più elementari. Qui facciamo il punto della situazione.

2.1. Definizione. *Sia V uno spazio vettoriale. Una seminorma in V è una funzione $p : V \to \mathbb{R}$ che gode delle proprietà seguenti:*

$$i) \ \ p(x + y) \le p(x) + p(y) \quad \text{per ogni } x, y \in V \tag{2.1}$$

$$ii) \ \ p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \quad \text{per ogni } x \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}. \tag{2.2}$$

Una norma in V è una seminorma p in V che verifica anche

$$iii) \ \ p(x) = 0 \quad \text{implica} \quad x = 0. \ \square \tag{2.3}$$

Le proprietà $i)$ e $ii)$ sono dette *subadditività* e *omogeneità* rispettivamente. Tuttavia la subadditività è spesso chiamata *disuguaglianza triangolare* (e lo stesso nome è usato per la disuguaglianza che ora dimostriamo) dato che questa implica la disuguaglianza triangolare della metrica corrispondente che introduciamo fra breve.

2.2. Proposizione. *Siano* V *uno spazio vettoriale e* $p : V \to \mathbb{R}$ *una seminorma in* V *. Allora*

$$|p(x) - p(y)| \le p(x - y) \quad \text{per ogni } x, y \in V \tag{2.4}$$

$$p(0) = 0 \quad \text{e} \quad p(x) \ge 0 \quad \text{per ogni } x \in V. \ \square \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Per la (2.1) si ha subito $p(x) \le p(x-y) + p(y)$ e $p(y) \le p(y-x) + p(x)$. D'altra parte $p(y-x) = p(x-y)$ per la (2.2) con $\lambda = -1$. Combinando si ottiene la (2.4). Applicando la (2.2) con $\lambda = 0$ e $x = 0$ si deduce $p(0) = 0$. Dunque, per ogni x , anche $p(x) = p(x-0) \ge |p(x) - p(0)| = |p(x)| \ge 0$. $\square$

2.3. *Esercizio.* Si dimostri che, se p è una seminorma nello spazio vettoriale V , l'insieme $N(p) = \{x \in V : \ p(x) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V . Esso è chiamato *nucleo di* p .

2.4. Definizione. *Sia* V *uno spazio vettoriale. Un forma bilineare in* V *è un'applicazione* $b : V \times V \to \mathbb{K}$ *che verifica*

$$b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\, b(x, z) + \beta\, b(y, z) \quad \text{e} \quad b(z, \alpha x + \beta y) = \alpha\, b(z, x) + \beta\, b(z, y)$$

per ogni $x, y, z \in V$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *. Un forma sesquilineare* V *è un'applicazione* $b : V \times V \to \mathbb{K}$ *che verifica*

$$b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\, b(x, z) + \beta\, b(y, z) \quad \text{e} \quad b(z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}\, b(z, x) + \overline{\beta}\, b(z, y)$$

per ogni $x, y, z \in V$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *. Una forma bilineare* b *è detta simmetrica quando*

$$b(y, x) = b(x, y) \quad \text{per ogni } x, y \in V$$

e una forma sesquilineare b *è detta hermitiana quando*

$$b(y, x) = \overline{b(x, y)} \quad \text{per ogni } x, y \in V\ . \ \square$$

2.5. Osservazione. Naturalmente, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, coincidono i concetti di forma bilineare e di forma sesquilineare, così come quelli di forma simmetrica e di forma hermitiana. Per unificare i due casi, dunque, possiamo parlare solo di forme sesquilineari e di forme hermitiane. Si vede subito che per ogni forma sesquilineare hermitiana valgono le proprietà

i) $b(x, x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in V$, nei casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
ii) $b(x+y, x+y) = b(x, x) + 2\operatorname{Re} b(x, y) + b(y, y)$ per ogni $x, y \in V$, nei casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$
iii) $b(x+iy, x+iy) = b(x, x) + 2\operatorname{Im} b(x, y) + b(y, y)$ per ogni $x, y \in V$, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

La *i)* giustifica eventuali ipotesi sul *segno di* $b(x, x)$ e le altre due possono ragionevolmente essere chiamate *formule del binomio*. Si noti che, scrivendo queste ultime con $\pm y$ anziché con y e combinando, si ottengono le formule

iv) $b(x, y) = \dfrac{1}{4}\Big(b(x+y, x+y) - b(x-y, x-y)\Big)$
v) $b(x, y) = \dfrac{1}{4}\Big(b(x+y, x+y) - b(x-y, x-y)\Big) + \dfrac{i}{4}\Big(b(x+iy, x+iy) - b(x-iy, x-iy)\Big)$

valide per ogni $x, y \in V$ nei casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ rispettivamente.

2.6. Definizione. *Sia* V *uno spazio vettoriale. Una forma* b *sesquilineare hermitiana in* V *è detta semidefinita positiva quando* $b(x, x) \ge 0$ *per ogni* $x \in V$ *e definita positiva quando* $b(x, x) > 0$ *per ogni* $x \ne 0$ *. Un prodotto scalare in* V *è una forma sesquilineare hermitiana definita positiva.* $\square$

2.7. Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale e b una forma sesquilineare hermitiana semidefinita positiva in V. Allora vale la disuguaglianza*

$$|b(x,y)| \le (b(x,x))^{1/2} (b(y,y))^{1/2} \quad \text{per ogni } x,y \in V \tag{2.6}$$

detta disuguaglianza di Schwarz o di Cauchy-Schwarz. □

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $b(x,y) \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$, risulta

$$0 \le b(tx-y, tx-y) = b(tx,tx) - 2\,\mathrm{Re}\, b(tx,y) + b(y,y) = t^2 b(x,x) - 2tb(x,y) + b(y,y). \tag{2.7}$$

Se $b(x,x) = 0$ allora si ha anche $b(x,y) = 0$, altrimenti la (2.7) diventerebbe falsa per qualche $t \in \mathbb{R}$. Ma allora la (2.6) è banalmente vera. Se $b(x,x) > 0$, la (2.7) implica che il discriminante del polinomio è ≤ 0, cioè che $b(x,y)^2 - b(x,x)\,b(y,y) \le 0$, cioè la (2.6). In particolare ciò conclude la dimostrazione quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ senza ipotesi ulteriori, scriviamo $b(x,y) = \rho e^{i\vartheta}$ con $\rho, \vartheta \in \mathbb{R}$. Posto $z = e^{i\vartheta} y$, si ha $b(x,z) = e^{-i\vartheta} b(x,y) = \rho \in \mathbb{R}$ e la prima parte della dimostrazione fornisce

$$|b(x,y)|^2 = |b(x, e^{-i\vartheta} z)|^2 = |b(x,z)|^2 \le b(x,x)\, b(z,z) = b(x,x)\, b(y,y)$$

da cui la (2.6) anche in questo caso. □

2.8. Osservazione. Per le norme di solito si usa il simbolo $\|\cdot\|$, eventualmente con qualche indice per distinguere una norma dall'altra, in sostituzione di $p(\cdot)$. Noi, in generale, adotteremo questa consuetudine tranne quando $V = \mathbb{K}^n$, nel qual caso useremo il simbolo $|\cdot|$ (con eventuali indici). Scritture del tipo $|\cdot|$ saranno utilizzate invece per denotare seminorme specifiche in certi spazi di dimensione infinita che introdurremo nei vari esempi. Per i prodotti scalari useremo la notazione $(\cdot\,,\cdot)$, al solito con eventuali indici, tranne in casi particolari.

3. Spazi normati e prehilbertiani

In questo paragrafo formalizziamo le definizioni di spazio normato e di spazio prehilbertiano e vediamo le relazioni fra questi tipi di spazi, gli spazi metrici e gli spazi topologici.

3.1. Definizione. *Uno spazio normato è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ ove V è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ è una norma in V. Uno spazio prehilbertiano è una coppia $(V, (\cdot\,,\cdot))$ ove V è uno spazio vettoriale e $(\cdot\,,\cdot)$ è un prodotto scalare in V.* □

3.2. Proposizione. *Sia $(V, (\cdot\,,\cdot))$ uno spazio prehilbertiano. Allora la formula*

$$\|x\| = (x,x)^{1/2}, \quad x \in V \tag{3.1}$$

definisce una norma in V. □

Dimostrazione. Innanzitutto la (3.1) ha senso in quanto $(x,x) \ge 0$ per ogni x. Vediamo la subadditività. Per la Proposizione 2.7, vale la disuguaglianza di Schwarz (2.6), che nel nostro caso e con la definizione (3.1) si scrive

$$|(x,y)| \le \|x\|\,\|y\| \quad \text{per ogni } x,y \in V. \tag{3.2}$$

Usando la formula del binomio, abbiamo pertanto

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

e la subadditività segue immediatamente. Siccome l'identità di omogeneità $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ è evidente, $\|\cdot\|$ è una seminorma. Infine $\|x\| = 0$ significa $(x,x) = 0$ e dunque implica $x = 0$. □

3.3. Definizione. *Sia $(V, (\cdot\,,\cdot))$ uno spazio prehilbertiano. La norma $\|\cdot\|$ definita dalla* (3.1) *si chiama norma indotta dal prodotto scalare.* □

Tuttavia, per abbreviare le notazioni, si useranno spesso frasi del tipo *sia V uno spazio normato* oppure *sia V uno spazio prehilbertiano*, senza cioè evidenziare la norma o il prodotto scalare nella notazione stessa. Resta inteso che occorre pensare di aver fissato una norma o un prodotto scalare cui fare riferimento sistematico.

3.4. Definizione. *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. La funzione $d : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da*

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad \text{per } x,y \in V \tag{3.3}$$

si chiama metrica indotta dalla norma. La palla unitaria, la palla chiusa unitaria e la sfera unitaria di V sono la palla $B_1(0)$, la palla chiusa $\overline{B}_1(0)$ e la sfera $\partial B_1(0)$ rispetto alla metrica d. □

Si verifica immediatamente che d è effettivamente una metrica. Per dire che una successione $\{x_n\}$ converge all'elemento x si scrive anche $x_n \to x$.

Dunque, se si considera prima la metrica indotta e poi anche la topologia indotta da questa metrica, possiamo affermare che

ogni spazio prehilbertiano è anche uno spazio normato (3.4)

ogni spazio prehilbertiano o normato è anche uno spazio metrico (3.5)

ogni spazio prehilbertiano o normato o metrico è anche uno spazio topologico (3.6)

in modo canonico.

3.5. *Esercizio.* Verificare che in ogni spazio normato la norma è una funzione continua.

3.6. *Esercizio.* Dedurre dalla disuguaglianza di Schwarz che il prodotto scalare è una funzione continua, cioè tale che le convergenze $x_n \to x$ e $y_n \to y$ implicano $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

3.7. Osservazione. Le affermazioni precedenti (3.4–6), tuttavia, meritano un commento. Mentre due diverse metriche in un insieme possono indurre la stessa topologia, non può accadere che due diversi prodotti scalari in uno spazio vettoriale V inducano la stessa norma, né che due norme diverse inducano la stessa metrica. Tenendo conto delle formule *iv*) e *v*) dell'Osservazione 2.5, abbiamo infatti: *i*) se $\|\cdot\|$ è la norma indotta dal prodotto scalare $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, allora, per ogni $x, y \in V$ valgono le formule

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$
$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$$

rispettivamente nei casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; *ii*) se d è la metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|$, allora

$$\|x\| = d(x,0) \quad \text{per ogni } x \in V.$$

Quindi fissato lo spazio vettoriale V e considerate la famiglia $\mathcal{P}$ degli spazi prehilbertiani, quella $\mathcal{N}$ degli spazi normati, quella $\mathcal{M}$ degli spazi metrici e quella $\mathcal{T}$ degli spazi topologici che si possono costruire su V, abbiamo che le corrispondenze stabilite sopra sono, di fatto, delle applicazioni

$$\mathcal{P} \xrightarrow{\;I_{pn}\;} \mathcal{N} \xrightarrow{\;I_{nm}\;} \mathcal{M} \xrightarrow{\;I_{mt}\;} \mathcal{T}$$

le prime due delle quali sono iniettive, al contrario della terza. Dunque, quando si afferma, ad esempio, che gli spazi normati sono anche metrici, si interpreta I_{nm} semplicemente come identificazione. Ma ciò è effettivamente lecito per quanto riguarda I_{pn} e I_{nm}, e possiamo scrivere $\mathcal{P} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, mentre non possiamo interpretare l'applicazione I_{mt} come identificazione dato che essa non è iniettiva. In particolare è improprio l'uso di frasi del tipo "lo spazio topologico considerato è metrico (normato, prehilbertiano)", la frase corretta essendo "esiste *una* metrica (*una* norma, *un* prodotto scalare) che induce la topologia considerata". In alternativa si dice che "lo spazio topologico considerato è *metrizzabile* (*normabile, prehilbertizzabile*)". I risultati dati di seguito caratterizzano gli spazi metrici che sono anche normati e gli spazi normati che sono anche prehilbertiani.

3.8. Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale e d una metrica in V. Allora d è indotta da una norma se e solo se valgono le condizioni*

$$\begin{aligned} &i)\ d(x+z,y+z)=d(x,y) \quad \text{per ogni } x,y,z\in V \\ &ii)\ d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\,d(x,y) \quad \text{per ogni } x,y\in V \text{ e } \lambda\in\mathbb{K} \end{aligned}$$

dette di invarianza per traslazioni e di omogeneità. □

Dimostrazione. La necessità delle condizioni è ovvia. Per quanto riguarda la sufficienza, poniamo $\|x\| = d(x,0)$ per $x\in V$ e controlliamo che $\|\cdot\|$ è una norma e che la distanza che essa induce è proprio d. Per $x,y\in V$ si ha $\|x+y\| = d(x+y,0) = d(x,-y) \le d(x,0)+d(0,-y) = d(x,0)+d(y,0) = \|x\|+\|y\|$. Se poi $\lambda\in\mathbb{K}$ risulta $\|\lambda x\| = d(\lambda x,0) = |\lambda|\,d(x,0) = |\lambda|\,\|x\|$. Infine $\|x-y\| = d(x-y,0) = d(x,y)$. □

3.9. Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma in V. Allora $\|\cdot\|$ è indotta da un prodotto scalare se e solo se vale la formula*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2 \quad \textit{per ogni } x,y\in V. \tag{3.7}$$

detta regola del parallelogrammo. □

Dimostrazione. La necessità della condizione (3.7) segue facilmente dalle formule del binomio viste nell'Osservazione 2.5, per cui passiamo subito alla sufficienza. L'Osservazione 3.7 suggerisce il candidato prodotto scalare. Supponendo dapprima $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, prendiamo

$$(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\Big) \quad \text{per } x,y\in V. \tag{3.8}$$

La simmetria è ovvia e la positività è immediata in quanto $(x,x)=\|x\|^2$, da cui anche il fatto che, ammesso che $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ sia davvero un prodotto scalare, la norma indotta è quella assegnata. Rimane allora da verificare la linearità rispetto a uno dei due argomenti, diciamo, il primo, vale a dire

$$(x+y,z)=(x,z)+(y,z) \quad \text{e} \quad (\lambda x,y)=\lambda(x,y) \quad \text{per ogni } x,y,z\in V \text{ e } \lambda\in\mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Per $x,y,z\in V$ si ha

$$\begin{aligned} (x,z)+(y,z) &= \frac14\Big(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2\Big)+\frac14\Big(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2\Big) \\ &= \frac14\Big(\|x+z\|^2+\|y+z\|^2\Big)-\frac14\Big(\|x-z\|^2+\|y-z\|^2\Big) \\ &= \frac18\Big(\|x+y+2z\|^2+\|x-y\|^2\Big)-\frac18\Big(\|x+y-2z\|^2+\|x-y\|^2\Big) \\ &= \frac12\Big(\|\tfrac12(x+y)+z\|^2-\|\tfrac12(x+y)-z\|^2\Big) = 2\Big(\tfrac12(x+y),z\Big). \end{aligned}$$

Prendendo in particolare $y=0$ otteniamo $(x,z)=2(x/2,z)$ per ogni x,z in quanto $(0,z)=0$ per la (3.8). Segue $2(\frac12(x+y),z)=(x+y,z)$ per ogni x,y,z e la formula dimostrata sopra diventa la prima delle (3.9). Dimostriamo ora la seconda procedendo per gradi. Dalla prima segue subito la seconda con $\lambda>0$ intero arbitrario. Inoltre la formula già dimostrata $(x,y)=2(x/2,y)$ corrisponde alla verifica relativa al caso $\lambda=1/2$. Iterando otteniamo $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ per ogni x,y se $\lambda=2^{-n}$ con n intero positivo. Combinando con quanto appena detto vediamo che la stessa formula vale se λ appartiene all'insieme A dei numeri reali del tipo $\lambda=m\cdot 2^{-n}$ con m,n interi positivi, insieme che è denso in $(0,+\infty)$. Sia ora λ reale positivo. Scelta una successione $\{\lambda_k\}$ di elementi di A convergente a λ, abbiamo da un lato $\lim_{k\to\infty}(\lambda_k x,y)=\lim_{k\to\infty}\lambda_k(x,y)=\lambda(x,y)$. D'altra parte la (2.4) e la (2.2) implicano

$$\big|\|\lambda_k x\pm y\|-\|\lambda x\pm y\|\big| \le \|\lambda_k x-\lambda x\| = |\lambda_k-\lambda|\,\|x\| \quad \text{da cui} \quad \lim_{k\to\infty}\|\lambda_k x\pm y\| = \|\lambda x\pm y\|.$$

Applicando la (3.8) deduciamo che $\lim_{k\to\infty}(\lambda_k x, y) = (\lambda x, y)$. Dunque l'uguaglianza desiderata di (3.9) vale per ogni $\lambda > 0$. Il caso $\lambda = 0$ è banale. Abbiamo infine $(x,y)+(-x,y) = (x-x,y) = 0$, da cui $(-x,y) = -(x,y)$, e concludiamo che l'uguaglianza in questione vale anche per ogni $\lambda < 0$.

Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ prendiamo invece

$$(x,y) = \frac{1}{4}\Bigl(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Bigr) + \frac{i}{4}\Bigl(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\Bigr) \quad \text{per } x,y \in V \tag{3.10}$$

e ancora l'unico controllo degno di nota è quello della linearità nel primo argomento. A tal fine denotiamo con $(x,y)'$ il primo membro della (3.8), così che vale la formula

$$(x,y) = (x,y)' + i(x,iy)' \quad \text{per ogni } x,y \in V .$$

Osservato che tutto il discorso fatto nel caso reale dipende solo dalle proprietà formali utilizzate, vediamo che per $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)'$ vale tutto quanto abbiamo dimostrato sopra. Per ogni $x,y,z \in V$ abbiamo in particolare

$$(x+y,z)' = (x,z)' + (y,z)' \quad \text{e} \quad (x+y,iz)' = (x,iz)' + (y,iz)' \quad \text{da cui} \quad (x+y,z) = (x,z) + (y,z)$$
$$\text{e anche} \quad (\lambda x,y)' = \lambda(x,y)' \quad \text{se } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sia ora $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$ e $\beta = \operatorname{Im}\lambda$, combinando quanto appena dimostrato, otteniamo facilmente

$$\begin{aligned}(\lambda x,y) &= \alpha(x,y)' + \beta(ix,y)' + i\alpha(x,iy)' + i\beta(ix,iy)' \\ \lambda(x,y) &= \alpha(x,y)' + i\beta(x,y)' + i\alpha(x,iy)' - \beta(x,iy)'.\end{aligned}$$

D'altra parte si vede subito che $(ix,y)' = -(x,iy)'$ e $(ix,iy)' = (x,y)'$. Pertanto $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$. □

Siccome nel seguito tratteremo spesso di isometrie e di isomorfismi, conviene fissare la terminologia una volta per tutte e formalizzarla nelle definizioni date di seguito. Facciamo notare che nella definizione di isometria non imponiamo la suriettività.

3.10. Definizione. *Se (X,d) e (X',d') sono due spazi metrici, un'applicazione isometrica, o isometria, del primo nel secondo è un'applicazione $f : X \to X'$ che verifica la condizione $d'(f(x),f(y)) = d(x,y)$ per ogni $x,y \in X$. I due spazi metrici sono isometrici quando esiste un'isometria suriettiva del primo sul secondo.* □

3.11. Definizione. *Se V e W sono due spazi vettoriali, un isomorfismo algebrico di V su W è un elemento $L \in \operatorname{Hom}(V;W)$ che sia un'applicazione biiettiva. I due spazi sono algebricamente isomorfi quando esiste un isomorfismo algebrico del primo sul secondo.* □

3.12. Definizione. *Se V e W sono spazi normati, un isomorfismo del primo sul secondo è un isomorfismo algebrico L tale che L e L^{-1} siano funzioni continue. Un isomorfismo è isometrico quando è anche un'isometria rispetto alle metriche indotte dalle rispettive norme. I due spazi normati sono isomorfi quando esiste un isomorfismo del primo sul secondo e sono isometricamente isomorfi quando esiste un isomorfismo isometrico del primo sul secondo.* □

3.13. Osservazione. Se $(V,\|\cdot\|_V)$ e $(W,\|\cdot\|_W)$ sono due spazi normati, si vede immediatamente che un'applicazione $L \in \operatorname{Hom}(V;W)$ è un'isometria se e solo se

$$\|Lx\|_W = \|x\|_V \quad \text{per ogni } x \in V .$$

Nel caso degli spazi prehilbertiani, tenendo conto dell'Osservazione 3.7, vediamo che ogni applicazione lineare isometrica L conserva anche i prodotti scalari, cioè

$$(Lx,Ly)_W = (x,y)_V \quad \text{per ogni } x \in V .$$

Possiamo fare anche un'altra osservazione. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $L : V \to W$ un isomorfismo algebrico. Se $\|\cdot\|_W$ è una norma in W e se definiamo $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}$ mediante la formula $\|x\|_V = \|Lx\|_W$, è chiaro che $\|\cdot\|_V$ è una norma in V che rende L isomorfismo isometrico. In particolare, se $\|\cdot\|_W$ è prehilbertiana, lo stesso vale per $\|\cdot\|_V$. □

Presentiamo ora qualche semplice esempio di spazio normato o prehilbertiano, riservandoci di dare una gamma più ricca e significativa in un paragrafo successivo.

3.14. Esempio (spazio degli scalari). Dopo lo spazio ridotto al solo elemento nullo, l'esempio più semplice di spazio prehilbertiano è quello del campo $\mathbb{K}$ stesso degli scalari. Il prodotto scalare di due elementi $x, y \in \mathbb{K}$ è dato da $x\overline{y}$. La norma indotta è il modulo e la distanza indotta è $d(x, y) = |x - y|$.

3.15. *Esercizio.* Dimostrare che le norme in $\mathbb{K}$ sono tutte e sole le funzioni $x \mapsto c|x|$, $x \in \mathbb{K}$, ove $c > 0$ è una costante.

3.16. Esempio (spazi euclidei). Più in generale, se n è un intero positivo, possiamo considerare $V = \mathbb{K}^n$ con le operazioni naturali. Come norma di $x \in \mathbb{K}^n$ prendiamo $|x| = (\sum_{j=1}^n |x_j|^2)^{1/2}$ ove è inteso che $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Questa è indotta dal prodotto scalare $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$.

3.17. Esempio (funzioni continue). Consideriamo lo spazio $V = C^0[0,1]$ delle funzioni $v : [0,1] \to \mathbb{K}$ continue. Come norma prendiamo quella definita dalla formula

$$\|v\|_\infty = \max_{0 \le t \le 1} |v(t)|$$

Effettivamente questa è una norma, come subito si verifica. Essa non è indotta da nessun prodotto scalare in quanto la regola del parallelogrammo è violata (il lettore trovi due elementi $u, v \in V$ che la violano). La convergenza indotta è la convergenza uniforme.

Lo spazio V ha dimensione infinita e cogliamo l'occasione per segnalare un fatto nuovo rispetto al caso finito-dimensionale. Consideriamo infatti il sottospazio V_0 di V costituito dalle funzioni di classe C^1 e la successione $\{v_n\}$ e la funzione v definite dalle formule $v_n(t) = (t + n^{-1})^{1/2}$ e $v(t) = t^{1/2}$. Allora $\{v_n\}$ converge a v uniformemente, cioè nel senso della topologia indotta dalla norma considerata. Eppure $v_n \in V_0$ per ogni n mentre $v \notin V_0$. Concludiamo che il sottoinsieme V_0, pur essendo un sottospazio vettoriale di V, non è un chiuso.

3.18. Esempio. Consideriamo ancora lo spazio $V = C^0[0,1]$ delle funzioni $v : [0,1] \to \mathbb{K}$ continue, ma come norma prendiamo ora quella definita dalla formula

$$\|v\|_2 = \Bigl(\int_0^1 |v(t)|^2 \, dt \Bigr)^{1/2}$$

la quale è effettivamente una norma. Infatti essa è indotta dal prodotto scalare

$$(u, v) = \int_0^1 u(t) \, \overline{v(t)} \, dt.$$

Abbiamo uno spazio prehilbertiano. Segnaliamo un altro fatto, tipico della dimensione infinita. La successione $\{v_n\}$ definita dalla formula $v_n(t) = t^n$ converge a 0 (la funzione nulla) nel senso della topologia che stiamo considerando ma non uniformemente. Ciò significa che la norma in questione e quella dell'Esempio 3.17 inducono su $C^0[0,1]$ due topologie diverse. □

Negli esempi precedenti si è visto come, in casi di dimensione infinita, ci possano essere norme che inducono su uno spazio vettoriale V topologie diverse. In particolare, l'applicazione identica di V, pensata da uno degli spazi normati a un altro fra quelli costruiti su V, può non essere continua. In generale, non è detto che un'applicazione lineare fra spazi normati sia continua, per cui occorre distinguere fra operatori lineari e operatori lineari e continui. In dimensione finita, invece, le cose vanno diversamente. Valgono infatti i risultati enunciati di seguito. Il fatto, altrettanto vero, che ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio normato (in particolare un sottospazio qualunque di uno spazio di dimensione finita) sia chiuso verrà dimostrato successivamente.

3.19. Definizione. *Sia V uno spazio vettoriale. Si dice che due norme $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ in V sono equivalenti quando esistono due costanti c_1 e c_2 tali che*

$$\|x\|' \leq c_1\|x\|'' \quad e \quad \|x\|'' \leq c_2\|x\|' \quad \textit{per ogni } x \in V \, . \; \square \tag{3.11}$$

Chiaramente due norme equivalenti inducono in V la stessa topologia, cioè, come si usa dire, sono topologicamente equivalenti. Vedremo in seguito che, viceversa, se due norme inducono in V la stessa topologia, allora esse sono equivalenti nel senso della definizione precedente.

3.20. Teorema. *Se lo spazio vettoriale V ha dimensione finita, allora tutte le norme in V sono equivalenti fra loro.*

Dimostrazione. Siano $n = \dim V$, la dimensione di V, che supponiamo positiva, e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V. Rappresentato il generico punto $x \in V$ nella forma $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e ricordato che tale rappresentazione è unica, poniamo $|x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Allora la funzione $x \mapsto |x|_1$ da V in $\mathbb{R}$ è una norma in V. Sia ora $\|\cdot\|$ una norma qualunque in V: basterà dimostrare che $\|\cdot\|$ è equivalente a $|\cdot|_1$. Si ha immediatamente

$$\|x\| = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|e_i\| \leq M|x|_1 \quad \text{per ogni } x \in V \quad \text{ove} \quad M = \max_{1\leq i\leq n} \|e_i\|. \tag{3.12}$$

Per dimostrare la maggiorazione in senso opposto ragioniamo per assurdo: non esista alcuna costante M' tale che $|x|_1 \leq M'\|x\|$ per ogni $x \in V$. Allora esiste una successione $\{x^{(k)}\}$ di elementi di V tale che $|x^{(k)}|_1 > k\|x^{(k)}\|$ per ogni k. Osservato che $x^{(k)} \neq 0$ e posto $y^{(k)} = x^{(k)}/|x^{(k)}|_1$, per ogni k valgono l'uguaglianza $|y^{(k)}|_1 = 1$ e la disuguaglianza $\|y^{(k)}\| < 1/k$. Segue $|y_i^{(k)}| \leq 1$ per ogni k e i e n applicazioni successive del Teorema di Bolzano-Weierstrass consentono di costruire una sottosuccessione $\{y^{(k_j)}\}$ e un elemento $y \in V$ verificanti

$$\lim_{j\to\infty} y_i^{(k_j)} = y_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

ove l'indice i denota la i-esima coordinata rispetto alla base $\mathcal{B}$. Ciò implica

$$\lim_{j\to+\infty} |y^{(k_j)} - y|_1 = 0 \quad \text{e} \quad |y|_1 = \lim_{j\to\infty} |y^{(k_j)}|_1 = 1 \quad \text{da cui} \quad y \neq 0.$$

Allora la (3.12) fornisce $\lim_{j\to+\infty}\|y^{(k_j)} - y\| = 0$ e, applicando la (2.4) a $\|\cdot\|$ e ricordando che $y \neq 0$, abbiamo anche $\lim_{j\to+\infty}\|y^{(k_j)}\| = \|y\| > 0$. D'altra parte risulta

$$\|y^{(k_j)}\| < 1/k_j \quad \text{per ogni } j \, , \quad \text{da cui} \quad \lim_{j\to\infty} \|y^{(k_j)}\| = 0.$$

Abbiamo dunque una contraddizione. $\square$

3.21. Teorema. *Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathrm{Hom}(V; W)$. Se V ha dimensione finita allora L è continuo.* $\square$

Dimostrazione. Possiamo senz'altro supporre che L non sia l'operatore nullo. Dunque ciascuno dei due spazi V e $W_0 = L(V)$ ha dimensione finita e positiva. Scelte due basi in V e in W_0 e rappresentato L tramite una matrice, le coordinate dell'immagine Lv del generico punto $v \in V$ sono polinomi lineari nelle coordinate di V. Vale dunque una disuguaglianza del tipo $\sum_{j=1}^m |(Lv' - Lv'')_j| \leq M \sum_{i=1}^n |(v' - v'')_i|$, ove l'indice denota la j-esima o i-esima coordinata del vettore considerato rispetto alla base di W_0 o di V. Ciò implica che L è continuo rispetto alla topologia di V indotta dalla norma $\|v\| = \sum_i |v_i|$ e alla topologia di W_0 indotta dalla norma analoga. Grazie al risultato precedente, ciò implica la continuità rispetto alle norme preesistenti. $\square$

3.22. Esempio. Nell'Esempio 3.18 abbiamo visto che le norme $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_2$ su $C^0[0,1]$ non sono equivalenti: precisamente, il comportamento della successione là considerata mostra che non può esistere alcuna costante M tale che $\|v\|_\infty \le M\|v\|_2$ per ogni $v \in C^0[0,1]$ (mentre risulta $\|v\|_2 \le \|v\|_\infty$ come si verifica subito). Sono invece equivalenti, per ogni n, le restrizioni di tali norme allo spazio $\mathbb{P}_n$ dei polinomi $\sum_{k=0}^n a_k t^k$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ di grado $\le n$ in quanto $\dim \mathbb{P}_n$ è finita (vale $n+1$). Ciò significa che deve valere una disuguaglianza del tipo $\|v\|_\infty \le M_n\|v\|_2$ per ogni $v \in \mathbb{P}_n$. La costante M_n non può essere scelta indipendente da n, proprio a causa dell'esempio citato, e avviene che, qualunque sia la successione $\{M_n\}$ di costanti ammissibili, si ha $\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$. Una terza norma in $\mathbb{P}_n$ equivalente alle precedenti è data dalla formula $\|v\| = \sum_{k=0}^n |v^{(k)}(0)|$: essa infatti è una norma in $\mathbb{P}_n$, come può verificare il lettore.

4. Spazi vettoriali topologici

La classe degli spazi normati fa parte di una categoria più ampia di interesse notevolissimo in Analisi Funzionale, quella degli spazi vettoriali topologici, che conviene introdurre subito. Vedremo appunto che ogni spazio normato è vettoriale topologico, ma in seguito avremo modo di trovare spazi vettoriali topologici non normabili e nemmeno metrizzabili. Anche se altri autori si comportano più spesso diversamente, noi richiediamo che la topologia sia separata.

4.1. Definizione. *Uno spazio vettoriale topologico è una coppia $(\mathcal{V},\mathcal{T})$ ove $\mathcal{V}$ è uno spazio vettoriale e $\mathcal{T}$ è una topologia di Hausdorff su $\mathcal{V}$ che rende continue le applicazioni*

$$\mathcal{V}\times\mathcal{V} \ni (x,y) \mapsto x+y \in \mathcal{V} \quad \text{e} \quad \mathbb{K}\times\mathcal{V} \ni (\lambda,x) \mapsto \lambda x \in \mathcal{V}$$

ove gli spazi prodotto sono muniti delle corrispondenti topologie prodotto. □

Nel linguaggio corrente, poi, si parla di spazi vettoriali topologici senza menzionare esplicitamente la topologia nelle notazioni. Conviene inoltre, per semplificare il linguaggio, dare anche la definizione seguente:

4.2. Definizione. *Siano $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ due spazi vettoriali topologici. Diciamo che $\mathcal{V}$ è immerso con continuità in $\mathcal{W}$ quando $\mathcal{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{W}$ e l'immersione di $\mathcal{V}$ in $\mathcal{W}$, cioè l'applicazione $i:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ definita da $x\mapsto x$, è continua.* □

4.3. Osservazione. Chiaramente, se $\mathcal{V}$ è uno spazio vettoriale topologico, per ogni $y\in\mathcal{V}$ e per ogni $\lambda\in\mathbb{K}$ non nullo, la traslazione $T_y:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ e l'omotetia $O_\lambda:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ date dalle formule $T_y(x)=x+y$ e $O_\lambda(x)=\lambda x$ sono continue. Siccome esse sono biiettive e le loro inverse sono applicazioni dello stesso tipo, esse sono anche omeomorfismi. Con le notazioni del Paragrafo 1, le affermazioni precedenti si riscrivono nella forma seguente: se $\mathcal{V}$ è uno spazio vettoriale topologico, gli intorni del generico punto x_0 sono tutti e soli gli insiemi del tipo x_0+I ove I è un intorno dell'origine e, se I è un intorno dell'origine, allora anche λI lo è per ogni $\lambda\ne 0$. In particolare, se $\mathcal{V}$ è uno spazio vettoriale e $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sono due topologie che rendono $\mathcal{V}$ spazio vettoriale topologico, allora esse coincidono se e solo se gli intorni dell'origine nelle due topologie sono gli stessi.

Notiamo inoltre che il fatto che gli intorni del generico punto si ottengano semplicemente traslando gli intorni dell'origine consente di dare una nozione di "vicinanza" di due punti senza che uno dei due sia stato fissato, un po' come, per quanto possibile, avviene nel caso degli spazi metrici. Se, nel caso degli spazi metrici, diciamo che due punti sono "vicini" quando la loro distanza è "piccola", nel caso degli spazi vettoriali topologici possiamo dire che due punti x e y sono "vicini" quando $x-y$ appartiene a un intorno "piccolo" dell'origine. Analogamente gli intorni $B_r(x)$ e $B_r(y)$ con lo stesso r degli spazi metrici sono rimpiazzati abbastanza bene da $x+I$ e $y+I$, dove I è uno stesso intorno dell'origine. Invitiamo il lettore a sfruttare tale osservazione negli esercizi successivi, alcuni dei quali saranno riutilizzati anche in seguito. Per chiarezza richiamiamo la definizione di insieme convesso e qualche proprietà.

4.4. Definizione. *Siano V uno spazio vettoriale e $C\subseteq V$. Diciamo che C è convesso quando, per ogni $x,y\in C$ e $t\in(0,1)$ si ha $tx+(1-t)y\in C$. Se poi A è un sottoinsieme non vuoto* *di V, l'inviluppo convesso di A è l'insieme*

$$\operatorname{co} A = \left\{ \sum_i \vartheta_i x_i : \ \vartheta_i \ge 0, \ x_i \in A, \ \sum_i \vartheta_i = 1 \right\} \tag{4.1}$$

ove resta inteso che le somme considerate siano finite. □

4.5. Osservazione. Siccome $tx+(1-t)y = y+t(x-y)$ e i ruoli di x e y si scambiano quando si scambia t con $1-t$, è naturale chiamare l'insieme $\{tx+(1-t)y : \ t \in [0,1]\}$ *segmento congiungenete* x *e* y, senza specificare l'ordine dei due punti. Dunque un insieme è convesso se e solo se esso contiene tutto il segmento che congiunge due suoi punti qualunque. Notiamo inoltre che ciascuna delle somme che compaiono nella (4.1) viene chiamata *combinazione convessa dei punti* x_i. Le combinazioni convesse di due soli punti costituiscono i punti del segmento che li congiunge. Osserviamo infine che $\operatorname{co} A$ è un convesso che include A. Precisamente esso è il più piccolo convesso che include A.

4.6. *Esercizio.* Siano V uno spazio vettoriale topologico e $C \subseteq V$ un convesso. Dimostrare che l'interno e la chiusura di C sono ancora convessi.

4.7. *Esercizio.* Siano V uno spazio vettoriale topologico e A un aperto non vuoto di V. Si dimostri che anche $\operatorname{co} A$ è aperto.

4.8. *Esercizio.* Nell'ambito degli spazi vettoriali topologici si diano definizioni ragionevoli di continuità uniforme e di successione di Cauchy. □

Tornando sulla continuità o meno degli operatori lineari, si possono dare condizioni valide in generale nell'ambito degli spazi vettoriali topologici. Qui ci limitiamo a un solo risultato.

4.9. Proposizione. *Siano $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ due spazi vettoriali topologici e $L \in \operatorname{Hom}(\mathcal{V};\mathcal{W})$. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: i) L è continuo; ii) L è continuo nell'origine; iii) L è continuo in almeno un punto. In particolare $\mathcal{V}$ è immerso con continuità in $\mathcal{W}$ se e solo se $\mathcal{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{W}$ e ogni intorno dell'origine della topologia di $\mathcal{W}$ include un intorno dell'origine della topologia di $\mathcal{V}$.* □

Lasciamo al lettore la facile dimostrazione, avvertendolo però che è scorretto ragionare per successioni in quanto la topologia di uno spazio vettoriale topologico può non essere univocamente determinata dalla nozione di convergenza delle successioni. Si ha tuttavia

se l'origine di $\mathcal{V}$ ha una base numerabile di intorni, allora L è continuo se e solo se da $v_n \to 0$ in $\mathcal{V}$ segue $Lv_n \to 0$ in $\mathcal{W}$ (4.2)

e ciò avviene sicuramente se $\mathcal{V}$ è normato. Enunciamo anche un risultato che riguarda la continuità delle seminorme lasciando la dimostrazione al lettore anche in questo caso.

4.10. Proposizione. *Siano $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale topologico e p una seminorma in $\mathcal{V}$. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: i) p è continua; ii) p è continua nell'origine; iii) l'insieme $\{x \in V : \ p(x) < 1\}$ è aperto; iv) per ogni $r > 0$ l'insieme $\{x \in V : \ p(x) < r\}$ è aperto.* □

Il caso degli operatori lineari fra spazi normati sarà trattato in un capitolo successivo con qualche dettaglio. Anticipiamo tuttavia un risultato importante (che implica, fra l'altro, che, in quell'ambito, la continuità equivale alla lipschitzianità) con due conseguenze (la prima ovvia).

4.11. Teorema. *Siano V e W due spazi normati e $L : V \to W$ un operatore lineare. Allora L è continuo se e solo esiste $M \ge 0$ tale che $\|Lx\|_W \le M\|x\|_V$ per ogni $x \in V$.* □

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.9 basta considerare la continuità in 0. La condizione dell'enunciato è ovviamente sufficiente per la continuità in 0. Sia ora L continuo in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\|Lx\| \le 1$ per ogni $x \in V$ verificante $\|x\| \le \delta$ e ora mostriamo che possiamo prendere $M = 1/\delta$ per soddisfare le condizione dell'enunciato. Se $x \in V$ non è nullo (il caso $x = 0$ è banale), posto $\lambda = \|x\|_V$, si ha infatti $\|\delta x/\lambda\|_V = \delta$ e quindi $\|Lx\|_W = (\lambda/\delta)\|L(\delta x/\lambda)\|_W \le \lambda/\delta = M\|x\|_V$. □

4.12. Corollario. *Siano V e W due spazi normati con V sottospazio vettoriale di W. Allora l'immersione di V in W è continua se e solo se esiste una costante $M \geq 0$ tale che $\|x\|_W \leq M\|x\|_V$ per ogni $x \in V$.* $\square$

4.13. Corollario. *Siano V uno spazio vettoriale. Due norme $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ in V inducono su V la stessa topologia se e solo se esse sono equivalenti.* $\square$

Dimostrazione. L'equivalenza topologica delle due norme equivale al fatto che l'applicazione identica i di V è continua quando V è munito di una qualunque delle due norme se pensato come dominio di i ed è munito dell'altra se pensato come codominio di i. Esprimendo tali continuità per mezzo del Teorema 4.11, vediamo allora che esse equivalgono alle condizioni della Definizione 3.19. $\square$

4.14. Osservazione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora sappiamo che tutte le norme in V sono equivalenti fra loro. In altre parole V ha un'unica struttura vettoriale topologica normabile. Ma si può dimostrare ben di più: su V c'è un'unica struttura vettoriale topologica, cioè esiste una e una sola topologia che rende V spazio vettoriale topologico. Dunque, a meno di isomorfismi, V è uno spazio euclideo.

5. Esempi di spazi normati e prehilbertiani

In questo paragrafo diamo un elenco significativo di esempi di spazi normati. Alcuni di essi sono anche prehilbertiani mentre altri non lo sono. Riguardo a questa seconda categoria, notiamo che in certi casi si può scegliere una norma equivalente indotta da un prodotto scalare, mentre in altri casi ciò non è possibile, anche se allo stato attuale delle cose non siamo in grado di giustificare tale impossibilità.

5.1. Esempio. Abbiamo già visto il caso dello spazio euclideo $\mathbb{K}^n$. Nello stesso spazio, tuttavia, si possono introdurre altre norme, necessariamente equivalenti a quella euclidea. Due di esse sono date dalle formule

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{e} \quad |x|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \quad \text{se} \quad x = (x_1, \dots, x_n). \tag{5.1}$$

Nessuna delle due è prehilbertiana se $n > 1$, come si vede verificando la regola del parallelogrammo. Altre norme in $\mathbb{K}^n$ saranno introdotte tra breve. Naturalmente lo stesso discorso vale per un qualunque spazio vettoriale di dimensione finita.

5.2. Esempio (funzioni limitate). Sia X un insieme non vuoto. Denotiamo con $\mathcal{B}(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $v : X \to \mathbb{K}$ limitate (*bounded* in inglese, da cui la notazione $\mathcal{B}$) munito della norma

$$\|v\| = \sup_{x \in X} |v(x)|.$$

Si ottiene uno spazio normato (non prehilbertiano se X ha più di un elemento). Se X è finito e ha n elementi, allora $\mathcal{B}(X)$ è algebricamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Scelto un isomorfismo algebrico, questo diventa un isomorfismo isometrico se $\mathbb{K}^n$ è munito della norma $|\cdot|_\infty$ definita dalla (5.1). In particolare la norma scelta in $\mathcal{B}(X)$ è equivalente a una che rende prehilbertiano lo spazio. Se invece l'insieme X è infinito nessuna norma equivalente alla precedente è prehilbertiana. La convergenza indotta dalla norma considerata è la convergenza uniforme.

5.3. Esempio (funzioni continue limitate). Sia S uno spazio topologico. Il sottospazio $C_b(S)$ di $\mathcal{B}(S)$ costituito dalle funzioni continue e limitate è uno spazio normato se munito della norma ottenuta restringendo a $C_b(S)$ la norma di $\mathcal{B}(S)$ (si parlerà di norma indotta da $\mathcal{B}(S)$). Dimostriamo che $C_b(S)$ è chiuso in $\mathcal{B}(S)$. Siano infatti $\{v_n\}$ una successione di elementi di $C_b(S)$ convergente uniformemente a $v \in \mathcal{B}(S)$ e $x_0 \in S$. Allora, per ogni n e per ogni $x \in S$, si ha

$$|v(x) - v(x_0)| \leq |v(x) - v_n(x)| + |v_n(x) - v_n(x_0)| + |v_n(x_0) - v(x_0)| \leq 2\|v - v_n\| + |v_n(x) - v_n(x_0)|.$$

Fissato ora $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere prima n in modo che la norma dell'ultimo membro sia $\leq \varepsilon$ e poi un intorno J di x_0 in modo che sia $\leq \varepsilon$ l'ultimo termine per ogni $x \in J$. Per tali x, dunque, il primo membro risulta $\leq 3\varepsilon$.

5.4. Esempio (funzioni continue su un compatto). Sia K uno spazio topologico compatto. Poniamo

$$C(K) = \{v : K \to \mathbb{K} \text{ continue}\}.$$

Esso è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}(K)$ in quanto tutte le funzioni continue sono limitate in questo caso: precisamente $C(K) = C_b(K)$ con la notazione dell'esempio precedente. Esso è dunque un sottospazio chiuso di $\mathcal{B}(K)$. Notiamo che la norma di un elemento di $C(K)$ si può scrivere come massimo anziché come estremo superiore. Per questo motivo si parla della *norma del massimo*. Per estensione si usa spesso la stessa terminologia per la norma in $\mathcal{B}(X)$.

5.5. Esempio (funzioni uniformemente continue). Nelle applicazioni è spesso opportuno considerare funzioni definite in aperti anziché su compatti. Per questo motivo usiamo una notazione che può apparire strana a prima vista. Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ poniamo

$$C^0(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{K} \text{ continue}\} \quad \text{e} \quad C^0(\overline{\Omega}) = \{v : \Omega \to \mathbb{K} \text{ uniformemente continue}\}$$

e muniamo $C^0(\overline{\Omega})$ della norma

$$\|v\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |v(x)|. \tag{5.2}$$

Tale spazio è isometricamente isomorfo allo spazio $C(\overline{\Omega})$ delle funzioni continue sul compatto $\overline{\Omega}$ (da cui le notazioni che abbiamo usato). Infatti, se Ω è limitato, una funzione $v : \Omega \to \mathbb{K}$ è uniformemente continua se e solo se ha un prolungamento continuo $\widetilde{v} : \overline{\Omega} \to \mathbb{K}$ (Proposizione A.1.27). Inoltre tale prolungamento è unico. L'isomorfismo naturale, dunque, è quello che a ogni $v \in C^0(\overline{\Omega})$ associa il prolungamento continuo in questione. Di fatto, pensiamo contemporaneamente ai due spazi isomorfi, considerando l'uno o l'altro a seconda della convenienza del momento.

5.6. Esempio (spazi di Lebesgue). Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Inoltre sia $p \in [1, +\infty)$. Con $L^p(\Omega)$ denotiamo lo spazio delle (classi di) funzioni misurabili $v : \Omega \to \mathbb{K}$ tali che $|v|^p$ sia integrabile munito della norma

$$\|v\|_p = \left(\int_\Omega |v|^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{5.3}$$

Che la norma si annulli solo sulla funzione misurabile nulla è dovuto alla definizione stessa di funzione misurabile nulla (Definizione A.2.20): questa è la classe delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{K}$ misurabili nulle q.o. Tuttavia la subadditività della norma è ovvia solo se $p = 1$. In generale essa è detta *disuguaglianza di Minkowski* e viene dimostrata tra breve, appunto nell'ipotesi $p \in [1, +\infty)$, come conseguenza di altre disuguaglianze importanti. Dopo di che, $\|\cdot\|_p$ è effettivamente una norma e $L^p(\Omega)$ diventa uno spazio normato. Escluso il caso in cui lo spazio di misura sia così banale da rendere $L^p(\Omega)$ monodimensionale o addirittura ridotto allo zero, tale spazio è prehilbertiano se e solo se $p = 2$. In tali condizioni il prodotto scalare è dato dalla formula

$$(u, v) = \int_\Omega u \, \overline{v} \, d\mu. \tag{5.4}$$

5.7. Osservazione. Nel seguito resta inteso che, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, lo spazio di misura è quello costruito mediante la misura di Lebesgue. In particolare possiamo considerare le funzioni continue come classi di funzioni misurabili, cioè associare a una funzione continua la classe che la contiene, la corrispondenza essendo iniettiva, e dare senso all'intersezione $L^p(\Omega) \cap C^0(\Omega)$: essa è l'insieme delle (classi di) funzioni di $L^p(\Omega)$ che hanno un (unico) rappresentante continuo o, in modo equivalente, l'insieme delle funzioni v continue tali che $|v|^p$ sia integrabile. Considerazioni analoghe valgono quando $L^p(\Omega)$ è sostituito dallo spazio $L^\infty(\Omega)$ introdotto di seguito.

5.8. Esempio (funzioni misurabili limitate). Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Diciamo che una funzione misurabile $v : \Omega \to \mathbb{K}$ è (essenzialmente) limitata quando esiste $M \geq 0$ tale che $|v(x)| \leq M$ q.o. Denotiamo con $L^\infty(\Omega)$ lo spazio delle classi di funzioni misurabili (essenzialmente) limitate, la relazione di equivalenza rispetto alla quale si forma il quoziente essendo quella dell'uguaglianza q.o. Muniamo $L^\infty(\Omega)$ della norma definita dalla formula

$$\|v\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : \ |v(x)| \leq M \text{ q.o.}\}. \tag{5.5}$$

Si ottiene uno spazio normato (non prehilbertiano se lo spazio di misura non è troppo banale...). Il motivo della notazioni $L^\infty(\Omega)$ e $\|\cdot\|_\infty$ è giustificato in seguito.

Nella definizione precedente si usa lo stesso simbolo v per una classe di funzioni misurabili e per un suo rappresentante. Ciò giustamente può apparire impreciso, ma di solito non è ambiguo. La stessa osservazione vale per il seguito. Si noti che, se si è dimostrato che $|v(x)| \leq M$ q.o., automaticamente si ha che $\|v\|_\infty \leq M$. Segnaliamo che $\|v\|_\infty$ si chiama *estremo superiore essenziale di* $|v|$ e si indica anche con il simbolo $\operatorname{sup\,ess} |v|$. Naturalmente si possono analogamente definire l'estremo superiore essenziale e l'estremo inferiore essenziale di una qualunque funzione reale misurabile. Tuttavia, spesso, parleremo semplicemente di estremi superiori e inferiori, tralasciando l'aggettivo "essenziale", e useremo le notazioni $\sup$ e $\inf$, sempre che ciò non porti ad equivoci.

5.9. *Esercizio.* Dimostrare che, se $u \in L^\infty(\Omega)$, si ha

$$\|u\|_\infty = \inf\{\sup |v| : \ v = u \text{ q.o.}\}$$

(ove $\inf$ e $\sup$ hanno qui il significato originario). Dimostrare inoltre che tale estremo inferiore e quello della (5.5) sono di fatto dei minimi (lo stesso, ovviamente se applicati alla stessa funzione).

5.10. *Esercizio.* Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni misurabili limitate. Dimostrare che essa converge in $L^\infty(\Omega)$ alla funzione misurabile u se e solo se esistono funzioni misurabili v_n e v verificanti $v_n = u_n$ e $v = u$ q.o. e tali che la successione $\{v_n\}$ converga uniformemente a v.

5.11. Esempio (funzioni continue, seguito). Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$. Allora possiamo considerare entrambi gli spazi $C^0(\overline{\Omega})$ e $L^\infty(\Omega)$ e vedere il primo come sottospazio vettoriale del secondo, l'immersione essendo la seguente: identifichiamo ogni funzione uniformemente continua con la classe di funzioni misurabili che la contiene. Con tale immersione $C^0(\overline{\Omega})$ risulta anche un sottospazio di $L^\infty(\Omega)$ nel senso degli spazi normati in quanto, come si vede facilmente, vale la formula

$$\sup |u| = \min\{\sup |v| : \ v = u \text{ q.o.}\},$$

cioè la norma di $C^0(\overline{\Omega})$ è la restrizione a $C^0(\overline{\Omega})$ della norma di $L^\infty(\Omega)$.

5.12. *Esercizio.* Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u \in C^0(\Omega)$. Si dimostri che

$$\inf\{\sup v : \ v = u \text{ q.o.}\} = \min\{\sup v : \ v = u \text{ q.o.}\} = \sup u$$

in particolare che $\operatorname{sup\,ess} u = \sup u$, sia quando u è limitata superiormente sia nel caso opposto. □

I simboli $L^\infty(\Omega)$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono suggeriti dal risultato che segue.

5.13. Proposizione. *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito, $\{p_n\}$ una successione di numeri reali ≥ 1 divergente a $+\infty$ e $v : \Omega \to \mathbb{K}$ una funzione misurabile tale che $v \in L^{p_n}(\Omega)$ per ogni n. Allora si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \|v\|_{p_n} = \|v\|_\infty \quad \textit{se } v \in L^\infty(\Omega) \quad \textit{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|v\|_{p_n} = +\infty \quad \textit{in caso contrario.} \ \square$$

Dimostrazione. Supponiamo senz'altro che v non sia la funzione nulla q.o. e consideriamo il primo caso. Fissiamo $\varepsilon \in (0,1)$. Per n tale che $p_n > p_1$, risulta

$$\|v\|_{p_n}^{p_n} = \int_\Omega |v|^{p_1} |v|^{p_n - p_1} \, d\mu \leq \|v\|_\infty^{p_n - p_1} \|v\|_{p_1}^{p_1} \quad \text{da cui} \quad \frac{\|v\|_{p_n}}{\|v\|_\infty} \leq \Bigl(\frac{\|v\|_{p_1}}{\|v\|_\infty} \Bigr)^{p_1/p_n}.$$

Siccome l'ultimo membro tende a 1 per $n \to \infty$, esiste m tale che $\|v\|_{p_n}/\|v\|_\infty \le 1+\varepsilon$ per ogni $n \ge m$. Fissiamo un rappresentante di v e chiamiamolo ancora v per semplicità. Allora resta ben definito l'insieme $\omega = \{x \in \Omega : \ |v(x)| > (1-\varepsilon)\|v\|_\infty\}$, il quale è misurabile e ha misura finita e non nulla. Quindi

$$\|v\|_{p_n}^{p_n} \ge \int_\omega |v|^{p_n}\, d\mu \ge \mu(\omega)\,(1-\varepsilon)^{p_n}\|v\|_\infty^{p_n} \quad \text{da cui} \quad \frac{\|v\|_{p_n}}{\|v\|_\infty} \ge (1-\varepsilon)\mu(\omega)^{1/p_n}.$$

Siccome $\lim_{n\to\infty}\mu(\omega)^{1/p_n} = 1$, esiste un indice m' tale che $\|v\|_{p_n}/\|v\|_\infty \ge (1-\varepsilon)^2$ per ogni $n \ge m'$. Combinando con quanto abbiamo provato sopra, deduciamo che il rapporto $\|v\|_{p_n}/\|v\|_\infty$ tende a 1, cioè quanto si voleva dimostrare.

Supponiamo $v \notin L^\infty(\Omega)$ e, fissato $M > 0$ ad arbitrio, poniamo ora $\omega = \{x \in \Omega : \ |v(x)| > 2M\}$. Ancora ω ha misura finita e positiva, da cui $\lim_{n\to\infty}\mu(\omega)^{1/p_n} = 1$. Quindi possiamo scegliere m in modo che $\mu(\omega)^{1/p_n} \ge 1/2$ per ogni $n \ge m$. D'altra parte risulta $\|v\|_{p_n} \ge 2M\mu(\omega)^{1/p_n}$ per ogni n. Per $n \ge m$ abbiamo allora $\|v\|_{p_n} \ge M$ e la dimostrazione è conclusa. □

5.14. Osservazione. In particolare, se una funzione v appartiene a ogni $L^p(\Omega)$ con $p < +\infty$, per dimostrare che essa è limitata basta provare una stima a priori del tipo $\|v\|_p \le \text{costante}$. Lo stesso discorso vale per la limitatezza in $L^\infty(\Omega)$ di una successione di funzioni.

5.15. *Esercizio.* Siano $p \in [1,+\infty)$ e V lo spazio delle funzioni $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabili e tali che sia finita la norma definita dalla formula $\|v\|^p = \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |v(y)|^p\, dy$. Verificare che $\|\cdot\|$ è effettivamente una norma, mai prehilbertiana, nemmeno se $p = 2$. Verificare che $L^\infty(\mathbb{R}) \subseteq V$ con immersione continua. □

Riprendiamo il discorso lasciato in sospeso riguardante la disuguaglianza triangolare della norma di $L^p(\Omega)$. Premettiamo una definizione e alcune disuguaglianze importanti.

5.16. Definizione. *Sia $p \in (1,+\infty)$. Il numero $p' \in (1,+\infty)$ definito dalla formula*

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 \tag{5.6}$$

si chiama esponente coniugato di p. Poniamo inoltre $1' = \infty$ e $\infty' = 1$. □

L'ultima frase corrisponde ad accettare la (5.6) anche per $p = 1$ e $p = \infty$ con la convenzione $1/\infty = 0$. Questa convenzione sarà adottata sistematicamente nel seguito. Notiamo poi che $2' = 2$ e che $(p')' = p$ per ogni p ammissibile.

5.17. Proposizione. *Siano $p \in (1,+\infty)$ e $a, b \ge 0$. Allora vale la disuguaglianza di Young*

$$ab \le \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p'}\, b^{p'}. \ \square \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $a, b > 0$ e poniamo $x = p\ln a$, $y = p'\ln b$ e $\vartheta = 1/p$. Siccome $\vartheta \in (0,1)$ e la funzione esponenziale è convessa, abbiamo

$$ab = e^{\ln a + \ln b} = e^{\vartheta x + (1-\vartheta)y} \le \vartheta e^x + (1-\vartheta)e^y = \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p'}\, b^{p'}.$$

Se poi uno dei due numeri reali a e b è nullo, la (5.7) vale banalmente. □

5.18. Teorema (disuguaglianza di Hölder). *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e si supponga $p \in [1,+\infty]$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ allora $uv \in L^1(\Omega)$ e risulta*

$$\Bigl|\int_\Omega u\, v\, d\mu\Bigr| \le \int_\Omega |u|\,|v|\, d\mu \le \|u\|_p\|v\|_{p'}\,. \ \square \tag{5.8}$$

Dimostrazione. Nei casi estremi $p = 1$ e $p = +\infty$ la tesi è banale. Supponiamo allora $p \in (1, +\infty)$. Innanzi tutto la disuguaglianza di Young assicura che $|uv| \le (1/p)|u|^p + (1/p')|v|^{p'}$ q.o in Ω, il che implica $uv \in L^1(\Omega)$. Inoltre, siccome la prima delle disuguaglianze (5.8) è chiara, dimostriamo solo la seconda supponendo senz'altro $u \ne 0$ e $v \ne 0$. Usiamo di nuovo la (5.7), ma la applichiamo a $\varphi = |u|/\|u\|_p$ e a $\psi = |v|/\|v\|_{p'}$. Abbiamo $\varphi\psi \le (1/p)\,\varphi^p + (1/p')\,\psi^{p'}$ q.o. e integrando otteniamo

$$\frac{1}{\|u\|_p\,\|v\|_{p'}}\int_\Omega |uv|\,d\mu = \int_\Omega \varphi\psi\,d\mu \le \frac{1}{p}\int_\Omega \varphi^p\,d\mu + \frac{1}{p'}\int_\Omega \psi^{p'}\,d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Moltiplicando per $\|u\|_p\,\|v\|_{p'}$ si conclude. □

La disuguaglianza di Hölder è fondamentale. Proponiamo alcuni esercizi in proposito e segnaliamo che, spesso, si dicono frasi del tipo "per la disuguaglianza di Hölder..." anche se, di fatto, ci si riferisce alle sue conseguenze che formano appunto l'oggetto di questi esercizi.

5.19. ***Esercizio.*** Dimostrare che le convergenze $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $v_n \to v$ in $L^{p'}(\Omega)$ implicano la convergenza $u_n v_n \to uv$ in $L^1(\Omega)$, in particolare $\int_\Omega uv\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n v_n\,d\mu$.

5.20. ***Esercizio.*** Siano $p_1, \ldots, p_n, q \in [1, +\infty]$ tali che $1/q = \sum_{i=1}^n 1/p_i$. Si dimostri che, se $v_i \in L^{p_i}(\Omega)$ per $i = 1, \ldots, n$, allora la funzione $v_1 \cdot \ldots \cdot v_n$ appartiene a $L^q(\Omega)$ e che vale la disuguaglianza di Hölder generalizzata

$$\|v_1 \cdot \ldots \cdot v_n\|_q \le \|v_1\|_{p_1} \cdot \ldots \cdot \|v_n\|_{p_n}. \tag{5.9}$$

5.21. ***Esercizio.*** Siano $p, q, r \in [1, +\infty]$ tali che $p < q < r$ e $v \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$. Si dimostri che $v \in L^q(\Omega)$ e che vale la *disuguaglianza di interpolazione*

$$\|v\|_q \le \|v\|_p^\vartheta \|v\|_r^{1-\vartheta} \quad \text{ove } \vartheta \in (0,1) \text{ verifica } \quad \frac{1}{q} = \frac{\vartheta}{p} + \frac{1-\vartheta}{r}. \tag{5.10}$$

Si deduca che, se $v_n \to v$ in $L^p(\Omega)$ e in $L^r(\Omega)$, allora $v_n \to v$ in $L^q(\Omega)$.

5.22. ***Esercizio.*** Si supponga $\mu(\Omega) < +\infty$ e $1 \le p \le q \le +\infty$. Si dimostri che, se $v \in L^q(\Omega)$, allora $v \in L^p(\Omega)$ e vale la disuguaglianza

$$\|v\|_p \le \mu(\Omega)^{(1/p)-(1/q)}\|v\|_q. \tag{5.11}$$

si deduca che, se $v_n \to v$ in $L^q(\Omega)$, allora $v_n \to v$ in $L^p(\Omega)$.

5.23. Teorema (disuguaglianza di Minkowski). *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $p \in [1, +\infty)$. Se $u, v \in L^p(\Omega)$ allora $u + v \in L^p(\Omega)$ e risulta*

$$\|u + v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p. \ \square \tag{5.12}$$

Dimostrazione. La situazione è banale se $p = 1$. Supponiamo allora $p \in (1, +\infty)$. Si ha immediatamente $|u+v| \le 2\max\{|u|, |v|\}$ q.o, da cui $u+v \in L^p(\Omega)$. Nella dimostrazione della (5.12) ancora possiamo supporre $u \ne 0$ e $v \ne 0$. Poniamo $w = |u|+|v|$ e osserviamo che $(w^{p-1})^{p'} = w^p$, per cui $w^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$. Applicando la disuguaglianza di Hölder abbiamo allora

$$\|w\|_p^p = \int_\Omega |u|\,w^{p-1}\,d\mu + \int_\Omega |v|\,w^{p-1}\,d\mu \le \|u\|_p\,\|w^{p-1}\|_{p'} + \|v\|_p\,\|w^{p-1}\|_{p'} = \bigl(\|u\|_p + \|v\|_p\bigr)\|w\|_p^{p/p'}.$$

Semplificando per $\|w\|_p^{p/p'}$ si conclude, in quanto $p - p/p' = p(1 - 1/p') = 1$. □

Con la dimostrazione della disuguaglianza di Minkowski abbiamo completato la presentazione degli spazi $L^p(\Omega)$. Tuttavia, ci preme un'osservazione.

5.24. Osservazione. Se la convergenza in $L^\infty(\Omega)$ è di tipo uniforme (vedi Esercizio 5.10) la convergenza in $L^p(\Omega)$ con p finito non implica nemmeno la convergenza puntuale q.o., come mostra l'esempio dato di seguito. D'altra parte, se $v_n \to v$ q.o., anche sapendo a priori che tutte le funzioni in gioco appartengono a $L^p(\Omega)$, non possiamo dedurre che $v_n \to v$ in $L^p(\Omega)$, come mostrano esempi banali. Una condizione sufficiente per la convergenza $v_n \to v$ in $L^p(\Omega)$ è la seguente:

$$v_n \to v \quad \textit{q.o. in } \Omega \quad \textit{ed esiste } \varphi \in L^p(\Omega) \textit{ tale che } |v_n| \le \varphi \textit{ q.o. in } \Omega \textit{ e per ogni } n \tag{5.13}$$

come si vede applicando il Teorema della convergenza dominata di Lebesgue a $|v_n - v|^p$. Viceversa, si può dimostrare che

$$\begin{aligned}&\textit{se } v_n \to v \textit{ in } L^p(\Omega), \textit{ allora esistono una sottosuccessione } \{v_{n_k}\} \textit{ e } \varphi \in L^p(\Omega) \textit{ tali che}\\ &v_{n_k} \to v \quad \text{q.o. in } \Omega \quad \text{e} \quad |v_{n_k}| \le \varphi \quad \text{q.o. in } \Omega \text{ per ogni } k.\end{aligned} \tag{5.14}$$

In particolare, se $v_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $v_n \to v$ in $L^q(\Omega)$, allora $u = v$ q.o.

5.25. Esempio. Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili di misura finita e si supponga che $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. Allora, detta v_n la funzione caratteristica di E_n (vedi (A.2.3)), si ha $v_n \to 0$ in $L^p(\Omega)$ per ogni p finito, come subito si verifica. D'altra parte, se gli insiemi E_n sono disposti in modo, diciamo, caotico, la successione $\{v_n\}$ non converge q.o. Ma è intuitivo che è possibile estrarre una sottosuccessione $\{E_{n_k}\}$ in cui gli insiemi hanno posizioni reciproche ben migliori in modo che la corrispondente sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ converga q.o.

5.26. *Esercizio.* Sia $p \in [1, +\infty]$ e sia V_0 il sottoinsieme di $L^p(0, +\infty)$ costituito dalle funzioni $v \in L^p(0, +\infty)$ tali che $v|_{(n,n+1)}$ è (q.o. uguale a una funzione) costante per ogni intero $n \ge 0$. Dimostrare che V_0 è un sottospazio chiuso.

5.27. *Esercizio.* Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito, $p \in [1, +\infty]$ e ω un sottoinsieme misurabile di Ω di misura positiva. Dimostrare che il sottoinsieme di $L^p(\Omega)$ costituito dalle funzioni che si annullano (q.o.) in ω è un sottospazio chiuso. □

Ora specializziamo lo spazio di misura in direzioni diverse e vediamo come alcune situazioni apparentemente lontane siano, di fatto, casi particolari di quello precedente.

5.28. Esempio (spazi con peso). Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito, $p \in [1, +\infty)$ e $w : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile tale che $w(x) > 0$ q.o. Denotiamo con $L^p_w(\Omega)$ lo spazio delle (classi di) funzioni misurabili $v : \Omega \to \mathbb{K}$ tali che la funzione $|v|^p w$ sia integrabile e muniamo tale spazio della norma definita dalla formula

$$\|v\| = \int_\Omega |v|^p \, w \, d\mu. \tag{5.15}$$

Ancora abbiamo uno spazio normato, detto *spazio* L^p *con peso*, il "peso" essendo la funzione w (*weight* in inglese). Vediamo come tale spazio sia, di fatto, un normale spazio L^p. Basta infatti considerare lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \nu)$ ove $\nu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ è definita dalla formula

$$\nu(E) = \int_E w \, d\mu \quad \text{per } E \in \mathcal{M} \tag{5.16}$$

pur di supporre che anche il nuovo spazio $(\Omega, \mathcal{M}, \nu)$ sia σ-finito, il che (falso in generale) è vero in tutti i casi concreti. Si noti che "q.o." ha lo stesso significato per le due misure μ e ν data l'ipotesi $w > 0$ q.o. Tuttavia il termine "spazio con peso" è effettivamente usato, specialmente quando la misura iniziale μ sia in qualche modo privilegiata. Ciò accade senz'altro quando Ω è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$: allora la misura di Lebesgue è "la misura" per antonomasia.

5.29. *Esercizio.* Dimostrare che $L^p(\Omega)$ e $L^p_w(\Omega)$ sono isometricamente isomorfi.

5.30. Esempio (spazi "elle piccolo"). Specializziamo lo spazio di misura prendendo come Ω l'insieme degli interi positivi e come μ la misura che conta definita per tutti i sottoinsiemi di Ω. Abbiamo dunque $\mu(A) = n$ se $A \subseteq \Omega$ ha $n \geq 0$ elementi e $\mu(A) = +\infty$ se A è infinito. Allora le (classi di) funzioni misurabili coincidono con le successioni $\{x_n\}$ di elementi di $\mathbb{K}$. In tali condizioni, per $p \in [1, +\infty]$, lo spazio $L^p(\Omega)$ si denota con ℓ^p. Si noti che ℓ^∞ è lo spazio delle successioni limitate e che la norma e la disuguaglianza di Hölder diventano

$$\|\{x_n\}\|_p = \Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \Bigr)^{1/p} \quad \text{se } p \text{ è finito} \quad \text{e} \quad \|\{x_n\}\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

$$\Bigl| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \Bigr| \leq \|\{x_n\}\|_p \|\{y_n\}\|_{p'} \quad \text{per } 1 \leq p \leq +\infty.$$

Se poi Ω ha n elementi e μ è la misura che conta, allora $L^p(\Omega)$ può essere identificato a $\mathbb{K}^n$, nel quale vengono definite nuove norme, precisamente

$$|x|_p = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Bigr)^{1/p} \quad \text{se} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \tag{5.17}$$

tutte equivalenti fra loro. Anche in questi casi potremmo introdurre pesi: ciò corrisponde a prendere, anziché la misura che conta, una misura rispetto alla quale tutti i punti hanno misura positiva e finita ma non necessariamente unitaria.

5.31. *Esercizio.* Siano $p, q \in [1, +\infty]$ tali che $p < q$. Si dimostri che $\ell^p \subseteq \ell^q$ con immersione continua. Per semplificare la dimostrazione può servire l'uso della disuguaglianza (5.10) di interpolazione.

5.32. *Esercizio.* Si consideri la norma $\sum_{i=1}^{n} 2^i |x_i|$ in $\mathbb{K}^n$ e si veda lo spazio normato ottenuto come caso particolare di $L^p(\Omega)$.

5.33. *Esercizio.* Sia V lo spazio delle successioni $x = \{x_n\}$ tali che $\sum_{n=1}^{\infty} n|x_n|^2 < +\infty$. Si dimostri che la formula $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n|x_n|^2$ definisce una norma che rende V spazio prehilbertiano. Si verifichi che $V \subset \ell^2$ con immersione continua. Si controlli infine che V è denso in ℓ^2.

5.34. *Esercizio.* Si dimostri che i sottospazi (c) e (c_0) di ℓ^∞ costituiti rispettivamente dalle successioni convergenti e dalle successioni infinitesime sono chiusi in ℓ^∞. $\square$

Negli esempi precedenti abbiamo incontrato spazi L^p di dimensione finita e spazi L^p di dimensione infinita. Alla questione della dimensione una risposta esauriente è data dal teorema che presentiamo, nell'enunciato del quale resta inteso che $L^p(\Omega)$ è visto come spazio vettoriale e non come spazio normato. Premettiamo una definizione.

5.35. Definizione. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Un sottoinsieme misurabile $\omega \subseteq \Omega$ è detto atomo quando verifica $0 < \mu(\omega) < +\infty$ e non esiste alcuna partizione di ω in due insiemi misurabili entrambi di misura positiva.* $\square$

Nel caso degli spazi visti nell'Esempio 5.30, gli atomi sono gli insiemi costituiti da un solo punto. Un esempio diverso è il seguente. Sia $\Omega = \mathbb{R}$. Definiamo la famiglia $\mathcal{M}$ dei sottoinsiemi misurabili dicendo che $\omega \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile se e solo se si verifica una delle situazioni seguenti: ω non interseca $[0, 1]$ né $[2, 3]$; ω include $[0, 1]$ e non interseca $[2, 3]$; ω include $[2, 3]$ e non interseca $[0, 1]$; ω include sia $[0, 1]$ sia $[2, 3]$. Definiamo la misura $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ dicendo che $\mu(\omega)$ vale 0, 1, 1 e 2 rispettivamente nei casi elencati. Allora sono atomi, ad esempio, gli insiemi $[0, 1]$, $(-\infty, 1]$ e $[2, +\infty)$, mentre $[0, +\infty)$ e $(4, +\infty)$ non lo sono.

5.36. Teorema. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Allora si danno solo i tre casi seguenti: i) $\mu(\Omega) = 0$ e $L^p(\Omega) = \{0\}$ per ogni $p \in [1, +\infty]$; ii) esiste una partizione di Ω in un numero finito $m \geq 1$ di atomi e, per $p \in [1, +\infty]$, lo spazio $L^p(\Omega)$ è uno spazio di dimensione m indipendente da p; iii) per ogni $p \in [1, +\infty]$ lo spazio $L^p(\Omega)$ ha dimensione infinita e, se $p \neq q$, si ha $L^p(\Omega) \neq L^q(\Omega)$.* $\square$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $\mu(\Omega) < +\infty$ e introduciamo in $\mathcal{M}$ la relazione $\sim$, che si verifica immediatamente essere di equivalenza, ponendo: $A \sim B$ quando $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$. Considerato il quoziente $\mathcal{M}/\sim$, si verificano tre casi *i)* esso ha un solo elemento; *ii)* esso è finito con più di un elemento; *iii)* esso è infinito. Dimostriamo che ciascuno di tali casi corrisponde a quelli dell'enunciato e che il caso *iii)* dell'enunciato si presenta anche quando $\mu(\Omega) = +\infty$. *i)* Risulta $\omega \sim \emptyset$ per ogni $\omega \in \mathcal{M}$, per cui l'unica funzione misurabile (intesa come classe di funzioni) è la funzione nulla e la tesi segue immediatamente. *ii)* e *iii)* Se Ω ha misura positiva ed è un atomo, lo spazio delle funzioni misurabili è costituito dalle funzioni che sono (q.o. uguali a funzioni) costanti. Tale spazio, che ha dimensione 1, viene automaticamente a coincidere con ogni $L^p(\Omega)$. Vale dunque con $m = 1$ quanto affermato in *ii)*. Per trattare i casi restanti eseguiamo un procedimento di "bisezione". Supponiamo che Ω abbia misura positiva e non sia un atomo. Allora esiste una partizione $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ in due insiemi misurabili di misura positiva. Se ciascuno di questi è un atomo arrestiamo la procedura. In caso contrario suddividiamo i sottoinsiemi non atomici (dunque Ω_1 o Ω_2 o entrambi a seconda della situazione che si presenta) in due sottoinsiemi di misura positiva. Per induzione, eseguito il passo n-esimo, se tutti gli insiemi trovati sono atomi ci fermiamo; in caso contrario suddividiamo in due insiemi di misura positiva ciascuno degli insiemi non atomici del passo n-esimo. Si danno due casi: *a)* dopo un numero finito di passi otteniamo solo atomi; *b)* ogni passo produce almeno un sottoinsieme non atomico. Caso *a)*: arriviamo a una partizione $\{\omega_i : \ i = 1, \ldots, m\}$ di Ω in un numero $m \geq 2$ di atomi. Allora ogni funzione misurabile è semplice, precisamente essa è (q.o. uguale a una funzione) costante su ciascuno degli ω_i. In particolare, qualunque sia $p \in [1, +\infty]$, ogni elemento di $L^p(\Omega)$ è di quel tipo. Pertanto tutti gli spazi $L^p(\Omega)$ coincidono con lo spazio di tali funzioni, il quale è generato dalle funzioni caratteristiche degli ω_i e, dunque, ha dimensione m. Ciò conclude la trattazione del caso *ii)* dell'enunciato. Nel caso *b)*, dalla famiglia degli insiemi misurabili ottenuta con le infinite bisezioni si può estrarre una successione $\{\Omega_n\}$ di insiemi tale che $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ e $\mu(\Omega_{n+1}) < \mu(\Omega_n)$ per ogni n. Con un procedimento abituale si costruisce allora una successione $\{\omega_n\}$ di insiemi misurabili, di misura positiva e mutuamente disgiunti. Dato che lo spazio di misura è σ-finito, una successione $\{\omega_n\}$ di insiemi di misura finita con le stesse proprietà si ottiene nel caso $\mu(\Omega) = +\infty$. A partire da tale successione $\{\omega_n\}$, mostriamo che valgono le proprietà del caso *iii)* dell'enunciato. Chiaramente le funzioni caratteristiche degli ω_n appartengono a $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ e sono linearmente indipendenti. Dunque tutti gli spazi $L^p(\Omega)$ hanno dimensione infinita. Mostriamo che essi sono diversi l'uno dall'altro. Poniamo per comodità $\mu_n = \mu(\omega_n)$ e $\ell = \liminf_{n\to\infty} \mu_n$. Consideriamo due casi *a)* e *b)*. *a)* Supponiamo $\ell > 0$ (eventualmente infinito). Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\mu_n \geq \delta$ per ogni n. In particolare deduciamo che $\mu(\Omega) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = +\infty$ per cui la funzione costante 1 appartiene a $L^\infty(\Omega)$ ma non a $L^p(\Omega)$ se $p < +\infty$, così che $L^\infty(\Omega) \neq L^p(\Omega)$ per ogni $p < +\infty$. Siano ora $p, q \in [1, +\infty)$ tali che $p < q$. Definiamo $v : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo $v(x) = (n\mu_n \ln^2 n)^{-1/q}$ se $x \in \omega_n$, ciò per $n = 1, 2, \ldots$, e $v(x) = 0$ se x non appartiene ad alcuno degli ω_n. Allora

$$\int_\Omega |v|^q \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\omega_n} |v|^q \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} < +\infty \quad \text{da cui} \quad v \in L^q(\Omega).$$

D'altra parte, essendo $p/q < 1$, da cui anche $\mu_n^{1-p/q} \geq \delta^{1-p/q}$, abbiamo

$$\int_\Omega |v|^p \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\omega_n} |v|^p \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(\frac{1}{n \ln^2 n}\Bigr)^{p/q} \mu_n^{1-p/q} \geq \delta^{1-p/q} \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(\frac{1}{n \ln^2 n}\Bigr)^{p/q} = +\infty \quad \text{da cui} \quad v \notin L^p(\Omega).$$

b) Supponiamo ora $\ell = 0$. Allora, procedendo ricorsivamente, si costruisce facilmente una sottosuccessione $\{\mu_{n_k}\}$ tale che $\mu_{n_k} \leq 2^{-k}$ per ogni k. Supponiamo dapprima $1 \leq p < q < +\infty$. Allora $p = r - \varepsilon$ e $q = r + \varepsilon$ per certi $r \in (1, +\infty)$ e $\varepsilon > 0$. Definiamo $v : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo $v(x) = \mu_{n_k}^{-1/r}$ se $x \in \omega_{n_k}$, ciò per $k = 1, 2, \ldots$, e $v(x) = 0$ se x non appartiene ad alcuno degli ω_{n_k}. Allora

$$\int_\Omega |v|^p \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\omega_{n_k}} |v|^p \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n_k}^{-p/r+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n_k}^{\varepsilon/r} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\varepsilon/r} < +\infty \quad \text{da cui} \quad v \in L^p(\Omega).$$

D'altra parte, essendo $\{\mu_{n_k}\}$ infinitesima, abbiamo

$$\int_\Omega |v|^q \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\omega_{n_k}} |v|^q \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n_k}^{-q/r+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n_k}^{-\varepsilon/r} = +\infty \quad \text{da cui} \quad v \notin L^q(\Omega).$$

Supponiamo ora $1 \le p < q = +\infty$. Fissato $r \in (p, +\infty)$, definiamo $v : \Omega \to \mathbb{R}$ esattamente come sopra. Procedendo analogamente vediamo che $v \in L^p(\Omega)$. D'altra parte, essendo $\{\mu_{n_k}\}$ infinitesima, la successione $\{\mu_{n_k}^{-1/r}\}$ non è limitata, per cui $v \notin L^\infty(\Omega)$. □

5.37. Osservazione. Sottolineiamo che i casi *i)* e *iii)* escludono che Ω sia l'unione di un numero finito di atomi. Inoltre, nel caso *iii)* e solo in quello, esiste una funzione $u \in L^\infty(\Omega)$ tale che $\|u\|_\infty = 1$ e $|u(x)| < 1$ q.o. in Ω. Tale funzione, infatti, non può esistere nei casi *i)* e *ii)*; d'altra parte, nel caso *iii)*, considerata una successione $\{\omega_n\}$ di insiemi misurabili, di misura positiva e mutuamente disgiunti (la cui esistenza è garantita nella dimostrazione), per soddisfare quanto richiesto basta definire $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mediante le condizioni seguenti: $v(x) = 1 - 1/n$ se $x \in \omega_n$, ciò per $n = 1, 2, \ldots$; $v(x) = 0$ se x non appartiene ad alcuno degli ω_n. □

Consideriamo ora spazi legati all'operazione di derivazione. Conviene introdurre una notazione. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ è un vettore, detto multi-indice in questo contesto, con componenti intere non negative poniamo

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \quad \text{e} \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}. \tag{5.18}$$

Notiamo che la notazione $D^\alpha v$ è sensata se v è una funzione regolare, in modo che l'ordine delle derivazioni sia inessenziale.

5.38. Esempio (funzioni differenziabili con continuità). Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ e k un intero non negativo. Ricordando l'Esempio 5.5, poniamo

$$C^k(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{K} \text{ di classe } C^k\} \quad \text{e} \quad C^k(\overline{\Omega}) = \{v \in C^k(\Omega) : \ D^\alpha v \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ per } |\alpha| \le k\}$$

e muniamo $C^k(\overline{\Omega})$ della norma

$$\|v\| = \max_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha v\|_\infty = \max_{|\alpha| \le k} \sup |D^\alpha v|. \tag{5.19}$$

Lo spazio normato che si ottiene non è prehilbertiano. Conviene anche osservare un fatto, in connessione con l'ultima frase dell'Esempio 5.5: se $v \in C^k(\overline{\Omega})$, $|\alpha| \le k$ e $x_0 \in \partial\Omega$, ha senso considerare il "valore" $D^\alpha v(x_0)$. A rigore la funzione $D^\alpha v$ è definita solo in Ω; tuttavia essa ha un unico prolungamento continuo in $\overline{\Omega}$. Allora $D^\alpha v(x_0)$ è il valore in x_0 di tale prolungamento.

5.39. *Esercizio.* Dimostrare che una norma in $C^k(\overline{\Omega})$ equivalente a quella definita sopra è data dalla formula $\|v\| = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha v\|_\infty$. Sebbene l'equivalenza delle due norme possa essere facilmente dimostrata in modo diretto, consigliamo il lettore di seguire anche la strada seguente. Si ordinino i multi-indici α tali che $|\alpha| \le k$ (in un modo qualunque ma fissato) così che l'insieme di tali indici sia visto in realtà come una N-upla, ove N è il numero di multi-indici in questione. Fatto ciò, per $v \in C^k(\overline{\Omega})$, si vedano le due norme di v da prendere in considerazione come le norme $|y|_1$ e $|y|_\infty$ (vedi (5.1)) del vettore $y \in \mathbb{K}^N$ la cui componente α-esima è $\|D^\alpha v\|_\infty$ e si sfrutti il Teorema 3.20. Questa ottica è spesso produttiva. Usando la (5.17) si trovi un'intera famiglia di norme in $C^k(\overline{\Omega})$ equivalenti alla (5.19).

5.40. *Esercizio.* Sia V_0 il sottospazio di $C^k[a, b]$ costituito dalle funzioni v verificanti $v^{(j)}(a) = 0$ per $0 \le j < k$. Verificare che la norma in V_0 definita da $\|v\| = \|v^{(k)}\|_\infty$ è equivalente a quella indotta dalla (5.19). Dedurre che pure è equivalente a quella ciascuna delle norme in V_0 definite da $\|v\|_S = \max_{j \in S} \|v^{(j)}\|_\infty$ ove S è un sottoinsieme di $\{0, \ldots, k\}$ che contiene k.

5.41. *Esercizio.* Siano Ω è un aperto qualunque di $\mathbb{R}^d$ e $k \in \mathbb{N}$ e si introduca lo spazio

$$C_b^k(\Omega) = \{v \in C^k(\Omega) : \ D^\alpha v \in C_b(\Omega) \text{ per } |\alpha| \le k\} \tag{5.20}$$

costituito dalle funzioni continue e limitate con le derivate fino all'ordine k (vedi l'Esempio 5.3). Si dimostri che esso è completo rispetto alla norma definita ancora dalla (5.19). Si dimostri inoltre che, se Ω è limitato, lo spazio $C^k(\overline{\Omega})$ è un sottospazio chiuso di $C_b^k(\Omega)$.

5.42. Osservazione. Gli spazi $C^\infty(\Omega)$ e $C^\infty(\overline{\Omega})$ si definiscono ponendo

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega), \quad C_b^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_b^k(\Omega) \quad \text{e} \quad C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}). \tag{5.21}$$

Essi però, almeno per ora, sono solo spazi vettoriali. Topologie appropriate, infatti, saranno introdotte molto più avanti e queste non saranno indotte da norme.

5.43. Osservazione. Per $k \in \mathbb{N}$ si introduca lo spazio

$$\widetilde{C}^k(\overline{\Omega}) = \{v|_\Omega : \ v \in C_b^k(\mathbb{R}^d)\} \tag{5.22}$$

con la notazione (5.20). I suoi elementi, dunque, sono le funzioni definite in Ω che hanno un prolugamento definito in tutto $\mathbb{R}^d$, continuo e limitato con le sue derivate fino all'ordine k. Chiaramente, se Ω è limitato, lo spazio (5.22) è incluso in $C^k(\overline{\Omega})$ e si pone il problema dell'uguaglianza. Questa vale senz'altro se $k = 0$ (da un più generale Teorema di Tietze). Nel caso $k > 0$ si dimostra che

$$\widetilde{C}^k(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega}) \quad \textit{se } \Omega \textit{ sia sufficientemente regolare} \text{ (vedi la sezione data fra breve).} \tag{5.23}$$

Notiamo che tutto ciò può essere ripetuto nel caso $k = \infty$: si ottiene lo spazio $\widetilde{C}^\infty(\overline{\Omega})$ delle funzioni che hanno un prolugamento definito in tutto $\mathbb{R}^d$, continuo e limitato con le sue derivate di tutti gli ordini e la (5.23) continua a valere anche in questo caso. Al contrario, se Ω è un aperto irregolare, i due spazi $C^k(\overline{\Omega})$ e $\widetilde{C}^k(\overline{\Omega})$ sono in generale diversi, cioè possono esistere funzioni $u \in C^k(\overline{\Omega})$ prive di prolungamenti definiti in tutto $\mathbb{R}^d$ nelle condizioni dette sopra, come mostra l'esempio che ora proponiamo. Siano $C = \{(x,y) \in [0,1]^2 : \ |y| \le x^3\}$ e $\Omega = (-1,1)^2 \setminus C$. Definiamo $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo $u(x,y) = x^2$ se $x, y > 0$ e $u(x,y) = 0$ altrimenti. Proviamo che $u \in C^1(\overline{\Omega})$. La derivata $D_y u$ è nulla e la derivata $D_x u$ è data dalle formule $D_x u(x,y) = 2x$ se $x, y > 0$ e $u(x,y) = 0$ altrimenti. Dunque $u \in C^1(\Omega)$. D'altra parte un prolungamento continuo di u definito in $\overline{\Omega}$ si ottiene con le stesse formule che definiscono u prendendo (x,y) più in generale in $\overline{\Omega}$ e lo stesso discorso vale per $D_x u$. Quindi $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Notiamo ora che tale funzione, pur avendo derivate prime continue e limitate, non è lipschitziana. Infatti, per $x \in (0,1)$, i punti $z_\pm = (x, \pm 2x^3)$ appartengono ad Ω e risulta $|u(z_+) - u(z_-)|/|z_+ - z_-| = 1/(4x)$. Da ciò deduciamo che u non può avere prolungamenti di classe C^1 definiti in tutto $\mathbb{R}^2$. Infatti un eventuale prolungamento di questo tipo sarebbe lipschitziano in ogni convesso limitato di $\mathbb{R}^2$, in particolare in $[-1,1]^2$, e quindi la sua esistenza implicherebbe anche la lipschitzianità di u, il che non è.

5.44. Osservazione. Se $k > 0$ e Ω è un aperto irregolare, lo spazio $\widetilde{C}^k(\overline{\Omega})$ è non solo diverso da $C^k(\overline{\Omega})$, ma in generale anche non chiuso in $C^k(\overline{\Omega})$. Ciò avviene, ad esempio, nel caso trattato nell'Osservazione 5.43, come ora mostriamo conservando le notazioni là introdotte. Fissiamo $\zeta \in C^1(\mathbb{R})$ verificante $\zeta(t) = 0$ se $t \le 0$ e $\zeta(t) = 1$ se $t \ge 1$ e, per $\varepsilon \in (0,1)$, costruiamo u_ε come segue. Per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ poniamo $w_\varepsilon(x,y) = ((x-\varepsilon)^+)^2\,\zeta(2-x)\,\zeta(y/\varepsilon^3)$, così che $w_\varepsilon \in C_b^1(\mathbb{R}^2)$, e prendiamo $u_\varepsilon = w_\varepsilon|_\Omega$, così che $u_\varepsilon \in \widetilde{C}^1(\overline{\Omega})$. Mostriamo che u_ε converge a u in $C^1(\overline{\Omega})$ per $\varepsilon \to 0$. Sia $(x,y) \in \Omega$. Si noti che $x < 1$, per cui $\zeta(2-x) = 1$ e $u_\varepsilon(x,y) = ((x-\varepsilon)^+)^2\,\zeta(y/\varepsilon^3)$. Se ora $x \le 0$ oppure $y < 0$, allora $u_\varepsilon(x,y) = 0 = u(x,y)$ e valgono le analoghe identità per le derivate parziali. Se $x \in (0,\varepsilon]$ e $y > 0$, allora $u_\varepsilon(x,y) = 0$ e quindi

$$|u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)| = x^2 \le \varepsilon^2 \le \varepsilon \quad \text{e} \quad |D_x u_\varepsilon(x,y) - D_x u(x,y)| = 2x \le 2\varepsilon$$

e anche $D_y u_\varepsilon(x,y) = 0 = D_y u(x,y)$, banalmente. Infine, se $x > \varepsilon$ e $y > 0$, si ha $y > \varepsilon^3$, da cui $\zeta(y/\varepsilon^3) = 1$, per cui abbiamo ancora $D_y u_\varepsilon(x,y) = 0 = D_y u(x,y)$ e le stime

$$|u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)| = x^2 - (x-\varepsilon)^2 = 2\varepsilon(x-\varepsilon) \le 2\varepsilon \quad \text{e} \quad |D_x u_\varepsilon(x,y) - D_x u(x,y)| = 2x - 2(x-\varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Concludiamo che la norma di $u_\varepsilon - u$ in $C^1(\overline{\Omega})$ è $O(\varepsilon)$.

5.45. Aperti regolari. Apriamo una parentesi per dire due parole sulla regolarità di un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ con $d > 1$. Ciò che in generale si richiede è che, per ogni punto $x_0 \in \partial\Omega$, esistano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in x_0 tale che, nelle nuove coordinate $y_1, \ldots, y_d$, avvenga quanto segue. Esistono un aperto ω di R^{d-1}, un numero reale $\delta > 0$ e una funzione $\varphi : \omega \to \mathbb{R}$ tali che, l'insieme $\Omega' = \{y = (y', y_d) \in \omega \times \mathbb{R} : \ |y_d - \varphi(y')| < \delta\}$ sia un intorno dell'origine e, per $(y', y_d) \in \Omega'$, risulti: *i)* $y \in \Omega$ se e solo se $y_d > \varphi(y')$; *ii)* $y \in \partial\Omega$ se e solo se $y_d = \varphi(y')$. Di conseguenza si ha *iii)* $y \notin \overline{\Omega}$ se e solo se $y_d < \varphi(y')$. La regolarità di Ω viene poi precisata attraverso ipotesi di regolarità delle funzioni φ che si ottengono. Così una palla è un aperto di classe C^∞ mentre un poligono aperto di $\mathbb{R}^2$ è un aperto lipschitziano non di classe C^1. L'aperto costruito nell'Osservazione 5.43 è di classe C^0 (e anche stellato) ma non lipschitziano.

5.46. Esempio (spazi di Hölder). Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ e $\alpha \in (0,1]$. Una funzione $v : \Omega \to \mathbb{K}$ è detta hölderiana di esponente α oppure α-hölderiana quando esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|v(x) - v(y)| \leq L|x-y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in \Omega. \tag{5.24}$$

Le funzioni 1-hölderiane si chiamano anche *lipschitziane*. La minima delle costanti L verificanti la (5.24) si chiama *costante di Hölder* (di *Lipschitz* se $\alpha = 1$) di v. Notiamo che la definizione avrebbe senso anche per $\alpha > 1$, ma che in tale caso ogni funzione α-hölderiana avrebbe gradiente identicamente nullo e quindi sarebbe costante su ciascuna delle componenti connesse di Ω. Dunque si cadrebbe in un caso privo di interesse. Se poi k è un intero non negativo poniamo

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{v \in C^k(\overline{\Omega}) : \ D^\beta v \text{ è hölderiana di esponente } \alpha \text{ per } |\beta| \leq k\}$$

(attenzione: stiamo chiamando β i multi-indici perché α ha già un altro significato, imposto dalla prassi secondo la quale l'esponente di Hölder si denota con α) e muniamo $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ della norma

$$\|v\|_{k,\alpha} = \sum_{|\beta| \leq k} \left(\sup_{x \in \Omega} |D^\beta v(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|D^\beta v(x) - D^\beta v(y)|}{|x-y|^\alpha} \right). \tag{5.25}$$

Gli spazi normati che si ottengono non sono prehilbertiani. Segnaliamo che, se $\alpha \in (0,1)$, spesso si scrive $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ anziché $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Ad esempio $C^{1/2}(\overline{\Omega}) = C^{0,1/2}(\overline{\Omega})$ e $C^{3/2}(\overline{\Omega}) = C^{1,1/2}(\overline{\Omega})$. □

Gli spazi di Hölder sono importanti nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, ad esempio di tipo ellittico. Nella stessa teoria è pure notevolissima la classe degli spazi $W^{k,p}(\Omega)$ di Sobolev che ora definiamo. Infatti è nell'ambito degli spazi di Hölder e di Sobolev che si riescono a dimostrare teoremi di buona positura e di regolarità ottimale delle soluzioni, mentre gli analoghi enunciati nell'ambito delle funzioni di classe C^k sono in generale falsi se $d > 1$. All'introduzione degli spazi di Sobolev premettiamo alcune nozioni propedeutiche. Facciamo osservare che, almeno per ora, lo spazio $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ che ora introduciamo è solo uno spazio vettoriale. Una topologia adeguata verrà introdotta solo molto più tardi.

5.47. Definizione. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Denotiamo con $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle (classi di) funzioni misurabili $v : \Omega \to \mathbb{K}$ che sono integrabili in ogni compatto $K \subset \Omega$.* □

5.48. *Esercizio.* Si dimostri che $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

5.49. Definizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $v \in C^0(\Omega)$. Diciamo che v è una funzione a supporto compatto quando esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $v = 0$ in $\Omega \setminus K$.* □

5.50. Definizione. *Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$, il simbolo $C^\infty_c(\Omega)$ denota lo spazio delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{K}$ di classe C^∞ a supporto compatto.* □

5.51. Osservazione. Lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ è piuttosto ricco e conviene spendere qualche parole in proposito. Si parta dalla funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalle formule $\varphi(t) = \exp(-1/t)$ se $t > 0$ e $\varphi(t) = 0$ se $t \le 0$. Essa è di classe C^∞. Posto allora $\psi(t) = c \int_0^t \varphi(s)\,\varphi(1-s)\,ds$ per $t \in \mathbb{R}$, ove $c > 0$ è scelto in modo che $\psi(1) = 1$, anche ψ è di classe C^∞ e verifica

$$\psi(t) = 0 \quad \text{se } t \le 0\,, \quad \psi(t) = 1 \quad \text{se } t \ge 1 \quad \text{e} \quad 0 < \psi(t) < 1 \quad \text{se } 0 < t < 1\,. \tag{5.26}$$

Siano ora $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tali che $a' < a < b < b'$ e si definisca $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la formula $\zeta(t) = \psi((t-a')/(a-a'))\,\psi((t-b')/(b-b'))$. Allora ζ è di classe C^∞ e verifica

$$\zeta = 1 \quad \text{in } [a,b]\,, \quad \zeta = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus (a',b') \quad \text{e} \quad 0 < \zeta < 1 \quad \text{in } (a',b') \setminus [a,b]\,. \tag{5.27}$$

Definiamo ora $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ come segue. Scegliamo ad esempio $a' = 0$, $a = 1/3$, $b = 2/3$ e $b' = 1$ nella costruzione di ζ e poniamo $\rho(x) = c\zeta(|x|)$ per $x \in \mathbb{R}^d$, ove $c > 0$. Allora ρ è di classe C^∞ e, con una scelta ovvia di c, verifica

$$\rho(x) > 0 \quad \text{se } |x| < 1\,, \quad \rho(x) = 0 \quad \text{se } |x| \ge 1 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho\,dx = 1. \tag{5.28}$$

Notiamo per inciso che l'esistenza di funzioni del tipo (5.28) consente di costruire una procedura generale di regolarizzazione cui ora accenniamo (caso particolare di *convoluzione*, ma non vogliamo andare oltre questa parola). Si fissi $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e verificante le condizioni (5.28). Sia ora $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Per $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}^d$ poniamo

$$v_\varepsilon(x) = \int_{B_1(0)} v(x + \varepsilon y)\,\rho(y)\,dy \tag{5.29}$$

e osserviamo che

$$v_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \int_{B_\varepsilon(x)} v(z)\,\rho((z-x)/\varepsilon)\,dz = \varepsilon^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} v(z)\,\rho((z-x)/\varepsilon)\,dz \tag{5.30}$$

così che v_ε è di classe C^∞ per la teoria degli integrali dipendenti da parametri. La (5.29), invece, ci fornisce la disuguaglianza

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |v_\varepsilon(x) - v(x)| \le \sup_{|x-z| \le \varepsilon} |v(x) - v(z)|. \tag{5.31}$$

Infatti la terza delle (5.28) implica

$$v(x) = \int_{B_1(0)} v(x)\,\rho(y)\,dy \quad \text{da cui} \quad |v_\varepsilon(x) - v(x)| \le \int_{B_1(0)} |v(x+\varepsilon y) - v(x)|\,\rho(y)\,dy$$

e quindi la disuguaglianza voluta. Dunque la costruzione di v_ε a partire da v è una procedura di regolarizzazione e la disuguaglianza (5.31) mostra che $\|v_\varepsilon - v\|_\infty$ tende a 0 se v è uniformemente continua. Molto altro si potrebbe dire, ma preferiamo soprassedere. □

Anche se talora nel seguito potremo far riferimento alla procedura di regolarizzazione abbozzata sopra, ora, per dimostrare quanto ci serve, usiamo metodi "artigianali" che si appoggiano a proprietà di tipo (5.27). Per la definizione di funzione caratteristica si veda la (A.2.3).

5.52. Lemma. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e R e K due rettangoli compatti inclusi in Ω tali che R sia incluso nell'interno di K. Allora esiste una successione $\{\zeta_n\}$ di funzioni $\zeta_n \in C_c^\infty(\Omega)$, verificanti $0 \le \zeta_n \le 1$ in Ω, $\zeta_n = 1$ in R e $\zeta_n = 0$ in $\Omega \setminus K$ per ogni n, che converge puntualmente alla funzione χ_R caratteristica di R.* □

Dimostrazione. Presentato R come prodotto cartesiano degli intervalli $[a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, d$, si scelga, per $i = 1, \ldots, d$ e per ogni $n \geq 1$, una funzione $\zeta_{i,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ verificante la (5.27) con $a = a_i$, $b = b_i$, $a' = a_i - 1/n$ e $b' = b_i + 1/n$ e si definisca $\zeta_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$\zeta_n(x) = \prod_{i=1}^{d} \zeta_{i,n}(x_i) \quad \text{per } x = (x_1, \ldots, x_d) \in \Omega .$$

Allora $\zeta_n \in C^\infty(\Omega)$ e $\zeta_n = 1$ in R per ogni n. Inoltre, se δ è dato dalla Proposizione A.1.21 in corrispondenza al compatto R e al chiuso $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{int} K$, risulta $\zeta_n = 0$ in $\Omega \setminus K$ per n abbastanza grande (precisamente se $d^{1/2}/n < \delta$). Infine, siccome per ogni $x \in \Omega \setminus R$ fissato, si ha $\zeta_n(x) = 0$ per n abbastanza grande (precisamente se $d^{1/2}/n < \operatorname{dist}(x, R)$), concludiamo anche che $\{\zeta_n\}$ converge puntualmente a χ_R. □

5.53. Lemma. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega u\, v\, dx = 0 \quad \textit{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega) . \tag{5.32}$$

Allora $u = 0$ q.o. □

Dimostrazione. Sia R un rettangolo compatto incluso in Ω. Scelto un rettangolo compatto $K \subset \Omega$ il cui interno includa R (una tale scelta è possibile per la Proposizione A.1.21), sia $\{\zeta_n\}$ data dal Lemma 5.52. Applicando il Teorema della convergenza dominata abbiamo allora

$$\int_R u\, dx = \int_K u\, \chi_R\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_K u\, \zeta_n\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u\, \zeta_n\, dx = 0.$$

Siccome il rettangolo R è arbitrario, segue che $u = 0$ q.o. (grazie al Corollario A.2.32). □

5.54. Osservazione. Ferme restando le altre ipotesi, per u reale, se si rimpiazza la condizione (5.32) con $\int_\Omega u\, v\, dx \geq 0$ per ogni $v \in C^\infty_c(\Omega)$ non negativa, segue che $u \geq 0$ q.o. □

Deduciamo dal Lemma 5.53 un facile corollario. Anche se ora non se ne vede l'utilità immediata, avremo modo di sfruttarlo successivamente in varie situazioni.

5.55. Corollario. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $x_0 \in \Omega$. Allora non esiste alcuna funzione $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tale che*

$$\int_\Omega uv\, dx = v(x_0) \quad \textit{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega) . \ \square \tag{5.33}$$

Dimostrazione. Per assurdo, una tale u esista. Poniamo $\Omega' = \Omega \setminus \{x_0\}$ e sia $v \in C^\infty_c(\Omega')$. Prolunghiamo v a tutto Ω ponendo $v(x_0) = 0$. Allora la (5.33) fornisce $\int_{\Omega'} uv\, dx = \int_\Omega uv\, dx = 0$. Per l'arbitrarietà di v e per il Lemma 5.53, applicato all'aperto Ω', deduciamo $u = 0$ q.o. in Ω', da cui $u = 0$ q.o. in Ω. Ma allora la (5.33) diventa $0 = v(x_0)$ per ogni $v \in C^\infty_c(\Omega)$, e ciò è assurdo in quanto $C^\infty_c(\Omega)$ contiene anche funzioni non nulle in x_0 (si prenda ad esempio $v(x) = \rho((x - x_0)/r)$ ove ρ è data dalla (5.28) e $r > 0$ è scelto in modo che $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$). □

Diamo ora qualche richiamo sull'integrazione per parti in più variabili. Partiamo dal Teorema della divergenza di Gauss. Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ verificante opportune condizioni di regolarità (deve almeno avere senso la normale esterna considerata sotto) e $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ è una funzione di classe C^1 (per evitare equivoci interpretiamo ciò come segue: esiste un prolungamento di classe C^1 definito in un aperto che include $\overline{\Omega}$), allora vale la formula

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{u}\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{5.34}$$

ove $\mathbf{n} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$ è la "normale esterna", cioè il campo vettoriale che, per ogni $x \in \partial\Omega$, verifica: $\mathbf{n}(x)$ è normale a $\partial\Omega$ in x, $|\mathbf{n}(x)| = 1$ e $x + t\mathbf{n}(x) \notin \overline{\Omega}$ per $t > 0$ abbastanza piccolo.

Prendiamo ora $\mathbf{u} = \mathbf{w}\, v$ dove $\mathbf{w} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ e $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sono pure di classe C^1. Grazie alla formula di Leibniz, la (5.34) diventa

$$\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{w})\, v \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, v \, dS \tag{5.35}$$

che è "la formula di integrazione per parti" per antonomasia. Se ora $v \in C_c^\infty(\Omega)$, l'integrale di bordo è nullo e la (5.35) diventa

$$\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \nabla v \, dx = -\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{w})\, v \, dx. \tag{5.36}$$

Inoltre è facile convincersi che questa stessa formula vale senza le ipotesi di limitatezza e di regolarità fatte su Ω, in quanto, di fatto, gli integrali sono eseguiti su un compatto anziché su tutto Ω. Per lo stesso motivo possiamo supporre $\mathbf{w}$ di classe C^1 solo in Ω anziché in $\overline{\Omega}$. Prendiamo ora $\mathbf{w} = u\, \mathbf{e}_i$ ove $u \in C^1(\Omega)$ e $\mathbf{e}_i$ è l' i-esimo versore della base canonica di $\mathbb{R}^d$. Allora dalla (5.36) otteniamo

$$\int_\Omega D_i u \, v \, dx = -\int_\Omega u\, D_i v \, dx$$

ove D_i è la derivazione parziale rispetto a x_i. Iterando abbiamo la formula generale

$$\int_\Omega D^\alpha u \, v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, D^\alpha v \, dx \quad \text{per ogni } u \in C^k(\Omega) \text{ e } v \in C_c^\infty(\Omega) \tag{5.37}$$

valida non appena $|\alpha| \le k$.

5.56. Esempio (spazi di Sobolev). Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $k \ge 0$ un intero e $p \in [1, +\infty)$. Denotiamo con $W^{k,p}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali che per ogni multi-indice α verificante $|\alpha| \le k$ esista una funzione $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ verificante

$$\int_\Omega u_\alpha v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, D^\alpha v \, dx \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(\Omega) \tag{5.38}$$

e muniamo tale spazio della norma definita dalla formula

$$\|u\|_{k,p}^p = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |u_\alpha|^p \, dx. \tag{5.39}$$

Vale la pena di riscrivere la richiesta nel caso semplice $k = d = 1$: esiste $w \in L^p(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega wv \, dx = -\int_\Omega uv' \, dx \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(\Omega) \tag{5.40}$$

Osserviamo che la norma è effettivamente ben definita. Infatti, grazie al Lemma 5.53 e all'Esercizio 5.48, per ciascuno degli α considerati, la funzione u_α è unica (in particolare $u_{(0,\dots,0)} = u$). Notiamo che la (5.38) appare come una formula di integrazione per parti, che dunque vale per definizione, se si interpreta u_α come una derivata. Effettivamente tale u_α viene detta *derivata debole*, oppure *derivata nel senso delle distribuzioni*, e denotata con il simbolo $D^\alpha u$. La terminologia e la notazione sono giustificate dai fatti seguenti: *i)* se u è di classe C^k e le derivate di ordine $\le k$ appartengono a $L^p(\Omega)$, allora come u_α possiamo prendere $D^\alpha u$; *ii)* la (5.38) ha senso più in generale con $u_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ per cui l'esistenza o meno della derivata debole non dipende da p (dipende da p solo il fatto che essa appartenga o meno a $L^p(\Omega)$). Detto ciò, la definizione di $W^{k,p}(\Omega)$ si riscrive nelle forma

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \; D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \text{per } |\alpha| \le k\} \tag{5.41}$$

precisando che le derivate sono intese in senso debole, e la (5.39) diventa

$$\|u\|_{k,p}^p = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx. \tag{5.42}$$

La derivata debole, regolare o meno, verifica tante buone proprietà, analoghe a quelle delle funzioni di classe C^k e che invece falliscono per funzioni che posseggono derivate q.o. ma irregolari. Ad esempio, se $\Omega = (0,1)$ e u è una funzione costante a tratti, allora u ha derivata classica q.o., precisamente la funzione nulla, ma questa non verifica la definizione di derivata debole. Di fatto la derivata debole non esiste in questo caso (se non generalizzando ulteriormente nell'ambito della Teoria delle distribuzioni): si veda il dettaglio dato tra breve. Al contrario, una funzione globalmente continua in $[0,1]$ e regolare a tratti ha derivata debole: la derivata classica, che esiste q.o. nelle ipotesi fatte, ne verifica la definizione. Più in generale, se $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è limitato, si ha

$$\textit{se } u \in C^0(\overline{\Omega}) \textit{ e } u|_{\Omega_i} \in C^1(\overline{\Omega}_i) \textit{ per } i = 1, \ldots, n \textit{ allora } u \in W^{1,p}(\Omega) \textit{ per } p \in [1, +\infty) \tag{5.43}$$

ove $\{\Omega_i\}$ è una suddivisione finita di Ω verificante qualche condizione di regolarità. Ad esempio è accettabile il caso in cui Ω è un poligono di $\mathbb{R}^2$ e i sottoinsiemi Ω_i costituiscono una triangolazione di Ω, cioè verificano le condizioni seguenti: *i*) ogni Ω_i è un triangolo aperto e $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \overline{\Omega}_i$; *ii*) per $i \ne j$ le chiusure di Ω_i e Ω_j o sono disgiunte o hanno in comune un vertice o un lato. Il lettore può controllare, integrando per parti, che le derivate classiche (definite fuori dalle interfacce) effettivamente fungono da derivate deboli.

Osserviamo inoltre che si possono considerare varie norme equivalenti, e una semplice è data da $\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p$, che possono essere più comode in certi casi ma che non sarebbero prehilbertiane nemmeno quando $p = 2$. Al contrario, se $p = 2$ la norma (5.42) è indotta dal prodotto scalare

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha u \, \overline{D^\alpha v} \, dx. \tag{5.44}$$

Si pone di solito

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) \quad \text{e} \quad \|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{k,2}. \tag{5.45}$$

Osserviamo infine che si usa introdurre anche la seminorma definita dalla formula

$$|u|_{k,p}^p = \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx. \tag{5.46}$$

Allora $\|u\|_{k,p}^p = \sum_{j=0}^k |u|_{j,p}^p$.

5.57. Osservazione. Come si è già osservato, la definizione di derivata debole può essere data nell'ambito degli spazi di tipo L^1_{loc}, cioè indipendentemente da proprietà di appartenenza a spazi di tipo L^p. Addirittura possiamo parlare di una derivata specifica $D^\alpha u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ di un certo ordine di una funzione $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ imponendo l'esistenza di $u_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ verificante la (5.38) per quel preciso multi-indice α, senza richiedere nulla sulle altre derivate, in particolare su quelle di ordine inferiore. Inoltre, quanto abbiamo fatto per le derivate può essere ripetuto per vari operatori differenziali. Qui vogliamo mettere l'attenzione sugli operatori gradiente, divergenza e laplaciano. Nel caso regolare il gradiente, la divergenza e il laplaciano classici svolgono il ruolo richiesto a gradiente, divergenza e laplaciano deboli, per cui resta giustificato l'uso dei simboli consueti. In generale, tuttavia, l'esistena di gradiente, divergenza e laplaciano deboli non è affatto garantita, mentre la loro unicità discende sempre dal lemma 5.53.

Se $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, il *gradiente* in senso debole di u è una funzione $\mathbf{w} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)^d$ (poi denotata ∇u se esiste) che verifica

$$\int_\Omega \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, dx = -\int_\Omega u \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in C^\infty_c(\Omega)^d . \tag{5.47}$$

Si dimostra immediatamente che ∇u esiste in senso debole se e solo se esistono le derivata parziali prime deboli. In tal caso il gradiente è il vettore che ha quelle come componenti. Per parlare di divergenza dobbiamo prendere una funzione vettoriale $\mathbf{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)^d$. La sua *divergenza* debole, se esiste, è una funzione $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ che verifica

$$\int_\Omega wv \, dx = -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla v \, dx \quad \text{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega) . \tag{5.48}$$

Infine, se $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, una funzione $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è il *laplaciano* debole di u se

$$\int_\Omega wv \, dx = \int_\Omega u \Delta v \, dx \quad \text{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega) . \tag{5.49}$$

Il lettore può dimostrare facilmente che condizione sufficiente per l'esistenza del laplaciano debole di u è ciascuna delle due seguenti: $i)$ esiste il gradiente debole $\nabla u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)^d$ e questo ha la divergenza debole $\operatorname{div} \nabla u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (in tal caso quest'ultima è il laplaciano debole); $ii)$ esistono le derivate seconde $D_i^2 u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per $i = 1, \ldots, d$ (in tal caso il laplaciano debole è la loro somma).

5.58. ***Esercizio.*** Dimostrare che ciascuna delle formule

$$\|u\| = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_p \quad \text{e} \quad \|u\| = \max_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_p$$

definisce una norma equivalente alla (5.42). Per dare una dimostrazione veloce si ricordi quanto è stato detto nell'Esercizio 5.39. Dimostrare inoltre che la formula

$$\|u\|^p = \int_\Omega (|u|^p + |\nabla u|^p) \, dx$$

definisce una norma in $W^{1,p}(\Omega)$ equivalente alla (5.42) con $k = 1$. Nella formula il gradiente ∇u è il gradiente debole e il modulo denota la norma euclidea.

5.59. Esempio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$. Si consideri lo spazio

$$W^p_{\mathrm{div}}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^p(\Omega)^d : \ \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^p(\Omega)\}. \tag{5.50}$$

Si tratta dunque dello spazio costituito dalle $\mathbf{u} \in L^p(\Omega)^d$ dotate di divergenza debole in $L^p(\Omega)$, cioè tali che esista $w \in L^p(\Omega)$ verificante la definizione (5.48) di divergenza debole. Se si munisce tale spazio della norma definita dalla formula

$$\|\mathbf{u}\|^p = \int_\Omega |\mathbf{u}|^p \, dx + \int_\Omega |\operatorname{div} \mathbf{u}|^p \, dx$$

si ottiene uno spazio normato, prehilbertiano nel caso particolare $p = 2$. Analogamente si ponga

$$L^p_\Delta(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)^d : \ \Delta u \in L^p(\Omega)\} \tag{5.51}$$

vale a dire lo spazio delle $u \in L^p(\Omega)$ tali che esista $w \in L^p(\Omega)$ verificante la (5.49). Se lo si munisce della norma definita dalla formula

$$\|u\|^p = \int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega |\Delta u|^p \, dx$$

si ottiene uno spazio normato, prehilbertiano nel caso particolare $p = 2$.

5.60. Osservazione. Lo spazio $W^p_{\mathrm{div}}(\Omega)$ è utile, ad esempio, nella discussione di svariati problemi legati alle equazioni di Maxwell, specialmente nel caso $p = 2$. Segnaliamo che in letteratura si trova più spesso la notazione $H(\mathrm{div};\Omega)$ in sostituzione di $W^2_{\mathrm{div}}(\Omega)$.

5.61. ***Esercizio.*** Sia Ω il quadrato $(0,1)^2$ e si denoti con (x, y) la variabile in Ω. Si dimostri che, se φ, ψ appartengono a $L^p(0,1)$, allora la funzione $\mathbf{u}$ data dalla formula $\mathbf{u}(x, y) = (\varphi(y), \psi(x))$ appartiene allo spazio (5.50) controllando che la divergenza è nulla (cioè $w = 0$ verifica la (5.48)). Si noti che si sta parlando di divergenza senza nominare la matrice jacobiana, che infatti può non esistere se φ e ψ non sono più regolari di tanto, come nel caso di funzioni a scala.

5.62. Osservazione. Le derivate deboli (e più in generale le versioni deboli di vari operatori, come quelli introdotti nell'Osservazione 5.57) godono di buone proprietà, talora molto simili a quelle del caso classico, e qui ne mettiamo in evidenza una:

$$\textit{se } \Omega \textit{ è connesso, } u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \textit{ e } \nabla u = 0\,, \textit{ allora } u \textit{ è costante.} \tag{5.52}$$

Diamo la dimostrazione nel caso monodimensionale in cui Ω è un intervallo aperto, limitato o meno. Fissiamo $v_0 \in C^\infty_c(\Omega)$ tale che $\int_\Omega v_0\,dx = 1$, poniamo $c = \int_\Omega uv_0\,dx$ e dimostriamo che $u = c$ q.o. in Ω. Per ogni $v \in C^\infty_c(\Omega)$, definiamo $I \in \mathbb{K}$ e $w : \Omega \to \mathbb{K}$ (dipendenti da v) mediante

$$I = \int_\Omega v\,dx \qquad \text{e} \qquad w(x) = \int_a^x (v(t) - I\,v_0(t))\,dt \quad \text{per } x \in \Omega$$

ove a è il primo estremo di Ω. Allora $w \in C^\infty_c(\Omega)$ (il lettore controlli con cura) e $v = Iv_0 + w'$. Essendo $\int_\Omega uw'\,dx = 0$ per definizione di $u' = 0$, deduciamo

$$\int_\Omega uv\,dx = I\int_\Omega uv_0\,dx + \int_\Omega uw'\,dx = Ic = \int_\Omega cv\,dx.$$

Essendo $v \in C^\infty_c(\Omega)$ arbitraria, la tesi segue applicando il Lemma 5.53 a $u - c$.

5.63. ***Esercizio.*** Dimostrare che, se $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ha derivata debole $u' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, allora u differisce (nel senso dell'uguaglianza q.o.) per una costante dalla funzione integrale $w(x) = \int_0^x u'(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$, della sua derivata. In particolare u ha un rappresentante continuo. Si consiglia l'uso del Teorema A.2.36 di Fubini-Tonelli e della (5.52). Generalizzare al caso di un intervallo (anziché $\mathbb{R}$).

5.64. Osservazione. Poco sopra abbiamo affermato senza dimostrazione che una funzione a scala su un intervallo non ha derivata debole (se non generalizzando nell'ambito della teoria delle distribuzioni). Una dimostrazione è data dall'esercizio precedente. Un'altra, che si riferisce al caso di un intervallo campione e a un solo punto di salto, è data di seguito. Precisamente dimostriamo che

la funzione $u : (-1,1) \to \mathbb{R}$ *definita da* $u(x) = 0$ *se* $x < 0$ *e* $u(x) = 1$ *se* $x > 0$ *non ha derivata debole.* (5.53)

Infatti, se esistesse una funzione $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(-1,1)$ verificante la condizione (5.40), avremmo subito $\int_{-1}^1 wv\,dx = -\int_{-1}^1 uv'\,dx = -\int_0^1 v'\,dx = v(0)$ per ogni $v \in C^\infty_c(-1,1)$, contro il Corollario 5.55.

5.65. Esempio (funzione di Vitali). Meno facile è trovare una funzione *continua* priva di derivata debole. Ne costruiamo una, addirittura hölderiana. Definiamo la successione di funzioni $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ponendo $u_0(x) = x$ per $x \in [0,1]$ e richiedendo, per ogni $n \geq 0$, le condizioni:

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\,u_n(3x) \quad \text{se } x \in [0,1/3], \quad u_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \quad \text{se } x \in [1/3,1/2]$$
$$u_{n+1}(x) = 1 - u_{n+1}(1-x) \quad \text{per ogni } x \in [0,1].$$

Allora ogni u_n è continua e non decrescente, verifica $u_n(0) = 0$ e $u_n(1) = 1$ e ha grafico simmetrico rispetto a $(1/2, 1/2)$. Proviamo che $\|u_{n+1} - u_n\|_\infty \le (1/6)2^{-n}$ per ogni n. Se $n = 0$ basta il calcolo diretto. Per induzione, sia $n \ge 0$ e la disuguaglianza valga. Allora, per $x \in [0, 1/3]$, abbiamo $|u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)| = (1/2)|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \le (1/6)2^{-(n+1)}$. D'altra parte, banalmente, si ha $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = 0$ per $x \in [1/3, 1/2]$. Siccome tutte le u_n hanno grafico simmetrico come detto, concludiamo che $\|u_{n+2} - u_{n+1}\|_\infty \le (1/6)2^{-(n+1)}$. Deduciamo che la serie $\sum_{n=0}^\infty (u_{n+1} - u_n)$ converge uniformemente, dunque che converge uniformemente a una certa funzione $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la successione $\{u_n\}$. Allora u è continua e monotona e verifica $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$. Controlliamo che u è differenziabile con derivata nulla in un aperto $\Omega' \subset (0, 1)$ avente complementare di misura nulla. Se si disegna il grafico di u_n per i primi valori di n, si vede subito che, per $n \ge 1$, valgono i fatti seguenti: *i*) se u_n è costante in un intervallo aperto $I \subset (0, 1)$ allora $u_{n+1} = u_n$ in I, da cui $u = u_n$ in I; *ii*) gli intervalli aperti massimali in cui u_{n+1} è costante e u_n non lo è sono 2^{n-1} e hanno tutti ampiezza 3^{-n}. Allora, detto Ω_n l'aperto unione di tali intervalli, si ha $u = u_n$ in Ω_n, da cui $u' = 0$ in Ω_n. Sia Ω' l'aperto unione di tutti gli Ω_n: allora $u|_{\Omega'}$ è (infinitamente) differenziabile con derivata nulla. Verifichiamo che il complementare di Ω' ha misura nulla. Infatti, siccome gli Ω_n sono fra loro disgiunti, se denotiamo con $|\cdot|$ la misura di Lebesgue, abbiamo

$$|\Omega'| = \sum_{n=1}^\infty |\Omega_n| = \sum_{n=1}^\infty 2^{n-1}3^{-n} = 3^{-1}\sum_{n=0}^\infty (2/3)^n = 1.$$

Supponiamo ora che u abbia derivata debole $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(0, 1)$. Allora la restrizione di w a Ω' e la funzione nulla svolgono lo stesso ruolo (si prenda $v \in C_c^\infty(\Omega') \dots$) e quindi $w = 0$ q.o. in Ω'. Di conseguenza $w = 0$ q.o. in $(0, 1)$. Per la (5.52), concludiamo che u è costante, il che non è.

Segnaliamo che l'insieme $C = (0, 1) \setminus \Omega'$ è il ben noto *insieme di Cantor* e che la funzione u costruita è detta *funzione di Vitali* (da taluni è chiamata anche *scala del diavolo*).

A complemento, verifichiamo che u è hölderiana. A questo scopo basta trovare $\alpha \in (0, 1)$ e $M \ge 0$ tale che $|u_n(x) - u_n(y)| \le M|x - y|^\alpha$ per ogni $x, y \in [0, 1]$ e ogni n. Se $n = 0$, la disuguaglianza vale per ogni $\alpha \in (0, 1)$ e $M \ge 1$. Per induzione su n, se la disuguaglianza vale per n, si ha per $x, y \in [0, 1/3]$: $|u_{n+1}(x) - u_{n+1}(y)| \le (M/2)|3x - 3y|^\alpha = (M/2)3^\alpha|x - y|^\alpha$, e tale disuguaglianza si estende poi facilmente a ogni $x, y \in [0, 1]$. Dunque imponiamo anche $(M/2)3^\alpha \le M$. Le restrizioni su M e α sono entrambe banalmente soddisfatte se $M = 1$ e $3^\alpha = 2$, cioè $\alpha = \ln 2/\ln 3$. Si può poi dimostrare che i valori trovati di M e di α sono ottimali.

5.66. Distribuzioni. Poco sopra si è nominata la Teoria delle distribuzioni e ora diciamo due parole senza pretese. Le distribuzioni su Ω sono gli elementi di un opportuno sottospazio di $\mathrm{Hom}(C_c^\infty(\Omega); \mathbb{K})$ che viene denotato con $\mathcal{D}'(\Omega)$ e che ha una struttura di spazio vettoriale topologico. Ecco una possibile definizione. Un funzionale $f \in \mathrm{Hom}(C_c^\infty(\Omega); \mathbb{K})$ è una distribuzione quando verifica la proprietà seguente: *per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono una costante $M \ge 0$ e un intero $k \ge 0$ tali che*

$$|\langle f, v\rangle| \le M \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha v\|_\infty \quad \textit{per ogni } v \in C_c^\infty(\Omega) \textit{ nulla in } \Omega \setminus K \tag{5.54}$$

ove $\langle f, v\rangle$ denota il valore di f in v. Valgono i fatti seguenti: *i*) $L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ (l'immersione essendo il frutto di un'opportuna identificazione); *ii*) tale immersione è continua; *iii*) per ogni $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e ogni multi-indice α si definisce un elemento $D^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ da chiamare derivata di u di ordine α. Diamo un cenno sui punti segnalati. *i*) Per $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ consideriamo il funzionale $f_u \in \mathrm{Hom}(C_c^\infty(\Omega); \mathbb{K})$ definito dalla formula

$$\langle f_u, v\rangle = \int_\Omega uv\, dx \quad \textit{per } v \in C_c^\infty(\Omega)$$

osservando che la definizione ha senso in quanto l'integrale è, di fatto, esteso a un compatto tutte le volte che v è fissata. Si vede subito che, fissato il compatto $K \subset \Omega$, per soddisfare la (5.54), basta scegliere $M = \int_K |u|\,dx$ e $k = 0$, così che $f_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Inoltre l'applicazione $u \mapsto f_u$ da $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ così costruita è iniettiva per il Lemma 5.53. Identificando allora il funzionale f_u con la funzione u che lo definisce, abbiamo

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{e} \quad \langle u, v\rangle = \int_\Omega uv\,dx \quad \textit{per } u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \textit{ e } v \in C^\infty_c(\Omega)\,. \tag{5.55}$$

In particolare $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$. *ii)* Non introduciamo la topologia che rende $\mathcal{D}'(\Omega)$ spazio vettoriale topologico ma almeno la convergenza:

$$f_n \to f \quad \textit{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \textit{se e solo se} \quad \lim_{n\to\infty} \langle f_n, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \textit{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega)\,. \tag{5.56}$$

Allora è un esercizio dimostrare che $u_n \to 0$ in $L^p(\Omega)$ implica $u_n \to 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, dove, come si è detto, u_n denota anche la distribuzione associata a u_n. Dunque l'immersione di $L^p(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ è continua (cfr. (4.2)). *iii)* Siano $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α un multi-indice. Allora la derivata $D^\alpha f$ di f è il funzionale, che si verifica immediatamente essere ancora una distribuzione, definito dalla formula

$$\langle D^\alpha f, v\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha v\rangle \quad \textit{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega) \tag{5.57}$$

(e l'operatore $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ che a ogni $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ associa $D^\alpha f$ è continuo per successioni, come si verifica banalmente). Ma torniamo agli spazi di Sobolev. In particolare, se $u \in L^p(\Omega)$, si ha $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e tutte le derivate $D^\alpha u$ sono dei ben definiti elementi di $\mathcal{D}'(\Omega)$ (in particolare una funzione costante a tratti ha senz'altro derivata nel senso delle distribuzioni, ma non certo nulla). Dunque ha senso chiedersi se alcune di esse appartengano a $L^p(\Omega)$ e la (5.41) ha senso.

5.67. ***Esercizio.*** Ricavare dalla (5.57) la definizione di derivata parziale $D_i f$ della distribuzione f rispetto alla i-esima variabile.

5.68. ***Esercizio.*** Imitando la definizione di $D_i f$ ottenuta nell'esercizio precedente, si dia la definizione di derivata direzionale $D_r f$ di f nella direzione del versore $r = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ e si dimostri che, senza alcuna ipotesi aggiuntiva, vale la formula $D_r f = \sum_{i=1}^d r_i\, D_i f$.

5.69. ***Esercizio.*** Iterando la definizione di derivata parziale data dall'Esercizio 5.67, si dimostri che, per ogni distribuzione f e per ogni i, j, vale automaticamente il Teorema di Schwarz: $D_i D_j f = D_j D_i f$. Si controlli inoltre che tali derivate coincidono con la derivata data dalla (5.57) con $\alpha = e_i + e_j$. In particolare risulta chiaro che, per un generico multi-indice α, la derivata $D^\alpha f$ si può ottenere iterando la derivazione parziale e che la derivata ottenuta non dipende dall'ordine di esecuzione delle derivazioni del prim'ordine.

5.70. Osservazione. Nella definizione di $W^{k,p}(\Omega)$ abbiamo supposto $1 \le p < +\infty$, ma si può definire, esattamente nello stesso modo, lo spazio $W^{k,\infty}(\Omega)$. Tuttavia questo spazio è molto meno interessante. Infatti, se $k \ge 1$ e Ω è limitato e verifica opportune condizioni di regolarità (che possono dipendere da k), avviene che $W^{k,\infty}(\Omega)$ è isomorfo allo spazio $C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ delle funzioni lipschitziane con le loro derivate fino all'ordine $k-1$. Precisamente ogni funzione di questo tipo individua una classe di funzioni misurabili che appartiene a $W^{k,\infty}(\Omega)$ e, viceversa, ogni elemento di tale spazio ha un rappresentante appartenente a $C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$. Inoltre, per funzioni di questo tipo, le nozioni di derivata debole e quella di derivata q.o. coincidono. Ricadiamo dunque, sostanzialmente, in uno spazio di tipo classico. Ribadiamo però: ciò se Ω ha qualche regolarità. Infatti la funzione costruita nell'Osservazione 5.43 appartiene a $W^{1,\infty}(\Omega)$ ma non è lipschitziana.

5.71. Osservazione. Al contrario, se $p < +\infty$, in generale $W^{k,p}(\Omega)$ non è uno spazio di funzioni regolari, anche se Ω è regolarissimo. Se si può dimostrare che ogni elemento di $W^{1,1}(\Omega)$ ha un rappresentante continuo quando Ω è un intervallo di $\mathbb{R}$ (Esercizio 5.63), si può altrettanto dimostrare (Teorema di Sobolev) che, se $d > 1$, perché ogni elemento di $W^{1,p}(\Omega)$ abbia un rappresentante continuo è necessario e sufficiente che sia $p > d$. Qui ci limitiamo a un semplice esempio che mostra che quando $p = d = 2$ una funzione di $W^{1,p}(\Omega)$ può non essere limitata.

Si prenda come Ω il disco di $\mathbb{R}^2$ avente centro nell'origine e raggio $r = 1/2$. Allora la formula $u(x) = |\ln|x||^\alpha$, ove $\alpha > 0$, definisce $u(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ (precisamente per $x \in \Omega \setminus \{0\}$), ma la funzione u non appartiene a $L^\infty(\Omega)$. Mostriamo che $u \in H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ se $\alpha < 1/2$. Innanzi tutto $u \in L^2(\Omega)$. Osservato che $\ln|x| < 0$ in $\Omega \setminus \{0\}$ dato che $r < 1$, u è di classe C^∞ in tale insieme e si ha $\nabla u(x) = -\alpha|\ln|x||^{\alpha-1}|x|^{-1}(x/|x|)$. Verifichiamo che $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$ appunto se $\alpha < 1/2$. Passando prima a coordinate polari e poi usando il cambiamento di variabile $\rho = \exp(-t)$, essendo $2\alpha - 2 < -1$, otteniamo

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = \alpha^2 \int_\Omega |\ln|x||^{2\alpha-2} \frac{dx}{|x|^2} = 2\pi\alpha^2 \int_0^{1/2} |\ln\rho|^{2\alpha-2} \frac{\rho \, d\rho}{\rho^2} = 2\pi\alpha^2 \int_{\ln 2}^{+\infty} t^{2\alpha-2} \, dt < +\infty.$$

Verifichiamo che tale gradiente è gradiente anche in senso debole (Osservazione 5.57), cioè che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \mathbf{v} \, dx = -\int_\Omega u \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in C_c^\infty(\Omega)^2 .$$

Sia dunque $\mathbf{v} \in C_c^\infty(\Omega)^2$. Posto $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \ |x| > \varepsilon\}$ e $\Gamma_\varepsilon = \{x \in \Omega : \ |x| = \varepsilon\}$, si ha

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \mathbf{v} \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \mathbf{v} \, dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = -\int_\Omega u \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx$$

in quanto il modulo dell'integrale su Γ_ε si maggiora con $2\pi\varepsilon|\ln\varepsilon|^\alpha \sup|\mathbf{v}|$ e dunque è infinitesimo. Quindi $u \in H^1(\Omega)$.

Si può addirittura dimostrare che, non appena $kp \leq d$ con la sola esclusione di qualche caso particolare riguardante i tre parametri k, p, d, esistono funzioni di $W^{k,p}(\Omega)$ che non sono essenzialmente limitate in alcun aperto non vuoto incluso in Ω, e di ciò daremo un cenno più tardi. Pertanto le funzioni di $W^{k,p}(\Omega)$ possono essere molto irregolari. Ciò nonostante gli spazi di Sobolev funzionano benissimo, meglio degli spazi $C^k(\overline{\Omega})$, specialmente se $p = 2$ (caso prehilbertiano), o almeno se $1 < p < +\infty$, come vedremo in seguito.

5.72. Esempio (spazi di Sobolev con esponente reale). Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ (limitato e regolare se vogliamo garantire tutto ciò che diciamo). Per $p \in [1, +\infty)$, denotiamo per comodità con $L^p_\times$ lo spazio $L^p(\Omega \times \Omega)$ costruito su $\Omega \times \Omega$ rispetto alla misura μ definita da

$$\mu(E) = \int_{\Omega\times\Omega} \frac{dx \, dy}{|x-y|^d} \quad \text{(finita o meno) per ogni } E \subseteq \Omega \times \Omega \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

e denotiamo con $\|\cdot\|_{p,\times}$ la norma usuale in tale spazio. Sia ora $\sigma \in (0,1)$. Per $v \in L^p(\Omega)$ costruiamo $r_\sigma v : \Omega \times \Omega \to \mathbb{K}$ (rapporto incrementale di ordine σ) mediante la formula

$$(r_\sigma v)(x,y) = \frac{v(x) - v(y)}{|x-y|^\sigma} \quad \text{per q.o. } (x,y) \in \Omega \times \Omega$$

e definiamo $W^{\sigma,p}(\Omega)$ e la seminorma $|v|_{\sigma,p}$ e la norma $\|v\|_{\sigma,p}$ di ogni $v \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ mediante

$$W^{\sigma,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : r_\sigma v \in L^p_\times\}, \quad |v|_{\sigma,p} = \|r_\sigma v\|_{p,\times} \quad \text{e} \quad \|v\|^p_{\sigma,p} = \|v\|^p_p + |v|^p_{\sigma,p} . \tag{5.58}$$

Otteniamo uno spazio normato, prehilbertiano se $p = 2$. Sia ora $s > 0$ non intero. Decomposto s nella forma $s = k + \sigma$ con $k \geq 0$ intero e $\sigma \in (0,1)$, poniamo

$$W^{s,p}(\Omega) = \{v \in W^{k,p}(\Omega) : \ D^\alpha v \in W^{\sigma,p}(\Omega) \text{ per } |\alpha| = k\} \tag{5.59}$$

$$\|v\|^p_{s,p} = \|v\|^p_{k,p} + \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha v|^p_{\sigma,p} \quad \text{per } v \in W^{s,p}(\Omega). \tag{5.60}$$

Ancora otteniamo uno spazio normato, prehilbertiano se $p = 2$. Esplicitando la norma abbiamo

$$\|v\|^p_{s,p} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha v|^p \, dx + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)|^p}{|x-y|^{\sigma p}} \, \frac{dx \, dy}{|x-y|^d} .$$

Questi spazi sono detti anche *spazi di Slobodeckiĭ* e la loro (strana) costruzione è fatta in modo che $W^{k+1,p}(\Omega) \subset W^{s_2,p}(\Omega) \subset W^{s_1,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ se $k < s_1 < s_2 < k+1$.

6. Alcune costruzioni canoniche

In questo paragrafo mostriamo come si possano costruire spazi normati (o prehilbertiani) a partire da spazi normati (o prehilbertiani) già assegnati. Merita un commento preliminare il caso dello spazio intersezione. Se V e W sono due spazi normati, non è in generale interessante considerare la loro intersezione insiemistica. Infatti, siccome gli elementi dei due spazi possono essere oggetti di natura diversa (si pensi ad esempio al caso degli spazi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$), l'intersezione potrebbe essere vuota. Occorre allora considerare solo il caso in cui i due spazi da intersecare siano sottospazi vettoriali di uno stesso spazio vettoriale $\mathcal{Z}$ più grande. In tale circostanza l'intersezione insiemistica costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathcal{Z}$.

Per semplicità, nell'enunciato che segue, imponiamo sistematicamente che tutti gli spazi che supponiamo immersi in uno spazio vettoriale topologico siano immersi con continuità, anche se tale ipotesi, di fatto, non sempre sarà sfruttata. Vedremo invece che essa è importante in ogni caso quando discuteremo la completezza degli spazi qui introdotti.

6.1. Teorema. *Siano* $(V, \|\cdot\|_V)$ *e* $(W, \|\cdot\|_W)$ *due spazi normati. Allora si ha che*

i) se V_0 è un sottospazio vettoriale di V, la restrizione di $\|\cdot\|_V$ a V_0 è una norma in V_0; (6.1)

ii) la formula $\|(v,w)\| = (\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2)^{1/2}$ *definisce una norma in $V \times W$;* (6.2)

iii) se V_0 è un sottospazio vettoriale di V chiuso in V e $V_\bullet = V/V_0$, allora la formula $\|x\|_\bullet = \inf\{\|v\|_V :\ v \in x\} = \operatorname{dist}(0,x)$ *definisce una norma in $V_\bullet$.* (6.3)

Se poi V e W sono immersi con continuità nello stesso spazio vettoriale topologico $\mathcal{Z}$, allora si ha anche che

iv) la formula $\|x\| = (\|x\|_V^2 + \|x\|_W^2)^{1/2}$ definisce una norma in $V \cap W$; (6.4)

v) la formula $\|x\| = \inf\{(\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2)^{1/2} :\ v + w = x\}$ definisce una norma in $V + W$. (6.5)

Più precisamente, la norma definita in (6.4) *rende $V \cap W$ isometricamente isomorfo al sottospazio del prodotto $V \times W$*

$$D = \{(v,w) \in V \times W :\ v = w\} \tag{6.6}$$

e la norma definita in (6.5) *rende $V + W$ isometricamente isomorfo al quoziente $(V \times W)/Z_0$, ove Z_0 è il sottospazio chiuso di $V \times W$ definito da*

$$Z_0 = \{(v,w) \in V \times W :\ v + w = 0\}. \tag{6.7}$$

Infine tutti gli spazi normati così costruiti sono prehilbertiani se tali sono gli spazi V e W . □

Dimostrazione. Il primo punto è ovvio. Per quanto riguarda il secondo, l'unica proprietà la cui dimostrazione richiede qualche considerazione è la subadditività della norma. A questo proposito basta osservare che $\|(v,w)\|$ è la norma euclidea del vettore $(\|v\|_V, \|w\|_W)$ di $\mathbb{R}^2$. Se (v,w) e (v',w') sono due elementi di $V \times W$ e se $|\cdot|$ denota la norma euclidea in $\mathbb{R}^2$, abbiamo pertanto

$$\begin{aligned}\|(v,w) + (v',w')\| &= \|(v+v', w+w')\| = \bigl|(\|v+v'\|_V, \|w+w'\|_W)\bigr| \le \bigl|(\|v\|_V + \|v'\|_V, \|w\|_W + \|w'\|_W)\bigr| \\ &= \bigl|(\|v\|_V, \|w\|_W) + (\|v'\|_V, \|w'\|_W)\bigr| \le \bigl|(\|v\|_V, \|w\|_W)\bigr| + \bigl|(\|v'\|_V, \|w'\|_W)\bigr| = \|(v,w)\| + \|(v',w')\|.\end{aligned}$$

Passiamo al punto *iii)* , che merita una dimostrazione solo per quanto riguarda il fatto che la norma si annulli solo in 0 . Ora, nel quoziente, 0 significa il sottospazio V_0 . Supponiamo dunque $\|x\|_\bullet = 0$. Allora, per definizione di estremo inferiore, esiste una successione $\{v_n\}$ di elementi di x tale che $\{\|v_n\|_V\}$ sia infinitesima. Allora $\{v_n\}$ tende a 0 in V . D'altra parte, siccome V_0 è chiuso, sono chiusi tutti i suoi traslati, in particolare x . Dunque, da $v_n \in x$ per ogni n deduciamo $0 \in x$, cioè $x = V_0$.

Passiamo ai punti *iv)* e *v)* e trattiamoli tenendo conto dell'Osservazione 3.13. Ciò dimostrerà anche le affermazioni dell'enunciato sugli isomorfismi isometrici. Consideriamo l'applicazione $f : V \cap W \to V \times W$

definita dalla formula $f(x) = (x, x)$. Essa è un isomorfismo algebrico di $V \cap W$ sul sottospazio D definito in (6.6), che è la diagonale del prodotto cartesiano. D'altra parte, se denotiamo con $\|\cdot\|_{V\times W}$ la norma data dal punto $ii)$, abbiamo che $\|x\| = \|f(x)\|_{V\times W}$ per ogni $x \in V \cap W$. Dunque anche $\|\cdot\|$ è una norma e questa rende $V \cap W$ e D isometricamente isomorfi.

Per quanto riguarda $v)$, procediamo analogamente. Ora lo spazio da considerare è $V_\bullet = (V \times W)/Z_0$ ove Z_0 è il sottospazio definito nella (6.7). Per ora $V_\bullet$ è solo uno spazio vettoriale. Ma immaginiamo per un attimo di aver controllato che Z_0 è chiuso. Allora possiamo considerare lo spazio normato $V_\bullet$ e definire $g : V + W \to V_\bullet$ mediante la formula: $g(x) = (v, w) + Z_0$ (cioè la classe di (v, w)) se $v + w = x$. Questa applicazione è ben definita in quanto, se anche $v' + w' = x$, si ha $(v' - v) + (w' - w) = 0$, cioè $(v', w') - (v, w) \in Z_0$, per cui $(v', w') + Z_0 = (v, w) + Z_0$. Inoltre g è un isomorfismo algebrico e, per ogni $x \in V + W$, abbiamo

$$\|x\| = \inf\{(\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2)^{1/2} : \ v + w = x\} = \inf\{(\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2)^{1/2} : \ (v, w) \in g(x)\} = \|g(x)\|_\bullet .$$

Dunque anche $\|\cdot\|$ è una norma e tale norma rende $V + W$ e $V_\bullet$ isometricamente isomorfi. Rimane allora da dimostrare che Z_0 è chiuso. Supponiamo che una successione $\{(v_n, w_n)\}$ di elementi di Z_0 converga a $(v, w) \in V \times W$. Allora $v_n \to v$ e $w_n \to w$ in V e in W rispettivamente. Siccome le due immersioni di V e di W in $\mathcal{Z}$ sono continue, abbiamo che $v_n \to v$ e $w_n \to w$ in $\mathcal{Z}$. Siccome $\mathcal{Z}$ è vettoriale topologico, deduciamo che $v_n + w_n \to v + w$ in $\mathcal{Z}$. Ma $v_n + w_n = 0$ per ogni n , per cui abbiamo anche $v_n + w_n \to 0$. D'altra parte il limite in $\mathcal{Z}$ è unico dato che $\mathcal{Z}$ è separato. Dunque $v + w = 0$, cioè $(v, w) \in Z_0$.

Supponiamo infine che le norme $\|\cdot\|_V$ e $\|\cdot\|_W$ siano indotte da prodotti scalari. Allora è chiaro come costruire prodotti scalari nei casi $i)$, $ii)$ e $iv)$. Ad esempio, nel caso $ii)$, basta prendere

$$\big((v_1, w_1), (v_2, w_2)\big) = (v_1, v_2)_V + (w_1, w_2)_W$$

con notazioni ovvie. Per quanto riguarda i punti restanti, vista la dimostrazione relativa a $v)$ e l'ultima affermazione dell'Osservazione 3.13, basta considerare $iii)$, per il quale verifichiamo la regola del parallelogrammo, controllando che valgono le due disuguaglianze $\le$ e $\ge$. Siano dunque $x, y \in V_\bullet$. Sia poi $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Allora esistono $u \in x$ e $v \in y$ tali che $\|u\|_V^2 \le \|x\|_\bullet^2 + \varepsilon$ e $\|v\|_V^2 \le \|y\|_\bullet^2 + \varepsilon$. Allora $u \pm v \in x \pm y$ e abbiamo

$$\|x + y\|_\bullet^2 + \|x - y\|_\bullet^2 \le \|u + v\|_V^2 + \|u - v\|_V^2 = 2\|u\|_V^2 + 2\|v\|_V^2 \le 2\|x\|_\bullet^2 + 2\|y\|_\bullet^2 + 4\varepsilon .$$

Dall'arbitrarietà di ε deduciamo una delle due disuguaglianze. Per dimostrare quella opposta, fissiamo ancora $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Allora esistono $u \in x + y$ e $v \in x - y$ tali che $\|u\|_V^2 \le \|x + y\|_\bullet^2 + \varepsilon$ e $\|v\|_V^2 \le \|x - y\|_\bullet^2 + \varepsilon$. Ma $(u + v)/2 \in x$. Infatti, fissati $\xi_0 \in x$ e $\eta_0 \in y$, risulta $u = \xi_0 + \eta_0 + u_0$ e $v = \xi_0 - \eta_0 + v_0$ per certi $u_0, v_0 \in V_0$, da cui $(u + v)/2 = \xi_0 + (u_0 + v_0)/2 \in x$. Analogamente si vede che $(u - v)/2 \in y$. Segue allora

$$2\|x\|_\bullet^2 + 2\|y\|_\bullet^2 \le 2\|(u + v)/2\|_V^2 + 2\|(u - v)/2\|_V^2 = \|u\|_V^2 + \|v\|_V^2 \le \|x + y\|_\bullet^2 + \|x - y\|_\bullet^2 + 2\varepsilon$$

e ancora concludiamo grazie all'arbitrarietà di ε . □

6.2. Definizione. *Nelle condizioni del teorema precedente, gli spazi di cui ai punti $i) \ldots v)$ vengono detti rispettivamente sottospazio, spazio prodotto, spazio quoziente, spazio intersezione e spazio somma degli spazi di partenza.* □

6.3. *Esercizio.* Nelle ipotesi e con le notazioni della Definizione 6.1, dimostrare che sono continue le immersioni o proiezioni canoniche seguenti

$i)$ $v \mapsto (v, 0)$ da V in $V \times W$ e $(v, w) \mapsto v$ da $V \times W$ in V;
$ii)$ $v \mapsto$ classe di v da V in V/V_0 ;
$iii)$ $v \mapsto v$ da $V \cap W$ in V e $v \mapsto v$ da V in $V + W$.

6.4. Osservazione. Come traspare dalla dimostrazione della Teorema 6.1, la scelta della norma negli spazi prodotto, intersezione e quoziente può essere fatta in altri modi. Ad esempio, nel caso del prodotto, un'altra scelta possibile è $\|(v,w)\| = \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\} = |(\|v\|_V, \|w\|_W)|_\infty$, ove $|x|_\infty$ è la "norma infinito" in $\mathbb{R}^2$. Questa, poi, è equivalente all'altra grazie al Teorema 3.20. In generale sono effettivamente norme in $V \times W$ tutte quelle costruite con una formula del tipo $\|(v,w)\| = |(\|v\|_V, \|w\|_W)|$ ove $|\cdot|$ è una norma in $\mathbb{R}^2$ che verifica la proprietà seguente: da $0 \le x_i \le y_i$ per $i = 1, 2$ segue $|x| \le |y|$. Tutte queste norme, poi, sono fra loro equivalenti. Naturalmente, però, non vi è motivo perché esse siano indotte da prodotti scalari, anche nel caso in cui le norme originarie in V e W siano prehilbertiane. Infine, è ovvio che la costruzione degli spazi prodotto, intersezione e somma si estende senza difficoltà alcuna al caso di un numero finito qualunque di spazi.

6.5. Osservazione. Le norme definite dal Teorema 6.1 inducono nei vari spazi considerati esattamente le topologie che ognuno si aspetta. Ad esempio, nel caso $i)$, la topologia indotta è la topologia di V_0 come sottospazio topologico dello spazio topologico V e, nel caso $ii)$, si ottiene la topologia prodotto delle due topologie di V e di W indotte dalle rispettive norme.

6.6. *Esercizio.* Approfondire l'osservazione precedente.

6.7. Corollario. *Ogni spazio normato è uno spazio vettoriale topologico.* □

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che le operazioni della struttura vettoriale definite sugli spazi prodotto adeguati sono continue. Siccome gli spazi prodotto sono essi stessi normati, possiamo procedere per successioni. Supponiamo che $(x_n, y_n) \to (x, y)$ nello spazio normato $V \times V$. Allora $x_n \to x$ e $y_n \to y$ in V. Essendo $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$, si deduce subito che $x_n + y_n \to x + y$ in V. Se poi $(\lambda_n, x_n) \to (\lambda, x)$ in $\mathbb{K} \times V$, abbiamo che $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{K}$ e che $x_n \to x$ in V. D'altra parte si ha

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \le \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| = |\lambda_n| \, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\|$$

e la successione $\{\lambda_n\}$ è limitata. Dunque $\lambda_n x_n \to \lambda x$ in V. □

6.8. Osservazione. Per quanto riguarda il linguaggio vale un commento analogo a quello dell'Osservazione 3.7, dato che la frase corretta sarebbe: *se* $(V, \|\cdot\|)$ *è uno spazio normato, la topologia indotta dalla norma rende* V *spazio vettoriale topologico*. Infatti due norme equivalenti darebbero lo stesso spazio vettoriale topologico anche se diverse.

6.9. Osservazione. Torniamo all'enunciato del Teorema 6.1, alcuni punti del quale richiedono l'esistenza di uno spazio vettoriale topologico nel quale gli spazi considerati sono inclusi con immersione continua. Nei casi concreti si riesce sempre a costruire un tale spazio. Ad esempio, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$, si può munire lo spazio $C^0(\Omega)$ delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{K}$ continue di una topologia che lo rende spazio vettoriale topologico in modo che tutti gli spazi di funzioni regolari considerati negli esempi che abbiamo riportato siano inclusi in esso con immersione continua. Considerazioni analoghe valgono per lo spazio $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ delle funzioni misurabili che risultino integrabili su tutti i compatti inclusi in Ω: ognuno degli $L^p(\Omega)$ vi viene immerso con continuità. Tuttavia queste topologie verranno introdotte molto più avanti, quando parleremo di spazi localmente convessi.

Capitolo 2
Completezza

Molti dei risultati importanti in Analisi Funzionale, anche se non tutti, si basano sulla completezza e a questa dedichiamo il capitolo.

1. Completezza, spazi di Banach e di Hilbert

Ricordiamo che uno spazio metrico è completo quando ogni sua successione di Cauchy converge. Siccome ogni spazio normato o prehilbertiano ha una struttura metrica indotta, ha senso chiedersi se uno spazio normato o prehilbertiano sia completo o meno.

1.1. Definizione. *Uno spazio di Banach è uno spazio normato che è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma. Uno spazio di Hilbert è uno spazio di Banach prehilbertiano.* □

Nel caso degli spazi normati la completezza può essere controllata anche non ricorrendo alla condizione di Cauchy, come mostra il risultato che segue (che in parte si può far risalire a Banach), nel quale si fa giocare la struttura vettoriale soggiacente. Naturalmente è inteso che

$$\textit{la somma di una serie è il limite della successione delle ridotte} \tag{1.1}$$

per definizione, come per le serie più elementari.

1.2. Teorema. *Uno spazio normato V è completo se e solo se vale la condizione seguente: per ogni successione $\{x_n\}$ di elementi di V vale l'implicazione*

$$\textit{se la serie numerica } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \textit{ converge, allora la serie } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \textit{ converge in } V\,. \;\square \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Supponiamo V completo. Sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di V tale che serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converga. Poniamo $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ e $\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$ per $n \ge 1$. Siccome la successione $\{\lambda_n\}$ converge, essa è di Cauchy. D'altra parte, per ogni m, n tali che $m < n$, risulta

$$\|s_n - s_m\| = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \Big\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = \lambda_n - \lambda_m$$

e deduciamo che $\{s_n\}$ è di Cauchy in V, dunque convergente in V per la completezza.

Viceversa supponiamo che valga la (1.2) e dimostriamo che V è completo. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in V. Sia $n_1 \ge 1$ tale che $\|x_n - x_m\| \le 2^{-1}$ per ogni $m, n \ge n_1$. Sia ora $n_2 > n_1$ tale che $\|x_n - x_m\| \le 2^{-2}$ per ogni $m, n \ge n_2$. Procedendo ricorsivamente, costriamo una successione strettamente crescente $\{n_k\}$ di indici tale che, per ogni k e ogni $m, n \ge n_k$, risulti $\|x_n - x_m\| \le 2^{-k}$. In particolare $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \le 2^{-k}$ per ogni k così che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ converge. Applicata l'ipotesi (1.2) alla successione $\{x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\}$, deduciamo che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ converge in V, dunque che converge in V la successione $\{x_{n_k}\}$. Detto x il suo limite, dimostriamo che la successione data converge a x. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia m_0 tale che $\|x_n - x_m\| \le \varepsilon$ per ogni $m, n \ge m_0$. Fissiamo ora k tale che $n_k \ge m_0$ e $\|x_{n_k} - x\| \le \varepsilon$. Per ogni $n \ge m_0$ abbiamo $\|x_n - x\| \le \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| \le 2\varepsilon$. □

I due fatti seguenti sono del tutto evidenti, ma conviene osservarli una volta per tutte. Ricordiamo che la nozione di equivalenza è stata data nella Definizione I.3.19.

1.3. Proposizione. *Se due spazi normati sono isometricamente isomorfi, la completezza di uno dei due implica quella dell'altro. Se due norme in uno stesso spazio vettoriale sono equivalenti allora la completezza rispetto a una di esse implica la completezza rispetto all'altra.* □

Vedremo più tardi che la completezza si conserva anche tramite isomorfismi non necessariamente isometrici. Ora presentiamo altri due risultati di carattere generale.

1.4. Teorema. *Ogni spazio normato V di dimensione finita n è completo e isomorfo a $\mathbb{K}^n$.* □

Dimostrazione. I due spazi sono algebricamente isomorfi e, se L è un isomorfismo algebrico, esso è anche isometrico se la norma considerata in $\mathbb{K}^n$ è proprio quella trasportata dall'isomorfismo stesso. Ma ciò implica la completezza di V, data la completezza di $\mathbb{K}^n$ che ora vediamo. Scelta in $\mathbb{K}^n$ la norma che si ritiene più conveniente (vale il Teorema I.3.20), si vede che la condizione data dal Teorema 1.2 coincide con il Criterio della convergenza assoluta per le serie di vettori euclidei. □

Siccome un sottoinsieme di un qualunque spazio metrico che sia completo rispetto alla metrica indotta è sempre un chiuso per il Teorema A.1.25, deduciamo immediatamente il risultato successivo, già annunciato nel Capitolo 1.

1.5. Corollario. *Siano V è uno spazio normato e V_0 un suo sottospazio di dimensione finita. Allora V_0 è chiuso.* □

1.6. Teorema. *Con le ipotesi e le notazioni del Teorema I.6.1, supponiamo che V e W siano completi. Allora il sottospazio V_0 del punto $i)$ è completo se e solo se V_0 è un sottoinsieme chiuso di V. Inoltre i sottospazi definiti nelle formule* (I.6.6) *e* (I.6.7) *sono chiusi e gli spazi introdotti ai punti $ii) \ldots v)$ sono completi.* □

Dimostrazione. Il primo punto segue dalla teoria generale degli spazi metrici (Teorema A.1.25). Consideriamo lo spazio prodotto. Chiaramente una successione $\{(v_n, w_n)\}$ converge a (v, w) se e solo se le due successioni $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ convergono a v e a w in V e in W rispettivamente. Inoltre quella è di Cauchy nel prodotto se e solo se queste ultime sono di Cauchy nei rispettivi spazi. Dunque la completezza del prodotto segue immediatamente.

Passiamo al caso del quoziente e usiamo il Teorema 1.2. Supponiamo dunque $x_n \in V_\bullet$ e convergente la serie $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_\bullet$. Per ogni n esiste $v_n \in x_n$ tale che $\|v_n\|_V \le \|x_n\|_\bullet + 2^{-n}$. Allora la serie $\sum_{n=1}^\infty \|v_n\|_V$ converge. Siccome V è completo, converge in V la serie di vettori $\sum_{n=1}^\infty v_n$. Sia v la sua somma e sia x la classe di v. Allora si vede immediatamente che la serie $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge a x nel quoziente.

Per quanto riguarda gli altri punti da dimostrare, basta controllare che è chiuso il sottospazio D definito nella formula (I.6.6) e ribadire che è chiuso anche lo spazio Z_0 della (I.6.7), fatto che era già stato controllato nella dimostrazione stessa del Teorema I.6.1. Infatti ciò garantisce anche la completezza degli spazi intersezione e somma, visto quanto abbiamo già dimostrato. La verifica che D è chiuso è perfettamente analoga a quella relativa a Z_0: basta infatti usare allo stesso modo il fatto che le immersioni di V e W in $\mathcal{Z}$ sono continue e che $\mathcal{Z}$ è separato. □

1.7. *Esercizio.* Siano V, W spazi di Banach e $\mathcal{Z}$ uno spazio vettoriale topologico. Si supponga $V \subseteq \mathcal{Z}$ e $W \subseteq \mathcal{Z}$ con immersioni continue. Sia poi V_0 un sottospazio denso di V e si supponga $V_0 \subseteq W$ con immersione continua. Si dimostri che $V \subseteq W$ con immersione continua. Si consiglia di ricordare la caratterizzazione data dal Corollario I.4.13.

2. Alcuni spazi di Banach e di Hilbert importanti

Dimostriamo la completezza degli spazi funzionali introdotti nel Paragrafo I.5. Il primo risultato riguarda lo spazio delle funzioni limitate dell'Esempio I.5.2. Grazie alla prima affermazione del Teorema 1.6 e al fatto che le isometrie conservano la completezza, segue la completezza, che dunque solo enunciamo, degli spazi $C_b(X)$, $C(K)$ e $C^0(\overline{\Omega})$ degli Esempi I.5.3, I.5.4 e I.5.5.

2.1. Teorema. *Sia X un insieme non vuoto. Allora lo spazio $\mathcal{B}(X)$ delle funzioni $v : X \to \mathbb{K}$ limitate è uno spazio di Banach rispetto alla norma della convergenza uniforme.* □

Dimostrazione. Usiamo il Teorema 1.2. Sia dunque $\{v_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{B}(X)$ tale che la serie delle norme converga. Allora siamo nelle condizioni di applicare il noto Criterio di Weierstrass e concludere che la serie $\sum_{n=1}^\infty v_n$ converge uniformemente a una funzione limitata. Pertanto la serie converge a un elemento di $\mathcal{B}(X)$ nel senso della metrica considerata. □

2.2. Corollario. *Siano X uno spazio topologico, K uno spazio topologico compatto e Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$. Allora gli spazi $C_b(X)$, $C(K)$ e $C^0(\overline{\Omega})$ sono spazi di Banach rispetto alle norme del massimo.* □

2.3. *Esercizio.* Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e strettamente positiva e sia V lo spazio vettoriale delle funzioni $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che φv sia limitata. Si dimostri che V è uno spazio di Banach ripetto alla norma $\|v\| = \sup(\varphi|v|)$ verificando che esso è isometricamente isomorfo a uno spazio di Banach già noto.

2.4. Teorema. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Allora $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach per ogni $p \in [1, +\infty]$ e $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. In particolare ℓ^p è uno spazio di Banach per ogni $p \in [1, +\infty]$ e ℓ^2 è uno spazio di Hilbert.* □

Dimostrazione. Basta dimostrare la completezza. Utilizziamo il Teorema 1.2 considerando dapprima il caso $p < +\infty$. Sia dunque $\{u_n\}$ una successione di elementi di $L^p(\Omega)$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|_p$ converga a una somma λ finita: dobbiamo dimostrare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge in $L^p(\Omega)$. Supponiamo dapprima che ogni u_n sia una funzione reale non negativa. Posto $w_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, abbiamo per ogni n

$$\|w_n\|_p \le \sum_{k=1}^{n}\|u_k\|_p \le \lambda \quad \text{cioè} \quad \int_\Omega w_n^p \, d\mu \le \lambda^p.$$

Siccome la successione $\{w_n^p\}$ è non decrescente, grazie al Teorema di Beppo Levi essa converge q.o. a una funzione φ integrabile e non negativa. Poniamo $u = \varphi^{1/p}$ e controlliamo che u è la somma richiesta della serie di funzioni di partenza. Innanzi tutto u è misurabile e $u^p = \varphi$ è integrabile, cioè $u \in L^p(\Omega)$. D'altra parte $w_n^p \to \varphi$ e $w_n^p \le \varphi$ q.o. Segue $w_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ per la seconda parte dell'Osservazione I.5.24. Questo mostra che $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$ nel senso di $L^p(\Omega)$.

Consideriamo ora il caso in cui le funzioni u_n siano reali di segno qualunque. Essendo $u_n^{\pm} \le |u_n|$, si vede subito che le due successioni $\{u_n^{\pm}\}$ verificano le ipotesi della prima parte della dimostrazione. Dunque le serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{\pm}$ convergono in $L^p(\Omega)$ a certe somme $u_{\pm} \in L^p(\Omega)$. Allora la funzione $u = u_+ - u_-$ è la somma della serie di funzioni nel senso di $L^p(\Omega)$, come subito si verifica. Ciò completa la dimostrazione nel caso reale. Se poi $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, resta da considerare il caso in cui le funzioni u_n assumano generici valori complessi. Ma le successioni delle parti reali e immaginarie rientrano nei casi già considerati e si riesce a concludere facilmente.

Consideriamo infine il caso $p = +\infty$ e denotiamo ancora con u_n un rappresentante fissato definito in tutti i punti. Per ogni n esiste un sottoinsieme di misura nulla S_n tale che $\sup_{x \in \Omega \setminus S_n} |u_n(x)| = \|u_n\|_\infty$. Ma se poniamo $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, anche S ha misura nulla e risulta $\sup_{x \in \Omega \setminus S} |u_n(x)| \le \|u_n\|_\infty$ per ogni n. Possiamo allora applicare il Teorema 2.1 con $X = \Omega \setminus S$ e concludere che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente in $\Omega \setminus S$. La somma, allora, è una funzione definita q.o. in Ω, misurabile e limitata e si riconosce immediatamente che essa è la somma della serie data nel senso di $L^\infty(\Omega)$. □

2.5. *Esercizio.* Riprendere l'Esercizio I.5.26 e ridimostrare che lo spazio V_0 là definito è chiuso usando la completezza di ℓ^p.

2.6. *Esercizio.* Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Si dimostri che il sottoinsieme delle funzioni caratteristiche, cioè delle (classi di) funzioni che assumono (q.o.) solo i valori 0 e 1, è chiuso in $L^1(\Omega)$. Si deduca che è uno spazio metrico completo la coppia $(\mathcal{F}_\bullet, d)$ che ora costruiamo. Nella famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$ dei sottoinsiemi di misura finita si introduca la relazione di equivalenza $\sim$ dicendo che $A \sim B$ quando $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$. Si ponga $\mathcal{F}_\bullet = \mathcal{F}/\sim$ e, per $A_\bullet, B_\bullet \in \mathcal{F}_\bullet$, si definisca $d(A_\bullet, B_\bullet) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$ se $A \in A_\bullet$ e $B \in B_\bullet$. Si controlli che effettivamente $\sim$ è una relazione di equivalenza e che la funzione $d : \mathcal{F}_\bullet \times \mathcal{F}_\bullet \to \mathbb{R}$ è una ben definita (cioè non dipende dai rappresentanti) metrica che rende $\mathcal{F}_\bullet$ completo.

2.7. Teorema. *Gli spazi $C^k(\overline{\Omega})$ e $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ degli Esempi I.5.38 e I.5.46 sono spazi di Banach.* □

Dimostrazione. Dimostriamo che $C^k(\overline{\Omega})$ è isometricamente isomorfo a uno spazio completo. Sia A l'insieme dei multi-indici α tali che $|\alpha| \le k$. Ordiniamo A in un modo qualunque e denotiamo con N il numero dei suoi elementi. Consideriamo l'applicazione $L : C^k(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega})^N$ che a ogni $v \in C^k(\overline{\Omega})$

associa la N-upla delle derivate $D^\alpha v$ di ordine $\le k$. Allora L è un isomorfismo isometrico di $C^k(\overline{\Omega})$ sull'immagine di L, che chiamiamo W, se nel prodotto $C^0(\overline{\Omega})^N$ si sceglie la norma

$$\|\{u_\alpha\}\| = \max_{|\alpha|\le k} \|u_\alpha\|_\infty$$

che è equivalente a quella standard. Siccome il prodotto è completo rispetto a tale norma grazie al Corollario 2.2 e alla parte del Teorema 1.6 relativa appunto al prodotto, basta dimostrare che W è chiuso nel prodotto. Ora W si caratterizza come segue

$$W = \{\{u_\alpha\} \in C^0(\overline{\Omega})^N : \ u_\alpha = D^\alpha u_0 \quad \text{per } 0 < |\alpha| \le k\}$$

ove $u_0 = u_{(0,\ldots,0)}$. Sia dunque $\{\{u_\alpha^{(n)}\}\}$ una successione di elementi di W convergente a $\{u_\alpha\}$ in $C^0(\overline{\Omega})^N$. Allora

$$u_\alpha^{(n)} \to u_\alpha \quad \text{uniformemente in } \Omega \text{ per } |\alpha| \le k\,.$$

Concludiamo che $u_0 \in C^k(\Omega)$ e che $u_\alpha = D^\alpha u_0$ per $0 < |\alpha| \le k$, cioè che $\{u_\alpha\} \in W$.

La completezza di $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ si dimostra in modo perfettamente analogo non appena si sia dimostrata quella di $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Dimostriamo che quest'ultimo spazio è completo ancora controllando che esso è isometricamente isomorfo a un sottospazio chiuso di uno spazio completo. A tale scopo introduciamo il sottoinsieme $\Omega^\bullet$ di Ω^2 costituito dalle coppie (x,y) tali che $x \ne y$ e lo spazio $C^0(\overline{\Omega}) \times \mathcal{B}(\Omega^\bullet)$ prodotto dello spazio delle funzioni uniformemente continue in Ω e di quello delle funzioni limitate in $\Omega^\bullet$, prodotto che sappiamo già essere uno spazio di Banach. Definiamo poi l'applicazione $L : C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^0(\overline{\Omega}) \times \mathcal{B}(\Omega^\bullet)$ mediante

$$Lv = (v, \widehat{v}) \quad \text{per } v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{ove} \quad \widehat{v}(x,y) = \frac{v(x) - v(y)}{|x-y|^\alpha}\,, \quad (x,y) \in \Omega^\bullet\,.$$

Pur di cambiare, come sopra, la norma dello spazio prodotto in una equivalente, vediamo che L è un isomorfismo isometrico di $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ su un sottospazio W del prodotto, precisamente quello definito dalla formula

$$W = \{(v, v^\bullet) \in C^0(\overline{\Omega}) \times \mathcal{B}(\Omega^\bullet) : \ v^\bullet(x,y) = (v(x) - v(y))/|x-y|^\alpha \ \text{ per ogni } (x,y) \in \Omega^\bullet\}.$$

Ancora basta dunque dimostrare che W è chiuso nel prodotto. Supponiamo dunque che la successione $\{(v_n, v_n^\bullet)\}$ di elementi di W converga a $(v, v^\bullet)$ nello spazio prodotto. Allora $\{v_n\}$ e $\{v_n^\bullet\}$ convergono a v e a $v^\bullet$ uniformemente in Ω e in $\Omega^\bullet$ rispettivamente. Ma la convergenza uniforme implica quella puntuale. Dunque dall'uguaglianza $v_n^\bullet(x,y) = (v_n(x) - v_n(y))/|x-y|^\alpha$ valida per ogni $(x,y) \in \Omega^\bullet$ e per ogni n deduciamo l'analoga per la coppia limite e concludiamo che essa appartiene a W. $\square$

2.8. Esempio. Muniamo lo spazio $C^1[a,b]$ della norma data da $\|v\| = \|v\|_1 + \|v'\|_\infty$. Ci chiediamo se si ottiene uno spazio di Banach. La risposta è affermativa dato che tale norma è equivalente a quella naturale come ora mostriamo. Una disuguaglianza si verifica banalmente in quanto $\|v\| \le (b-a)\|v\|_\infty + \|v'\|_\infty$ per ogni v. Per trovare una disuguaglianza nella direzione opposta osserviamo che, per ogni $v \in C^1[a,b]$ e $x,y \in [a,b]$, risulta

$$v(x) = v(y) + \int_y^x v'(t)\,dt \quad \text{da cui} \quad |v(x)| \le |v(y)| + (b-a)\|v'\|_\infty\,.$$

Integrando rispetto a y deduciamo che

$$(b-a)|v(x)| \le \|v\|_1 + (b-a)^2\|v'\|_\infty \quad \text{da cui} \quad \|v\|_\infty \le (b-a)^{-1}\|v\|_1 + (b-a)\|v'\|_\infty$$

e quindi anche la disuguaglianza che ci interessa.

2.9. *Esercizio.* Usare la completezza di $C^1[a,b]$ rispetto alla norma dell'esempio precedente per dimostrare che, se $\{v_n\}$ è una successione di elementi di $C^1[a,b]$ verificante $v_n \to v$ in $L^1(a,b)$ e $v_n' \to w$ in $C^0[a,b]$, allora v è (q.o. uguale a una funzione) di classe C^1 e $w = v'$.

2.10. *Esercizio.* Riprendere l'Esempio 2.8 considerando invece la norma $\|v\| = \|v\|_p + \|v'\|_\infty$ con $p \in (1, +\infty)$. Dimostrare che valgono le stesse conclusioni e dedurre un risultato analogo a quello dell'esercizio precedente. Dare generalizzazioni al caso dello spazio $C^k[a,b]$. □

L'interesse per gli spazi di Sobolev è dovuto in gran parte al fondamentale teorema successivo, in particolare al fatto che gli spazi $H^k(\Omega)$ sono di Hilbert.

2.11. Teorema. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $k \geq 0$ un intero e $p \in [1, +\infty)$. Allora lo spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach e lo spazio $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.* □

Dimostrazione. Siccome già sappiamo che $W^{k,2}(\Omega)$ è prehilbertiano, basta dimostrare la parte restante dell'enunciato, cioè la completezza. Procediamo come nella dimostrazione precedente, nella quale semplicemente sostituiamo $C^k(\overline{\Omega})$ con $W^{k,p}(\Omega)$ e $C^0(\overline{\Omega})$ con $L^p(\Omega)$ conservando le altre notazioni. Siamo dunque ricondotti a dimostrare che il nuovo sottospazio W, che ora è dato da

$$W = \{\{u_\alpha\} \in L^p(\Omega)^N : \ u_\alpha = D^\alpha u_0 \quad \text{per } 0 < |\alpha| \leq k\}$$

ove le derivate sono intese in senso debole, è chiuso nel prodotto $L^p(\Omega)^N$. Sia dunque $\{\{u_\alpha^{(n)}\}\}$ una successione di elementi di W convergente a $\{u_\alpha\}$ in $L^p(\Omega)^N$. Allora

$$u_\alpha^{(n)} \to u_\alpha \quad \text{in } L^p(\Omega) \text{ per } |\alpha| \leq k$$

e dobbiamo dimostrare che, per $|\alpha| \leq k$, u_α è la derivata debole di u_0. Fissiamo allora α con $|\alpha| \leq k$ e $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Siccome $C_c^\infty(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$ e, per ogni n, $u_\alpha^{(n)}$ è la derivata debole di $u_0^{(n)}$, per la disuguaglianza di Hölder abbiamo

$$\int_\Omega u_\alpha \, v \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_\alpha^{(n)} \, v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_0^{(n)} \, D^\alpha v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_0 \, D^\alpha v \, dx.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

2.12. *Esercizio.* Imitando la dimostrazione del Teorema 2.7, dimostrare che sono di Banach (di Hilbert se $p = 2$) anche gli spazi di Sobolev a esponente reale $W^{s,p}(\Omega)$ introdotti nell'Esempio I.5.72. Si consiglia di tener conto dell'Osservazione I.5.24 nell'identificazione del rapporto incrementale limite.

2.13. *Esercizio.* Si dimostri che $W^p_{\mathrm{div}}(\Omega)$ e $L^p_\Delta(\Omega)$ (vedi Esempio I.5.59) sono completi.

2.14. Esempio. Torniamo all'Osservazione I.5.71 nella quale abbiamo costruito una funzione $u \in H^1(B_{1/2}(0)) = W^{1,2}(B_{1/2}(0))$ positiva, regolare per $x \neq 0$, non limitata vicino all'origine. A partire da quella e posto ora $\Omega = B_{1/4}(0) \subset \mathbb{R}^2$, costruiamo $w \in W^{1,2}(\Omega)$ non limitata (nel senso delle funzioni misurabili, cioè w non ha rappresentanti limitati) in alcun aperto non vuoto $\omega \subseteq \Omega$. Fissata una successione $\{x_n\}$ di punti di Ω che descrive un sottoinsieme denso di Ω, consideriamo la funzione $w : \Omega \to \mathbb{R}$ definita (q.o.) dalla formula

$$w(x) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} u_n(x) \quad \text{ove} \quad u_n(x) = u(x - x_n) \quad \text{per } x \in \Omega \setminus \{x_n\}.$$

Precisamente la formula definisce $w(x) \in [0, +\infty]$ per ogni x diverso da tutti gli x_n e ora mostriamo che $w(x) < +\infty$ q.o. e che $w \in W^{1,2}(\Omega)$. Consideriamo la serie delle norme in $W^{1,2}(\Omega)$

$$S = \sum_{n=1}^\infty \|2^{-n} u_n\|_{1,2} = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \, \|u_n\|_{1,2}.$$

Siccome $\|u_n\|_{1,2} \leq \|u\|_{1,2}$ come si vede facilmente, la serie S converge. Per i Teoremi 1.2 e 2.11 la serie di funzioni converge nello spazio $W^{1,2}(\Omega)$ a una certa funzione $v \in W^{1,2}(\Omega)$. In particolare la stessa serie converge in $L^2(\Omega)$, per cui la successione delle sue ridotte ha una sottosuccessione convergente q.o. a v. Ma, per ogni x diverso da tutti gli x_n, la stessa sottosuccessione tende a $w(x)$ per definizione di w. Concludiamo che $w = v$ q.o. Quindi $w(x) = v(x) < +\infty$ q.o. e $w = v \in W^{1,2}(\Omega)$. Sia infine $\omega \subseteq \Omega$ un aperto non vuoto. Siccome $\{x_1, x_2, \ldots\}$ è denso di Ω, esiste n tale che $x_n \in \omega$. Ma $w \geq 2^{-n} u_n$ (q.o.) dato che $u \geq 0$, da cui $\sup\operatorname{ess}_\omega w \geq 2^{-n} \sup\operatorname{ess}_\omega u_n$. D'altra parte $\sup\operatorname{ess}_\omega u_n = \sup_\omega u_n = +\infty$ per l'Esercizio 5.12 applicato all'aperto $\omega \setminus \{x_n\}$.

3. Completamenti di spazi metrici, normati, prehilbertiani

Siccome la completezza è importante, è bene possedere un risultato generale di completamento. Il teorema che segue comprende i tre casi degli spazi metrici, degli spazi normati, degli spazi prehilbertiani.

3.1. Definizione. *Un completamento di uno spazio metrico è uno spazio metrico completo che contiene un sottoinsieme denso che è isometrico allo spazio dato. Un completamento di uno spazio normato è uno spazio di Banach che contiene un sottospazio denso che è isometricamente isomorfo allo spazio dato.* □

3.2. Teorema. *Ogni spazio metrico (rispettivamente normato) ha almeno un completamento e due completamenti qualunque sono isometrici (rispettivamente, isometricamente isomorfi). Inoltre ogni completamento di uno spazio prehilbertiano è uno spazio di Hilbert.* □

Dimostrazione. Iniziamo dal caso degli spazi metrici. In vista del caso degli spazi normati, usiamo già la notazione usuale V per denotare lo spazio, anche se V non possiede alcuna struttura vettoriale. Naturalmente d denota la metrica. L'idea è la seguente. Se V è proprio un sottoinsieme denso di $\widetilde{V}$ e quest'ultimo è completo, gli elementi di $\widetilde{x} \in \widetilde{V}$ sono limiti di successioni $\{x_n\}$ di elementi di V, cioè di successioni di Cauchy in V, e, viceversa, ogni successione di Cauchy in V converge in $\widetilde{V}$. Inoltre due di tali successioni, diciamo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, convergono allo stesso punto di $\widetilde{V}$ se e solo se la successione $\{d(x_n, y_n)\}$ delle distanze è infinitesima. Dunque gli elementi di $\widetilde{V}$ sono biunivocamente associati alle classi di equivalenza di successioni di Cauchy in V, l'equivalenza essendo quella delle distanze infinitesime. Realizziamo ora questa idea a partire dal generico spazio metrico (V, d), senza ovviamente ipotizzare già l'esistenza di un completamento.

Denotiamo con $\mathcal{C}$ l'insieme di tutte le successioni di Cauchy in V e, per $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{C}$, diciamo che $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ quando la successione $\{d(x_n, y_n)\}$ delle distanze è infinitesima. Si vede immediatamente che $\sim$ è una relazione di equivalenza in $\mathcal{C}$. Poniamo allora $\widetilde{V} = \mathcal{C}/\!\sim$. Definiamo ora una metrica $\widetilde{d}$ in $\widetilde{V}$ come segue:

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \quad \text{se} \quad \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{V}, \quad \{x_n\} \in \widetilde{x} \quad \text{e} \quad \{y_n\} \in \widetilde{y}. \tag{3.1}$$

Dobbiamo verificare che: *i)* il limite $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ esiste finito; *ii)* esso dipende solo da $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ e non dalle successioni di Cauchy che rappresentano tali classi. Visto ciò, la (3.1) è ben definita e potremo procedere nella dimostrazione. Osserviamo una volta per tutte che $|d(x, y) - d(x', y')| \le d(x, x') + d(y, y')$ per ogni quaterna di punti di V, come si vede facilmente. Con le notazioni della (3.1) si ha allora $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \le d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$. Siccome $\{x_n\}, \{y_n\}$ appartengono a $\mathcal{C}$, segue subito che la successione reale $\{d(x_n, y_n)\}$ è di Cauchy, dunque convergente. Passando a *ii)*, siano $\{x'_n\}$ e $\{y'_n\}$ altri due rappresentanti di $\widetilde{x}$ e di $\widetilde{y}$ rispettivamente. Allora $|d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y_n)| \le d(x'_n, x_n) + d(y'_n, y_n)$ e il secondo membro è infinitesimo per definizione. Ciò prova *ii)*.

Controllare che $\widetilde{d}$ sia una metrica in $\widetilde{V}$ non è difficile, per cui passiamo al punto successivo: esiste un'isometria I di (V, d) in $(\widetilde{V}, \widetilde{d})$. Questa si costruisce facilmente: se $x \in V$ denotiamo con Ix la classe di equivalenza della successione $\{x_n\}$ definita da $x_n = x$ per ogni n. Si verifica banalmente che I è un'isometria e ora mostriamo che $I(V)$ è denso in $\widetilde{V}$. A questo scopo osserviamo che

$$\text{se } \widetilde{x} \in \widetilde{V} \text{ e } \{x_n\} \in \widetilde{x} \quad \text{allora} \quad \{Ix_n\} \text{ converge a } \widetilde{x} \text{ in } \widetilde{V}. \tag{3.2}$$

Infatti, se si prendono rappresentanti ovvi di $\widetilde{x}$ e di Ix_n, si vede subito che $\widetilde{d}(\widetilde{x}, Ix_n) = \lim_{k\to\infty} d(x_k, x_n)$. Segue allora che $\lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(\widetilde{x}, Ix_n) = 0$ esplicitando il fatto che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in V. In particolare $I(V)$ è denso in $\widetilde{V}$. Passiamo all'ultimo punto: la completezza di $(\widetilde{V}, \widetilde{d})$. Sia dunque $\{\widetilde{x}_n\}$ una successione di Cauchy in tale spazio. Per la (3.2) possiamo trovare una successione $\{x_n\}$ di elementi di V tale che $\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, Ix_n) \le 1/n$ per ogni n. Siccome I è un'isometria e $\{\widetilde{x}_n\}$ è una successione di Cauchy in $\widetilde{V}$, segue facilmente che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in V. Denotiamo allora con $\widetilde{x}$ la classe di $\{x_n\}$ e dimostriamo che $\{\widetilde{x}_n\}$ converge a $\widetilde{x}$ in $\widetilde{V}$. Ma ciò segue subito dalle disuguaglianze

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}) \le \widetilde{d}(\widetilde{x}_n, Ix_n) + \widetilde{d}(Ix_n, \widetilde{x}) \le 1/n + \widetilde{d}(Ix_n, \widetilde{x})$$

e dal fatto che l'ultimo termine è infinitesimo per la (3.2).

Supponiamo ora V normato. Tutto ciò che abbiamo dimostrato continua a valere se d è la metrica indotta dalla norma. Ciò che dovremmo ancora dimostrare è che è possibile definire operazioni che rendono $\widetilde{V}$ spazio vettoriale e l'isometria I già costruita lineare e che $\widetilde{d}$ è indotta da una norma in $\widetilde{V}$. Tuttavia procediamo speditamente. Se $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{V}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, poniamo

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = \lim_{n\to\infty} I(x_n + y_n) \quad \text{e} \quad \lambda\widetilde{x} = \lim_{n\to\infty} I(\lambda x_n) \quad \text{ove } \{x_n\} \in \widetilde{x} \text{ e } \{y_n\} \in \widetilde{y}\,.$$

Si verifica senza difficoltà che le definizioni non dipendono dai rappresentanti e dunque hanno senso e che $\widetilde{V}$ diventa effettivamente uno spazio vettoriale. La linearità di I è poi vera per costruzione. Infine, per l'ultimo punto, basta controllare che $\widetilde{d}$ verifica le due condizioni della Proposizione I.3.8, e ciò non offre difficoltà alcuna se si usa la (3.2) ancora una volta.

Passiamo alle unicità espresse nell'enunciato. Anche qui procediamo speditamente. Partiamo dal caso degli spazi metrici: fissati due completamenti $(\widetilde{V}, \widetilde{d})$ e $(\widehat{V}, \widehat{d})$ dello spazio metrico (V, d), dobbiamo costruire un omeomorfismo isometrico fra i due. Siano $I : V \to I(V) \subseteq \widetilde{V}$ e $J : V \to J(V) \subseteq \widehat{V}$ due isometrie. Allora sono isometrie anche le applicazioni biiettive $I \circ J^{-1} : J(V) \to I(V)$ e $J \circ I^{-1} : I(V) \to J(V)$. Siccome ogni isometria è, banalmente, una funzione uniformemente continua, possiamo applicare la Proposizione A.1.27 alle applicazioni $I \circ J^{-1}$ e a $J \circ I^{-1}$ e prolungarle a due funzioni continue $F : \widehat{V} \to \widetilde{V}$ e $G : \widetilde{V} \to \widehat{V}$ rispettivamente. Ovviamente la condizione di isometria si conserva sui prolungamenti. A questo punto si controlla che $G \circ F = id_{\widetilde{V}}$ e $F \circ G = id_{\widehat{V}}$, le applicazioni identiche dei due spazi, per cui F è un omeomorfismo isometrico e G è l'omeomorfismo inverso. Se poi V è uno spazio vettoriale normato, questa costruzione conduce chiaramente ad applicazioni lineari, data la linearità delle isometrie I e J di partenza.

Come ultima cosa, dobbiamo controllare che ogni completamento di uno spazio prehilbertiano è uno spazio di Hilbert e l'unico controllo mancante è la regola del parallelogrammo (Proposizione I.3.9). Ma ciò viene immediatamente utilizzando la continuità della norma. □

Data l'essenziale unicità del completamento, si dice spesso, appunto, *il completamento*, con l'articolo determinativo. Di volta in volta, tuttavia, occorre costruire *un* completamento, il più concreto possibile, e si ha davvero *il* completamento quando questo è già noto. Diamo alcuni esempi che vogliono chiarire la situazione.

3.3. Esempio. Sia $V = C^1[0,1]$, lo spazio delle funzioni di classe C^1 nell'intervallo $[0,1]$, munito della norma del massimo. Allora non c'è completezza, come mostra la seconda parte dell'Esempio I.3.17: V è un sottospazio non chiuso di $C^0[0,1]$ e quindi non può essere completo rispetto alla norma del massimo. Siccome invece $C^0[0,1]$ è completo rispetto a tale norma e $C^1[0,1]$ è un sottoinsieme denso (grazie all'esercizio proposto tra breve) abbiamo che $C^0[0,1]$ è il completamento dello spazio normato da cui siamo partiti.

3.4. Esempio. Sia ora $V = \{v \in C^1[0,1] : \ v(0) = 0\}$, ancora munito della norma del massimo. Questo spazio non è completo a maggior ragione, essendo sottospazio di quello dell'esempio precedente. Tuttavia esso non è denso in $C^0[0,1]$. Un completamento si ottiene allora prendendone la chiusura in $C^0[0,1]$. Questa è $\{v \in C^0[0,1] : \ v(0) = 0\}$ grazie all'esercizio successivo.

3.5. Esercizio. Si dimostri che

$$C^\infty[0,1] \text{ \textit{è denso in} } C^0[0,1] \text{ \textit{rispetto alla norma del massimo.}} \tag{3.3}$$

Fissata $u \in C^0[0,1]$, si consiglia di applicare la (I.5.29) al prolungamento v di u definito da $v(x) = u(x)$ se $x \in [0,1]$, $v(x) = u(0)$ se $x < 0$ e $v(x) = u(1)$ se $x > 1$. Si dimostri inoltre che il sottospazio di $C^\infty[0,1]$ costituito dalle funzioni u nulle in un intorno di 0 è denso, rispetto alla norma del massimo, nel sottospazio di $C^0[0,1]$ costituito dalle funzioni nulle in 0. Fissata $u \in C^0[0,1]$, si consiglia di procedere come sopra con la variante seguente: nella costruzione di v si sostituisce u con $u\zeta_\varepsilon$, ove $\zeta_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ è data dalla formula $\zeta_\varepsilon(x) = \min\{1, (x-2\varepsilon)^+/\varepsilon\}$.

3.6. Esercizio. Vale un risultato più forte della (3.3), dovuto a Weierstrass: *lo spazio delle restrizioni a* $[0,1]$ *dei polinomi è denso in* $C^0[0,1]$ *rispetto alla norma del massimo*. Si dimostri tale affermazione sviluppando la traccia seguente. Fissati la funzione $u \in C^0[0,1]$ e $\varepsilon > 0$, si prolunghi u a una funzione $w \in C^0(-1,2)$ a supporto compatto. Si regolarizzi w (imitando quanto è stato suggerito per la (3.3)) ottenendo $w_\varepsilon \in C_c^\infty(-1,2)$ tale che $\|w - w_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon$, ove la norma è intesa relativamente all'intervallo $[-1,2]$. Si sviluppi il prolungamento 3-periodico di w_ε in serie di Fourier rispetto al sistema $\{e^{2\pi ni(x+1)/3}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (ottenuto adeguando il sistema standard alla situazione) e si applichi la teoria classica per dedurre che la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$ a w_ε. Detta s_ε^n la ridotta n-esima, si scelga n tale che $\|s_\varepsilon^n - w_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon$, ove ora la norma è intesa relativamente all'intervallo $[0,1]$. Si sviluppi s_ε^n in serie di Taylor. Si controlli che la serie converge uniformemente in ogni intervallo limitato e come polinomio P_ε si prenda una ridotta tale che $\|P_\varepsilon - s_\varepsilon^n\|_\infty \le \varepsilon$. Si concluda che la restrizione $u_\varepsilon = P_\varepsilon|_{[0,1]}$ verifica $\|u_\varepsilon - u\|_\infty \le 3\varepsilon$.

3.7. *Esercizio.* Si determini la chiusura in $C^0[0,1]$, rispetto alla norma del massimo, del sottospazio costituito dalle funzioni $v \in C^\infty[0,1]$ verificanti $v(0) = v(1)$ e $v'(1) = 0$.

3.8. Esempio. Sia $V = C^0[0,1]$ munito della norma $\|\cdot\|_2$ come descritto nell'Esempio I.3.18. Nemmeno questo spazio è completo. In questo caso, però, a differenza di quanto avveniva negli esempi precedenti, non abbiamo a disposizione uno spazio completo di cui V sia sottospazio e non possiamo procedere per chiusure. Un completamento $\widetilde{V}$, cioè, è uno spazio nuovo e V resta immerso in $\widetilde{V}$ solo se si effettua un'identificazione. Come $\widetilde{V}$ prendiamo $L^2(0,1)$ con l'usuale norma $\|\cdot\|_2$ e vediamo V non come sottospazio denso ma come spazio isometricamente isomorfo a un sottospazio denso. L'applicazione lineare isometrica $I : V \to \widetilde{V}$ si ottiene come segue: per $v \in V$ denotiamo con Iv la classe di funzioni misurabili che ha v come rappresentante. Allora I è un'isometria e $I(V)$ è denso (si veda l'esempio successivo) in $\widetilde{V}$. Fatta questa operazione, poi, si interpreta I come identificazione e si scrive comunemente $C^0[0,1] \subset L^2(0,1)$.

3.9. Esempio. Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1,+\infty]$. Consideriamo lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ (vedi Definizione I.5.50) costituito dalle funzioni v di classe C^∞ in Ω a supporto compatto. Se consideriamo la norma $\|\cdot\|_p$ non otteniamo uno spazio completo e la struttura del completamento è essenzialmente diversa nei due casi $p < +\infty$ e $p = +\infty$. Nel primo caso come completamento possiamo prendere $L^p(\Omega)$, e abbiamo una situazione analoga a quella dell'esempio precedente: ogni $v \in C_c^\infty(\Omega)$ viene identificata alla classe di funzioni misurabili che la contiene. Il fatto che $L^p(\Omega)$ sia un completamento equivale allora all'affermazione:

$$C_c^\infty(\Omega) \text{ è denso in } L^p(\Omega) \text{ per } 1 \le p < +\infty. \tag{3.4}$$

Ciò è vero per ogni aperto Ω di $\mathbb{R}^d$, limitato o meno, e può essere dimostrato in vari modi. Noi lo dimostreremo successivamente utilizzando il Teorema di Hahn-Banach. Nel caso $p = +\infty$ abbiamo invece uno spazio ambiente già pronto, lo spazio $C^0(\overline{\Omega})$, e il completamento richiesto è la chiusura in tale spazio. Si può dimostrare che questa è costituita dalle funzioni continue nulle al bordo, ovvero uniformemente continue e infinitesime nei punti del bordo.

3.10. *Esercizio.* Per $p \in [1,+\infty]$, si determini la chiusura in $L^p(0,1)$ del sottospazio costituito dalle funzioni $v \in C^\infty[0,1]$ verificanti $v(0) = v(1)$ e $v'(1) = 0$.

3.11. *Esercizio.* Sia V lo spazio delle successioni $x = \{x_n\}$ di elementi di $\mathbb{K}$ che si annullano a partire da un certo indice (variabile con la successione considerata). Si prenda la norma $\|x\| = \|x\|_p$ con $p \in [1,+\infty]$ fissato. Si determini un completamento.

3.12. *Esercizio.* Si determini la chiusura di ℓ^1 in ℓ^∞.

3.13. *Esercizio.* Si dimostri ricorrendo a metodi elementari che, se $\mu(\Omega) < +\infty$, lo spazio $L^\infty(\Omega)$ è incluso e denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \ge 1$. Per ogni $u \in L^p(\Omega)$ si costruisca esplicitamente una successione $\{u_n\}$ costituita da funzioni limitate convergente a u nella norma $\|\cdot\|_p$.

3.14. *Esercizio.* Sia $p \in [1,+\infty]$ e sia V lo spazio delle successioni $x = \{x_n\}$ di elementi di $\mathbb{K}$ tali che $\{nx_n\} \in \ell^p$. Si trovi: *i*) una norma che rende V completo; *ii*) un completamento di V rispetto all'usuale norma di ℓ^p.

3.15. Esempio. Siano $k \geq 0$ intero e $p \in [1, +\infty)$. Consideriamo lo spazio $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ munito della norma $\|\cdot\|_{k,p}$ dello spazio di Sobolev (precisamente la norma indotta). Otteniamo uno spazio non completo. Un suo completamento, quello "naturale" visto che $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$, è l'intero spazio di Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$. Si dimostra infatti che

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \ \textit{è denso in} \ W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \quad \textit{per} \quad k \geq 0 \quad \textit{e} \quad 1 \leq p < +\infty \tag{3.5}$$

ma la dimostrazione non è immediata.

3.16. Esempio. Spendiamo due parole sull'analoga costruzione quando $\mathbb{R}^d$ sia sostituito da un suo aperto Ω generico: il problema è dunque quello della chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$. Se $k = 0$ ricadiamo nell'Esempio 3.9 e il completamento è $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$. Se invece $k > 0$, non otteniamo $W^{k,p}(\Omega)$ ma un suo sottospazio chiuso proprio. Si pone

$$W_0^{k,p}(\Omega) \quad \textit{è la chiusura di} \ C_c^\infty(\Omega) \ \textit{in} \ W^{k,p}(\Omega) \quad \textit{e} \quad H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega). \tag{3.6}$$

Se Ω è un aperto limitato che verifica qualche condizione di regolarità, si può dimostrare quanto segue: se $v \in W^{k,p}(\Omega) \cap C^{k-1}(\overline{\Omega})$, allora $v \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se e solo se $D^\alpha v|_{\partial\Omega} = 0$ per $|\alpha| \leq k-1$. Ad esempio, se $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, allora $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $v|_{\partial\Omega} = 0$.

3.17. *Esercizio.* Si combinino la densità di $C_c^\infty(\mathbb{R})$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$ per $p \in [1, +\infty)$ con l'Esercizio 1.7 (con $V = W^{1,p}(\mathbb{R})$, $W = C_b^0(\mathbb{R})$ e $V_0 = C_c^\infty(\mathbb{R})$ e ipotizzando l'esistenza di uno spazio $\mathcal{Z}$ adatto allo scopo) e si dimostri che $W^{1,p}(\mathbb{R})$ è immerso con continuità nello spazio $C_b^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue e limitate e che vale la formula fondamentale del calcolo

$$\int_a^b v'(x)\,dx = v(b) - v(a) \quad \text{per ogni } v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \text{ e } a, b \in \mathbb{R}$$

ove v' è la derivata debole di v. Il caso $p = 1$ è il più facile; il caso $1 < p < +\infty$ offre qualche difficoltà tecnica nella dimostrazione della continuità dell'immersione di V_0 in W.

3.18. *Esercizio.* Si deduca dall'esercizio precedente che, se $1 < p < +\infty$, ogni elemento di $W^{1,p}(\mathbb{R})$ è una funzione hölderiana di esponente di Hölder $\alpha = 1/p' \in (0,1)$ e si dia una stima della corrispondente costante di Hölder. Si costruisca una funzione $v \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ che non è hölderiana per nessun $\alpha \in (0,1)$.

3.19. Esempio (spazi di Sobolev, seconda versione). Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $k \geq 0$ intero e $p \in [1, +\infty)$. Poniamo

$$C^{k,p}(\Omega) = \{ v \in C^\infty(\Omega) : \ D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ per } |\alpha| \leq k \} \quad \text{e} \quad \|v\|_{k,p} = \Bigl(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha v|^p \, dx \Bigr)^{1/p}.$$

Questo spazio non è completo e il suo completamento si denota con $H^{k,p}(\Omega)$. Se non conoscessimo gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e volessimo costruire un completamento potremmo procedere in varie direzioni, e una è la seguente. Consideriamo l'applicazione di $C^{k,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)^N$ che a ogni v associa la N-upla $\{D^\alpha v\}$ delle derivate di ordine $\leq k$ (ordinate in qualche modo), ove N è il numero di tali derivate. Otteniamo un isomorfismo isometrico di $C^{k,p}(\Omega)$ su un sottospazio non chiuso di $L^p(\Omega)^N$, precisamente quello costituito dalle N-uple $\{u_\alpha\}$ tali che $u_0 \in C^\infty(\Omega)$ e $u_\alpha = D^\alpha u_0$ per $|\alpha| \leq k$. Un completamento si ottiene allora chiudendo tale sottospazio nello spazio ambiente $L^p(\Omega)^N$, che è completo.

Utilizzando invece gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ si ottiene un completamento molto più concreto. Infatti $C^{k,p}(\Omega)$ appare come un sottospazio dello spazio completo $W^{k,p}(\Omega)$ e il completamento "naturale" si ottiene ponendo: $H^{k,p}(\Omega)$ è la chiusura di $C^{k,p}(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$. Se $u \in H^{k,p}(\Omega)$, esiste dunque una successione $\{u_n\}$ di elementi di $C^{k,p}(\Omega)$ convergente a u

in $W^{k,p}(\Omega)$. In particolare, se $|\alpha| \le k$, la derivata debole $D^\alpha u$ è il limite in $L^p(\Omega)$ della successione $\{D^\alpha u_n\}$ delle derivate classiche delle funzioni approssimanti u_n, il che, apparentemente, sembra qualcosa di più del fatto che $D^\alpha u$ sia semplicemente la derivata debole. Per questo motivo le derivate $D^\alpha u$ delle funzioni di $u \in H^{k,p}(\Omega)$ vengono dette *derivate forti*.

Tuttavia la situazione è più semplice di quanto si possa pensare e ora ne spieghiamo il motivo. Da un lato, supponendo che Ω sia limitato e verifichi certe condizioni di regolarità, è possibile ricondursi localmente al caso del semispazio (precisamente, fissato $x_0 \in \partial\Omega$, è possibile cambiare il sistema di coordinate in un intorno abbastanza piccolo di x_0 in modo che, nelle nuove coordinate $y_1, \dots, y_d$, Ω venga sostanzialmente descritto dalla condizione $y_d > 0$) e regolarizzare u con una procedura opportuna in modo da dimostrare che

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \text{ \textit{è denso in} } W^{k,p}(\Omega) \quad \text{(ribadiamo, in ipotesi di regolarità su } \Omega\text{)}.$$

In tali condizioni, essendo $C^{k,p}(\Omega) \supseteq C^\infty(\overline{\Omega})$, deduciamo che $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$. D'altro canto, se Ω è un aperto qualunque, quella costruzione non può essere fatta e per un certo periodo di tempo si è creduto comunemente che si potesse avere $H^{k,p}(\Omega) \ne W^{k,p}(\Omega)$. Ciò fino al *Teorema "H=W"* di Meyers-Serrin, che afferma l'uguaglianza $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$ dei due spazi senza alcuna ipotesi ulteriore su Ω. Come conseguenza, cade la distinzione fra derivate forti e deboli. □

Il Teorema "H=W" può essere utilizzato per dare dimostrazioni semplici delle estensioni di alcune formule classiche. Apriamo una parentesi su questo punto con un paio di esercizi e cogliamo l'occasione per fare anche qualche osservazione.

3.20. *Esercizio.* Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ reale, ove Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$. Sia inoltre $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana di classe C^1 e si consideri la funzione $G \circ u$, che denotiamo semplicemente con $G(u)$. Si dimostri che $G(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e che $D_i G(u) = G'(u) D_i u$ per $i = 1, \dots, d$, verificando che $G(u)$ e $G'(u) D_i u$ appartengono a $L^p(\Omega)$ e che la seconda funge da derivata parziale (debole) della prima secondo la definizione stessa. Vale cioè la formula

$$D_i G(u) = G'(u) D_i u \quad \text{per } i = 1, \dots, d \tag{3.7}$$

ove naturalmente le derivate $D_i G(u)$ e $D_i u$ sono intese in senso debole. Si consiglia di usare l'identità $W^{1,p}(\Omega) = H^{1,p}(\Omega)$ e di approssimare u in $W^{1,p}(\Omega)$ con funzioni $u_n \in C^{1,p}(\Omega)$. Si controlli infine che le stesse conclusioni valgono se Ω non è limitato, purché $G(0) = 0$.

3.21. Osservazione. Grazie a un risultato di Stampacchia, l'appartenenza $G(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e la formula $D_i G(u) = G'(u) D_i u$ valgono con G solo lipschitziana (e $G(0) = 0$ se Ω non è limitato) nei due casi seguenti: *i)* $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ e Ω è qualunque; *ii)* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e Ω è limitato e regolare. Notiamo però che il termine $G'(u) D_i u$ va opportunamente interpretato, in quanto, se $r \in \mathbb{R}$ è un punto in cui G non è differenziabile, il valore di $G'(u)$ non risulta ben definito nell'insieme $\Omega_r = \{x : \ u(x) = r\}$. Ebbene sempre Stampacchia ha dimostrato che $D_i u = 0$ q.o. in Ω_r (in realtà $D_i u = 0$ q.o. in Ω_r per ogni valore di r). Allora il senso da attribuire (q.o.) a $G'(u) D_i u$ è il seguente: il valore $G'(u(x))$ è arbitrario nei punti x tali che $u(x)$ è un punto di non differenziabilità di G (tanto tale valore verrà moltiplicato per zero). Ad esempio, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, anche u^+ appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ e si ha: $D_i u^+ = D_i u$ q.o. nell'insieme in cui $u > 0$ e $D_i u^+ = 0$ q.o. nell'insieme in cui $u \le 0$. Anche se la funzione $r \mapsto (r)^+$ non è differenziabile in 0, si ha $D_i u^+ = 0$ q.o. nell'insieme in cui $u = 0$, insieme che in certi casi potrebbe essere molto brutto, ad esempio di misura positiva ma senza punti interni.

3.22. *Esercizio.* Si dimostri che, se $p, q, r \in [1, +\infty)$ verificano $1/r = (1/p) + (1/q)$ e se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W^{1,q}(\Omega)$, allora $uv \in W^{1,r}(\Omega)$ e vale la formula di Leibniz

$$D_i(uv) = v D_i u + u D_i v \quad \text{per } i = 1, \dots, d \tag{3.8}$$

per le derivate deboli. Si consiglia ancora l'uso dell'identità $W^{1,s}(\Omega) = H^{1,s}(\Omega)$, ora con $s = p, q$.

3.23. Osservazione. Segnaliamo che il risultato dato dall'esercizio precedente vale (con una dimostrazione necessariamente diversa) anche quando qualcuno degli esponenti è infinito. Si conferma dunque, ancora una volta, che le derivate deboli funzionano molto bene. □

Chiudiamo la parentesi e riprendiamo il discorso sulla determinazione dei completamenti.

3.24. Esempio. Posto $V = C_c^\infty(\mathbb{R})$, si osservi che, se $v \in V$, allora $v' \in C_b^0(\mathbb{R})$ e che se $\|v'\|_\infty = 0$ allora $v = 0$. Dunque la formula $\|v\| = \|v'\|_\infty$ definisce una norma in V. Si pone il problema di trovare un completamento concreto. Un modo è il seguente: l'applicazione $I : v \mapsto v'$ da V in $C_b^0(\mathbb{R})$ è lineare e isometrica se V e $C_b^0(\mathbb{R})$ sono muniti della norma appena definita e di quella usuale rispettivamente. Dunque un completamento si ottiene chiudendo l'immagine di tale applicazione in $C_b^0(\mathbb{R})$. Si ottiene uno spazio di Banach. Tale costruzione, tuttavia, non è soddisfacente dato che si è restii a interpretare l'applicazione I così costruita come un'identificazione.

Cerchiamo allora un completamento diverso che eviti tale inconveniente e, a prima vista, sembrano esserci diverse possibilità. Una di queste è considerare come ambiente lo spazio, che denotiamo con W, costituito dalle funzioni di classe C^1 che hanno derivata infinitesima all'infinito. Chiaramente si ha $V \subset W$, ma, se si vuole l'immersione isometrica, occorre dare la definizione $\|v\| = \|v'\|_\infty$ per ogni $v \in W$. Così facendo, però, non si ottiene una norma, dato che ogni costante (automaticamente appartenente a W) avrebbe norma nulla. Dunque occorre buttare il tentativo. Per lo stesso motivo non funziona prendere come W lo spazio delle funzioni di classe C^1 che hanno derivata infinitesima all'infinito e che sono anche limitate. Una soluzione di ripiego consiste nell'assumere come W lo spazio delle funzioni di classe C^1 che hanno derivata infinitesima all'infinito e che sono esse stesse infinitesime all'infinito. Ora la definizione $\|v\| = \|v'\|_\infty$ per $v \in W$ fornisce una norma (l'unica costante appartenente a W è la funzione nulla), ma lo spazio costruito non è completo. Mostriamo infatti che è una successione di Cauchy non convergente quella definita dalla formula $v_n(x) = \zeta(x/n)\ln(1+x^2)$, ove $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ è fissata tale che $\zeta(t) = 1$ se $|t| \le 1$ e $\zeta(t) = 0$ se $|t| \ge 2$. Verifichiamo innanzi tutto che $\{v_n'\}$ converge uniformemente alla funzione w data da $w(x) = 2x/(1+x^2)$. Abbiamo

$$v_n' - w = p_n + s_n \quad \text{ove} \quad p_n(x) = \frac{1}{n}\,\zeta'(x/n)\ln(1+x^2) \quad \text{e} \quad s_n(x) = (\zeta(x/n) - 1)\,\frac{2x}{1+x^2}$$

e ora stimiamo la norma del massimo dei due addendi. Siccome $\zeta'(x/n) = 0$ se $|x| > 2n$, per il primo risulta $\|p_n\|_\infty \le (M/n)\ln(1+4n^2)$ ove $M = \sup|\zeta'|$. Dunque $p_n \to 0$ uniformemente. D'altra parte, siccome $\zeta(x/n) - 1 = 0$ se $|x| < n$ e la funzione $[n, +\infty) \ni t \mapsto 2t/(1+t^2)$ decresce, abbiamo anche $\|s_n\|_\infty \le 2n/(1+n^2)$, per cui $s_n \to 0$ uniformemente. Concludiamo che $v_n' \to w$ uniformemente e deduciamo che $\{v_n'\}$ è di Cauchy rispetto alla norma del massimo, cioè che $\{v_n\}$ è di Cauchy rispetto alla norma che abbiamo scelto in V. Supponiamo ora che $\{v_n\}$ converga in V a una certa funzione z. Allora $\{v_n'\}$ converge uniformemente a z'. Deduciamo che $z' = w$, cioè che z è una primitiva di w. Ma, chiaramente, nessuna delle primitive di w è infinitesima all'infinito, mentre z lo è in quanto elemento di V, assurdo.

La chiave di volta è il passaggio allo spazio quoziente $V_\bullet$, costituito dagli integrali indefiniti delle funzioni continue infinitesime all'infinito. Naturalmente per integrale indefinito di una funzione tale funzione w intendiamo la classe delle funzioni del tipo $z(x) = c + \int_0^x w(t)\,dt$ ottenuta lasciando variare c arbitrariamente in $\mathbb{K}$. Notiamo che una tale z è di classe C^1 ma non necessariamente infinitesima all'infinito, come mostra il caso della funzione w costruita sopra. La definizione della norma in $V_\bullet$ è la seguente: per $v_\bullet \in V_\bullet$ poniamo $\|v_\bullet\|_\bullet = \|v'\|_\infty$ se $v \in v_\bullet$. Allora si ha un'immersione naturale $I : V \to V_\bullet$, quella data dalla formula: Iv è l'integrale indefinito di v', cioè la classe costituita dalle funzioni che differiscono da v per una costante. Questa è un'isometria. Inoltre $V_\bullet$ è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_\bullet$ in quanto isometricamente isomorfo allo spazio delle funzioni continue infinitesime all'infinito munito della norma del massimo (l'isomorfismo isometrico naturale è dato da $v_\bullet \mapsto v'$ se $v \in v_\bullet$), e tale spazio è completo in quanto sottospazio chiuso dello spazio di Banach $C_b^0(\mathbb{R})$. Infine l'immagine $I(V)$ è densa in $V_\bullet$, come ora mostriamo. Osservato che $I(V)$ è costituita dalle classi del tipo $\{v + c : \ c \in \mathbb{K}\}$ con $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, è chiaro che controllare la densità voluta coincide con la verifica di quanto segue: se v è di classe C^1 e v' è infinitesima all'infinito, allora esistono $v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tali che $v_n' \to v'$ uniformemente. Ebbene questa affermazione è vera e ora ne diamo una possibile dimostrazione. Sia v come detto. Siccome $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso nello spazio delle funzioni continue infinitesime all'infinito munito della norma del massimo, troviamo una successione $\{w_n\}$ di elementi di $C_c^\infty(\mathbb{R})$ convergente uniformemente a v'. Come v_n, tuttavia, non possiamo prendere una primitiva di w_n, dato che può accadere che nessuna di tali primitive sia a supporto compatto. Occorre quindi correggere la scelta. Fissiamo $\tau \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\tau(t) = 0$ se $t \le 0$ e $\tau(t) = 1$ se $t \ge 1$ e definiamo v_n mediante la formula

$$\begin{aligned} &v_n(x) = \int_{-\infty}^x w_n(t)\,dt - i_n \tau\Bigl(\frac{x - x_n}{c_n}\Bigr) \quad \text{ove} \\ &i_n = \int_{\mathbb{R}} w_n(t)\,dt, \quad x_n \text{ è tale che } w_n = 0 \text{ in } [x_n, +\infty) \quad \text{e} \quad c_n > n|i_n|\,. \end{aligned}$$

Allora $v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. La regolarità C^∞ è chiara. Se x è negativo di modulo abbastanza grande, entrambi gli addendi della definizione di v_n sono nulli. Se $x > x_n + c_n$, allora $(x - x_n)/c_n > 1$ e $x > x_n$, per cui $v_n(x) = i_n - i_n = 0$. Dunque v_n è anche una funzione a supporto compatto. Infine la verifica che v_n' converge uniformemente a v' coincide con il controllo che il termine di correzione ha derivata che tende a 0 uniformemente. Tale derivata è data dalla formula $(i_n/c_n)\tau'((x-x_n)/c_n)$, per cui la sua norma del massimo risulta $\le C|i_n|/c_n < C/n$ ove $C = \sup|\tau'|$.

3.25. Esempio. Posto $V = C_c^\infty(\mathbb{R})$, si osservi che, se $v \in V$, allora $v' \in L^2(\mathbb{R})$ e che se $\|v'\|_2 = 0$ allora $v = 0$. Dunque la formula $\|v\| = \|v'\|_2$ definisce una norma in V. Si pone il problema di trovare un completamento concreto e la situazione è analoga a quella dell'esempio precedente. Il primo dei modi naturali è il seguente: l'applicazione $I : v \mapsto v'$ da V in $L^2(\mathbb{R})$ è lineare e isometrica se V e $L^2(\mathbb{R})$ sono muniti della norma appena definita e di quella usuale rispettivamente. Dunque un completamento si ottiene chiudendo l'immagine di tale applicazione in $L^2(\mathbb{R})$. Si ottiene uno spazio di Hilbert. Ma, come nell'esempio precedente, si è restii a interpretare l'applicazione I così costruita come un'identificazione.

Un analogo del precedente spazio W non completo è lo spazio di Sobolev $H = H^1(\mathbb{R})$ munito della norma data da $\|v\| = \|v'\|_2$ per ogni $v \in H$. Ancora è una successione di Cauchy non convergente la successione $\{w_n\}$ costruita sopra. Conservando le notazioni introdotte, infatti, vediamo che $s_n \to 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ per il Teorema di Lebesgue. D'altra parte $p_n \to 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ in quanto

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n^2}\,(\zeta'(x/n))^2 \ln^2(1 + x^2)\,dx = \int_{\{n<|x|<2n\}} \frac{1}{n^2}\,(\zeta'(x/n))^2 \ln^2(1 + x^2)\,dx \le \frac{2M^2}{n}\,\ln^2(1 + 4n^2)$$

ove ancora $M = \sup|\zeta'|$. Dunque $v_n' \to w$ in $L^2(\mathbb{R})$. In particolare $\{v_n\}$ è di Cauchy in H rispetto alla norma considerata. D'altra parte quanto abbiamo verificato implica che $\{v_n\}$ converge in H se e solo se tale w è la derivata di un elemento di H. Siccome ciò è falso, concludiamo che $\{v_n\}$ è una successione di Cauchy non convergente.

Anche in questo caso la chiave di volta è il passaggio allo spazio quoziente $H_\bullet$, costituito dagli integrali indefiniti degli elementi di $L^2(\mathbb{R})$. Naturalmente per integrale indefinito di una funzione $w \in L^2(\mathbb{R})$ intendiamo la classe delle funzioni del tipo $z(x) = c + \int_0^x w(t)\,dt$ ottenuta lasciando variare c arbitrariamente in $\mathbb{K}$. Notiamo che una tale z appartiene a $C^0(\mathbb{R})$ ma non in generale a $L^2(\mathbb{R})$ e che la sua derivata debole è proprio w. Se $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, fissato un intervallo $[a, b]$ fuori del quale v è nulla, con ovvio significato di c' e uno scambio di integrazioni abbiamo infatti

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} z(x)\,v'(x)\,dx = \int_a^b \Bigl(c' + \int_a^x w(t)\,dt\Bigr)\,v'(x)\,dx = c'\,[v(x)]_a^b + \int_{\{a<t<x<b\}} w(t)\,v'(x)\,dt\,dx \\ &= \int_a^b w(t)\Bigl(\int_t^b v'(x)\,dx\Bigr)\,dt = -\int_a^b w(t)\,v(t)\,dt = -\int_{\mathbb{R}} w(t)\,v(t)\,dt. \end{aligned}$$

La definizione della norma in $H_\bullet$ è la seguente: per $v_\bullet \in H_\bullet$ poniamo $\|v_\bullet\|_\bullet = \|v'\|_2$ se $v \in v_\bullet$. Allora si ha un'immersione naturale $I : V \to H_\bullet$, data da $Iv = \{v + c : \; c \in \mathbb{K}\}$, cioè Iv è l'integrale indefinito di v'. Questa è un'isometria, la sua immagine è densa in $H_\bullet$ (ragionamento analogo a quello dell'esempio precedente basato sul fatto che $C_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$) e $H_\bullet$ è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_\bullet$ in quanto isometricamente isomorfo a $L^2(\mathbb{R})$.

3.26. Esempio. Concludiamo il capitolo con un altro esempio di spazio quoziente. Fissati l'aperto Ω di $\mathbb{R}^d$ e $k \in \mathbb{N}$, consideriamo lo spazio $\widetilde{C}^k(\overline{\Omega})$ introdotto nella (I.5.22) e muniamolo della norma definita dalla formula

$$\|v\| = \inf\{\|\widetilde{v}\|_k : \; \widetilde{v} \in C_b^k(\mathbb{R}^d), \; \widetilde{v}|_\Omega = v\} \tag{3.9}$$

ove naturalmente $\|\cdot\|_k$ denota la norma in $C_b^k(\mathbb{R}^d)$ (vedi (I.5.20) e (I.5.19)). Dimostriamo che esso è completo controllando che è isomorfo a uno spazio completo. Sia $V = C_b^k(\mathbb{R}^d)$ munito della norma appena menzionata e sia V_0 il suo sottoinsieme costituito dalle funzioni v tali che $v|_\Omega = 0$. Allora V_0 è un sottospazio chiuso (verifica immediata), per cui possiamo considerare il quoziente $V_\bullet = V/V_0$. Costruiamo un isomorfismo di $\widetilde{C}^k(\overline{\Omega})$ su $V_\bullet$. Sia $u \in \widetilde{C}^k(\overline{\Omega})$. Allora i prolungamenti di u appartenenti a V costituiscono una classe di equivalenza, cioè un elemento di $V_\bullet$, che denotiamo con Lu. Si vede senza difficoltà che l'operatore $L : \widetilde{C}^k(\overline{\Omega}) \to V_\bullet$ che risulta in tal modo definito è lineare. Mostriamo che L è suriettivo. Se $v_\bullet \in V_\bullet$, fissiamo $v \in v_\bullet$ e poniamo $u = v|_\Omega$. Allora $Lu = v_\bullet$. Infine, per ogni $u \in \widetilde{C}^k(\overline{\Omega})$, risulta

$$\|Lu\|_\bullet = \inf\{\|v\|_k : \; v \in Lu\} = \inf\{\|v\|_k : \; v \in V, \; v|_\Omega = u\} = \|u\|$$

per cui L è addirittura un'isometria. Siccome V è completo (Esercizio I.5.41), anche $V_\bullet$ è completo per il Teorema 1.6. Segue che è completo anche $\widetilde{C}^k(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma considerata.

3.27. Osservazione. Torniamo alle situazioni delle Osservazioni I.5.43 e I.5.44, in particolare al fatto che $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega})$ non sia chiuso in $C^1(\overline{\Omega})$ se Ω è l'aperto con cuspide entrante là considerato. Deduciamo che lo spazio $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega})$ non è completo rispetto alla norma indotta dallo spazio $C^1(\overline{\Omega})$, norma che qui denotiamo con $\|\cdot\|_1$. Siccome, al contrario, $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega})$ è completo rispetto alla norma (3.9) con $k = 1$, norma che qui denotiamo con $\|\cdot\|_\sim$, concludiamo che le due norme non sono equivalenti. D'altra parte, banalmente, vale la disuguaglianza

$$\sup_\Omega |v| \le \sup_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{v}| \quad \text{se} \quad \widetilde{v}|_\Omega = v \quad \text{da cui} \quad \|v\|_1 \le \|v\|_\sim \quad \text{per ogni } v \in \widetilde{C}^1(\overline{\Omega}).$$

Dunque deve essere falsa la disuguaglianza nella direzione opposta, vale a dire, non esiste alcuna costante M tale che $\|v\|_\sim \le M\|v\|_1$ per ogni $v \in \widetilde{C}^1(\overline{\Omega})$.

3.28. *Esercizio.* In riferimento all'ultima frase dell'osservazione precedente, dimostrare che non esiste alcun operatore $P : \widetilde{C}^1(\overline{\Omega}) \to C_b^1(\mathbb{R}^2)$ lineare e continuo che sia di prolungamento, cioè verifichi $(Pv)|_\Omega = v$ per ogni $v \in \widetilde{C}^1(\overline{\Omega})$.

3.29. *Esercizio.* Dimostrare che la successione ottenuta prendendo $\varepsilon = 1/n$ nella funzione u_ε dell'Osservazione I.5.44 non è di Cauchy nello spazio $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma (3.9) con $k = 1$.

Capitolo 3
Operatori e funzionali

Ricordiamo che un operatore lineare fra spazi normati non è necessariamente continuo e la Proposizione I.4.9 fornisce, nel quadro più generale degli spazi vettoriali topologici, una caratterizzazione degli operatori lineari che sono anche continui. Qui ci limitiamo al caso degli spazi normati. Particolare importanza riveste poi il caso in cui l'operatore è a valori scalari: in tali condizioni si preferisce usare il termine *funzionale* anziché quello generale di operatore.

1. Operatori lineari

Il concetto importante che riguarda la continuità di un operatore è quello di *limitatezza*, ma non nel senso usuale del termine, in quanto, se V e W sono due spazi normati e $L : V \to W$ è lineare e non nullo, l'immagine di L non può essere un sottoinsieme limitato di W. Preso infatti $x_0 \in V$ tale che $Lx_0 \neq 0$, si ha $L(tx_0) = tLx_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi $\sup_{x\in V}\|Lx\| = +\infty$. Premettiamo un fatto molto semplice, di dimostrazione immediata.

1.1. Proposizione. *Siano V e W due spazi normati e $L : V \to W$ lineare. Se $M \geq 0$ le condizioni seguenti sono equivalenti: i) $\|Lx\| \leq M$ per ogni $x \in V$ verificante $\|x\| \leq 1$; ii) $\|Lx\| \leq M$ per ogni $x \in V$ verificante $\|x\| = 1$; iii) $\|Lx\| \leq M\|x\|$ per ogni $x \in V$; iv) $\sup_{x\in V\setminus\{0\}}(\|Lx\|/\|x\|) \leq M$.* □

1.2. Definizione. *Siano V e W due spazi normati e $L : V \to W$ lineare. Diciamo che L è limitato quando esiste $M \geq 0$ tale che valga una delle condizioni $i), \ldots, iv)$ della Proposizione 1.1.* □

1.3. *Esercizio.* Dimostrare che, se L è lineare, anche ciascuna delle condizioni elencate di seguito è equivalente a quella della Proposizione 1.1: *i)* $\|Lx\| \leq M$ per ogni $x \in V$ verificante $\|x\| < 1$; *ii)* esiste $r > 0$ tale che $\|Lx\| \leq Mr$ per ogni $x \in V$ verificante $\|x\| \leq r$; *iii)* esiste $r > 0$ tale che $\|Lx\| \leq Mr$ per ogni $x \in V$ verificante $\|x\| = r$; *iv)* esiste $r > 0$ tale che $\|Lx\| \leq Mr$ per ogni $x \in V$ verificante $\|x\| < r$. □

Rienunciamo l'importante Teorema I.4.11 facendo uso della terminologia appena introdotta e segnaliamo una sua conseguenza importante (oltre ai Corollari I.4.12 e I.4.13).

1.4. Teorema. *Siano V e W due spazi normati e $L : V \to W$ lineare. Allora L è continuo se e solo se L è limitato.* □

1.5. Corollario. *Se due spazi normati V e W sono isomorfi, la completezza di uno di essi implica quella dell'altro.* □

Dimostrazione. Infatti un isomorfismo $L : V \to W$ e il suo inverso $L^{-1} : W \to V$ trasformano successioni convergenti in successioni convergenti e anche, grazie al fatto che essi sono limitati per il Teorema 1.4, successioni di Cauchy in successioni di Cauchy. □

1.6. Osservazione. Nel caso complesso si possono considerare anche gli *operatori antilineari*, in particolare gli *anti-isomorfismi*. Naturalmente, se V e W sono spazi vettoriali, un'applicazione $L : V \to W$ è antilineare quando $L(\alpha x+\beta y) = \overline{\alpha}\, Lx+\overline{\beta}\, Ly$ per ogni $x, y \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Un anti-isomorfismo algebrico è un'applicazione antilineare biiettiva e un anti-isomorfismo fra spazi normati è un anti-isomorfismo algebrico continuo con il suo inverso. Per questi operatori valgono risultati analoghi a quelli che diamo per gli operatori lineari. Facciamo solo notare che la composizione di due operatori di cui uno lineare e l'altro antilineare è antilineare e che la composizione di due operatori antilineari è lineare. □

Si potrebbero dare altre caratterizzazioni della continuità degli operatori lineari fra spazi normati. Qui li limitiamo a un paio di risultati che fanno intervenire il nucleo. Questo, chiaramente, è *chiuso se l'operatore in questione è anche continuo*. Il viceversa, tuttavia, è falso in generale. Basta infatti pensare al caso dell'identità di uno spazio munito di due topologie diverse: questa può non essere continua anche se il nucleo è chiuso in quanto ridotto all'origine. Condizioni aggiuntive che assicurano la continuità dell'operatore nell'ipotesi di chiusura del suo nucleo sono l'oggetto dei due risultati che seguono. Il primo di essi riguarda i funzionali, cioè gli operatori a valori scalari, nel caso reale: la dimostrazione che presentiamo suggerisce come risolvere l'esercizio successivo. Il secondo, valido anche nel caso complesso, generalizza il primo ed è ottimale per quanto detto sopra.

1.7. Proposizione. *Siano V uno spazio normato reale e $f \in \mathrm{Hom}(V;\mathbb{R})$. Se il suo nucleo $N(f)$ è chiuso, allora f è continuo.* □

Dimostrazione. Se $f = 0$, allora f è continuo, banalmente. Sia dunque $f \neq 0$. Scelto $x_0 \in V$ tale che $f(x_0) \neq 0$, troviamo una palla $B = B_r(x_0)$ che non interseca $N(f)$, cioè tale che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in B$. Supponiamo $f(x_0) > 0$ per fissare le idee e dimostriamo che $f(x) > 0$ per ogni $x \in B$. Se infatti esistesse $x' \in B$ tale che $f(x') < 0$, considerando la funzione (ovviamente continua) $t \mapsto f(tx' + (1-t)x_0) = tf(x') + (1-t)f(x_0)$, $t \in [0,1]$, troveremmo $x \in B$ tale che $f(x) = 0$, assurdo. A questo punto possiamo dimostrare che f è continuo controllando che esso è limitato. Sia infatti $z \in B_1(0)$. Allora i punti $x_\mp = x_0 \mp rz$ appartengono a B. Segue che

$$\pm f(z) = f(\pm z) = \frac{1}{r}\bigl(f(x_0) - f(x_\mp)\bigr) \leq \frac{f(x_0)}{r}\,.$$

Dunque $|f(z)| \leq f(x_0)/r$ per ogni $z \in B_1(0)$, per cui f è limitato. □

1.8. *Esercizio.* Siano V uno spazio normato reale, $f \in \mathrm{Hom}(V;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ e si considerino gli insiemi S_α, I_α e S'_α costituiti dagli $x \in V$ verificanti $f(x) \leq \alpha$, $f(x) = \alpha$ e $f(x) < \alpha$ rispettivamente. Dimostrare che sono equivalenti le condizioni: *i)* S_α è chiuso; *ii)* I_α è chiuso; *iii)* S'_α è aperto; *iv)* f è continuo.

1.9. Proposizione. *Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathrm{Hom}(V;W)$. Se il nucleo $N(L)$ è chiuso e l'immagine $R(L)$ ha dimensione finita, allora L è continuo.* □

Dimostrazione. Poniamo $W_0 = R(L)$ per comodità e introduciamo in W_0 la norma definita da

$$\|w\|_L = \inf\{\|v\|_V :\ Lv = w\} \quad \text{per } w \in W_0\,.$$

Effettivamente questa è una norma. Il controllo delle proprietà delle seminorme è immediato e resta da vedere che solo 0 ha norma nulla. Supponiamo $\|w\|_L = 0$. Allora esiste una successione $\{v_n\}$ in V tale che $Lv_n = w$ per ogni n e $\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_V = 0$. Posto $u_n = v_n - v_1$ abbiamo pertanto $u_n \in N(L)$ per ogni n e $u_n \to -v_1$ in V. Siccome $N(L)$ è chiuso, deduciamo che $-v_1 \in N(L)$, da cui $w = -L(-v_1) = 0$ e $\|\cdot\|_L$ è una norma. Siccome per ipotesi W_0 ha dimensione finita, la norma $\|\cdot\|_L$ e la restrizione a W_0 di $\|\cdot\|_W$ sono equivalenti (Teorema I.3.20). Quindi esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$\|w\|_W \leq M\|w\|_L \quad \text{per ogni } w \in W_0 \quad \text{da cui} \quad \|Lx\|_W \leq M\|Lx\|_L \leq M\|x\|_V \quad \text{per ogni } x \in V$$

e L è limitato. □

1.10. Osservazione. Anziché controllare direttamente che $\|\cdot\|_L$ è una norma, avremmo potuto osservare che il quoziente $V_\bullet = V/N(L)$ è un ben definito spazio normato dato che $N(L)$ è chiuso (Teorema I.6.1) e che $\|\cdot\|_L$ è proprio la norma che rende isomorfismo (si veda l'ultima parte dell'Osservazione I.3.13) l'isomorfismo algebrico $L_\bullet : V_\bullet \to W_0$ indotto da L, cioè quello per cui $L_\bullet v_\bullet = Lv$ per ogni $v_\bullet \in V_\bullet$ e ogni $v \in v_\bullet$. □

Tornando al discorso generale sugli operatori, osserviamo che è spesso opportuno considerare applicazioni lineari non definite in tutto lo spazio. Diamo allora la definizione seguente:

1.11. Definizione. *Siano V e W due spazi normati. Un operatore lineare non limitato di V in W è un operatore $L \in \mathrm{Hom}(D(L); W)$ il cui dominio $D(L)$ è un sottospazio vettoriale di V.* □

Naturalmente il primo esempio di operatore lineare non limitato è quello degli operatori lineari limitati, cioè limitati nel senso della Definizione 1.2, essendo sottinteso che $D(L)$ è munito della norma indotta da quella di V. Infatti, quando si dice "non limitato", si vuole solo sottolineare che non si sta facendo l'ipotesi che l'operatore in questione sia limitato.

Tuttavia, quando il codominio W è uno spazio di Banach, sostanzialmente non è restrittivo supporre che il dominio dell'operatore limitato considerato sia un sottospazio chiuso grazie al risultato generale che diamo di seguito. In particolare, anziché operatori lineari limitati con dominio denso, consideriamo operatori lineari limitati definiti in tutto lo spazio. Gli operatori lineari con dominio denso (e non chiuso) degni di considerazione sono solo quelli "davvero non limitati".

1.12. Proposizione. *Siano V e W due spazi normati e $L_0 : D(L_0) \to W$ un operatore lineare. Se L_0 è continuo e W è completo, allora esiste uno e un solo operatore $L : \overline{D(L_0)} \to W$ lineare continuo che prolunga L_0.* □

Dimostrazione. Infatti, data la linearità e la limitatezza di L_0, segue che L_0 è una funzione uniformemente continua. Allora, per la Proposizione A.1.27, esiste un unico prolungamento L continuo definito nella chiusura $\overline{D(L_0)}$. Ma tale prolungamento è anche lineare, come si verifica immediatamente. □

1.13. Osservazione. Il risultato precedente ha un'importanza che va oltre le motivazioni che abbiamo dato sopra. Apriamo una parentesi per darne un'applicazione significativa che riguarda gli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$: il cosiddetto *Teorema di traccia*. Focalizziamo il problema. Gli elementi di $W^{1,p}(\Omega)$ sono particolari elementi di $L^p(\Omega)$, dunque classi di funzioni misurabili. Ora, se u è una di tali classi e S è un sottoinsieme misurabile di Ω, si può certamente definire $u|_S$ come la classe costituita dalle restrizioni a S degli elementi di u, dato che tali restrizioni risultano fra loro equivalenti. Tuttavia si ottiene una definizione significativa solo se S ha misura positiva, ad esempio, se $S = \omega$, un aperto non vuoto di Ω (in tal caso, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, si vede facilmente che $u|_\omega \in W^{1,p}(\omega)$). Se invece S ha misura nulla, le restrizioni a S di tutti gli elementi di u sono equivalenti alla funzione nulla definita in S e la definizione data sopra diventa improduttiva. Supponiamo ora che u abbia un rappresentante v continuo in tutti i punti di S. Allora questo è unico e $v|_S$ risulta una definizione migliore di $u|_S$. Se poi u ha un rappresentante v uniformemente continuo, possiamo più in generale supporre $S \subset \overline{\Omega}$: in tal caso $u|_S$ è la restrizione a S del prolungamento di v continuo in $\overline{\Omega}$. In tali condizioni possiamo prendere come S un insieme ridotto a un singolo punto x_0 e definire in tal modo $u(x_0)$, oppure $S = \Gamma$, la frontiera di Ω, e definire $u|_\Gamma$. Tuttavia, se $p \le d$, il generico elemento di $u \in W^{1,p}(\Omega)$ non ha rappresentanti continui (si rivedano l'Osservazione I.5.71 e l'Esempio II.2.14). D'altra parte, se Ω è regolare, la sua frontiera Γ ha misura nulla. Vediamo allora che la definizione di $u|_\Gamma$ diventa problematica. D'altra parte è importante darne una e la chiave di volta è l'uso della Proposizione 1.12. Ecco come si può procedere. Si considerano gli spazi $V = W^{1,p}(\Omega)$ e $W = L^p(\Gamma)$ (costruito naturalmente a partire dalla misura "superficiale" dS su Γ, non certo dalla misura di Lebesgue d-dimensionale), il sottospazio $V_0 = C^\infty(\overline{\Omega})$ e l'operatore $L_0 : V_0 \to W$ definito da $L_0 v = v|_\Gamma$ (l'usuale restrizione se si pensa v definita in $\overline{\Omega}$; la restrizione a Γ del prolungamento continuo di v a $\overline{\Omega}$ se si pensa v definita solo in Ω) e si cerca di applicare proprio la Proposizione 1.12. Se L_0 *è continuo* e V_0 *è denso in* V, allora esiste uno e un solo operatore $L \in \mathcal{L}(V; W)$ che prolunga L_0, cioè che verifica $Lv = v|_\Gamma$ per ogni $v \in V_0$. Dopo di che si usa ancora il simbolo $u|_\Gamma$ per denotare Lu anche quando $u \in V$. Ebbene *la continuità e la densità desiderate sono entrambe vere se si suppone Ω limitato e regolare* e $1 \le p < +\infty$ (se $p = \infty$ cade la densità, ma questo caso non è interessante dato che gli elementi di $W^{1,\infty}(\Omega)$ hanno rappresentanti lipschitziani). Dunque si conclude che

> *se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ è limitato e regolare e $p \in [1, +\infty)$, esiste uno e un solo operatore, denotato $v \mapsto v|_\Gamma$, lineare e continuo da $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Gamma)$ tale che $v|_\Gamma$ abbia il significato abituale per ogni $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$.* (1.1)

Questa affermazione viene chiamata *Teorema di traccia* e, se $v \in W^{1,p}(\Omega)$, l'elemento $v|_\Gamma \in L^p(\Gamma)$ dato dal teorema si chiama *traccia di* v. Si noti che la frase "la funzione $g \in L^p(\Gamma)$ è la traccia della funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$" significa: esistono $v_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tali che $v_n \to v$ in $W^{1,p}(\Omega)$ e $v_n|_\Gamma \to g$ in $L^p(\Gamma)$. La densità di $C^\infty(\overline{\Omega})$ in $W^{1,p}(\Omega)$ è di dimostrazione molto complessa, per cui dimostriamo solo la continuità di L_0. Proviamo cioè l'esistenza di una costante M tale che

$$\|v|_\Gamma\|_{L^p(\Gamma)} \le M\|v\|_{1,p} \quad \text{per ogni } v \in V_0\,. \tag{1.2}$$

Dimostriamo dapprima una versione locale della (1.2). In accordo con la definizione di aperto regolare (vedi la Sezione I.5.45), per ogni punto $x_0 \in \Gamma$ esistono un sistema di nuove coordinate cartesiane y, un aperto ω di $\mathbb{R}^{d-1}$, un numero $\delta > 0$ e una funzione $\varphi : \omega \to \mathbb{R}$ regolare in modo che, nelle nuove coordinate, valgano le rappresentazioni locali di Ω e di $\Gamma = \partial\Omega$ descritte nella sezione citata. Se continuiamo a chiamare x anche la nuova variabile y e poniamo

$$\begin{aligned}
\Omega(x_0) &= \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} :\ x' \in \omega,\ \varphi(x') - \delta < x_d < \varphi(x') + \delta\} \\
\Omega^+(x_0) &= \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} :\ x' \in \omega,\ \varphi(x') < x_d < \varphi(x') + \delta\} \\
\Gamma(x_0) &= \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} :\ x' \in \omega,\ x_d = \varphi(x')\}
\end{aligned}$$

abbiamo dunque

$$\Omega \cap \Omega(x_0) = \Omega^+(x_0) \quad \text{e} \quad \Gamma \cap \Omega(x_0) = \Gamma(x_0). \tag{1.3}$$

Per ogni $x' \in \omega$, applichiamo il Teorema fondamentale del calcolo alla funzione $t \mapsto |v(x',t)|^p$ se $p > 1$ e alla funzione $t \mapsto v(x',t)$ se $p = 1$, ove $\varphi(x') \le t \le x_d \le \varphi(x') + \delta$ in ciascuno dei due casi. Tuttavia trattiamo solo il primo dato che, visto questo, l'altro appare banale, e supponiamo v reale per semplicità. Per ogni $x_d \in (\varphi(x'), \varphi(x') + \delta)$, posto $D_d = \partial/\partial x_d$, si ha

$$\begin{aligned}
&|v(x', \varphi(x'))|^p = |v(x', x_d)|^p - \int_{\varphi(x')}^{x_d} p\,|v(x',t)|^{p-1} (\operatorname{sign} v(x',t))\, D_d\, v(x',t)\, dt \\
&\le |v(x', y)|^p + p \int_{I(x')} |D_d\, v(x',t)|\, |v(x',t)|^{p-1}\, dt \quad \text{ove} \quad I(x') = (\varphi(x'), \varphi(x') + \delta)
\end{aligned}$$

con la convenzione $0^{p-1} \operatorname{sign} 0 = 0$. Osservato che $(p-1)p' = p$, usando le disuguaglianze di Hölder e di Young, otteniamo

$$\begin{aligned}
&|v(x', \varphi(x'))|^p \le |v(x', x_d)|^p + p \left(\int_{I(x')} |D_d\, v(x',t)|^p\, dt \right)^{1/p} \left(\int_{I(x')} |v(x',t)|^{(p-1)p'}\, dt \right)^{1/p'} \\
&\le |v(x', x_d)|^p + \int_{I(x')} |D_d\, v(x',t)|^p\, dt + \frac{p}{p'} \int_{I(x')} |v(x',t)|^p\, dt.
\end{aligned}$$

Integrando rispetto a x_d in $I(x')$, deduciamo

$$\delta |v(x', \varphi(x'))|^p \le \int_{I(x')} |v(x', x_d)|^p\, dx_d + \delta \int_{I(x')} |D_d\, v(x',t)|^p\, dt + \frac{p}{p'}\, \delta \int_{I(x')} |v(x',t)|^p\, dt.$$

Ora dividiamo per δ, moltiplichiamo per $j(x') = (1 + |\nabla\varphi(x')|^2)^{1/2}$ e integriamo rispetto a x' in ω. Siccome vale la sostituzione formale $dS = j(x')\, dx'$ e si ha $|D_d\, v| \le |\nabla v|$, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma(x_0)} |v(x)|^p\, dS = \int_\omega |v(x', \varphi(x'))|^p\, j(x')\, dx' \\
&\le \left(\frac{1}{\delta} + \frac{p}{p'} \right) \int_{\Omega^+(x_0)} |v(x', x_d)|^p\, j(x')\, dx_d\, dx' + \int_{\Omega^+(x_0)} |\nabla v(x',t)|^p\, j(x')\, dt\, dx'.
\end{aligned}$$

Ma $\Omega^+(x_0) \subseteq \Omega$, per cui, posto $M(x_0) = \max\{1/\delta + p/p', 1\} \sup_{x' \in \omega} j(x')$, concludiamo che

$$\int_{\Gamma(x_0)} |v|^p \, dS \leq M(x_0) \int_\Omega (|v|^p + |\nabla v|^p) \, dx \quad \text{cioè} \quad \|v|_{\Gamma(x_0)}\|^p_{L^p(\Gamma(x_0))} \leq M(x_0) \|v\|^p_{1,p} \,. \tag{1.4}$$

Notiamo che i calcoli fatti sono corretti se φ è di classe C^1 con gradiente limitato (così che j è limitata). Dunque ogni punto $x_0 \in \Gamma$ ha un intorno $\Omega(x_0)$ in modo che, con le notazioni (1.3), valga la corrispondente disuguaglianza (1.4) per ogni $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e per una certa costante $M(x_0)$. Ora “incolliamo” le stime locali come segue. Consideriamo, per ogni $x_0 \in \Gamma$, l'intorno aperto $\Omega(x_0)$ e la costante $M(x_0)$. La famiglia descritta da $\Omega(x_0)$ al variare di x_0 in Γ ricopre Γ. Ma Γ è un compatto dato che Ω è limitato. Possiamo dunque estrarre una famiglia finita che ancora ricopra Γ. Abbiamo pertanto aperti Ω_k, $k = 1, \ldots, m$, e altrettante costanti M_k tali che, posto per comodità $\Gamma_k = \Gamma \cap \Omega_k$, valgano le disuguaglianze

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k \quad \text{e} \quad \|v|_{\Gamma_k}\|^p_{L^p(\Gamma_k)} \leq M_k \|v\|^p_{1,p} \quad \text{per } k = 1, \ldots, m \text{ e per ogni } v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \,.$$

Per ogni $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ abbiamo pertanto

$$\|v|_\Gamma\|^p_{L^p(\Gamma)} = \int_\Gamma |v|^p \, dS \leq \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} |v|^p \, dS = \sum_{k=1}^m \|v|_{\Gamma_k}\|^p \leq \sum_{k=1}^m M_k \|v\|^p_{1,p} = M^p \|v\|^p_{1,p}$$

con ovvia definizione di M. Con tale M, dunque, vale la (1.2).

1.14. *Esercizio.* Trattare il caso $p = 1$.

1.15. Osservazione. Segnaliamo che, di fatto, gli stessi calcoli che ci hanno condotto alla (1.4) continuano ad essere corretti se φ è solo lipschitziana. Infatti si può dimostrare che, in tali condizioni, φ è differenziabile q.o. in ω con gradiente limitato (Teorema di Rademacher) e che la sostituzione $dS = j(x') \, dx'$ per il calcolo dell'integrale “di superficie” è ancora corretta (“formula dell'area”). Dunque la dimostrazione data della continuità di L_0 è corretta anche in questa situazione più generale. D'altra parte, in queste stesse ipotesi, si può dimostrare che $C^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$ (naturalmente se $p < +\infty$), per cui il Teorema di traccia (1.1) continua a valere. Nelle stesse ipotesi si può anche dimostrare il risultato seguente (si riveda la (II.3.6) per la definizione di $W^{1,p}_0(\Omega)$): *una funzione $v \in W^{1,p}(\Omega)$ appartiene al sottospazio $W^{1,p}_0(\Omega)$ se e solo se $v|_\Gamma = 0$.*

1.16. Esempio. L'ipotesi dell'aperto lipschitziano, però, non può essere lasciata cadere, come mostra l'esempio seguente. Sia Ω l'aperto $\{(x, y) \in (0, 1)^2 : \ y < \exp(-1/x)\}$, che presenta una cuspide “uscente”. Posto $v(x, y) = 1/x$ per $(x, y) \in \Omega$, un calcolo immediato mostra che

$$\int_\Omega (|v|^p + |\nabla v|^p) \, dx \, dy < +\infty \quad \text{e} \quad \int_0^1 |v(x, 0)|^p \, dx = +\infty \quad \text{per ogni } p \in [1, +\infty) \,.$$

Dunque si intuisce che non può valere una stima di tipo (1.2). Per vedere chiaramente che tale stima è falsa dobbiamo costruire, in sostituzione di v, funzioni dello spazio $C^\infty(\overline{\Omega})$ che svolgano un ruolo analogo: possiamo prendere $v_\varepsilon(x, y) = 1/(x + \varepsilon)$ per $(x, y) \in \Omega$ e $\varepsilon \in (0, 1)$. Allora un calcolo quasi altrettanto immediato mostra che l'integrale al secondo membro della (1.2), calcolato con v_ε, si mantiene limitato al tendere di ε a 0, mentre il primo membro no. □

Chiusa questa lunga parentesi, torniamo alla teoria generale e organizziamo l'insieme degli operatori lineari e continui da uno spazio normato in un altro come un nuovo spazio normato.

1.17. Definizione. *Siano V e W due spazi normati. Lo spazio vettoriale degli operatori lineari $L \in \mathrm{Hom}(V; W)$ che sono anche continui è denotato con $\mathcal{L}(V; W)$. Se $L \in \mathcal{L}(V; W)$, la minima delle costanti $M \geq 0$ che verificano le condizioni $i), \ldots, iv)$ della Proposizione 1.1 è detta norma di L e denotata con $\|L\|$ oppure con $\|L\|_{\mathcal{L}(V;W)}$.* □

1.18. Osservazione. Naturalmente, se L non è definito in tutto lo spazio, si deve applicare la definizione precedente con $V = D(L)$ munito della norma indotta. La norma di L è allora la minima delle costanti M che verificano, ad esempio, $\|Lx\|_W \leq M\|x\|_V$ per ogni $x \in D(L)$.

1.19. *Esercizio.* Con le notazioni della Proposizione 1.12 dimostrare che $\|L\| = \|L_0\|$.

1.20. Teorema. *Siano V e W due spazi normati. Allora l'applicazione di $\mathcal{L}(V;W)$ in $\mathbb{R}$ definita da $L \mapsto \|L\|_{\mathcal{L}(V;W)}$ è una norma in $\mathcal{L}(V;W)$. Inoltre, se W è completo, $\mathcal{L}(V;W)$ è completo rispetto a tale norma.* □

Dimostrazione. La verifica delle proprietà della norma è un facile esercizio. Per la completezza usiamo il Teorema II.1.2. Sia $\{L_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{L}(V;W)$ tali che la serie $\sum_{n=1}^\infty \|L_n\|$ converga. Allora, per ogni $x \in V$ e $n \geq 1$, si ha $\|L_n x\| \leq \|L_n\| \, \|x\|$, per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty \|L_n x\|$ converge. Siccome W è completo, converge in W la serie $\sum_{n=1}^\infty L_n x$ proprio per il teorema citato. Denotiamo con Lx la somma di tale serie. Resta dunque definita un'applicazione $L : V \to W$, quella data da $x \mapsto Lx$, che si dimostra senza difficoltà essere lineare. Ma siccome tutte le funzioni L_n sono continue e la convergenza è uniforme al variare di $x \in B_1(0)$ (Criterio di Weierstrass), la stessa proprietà vale per L. Infine la convergenza uniforme nella palla $B_1(0)$ di V è proprio la convergenza indotta dalla norma di $\mathcal{L}(V;W)$. □

1.21. *Esercizio.* Siano $A \in \mathcal{L}(V;W)$ e $B \in \mathcal{L}(W;Z)$ ove V, W e Z sono tre spazi normati. Si dimostri che $\|BA\|_{\mathcal{L}(V;Z)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(V;W)} \|B\|_{\mathcal{L}(W;Z)}$.

1.22. *Esercizio.* Combinare l'esercizio e il teorema precedenti con il Teorema II.1.2 per dimostrare quanto segue: se V è uno spazio di Banach e $A \in \mathcal{L}(V;V)$ verifica $\|A\| < 1$, allora *i*) la serie $\sum_{n=0}^\infty A^n$ converge in $\mathcal{L}(V;V)$; *ii*) detta I l'applicazione identica, $I - A$ è un isomorfismo; *iii*) il suo inverso è la somma della serie considerata. Naturalmente le potenze di A sono definite da $A^0 = I$ e $A^{n+1} = A^n A$ per ogni $n \geq 0$.

1.23. *Esercizio.* Dedurre dall'esercizio precedente che l'insieme degli isomorfismi di V in sé è un aperto dello spazio $\mathcal{L}(V;V)$.

1.24. *Esercizio.* Usare l'Esercizio 1.22 per risolvere l'equazione di Volterra

$$u(x) = \int_0^x k(x,y)\, u(y)\, dy + f(x), \quad x \in [0,1] \tag{1.5}$$

della quale si cercano soluzioni $u \in C^0[0,1]$. Nella (1.5) $k \in C^0(T)$ e $f \in C^0[0,1]$ sono assegnate ove $T = \{(x,y) \in [0,1]^2 : \ y \leq x\}$. Il trucco consiste nel munire lo spazio $V = C^0[0,1]$ della norma $\|\cdot\|_\lambda$ definita dalla formula $\|v\|_\lambda = \sup_{0 \leq x \leq 1} e^{-\lambda x} |v(x)|$, ove λ è un parametro reale. Se $L \in \mathcal{L}(V;V)$ la corrispondente norma di L varia con λ e si può scegliere $\lambda > 0$ opportunamente. Si verifichi preliminarmente che $\|\cdot\|_\lambda$ è equivalente alla norma del massimo per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Quanto abbiamo detto per gli operatori lineari si generalizza senza particolari difficoltà agli operatori n-lineari e le stesse considerazioni fatte a proposito dell'antilinearità valgono anche in questo caso. Abbiamo ad esempio il risultato enunciato di seguito.

1.25. Proposizione. *Siano $V_1, \ldots, V_n$ e W spazi normati e sia $L : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ un'applicazione n-lineare. Allora L è continua se e solo se è limitata nel senso seguente: esiste una costante $M \geq 0$ tale che*

$$\|L(v_1, \ldots, v_n)\|_W \leq M \|v_1\|_{V_1} \cdot \ldots \cdot \|v_n\|_{V_n} \quad \textit{per ogni } (v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n. \ \Box \tag{1.6}$$

1.26. *Esercizio.* Dimostrare il risultato precedente, eventualmente con $n = 2$, e rivedere in questa ottica la continuità del prodotto scalare e le conseguenze della disuguaglianza di Hölder.

1.27. Definizione. *Siano $V_1, \ldots, V_n$ e W spazi normati e $L : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ un'applicazione n-lineare continua. La minima delle costanti M che verificano la* (1.6) *si chiama norma di L.* □

1.28. Osservazione. Vale l'analogo del Teorema 1.20: se W è completo, lo spazio delle applicazioni n-lineari di cui sopra è uno spazio di Banach rispetto alla struttura vettoriale naturale e alla norma data dalla Definizione 1.27. Lasciamo la dimostrazione come esercizio per il lettore. Notiamo che ciò è senz'altro vero nel caso $W = \mathbb{K}$, lo spazio degli scalari, nel quale si preferisce usare il termine specifico *forma n-lineare* anziché quello generico di operatore n-lineare.

2. Lo spazio duale

Lo spazio duale dello spazio normato V si ottiene specializzando lo spazio $\mathcal{L}(V;W)$ e prendendo come W lo spazio $\mathbb{K}$ degli scalari.

2.1. Definizione. *Se $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato, lo spazio $V^* = \mathcal{L}(V;\mathbb{K})$ si chiama duale di V. La norma $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(V;\mathbb{K})}$ si chiama norma duale della norma $\|\cdot\|$.* □

Va detto che le notazioni possono variare. Spesso il duale di V è denotato con V' e alcuni usano il simbolo V^* per denotare il duale algebrico di V, cioè lo spazio $\operatorname{Hom}(V;\mathbb{K})$.

2.2. Osservazione. Per $f \in V^*$ abbiamo dunque

$$\|f\|_* = \sup_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \inf\{M \geq 0 :\ |f(x)| \leq M\|x\| \text{ per ogni } x \in V\}$$

(e potremmo continuare con una catena di uguaglianze in accordo con la Proposizione 1.1). Osserviamo inoltre che l'estremo inferiore che compare nella formula precedente è, di fatto, un minimo. Notiamo poi che, nel caso degli spazi reali, il modulo è superfluo: infatti uno dei due numeri reali $f(\pm x) = \pm f(x)$ è non negativo e $\|-x\| = \|x\|$. Collegandoci infine all'Osservazione 1.18, se f è definito solo su un sottospazio $D(L)$ ed è lineare e continuo (rispetto alla topologia indotta da V su $D(L)$) la sua norma $\|f\|_*$ è la minima delle costanti M che verificano, ad esempio, $|f(x)| \leq M\|x\|$ per ogni $x \in D(L)$. La notazione $\|f\|_*$ non è in questo caso ambigua, dato che il dominio di f è parte essenziale del funzionale f stesso. In particolare, se F è un'estensione di F, ha senso confrontare $\|f\|_*$ con $\|F\|_*$ e si vede subito che $\|F\|_* \geq \|f\|_*$. □

Tuttavia, se $f \in V^*$ e $x \in V$, si preferisce sostituire il simbolo $f(x)$ con uno diverso. Osservato che l'applicazione $(f, x) \mapsto f(x)$ di $V^* \times V$ in $\mathbb{K}$ è una forma bilineare, diamo la seguente

2.3. Definizione. *Siano V uno spazio normato e V^* il suo duale. La forma bilineare su $V^* \times V$ che a ogni $(f, x) \in V^* \times V$ associa $f(x)$ si chiama dualità fra V^* e V e si denota con uno dei due simboli $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ o ${}_{V^*}\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V$.* □

2.4. Osservazione. Abbiamo dunque

$$\langle f, x\rangle = f(x) \qquad \text{e} \qquad |\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_*\|x\| \quad \text{per ogni } x \in V \text{ e } f \in V^* \tag{2.1}$$

dato che la definizione di $\|f\|_*$ si riscrive come

$$\|f\|_* = \sup_{x\in V\setminus\{0\}} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|} = \inf\{M \geq 0 :\ |\langle f, x\rangle| \leq M\|x\| \text{ per ogni } x \in V\}$$

(e potremmo continuare...) il modulo essendo superfluo nel caso degli spazi reali. □

Come ovvio corollario del Teorema 1.20 abbiamo l'importante risultato seguente:

2.5. Teorema. *Il duale di ogni spazio normato è uno spazio di Banach.* □

2.6. Osservazione. Nel caso di uno spazio normato complesso V si può considerare anche il cosiddetto *antiduale di* V: esso è lo spazio dei funzionali $f : V \to \mathbb{C}$ antilineari e continui. Tutto quanto abbiamo detto per il duale si potrebbe allora ripetere per l'antiduale, ma preferiamo semplicemente notare che un funzionale $f : V \to \mathbb{C}$ appartiene all'antiduale se e solo se il funzionale $\overline{f} : V \to \mathbb{C}$ definito da $x \mapsto \overline{f(x)}$ appartiene al duale.

2.7. Osservazione. Se V è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ sono due norme in V diverse ma equivalenti, allora i due spazi duali che si ottengono a partire dai due spazi normati sono lo stesso spazio vettoriale V^*. Infatti il concetto di funzionale $f : V \to \mathbb{K}$ lineare e continuo è lo stesso nei due casi. Gli spazi normati che si ottengono prendendo in V^* le corrispondenti norme duali $\|\cdot\|'_*$ e $\|\cdot\|''_*$, invece, sono diversi, dato che diverse saranno le norme duali. Queste, tuttavia, sono equivalenti, per cui in V^* si ha la stessa topologia. Se, infatti, c_1 e c_2 verificano le disuguaglianze $\|x\|' \leq c_1\|x\|''$ e $\|x\|'' \leq c_2\|x\|'$ per ogni $x \in V$, si ha anche $\|f\|''_* \leq c_1\|f\|'_*$ e $\|f\|'_* \leq c_2\|f\|''_*$ per ogni $f \in V^*$. □

Terminiamo il paragrafo con un risultato semplice che lega le forme bilineari agli operatori. Lasciamo al lettore la facile dimostrazione.

2.8. Proposizione. *Siano V e W due spazi normati. Allora l'applicazione $a \mapsto L$ dallo spazio delle forme $a : V \times W \to \mathbb{K}$ bilineari continue in $\mathcal{L}(V; W^*)$ definita dalla formula*

$$\langle Lv, w\rangle = a(v, w) \quad \textit{per } v \in V \textit{ e } w \in W \tag{2.2}$$

effettivamente assume valori in $\mathcal{L}(V; W^*)$ ed è un isomorfismo isometrico. $\square$

3. Esempi di spazi duali

Il problema che si pone quando si è di fronte al duale di uno spazio concreto è quello di "capirlo", cioè di "scrivere" i suoi elementi in un modo diretto o almeno in un modo che si appoggi ad altri spazi già noti. Se si riesce a fare ciò, si dice che si ha un risultato di *rappresentazione* del duale in esame. Il caso più semplice è quello degli spazi di dimensione finita.

3.1. Esempio (spazi di dimensione finita). Se V è uno spazio di dimensione finita $n > 0$, allora $V^* = \mathrm{Hom}(V; \mathbb{K})$, il duale algebrico di V, in quanto, come già sappiamo, tutti i funzionali lineari sono continui. Sia ora $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V e si consideri la cosiddetta *base duale* B^* di B, cioè l'insieme dei funzionali $e^1, \ldots, e^n$ definiti come segue:

$$\text{per } i = 1, \ldots, n \text{ e } x \in V, \ e^i(x) \text{ è la } i\text{-esima coordinata di } x \text{ nella base } B. \tag{3.1}$$

In altre parole $\langle e^i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, i simboli di Kronecker. Si verifica senza difficoltà che effettivamente B^* è una base di $\mathrm{Hom}(V; \mathbb{K})$, cioè di V^*, per cui anche V^* ha dimensione n. Sia ora $f \in V^*$. Rappresentato f nella forma $\sum_{i=1}^n f_i e^i$ tramite la base B^*, se scriviamo il generico $x \in V$ nella forma $\sum_{j=1}^n x_j e_j$ usando la base B, abbiamo

$$\langle f, x\rangle = \sum_{i,j=1}^n f_i\, x_j \,\langle e^i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n f_i\, x_i\,. \tag{3.2}$$

Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ l'ultimo membro è $(f_1, \ldots, f_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n)$, il prodotto scalare euclideo dei due vettori $(f_1, \ldots, f_n), (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

3.2. Esempio (spazi di Hilbert). Sia $V = H$ uno spazio prehilbertiano. Allora, fissato comunque $y \in H$, il funzionale $f_y : H \to \mathbb{K}$ definito da $f_y(x) = (x, y)$ è lineare. Inoltre, per la disuguaglianza di Schwarz, si ha $|f_y(x)| \le \|y\|\,\|x\|$, per cui $f_y \in H^*$ e $\|f_y\|_* \le \|y\|$. D'altra parte, essendo $f_y(y) = \|y\|^2$, la disuguaglianza non può essere stretta e abbiamo che $\|f_y\|_* = \|y\|$. Infine l'applicazione $\mathcal{R} : H \to H^*$ data da $y \mapsto f_y$ è antilineare (lineare solo nel caso reale). Ora il Teorema di Riesz che dimostriamo nel prossimo capitolo afferma che, se H è di Hilbert, per ogni elemento $f \in H^*$ esiste $y \in H$ tale che $f = f_y$, cioè che l'applicazione $\mathcal{R}$ è suriettiva. Dunque $\mathcal{R}$ è un anti-isomorfismo isometrico di H su H^* (isomorfismo nel caso reale). Naturalmente, se si considera l'antiduale anziché il duale e se si usa ancora la notazione $\mathcal{R}$ in riferimento alla nuova situazione, vale un discorso dello stesso tipo con la sola differenza che $\mathcal{R}$ è ora lineare anziché antilineare, per cui l'antiduale di H è isometricamente isomorfo ad H. $\square$

Sia ora $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Se $p \in [1, +\infty]$ denotiamo, come sempre, con p' l'esponente coniugato di p. Allora, se $u \in L^{p'}(\Omega)$, il funzionale

$$v \mapsto \int_\Omega u\, v\, d\mu \quad \text{per } v \in L^p(\Omega)$$

è effettivamente ben definito, lineare e limitato grazie alla disuguaglianza (5.8) di Hölder. Possiamo pertanto introdurre l'applicazione $\mathcal{R}_p : L^{p'}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$, che chiameremo *mappa di Riesz di* $L^p(\Omega)$, definita dalla formula

$$\langle \mathcal{R}_p\, u, v\rangle = \int_\Omega u\, v\, d\mu \quad \text{per } u \in L^{p'}(\Omega) \text{ e } v \in L^p(\Omega)\,. \tag{3.3}$$

Si noti che, se $p = 2$, ricadiamo nel caso dell'Esempio 3.2, almeno nel caso reale (nel caso complesso occorre sistemare qualche segno di coniugato) e, per estensione, si potrebbe pensare che ogni funzionale lineare continuo su $L^p(\Omega)$ sia di quel tipo. Ciò, invece, è vero se $1 \le p < +\infty$ ma vero anche per $p = +\infty$ solo in situazioni estremamente particolari, precisamente quando lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è tale da rendere $L^p(\Omega)$ finito-dimensionale. Abbiamo il risultato dato di seguito, pure dovuto a Riesz. Lo deriviamo da un importante teorema della teoria della misura che enunciamo soltanto. Esso è una versione ridotta (precisamente relativa al solo caso $\mu(\Omega) < +\infty$ e ν a valori finiti) di un più generale Teorema di Radon-Nikodým. Segnaliamo che la funzione u data dal teorema è unica. Essa è detta *derivata di* ν *rispetto a* μ e viene denotata con $d\nu/d\mu$.

3.3. Teorema (di Radon-Nikodým). *Sia* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura finito. Sia inoltre* $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *un'applicazione verificante le condizioni seguenti:*

$$\begin{aligned}
&i)\ \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\omega_n) \quad \textit{per ogni successione di sottoinsiemi } \omega_n \in \mathcal{M} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textit{a due a due disgiunti} \\
&ii)\ \omega \in \mathcal{M} \quad e \quad \mu(\omega) = 0 \quad \textit{implicano} \quad \nu(\omega) = 0.
\end{aligned}$$

Allora esiste $u \in L^1(\Omega)$ *tale che*

$$\nu(\omega) = \int_\omega u\, d\mu \quad \textit{per ogni } \omega \in \mathcal{M}\,. \ \square \tag{3.4}$$

3.4. Teorema (di rappresentazione di Riesz). *Siano* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura* σ*-finito e* $1 \le p \le +\infty$. *Allora la mappa di Riesz* (3.3) *è lineare e isometrica dallo spazio* $L^{p'}(\Omega)$ *nello spazio duale* $L^p(\Omega)^*$ *di* $L^p(\Omega)$. *Se* $p < +\infty$ *essa è anche suriettiva.* $\square$

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo solo il caso degli spazi reali e osserviamo che la linearità di $\mathcal{R}_p$ è ovvia. Poniamo $q = p'$ per comodità e dimostriamo che $\mathcal{R}_p$ è un'isometria. Per $u \in L^q(\Omega)$ e $v \in L^p(\Omega)$, grazie alla disuguaglianza di Hölder, abbiamo

$$|\langle \mathcal{R}_p u, v\rangle| = \Big| \int_\Omega uv\, d\mu \Big| \le \|u\|_q \|v\|_p$$

da cui $\|\mathcal{R}_p u\|_* \le \|u\|_q$. Per dimostrare la disuguaglianza opposta supponiamo $u \ne 0$ (altrimenti la situazione è banale), usiamo la convenzione $\operatorname{sign} 0 = 0$ e distinguiamo tre casi. Se $p = 1$, per cui $q = +\infty$, ragioniamo per assurdo. Supponiamo dunque $\|\mathcal{R}_1 u\|_* < \|u\|_\infty$ e osserviamo che esiste $M > \|\mathcal{R}_1 u\|_*$ tale che l'insieme $\{x \in \Omega :\ |u(x)| \ge M\}$ abbia misura positiva. Dunque esso contiene un insieme ω di misura finita e ancora positiva. Allora la funzione $v = \chi_\omega \operatorname{sign} u$ appartiene a $L^1(\Omega)$ e risulta

$$M\mu(\omega) \le \int_\omega |u|\, d\mu = \int_\Omega uv\, d\mu = \langle \mathcal{R}_1 u, v\rangle \le \|\mathcal{R}_1 u\|_* \|v\|_1 = \|\mathcal{R}_1 u\|_* \mu(\omega)$$

e ciò è assurdo. Sia ora $p = +\infty$, per cui $q = 1$. Allora, posto $v = \operatorname{sign} u$, si ha $v \in L^\infty(\Omega)$ e quindi

$$\|u\|_1 = \int_\Omega uv\, d\mu = \langle \mathcal{R}_\infty u, v\rangle \le \|\mathcal{R}_\infty u\|_* \|v\|_\infty = \|\mathcal{R}_\infty u\|_*\,.$$

Infine, nel caso $p \in (1, +\infty)$ scegliamo $v = |u|^{q-1} \operatorname{sign} u$, osservando che $|v|^p = |u|^q$ in quanto $(q-1)p = 1$, così che $v \in L^p(\Omega)$. Abbiamo dunque

$$\|u\|_q^q = \int_\Omega |u|^q\, d\mu = \int_\Omega uv\, d\mu = \langle \mathcal{R}_p u, v\rangle \le \|\mathcal{R}_p u\|_* \|v\|_p = \|\mathcal{R}_p u\|_* \Big(\int_\Omega |u|^{(q-1)p}\, d\mu\Big)^{1/p} = \|\mathcal{R}_p u\|_* \|u\|_q^{q/p}$$

e dividendo per $\|u\|_q^{q/p}$ otteniamo $\|u\|_q \le \|\mathcal{R}_p u\|_*$.

Usiamo ora l'ipotesi $p < +\infty$ e dimostriamo che l'applicazione $\mathcal{R}_p$ è suriettiva. Supponiamo dapprima $\mu(\Omega) < +\infty$ e utilizziamo il Teorema di Radon-Nikodým. Fissato ad arbitrio $f \in L^p(\Omega)^*$ definiamo l'applicazione $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\nu(\omega) = \langle f, \chi_\omega \rangle \quad \text{per } \omega \in \mathcal{M} .$$

Osserviamo che la definizione ha senso in quanto $\chi_\omega \in L^\infty(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ dato che $\mu(\Omega) < +\infty$. Controlliamo che effettivamente siamo in grado di applicare il Teorema 3.3. La seconda ipotesi è ovviamente soddisfatta: se $\mu(\omega) = 0$ allora $\chi_\omega = 0$ per cui $\nu(\omega) = \langle f, 0 \rangle = 0$ per la linearità di f. Controlliamo la condizione di σ-additività. Siano $\omega_n \in \mathcal{M}$ a due a due disgiunti e sia ω la loro unione. Allora risulta

$$\chi_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\omega_n} \quad \text{nel senso della convergenza in } L^p(\Omega)$$

come ora mostriamo usando l'ipotesi $p < +\infty$. Abbiamo infatti

$$\Big\| \chi_\omega - \sum_{k=1}^{n} \chi_{\omega_k} \Big\|^p = \Big\| \sum_{k>n} \chi_{\omega_k} \Big\|^p = \Big\| \chi_{\bigcup_{k>n} \omega_k} \Big\|^p = \mu\Big(\bigcup_{k>n} \omega_k \Big) = \sum_{k>n} \mu(\omega_k) = \mu(\omega) - \sum_{k=1}^{n} \mu(\omega_k)$$

e l'ultimo membro è infinitesimo per $n \to \infty$. Per il Teorema 3.3, dunque, esiste $u \in L^1(\Omega)$ tale che valga la (3.4). Sia ora v una funzione semplice, cioè una combinazione lineare finita $v = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{\omega_i}$ di funzioni caratteristiche di insiemi $\omega_i \in \mathcal{M}$. Allora abbiamo subito

$$\langle f, v \rangle = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle f, \chi_{\omega_i} \rangle = \sum_{i=1}^{m} c_i \nu(\chi_{\omega_i}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \int_{\omega_i} u \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} c_i \int_\Omega u \, \chi_{\omega_i} \, d\mu = \int_\Omega uv \, d\mu. \tag{3.5}$$

Il prossimo passo consiste nel dimostrare che $u \in L^q(\Omega)$. Osserviamo che la (3.5) implica

$$\int_\Omega uv = \langle f, v \rangle \leq \|f\|_* \|v\|_p \quad \text{per ogni funzione } v \text{ semplice} \tag{3.6}$$

e ora sfruttiamo bene questa informazione. Se $p = 1$ dobbiamo dimostrare che $u \in L^\infty(\Omega)$. Dimostriamo che $|u| \leq \|f\|_*$ q.o. in Ω. Per assurdo questa disuguaglianza sia falsa. Allora $u \neq 0$ e, ragionando come nella prima parte della dimostrazione, vediamo che esistono una costante $M > \|f\|_*$ e un insieme $\omega \in \mathcal{M}$ tale che $|u| \geq M$ in ω e possiamo scegliere $v = \chi_\omega$ come funzione semplice. Abbiamo allora

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega uv \, d\mu = \int_\omega |u| \, d\mu \geq M\mu(\omega) \quad \text{e} \quad \langle f, v \rangle \leq \|f\|_* \|v\|_1 = \|f\|_* \mu(\omega)$$

il che è assurdo. Supponiamo ora $p \in (1, +\infty)$. Con metodi standard costruiamo una successione non decrescente $\{w_n\}$ di funzioni semplici e non negative convergente a $|u|^q$ q.o. in Ω. Ad esempio, per ogni n intero positivo, possiamo introdurre gli insiemi misurabili, mutuamente disgiunti e aventi Ω come unione

$$\begin{aligned} \omega_{mn} &= \{x \in \Omega : \ m2^{-n} \leq |u(x)|^q < (m+1)2^{-n}\} \quad \text{per} \quad 0 \leq m < n2^n \\ \omega_n &= \{x \in \Omega : \ |u(x)|^q \geq (n+1)2^{-n}\} \end{aligned}$$

e definire w_n ponendo $w_n(x) = m2^{-n}$ se $x \in \omega_{mn}$, ciò per $0 \leq m < n2^n$, e $w_n(x) = n+1$ se $x \in \omega_n$. Allora, usando la (3.6) con la funzione semplice $v_n = w_n^{1/p} \operatorname{sign} u$, deduciamo

$$\|w_n\|_1 = \int_\Omega w_n \, d\mu = \int_\Omega w_n^{1/q} w_n^{1/p} \, d\mu \leq \int_\Omega |u| w_n^{1/p} \, d\mu = \int_\Omega u v_n \, d\mu \leq \|f\|_* \|v_n\|_p = \|f\|_* \|w_n\|_1^{1/p}$$

e quindi anche $\|w_n\|_1 \leq \|f\|_*^q$. Pertanto siamo nelle condizioni di poter applicare il Teorema di Beppo Levi e dedurre che $|u|^q \in L^1(\Omega)$, cioè che $u \in L^q(\Omega)$.

Dunque la funzione u costruita appartiene a $L^q(\Omega)$ in ogni caso e possiamo concludere velocemente la dimostrazione nell'ipotesi $\mu(\Omega) < +\infty$ che stiamo supponendo verificata. Infatti l'uguaglianza fra il primo e l'ultimo membro della (3.5) può essere riscritta nella forma $\langle f, v\rangle = \langle \mathcal{R}_p u, v\rangle$ per ogni funzione semplice v. Siccome l'insieme delle funzioni semplici è denso in $L^p(\Omega)$ dato che $p < +\infty$, concludiamo che $f = \mathcal{R}_p u$.

Lo spazio di misura sia ora solo σ-finito e sia $\{\Omega_n\}$ una successione non decrescente di insiemi $\Omega_n \in \mathcal{M}$ di misura finita la cui unione sia Ω. Fissato $f \in L^p(\Omega)$ ad arbitrio, per ogni n definiamo $f_n : L^p(\Omega_n) \to \mathbb{R}$ mediante la formula $f_n(v) = \langle f, \widetilde{v}\rangle$ ove $\widetilde{v}$ è il prolungamento di v nullo fuori di Ω_n, prolungamento che appartiene appunto a $L^p(\Omega)$, per cui la definizione data ha senso. Il funzionale f_n è ovviamente lineare. Per ogni $v \in L^p(\Omega_n)$ si ha inoltre $|f_n(v)| = |\langle f, \widetilde{v}\rangle| \le \|f\|_* \|\widetilde{v}\|_p = \|f\|_* \|v\|_p$ così che f_n è anche continuo e la sua norma verifica la disuguaglianza $\|f_n\|_* \le \|f\|_*$. Per la prima parte della dimostrazione esiste $u_n \in L^q(\Omega)$ la cui immagine tramite la mappa di Riesz di $L^p(\Omega_n)$ sia f_n. Mostriamo ora che la restrizione di u_{n+1} a Ω_n coincide con u_n. Sia infatti $v \in L^p(\Omega_n)$. Per non usare lo stesso simbolo con più significati diversi denotiamo con $\widetilde{v}_n$ il prolungamento di v a Ω nullo fuori di Ω_n, con v_{n+1} la restrizione di questo a Ω_{n+1} e con $\widetilde{v}_{n+1}$ il prolungamento di v_{n+1} a Ω nullo fuori di Ω_{n+1}. Allora $\widetilde{v}_n = \widetilde{v}_{n+1}$, per cui

$$\int_{\Omega_n} (u_{n+1}|_{\Omega_n}) v \, d\mu = \int_{\Omega_{n+1}} u_{n+1} v_{n+1} \, d\mu = \langle f_{n+1}, v_{n+1}\rangle = \langle f, \widetilde{v}_{n+1}\rangle = \langle f, \widetilde{v}_n\rangle = \langle f_n, v\rangle = \int_{\Omega_n} u_n v \, d\mu.$$

Per l'arbitrarietà di v segue quanto asserito. Sia allora $u : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione misurabile le cui restrizioni agli insiemi Ω_n sono le rispettive funzioni u_n. Si ha per ogni n

$$\|u|_{\Omega_n}\|_q = \|u_n\|_q = \|f_n\|_* \le \|f\|_* .$$

Ciò mostra che $u \in L^q(\Omega)$, sia nel caso $q < +\infty$ sia nel caso $q = +\infty$ per cui possiamo confrontare f con $\mathcal{R}_p u$. Sia $v \in L^p(\Omega)$ nulla fuori di almeno uno degli insiemi Ω_n. Fissato n con tale proprietà abbiamo

$$\langle f, v\rangle = \langle f, \widetilde{v|_{\Omega_n}}\rangle = \langle f_n, v|_{\Omega_n}\rangle = \int_{\Omega_n} u_n \left(v|_{\Omega_n}\right) d\mu = \int_\Omega uv \, d\mu = \langle \mathcal{R}_p u, v\rangle.$$

Siccome l'insieme delle $v \in L^p(\Omega)$ che sono nulle fuori di almeno uno degli Ω_n è denso in $L^p(\Omega)$, concludiamo che $f = \mathcal{R}_p u$. □

3.5. *Esercizio.* In relazione allo spazio con peso introdotto nell'Esempio I.5.28, notiamo che, se $1 \le p < +\infty$, il teorema precedente fornisce una rappresentazione del duale di $L^p_w(\Omega)$ nella forma

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega u\, v\, w \, d\mu \quad \text{per } v \in L^p_w(\Omega)$$

stabilendo una corrispondenza biunivoca fra $f \in (L^p_w(\Omega))^*$ e $u \in L^{p'}_w(\Omega)$. Tuttavia il secondo membro contiene il peso e, dunque, l'integrale è fatto rispetto a una misura diversa da μ. Vorremmo invece privilegiare la misura μ e avere una formula senza peso, cioè del tipo

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega u\, v \, d\mu \quad \text{per } v \in L^p_w(\Omega)\,.$$

Dimostrare che, per $1 < p < +\infty$, la cosa funziona se $u \in L^{p'}_{w^*}(\Omega)$ ove $w^* = w^{-p'/p}$. Precisamente la corrispondenza fra i funzionali f e tali funzioni u stabilita dalla formula è un isomorfismo isometrico. Si noti che $w^* = 1/w$ se $p = 2$.

3.6. *Esercizio.* Per $p \in [1, +\infty)$ si munisca $\mathbb{R}^n$ della norma $|\cdot|_p$ (formula (I.5.17)) e sia $\|\cdot\|_*$ la corrispondente norma duale in $(\mathbb{R}^n)^*$. Sia $\{e^1, \ldots, e^n\}$ la base duale in $(\mathbb{R}^n)^*$ (vedi (3.1)) della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Si deduca dal Teorema 3.4 di Riesz che $\|f\|_* = |(f_1, \ldots, f_n)|_{p'}$ se $f = \sum_{i=1}^n f_i e^i$. Si verifichi poi che, di fatto, lo stesso risultato vale anche per $p = +\infty$.

3.7. *Esercizio.* Descrivere come si rappresenta il duale dello spazio $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$ delle funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$ misurabili e di potenza p-esima sommabile (munito della norma naturale) in termini di funzioni di $L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ per $1 \le p < +\infty$.

3.8. *Esercizio.* Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathcal{L}(V;W)$ un isomorfismo. Dimostrare che V^* e W^* sono pure isomorfi construendo esplicitamente un isomorfismo. Precisare ciò che avviene quando L è un isomorfismo isometrico.

3.9. *Esercizio.* Dimostrare che il duale di uno spazio normato e quello del suo completamento sono isometricamente isomorfi costruendo esplicitamente un isomorfismo isometrico. □

Il prossimo risultato riguarda la rappresentazione dei duali di alcuni degli spazi costruiti nel Teorema I.6.1. La dimostrazione che diamo, tuttavia, fa riferimento, nel caso del duale del sottospazio, al Teorema di Hahn-Banach che introduciamo in un capitolo successivo.

3.10. Teorema. *Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi normati. Allora il duale di $(V \times W)^*$ è isometricamente isomorfo a $V^* \times W^*$. Sia poi V_0 un sottospazio vettoriale di V e si definisca l'ortogonale $V_0^\perp$ di V_0 in V^* mediante la formula*

$$V_0^\perp = \{f \in V^* : \ \langle f, v\rangle = 0 \text{ per ogni } v \in V_0\}.$$

Allora $V_0^\perp$ è un sottospazio chiuso di V^* e valgono le conclusioni seguenti: i) se V_0 è munito della norma indotta, il suo duale V_0^* è isometricamente isomorfo al quoziente $V^*/V_0^\perp$; ii) se V_0 è chiuso, il duale $V_\bullet^*$ del quoziente $V_\bullet = V/V_0$ è isometricamente isomorfo a $V_0^\perp$. □

Dimostrazione. Per ogni $f \in V^*$ e $g \in W^*$, si costruisca $\varphi : V \times W \to \mathbb{K}$ mediante

$$\varphi(v,w) = \langle f, v\rangle + \langle g, w\rangle \quad \text{per } v \in V \text{ e } w \in W. \tag{3.7}$$

Allora si verifica senza difficoltà che $\varphi \in (V\times W)^*$ e che l'applicazione L che a ogni coppia $(f,g) \in V^*\times W^*$ associa la φ corrispondente è lineare da $V^* \times W^*$ in $(V \times W)^*$. Essa è anche suriettiva, in quanto, data $\varphi \in (V \times W)^*$, i funzionali f e g definiti da $f(v) = \langle \varphi, (v,0)\rangle$ per $v \in V$ e $g(w) = \langle \varphi, (0,w)\rangle$ per $w \in W$ appartengono a V^* e a W^* rispettivamente e risulta $\varphi = L(f,g)$. Dimostriamo infine che L è un'isometria, cioè che $\|L(f,g)\|_{(V\times W)^*} = \|(f,g)\|_{V^*\times W^*}$ per ogni $f \in V^*$ e ogni $g \in W^*$. Fissiamo dunque $f \in V^*$ e $g \in W^*$ supponendo senz'altro $(f,g) \neq (0,0)$, poniamo $\varphi = L(f,g)$ e, per semplificare le notazioni e dato che non possono sorgere equivoci, usiamo lo stesso simbolo $\|\cdot\|$ per tutte le norme che intervengono. Verifichiamo le due disuguaglianze. La prima è immediata: se $(v,w) \in V \times W$ si ha

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, (v,w)\rangle| &\le |\langle f, v\rangle| + |\langle g, w\rangle| \le \|f\|\,\|v\| + \|g\|\,\|w\| \\ &\le \bigl(\|f\|^2 + \|g\|^2\bigr)^{1/2} \bigl(\|v\|^2 + \|w\|^2\bigr)^{1/2} = \|(f,g)\|\,\|(v,w)\| \end{aligned}$$

l'ultima disuguaglianza grazie alla disuguaglianza di Schwarz per la norma euclidea in $\mathbb{R}^2$, da cui appunto $\|\varphi\| \le \|(f,g)\|$. Il controllo della disuguaglianza opposta è più laborioso, ma basta dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, risulta $\|\varphi\| \ge \|(f,g)\| - 2\varepsilon$. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Per definizione di $\|f\|$ esiste $v_0 \in V$ tale che $\|v_0\| = 1$ e $|\langle f, v_0\rangle| \ge \|f\| - \varepsilon$. Sia $\vartheta \in \mathbb{R}$ tale che $\langle f, v_0\rangle = |\langle f, v_0\rangle| e^{i\vartheta}$ (naturalmente $\vartheta = 0$ oppure $\vartheta = \pi$ nel caso reale) e poniamo $v = e^{-i\vartheta}\|f\|\, v_0$. Allora $\|v\| = \|f\|$. Inoltre, come ora vediamo, $\langle f, v\rangle$ è un numero reale non negativo che verifica una disuguaglianza. Abbiamo infatti

$$\langle f, v\rangle = e^{-i\vartheta}\|f\|\langle f, v_0\rangle = \|f\|\,|\langle f, v_0\rangle| \quad \text{da cui} \quad \langle f, v\rangle = \|f\|\,|\langle f, v_0\rangle| \ge \|f\|\,(\|f\| - \varepsilon) = \|f\|^2 - \varepsilon\|v\|.$$

Analogamente si costruisce $w \in W$ tale che $\|w\| = \|g\|$ e $\langle g, w\rangle$ sia reale non negativo e verifichi la disuguaglianza $\langle g, w\rangle \ge \|g\|^2 - \varepsilon\|w\|$. Allora, essendo $(f,g) \neq (0,0)$, $\|v\| = \|f\|$ e $\|w\| = \|g\|$, si ha che $(v,w) \neq (0,0)$. Inoltre anche $\langle \varphi, (v,w)\rangle$ è reale non negativo e risulta

$$\begin{aligned} &\langle \varphi, (v,w)\rangle = \langle f, v\rangle + \langle g, w\rangle \ge \|f\|^2 + \|g\|^2 - \varepsilon(\|v\| + \|w\|) \\ &= \bigl(\|f\|^2 + \|g\|^2\bigr)^{1/2}\bigl(\|v\|^2 + \|w\|^2\bigr)^{1/2} - \varepsilon(\|v\| + \|w\|) \ge \|(f,g)\|\,\|(v,w)\| - 2\varepsilon\|(v,w)\|. \end{aligned}$$

Dividendo per $\|(v,w)\|$ otteniamo la disuguaglianza $\|\varphi\| \geq \|(f,g)\| - 2\varepsilon$ desiderata.

Consideriamo ora il sottoinsieme $V_0^{\perp}$: esso è un sottospazio di V^*. Infatti ogni combinazione lineare di elementi di $V_0^{\perp}$ è ancora un elemento di $V_0^{\perp}$. Esso è anche chiuso, come si vede subito osservando che da $f_n \to f$ in V^* segue che $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ per ogni $x \in V$ in quanto $|\langle f_n, x\rangle - < f, x > | \leq \|f_n - f\|_* \|x\|$ per ogni $x \in V$. In particolare il quoziente considerato in $i)$ ha senso.

Passando alla dimostrazione del punto $i)$, costruiamo

$$L : V^*/V_0^{\perp} \to V_0^* \quad \text{mediante} \quad Lf_\bullet = f|_{V_0} \quad \text{se } f_\bullet \in V^*/V_0^{\perp} \text{ e } f \in f_\bullet . \tag{3.8}$$

La definizione ha senso in quanto, se $f_1, f_2 \in f_\bullet$, allora $f_1 - f_2 \in V_0^{\perp}$ per cui $f_1|_{V_0} = f_2|_{V_0}$. Inoltre si vede immediatamente che effettivamente $Lf_\bullet \in V_0^*$ e che $\|Lf_\bullet\|_* \leq \|f\|_*$ per ogni $f \in f_\bullet$. Segue che $\|Lf_\bullet\|_* \leq \|f_\bullet\|_*$. Ora il Teorema di Hahn-Banach che dimostreremo successivamente implica che, per ogni $f_0 \in V_0^*$, esiste $f \in V^*$ tale che $f|_{V_0} = f_0$ e $\|f\|_* = \|f_0\|_*$. Ciò significa che l'applicazione L è suriettiva e che $\|Lf_\bullet\|_* = \|f_\bullet\|_*$ per ogni $f_\bullet \in V^*/V_0^{\perp}$. Siccome L è anche lineare, il punto $i)$ è dimostrato.

Passiamo infine a $ii)$ supponendo V_0 chiuso. Se $\pi : V \to V_\bullet$ è la proiezione canonica, definiamo

$$L : V_\bullet^* \to V_0^{\perp} \quad \text{mediante} \quad Lf_\bullet = f_\bullet \circ \pi \quad \text{per } f_\bullet \in V_\bullet^* . \tag{3.9}$$

Effettivamente $Lf_\bullet \in V_0^{\perp}$ in quanto $f_\bullet$ e π sono lineari e continui e $\pi v = V_0$, lo zero di $V_\bullet$, per ogni $v \in V_0$. Chiaramente L è lineare. Inoltre è un'isometria. Infatti, siccome $\pi(V) = V_\bullet$, si ha per $f_\bullet \in V_\bullet$

$$\|Lf_\bullet\|_* = \sup\{|\langle f_\bullet \circ \pi, v\rangle| :\ v \in V\} = \sup\{|\langle f_\bullet, \pi v\rangle| :\ v \in V\} = \sup\{|\langle f_\bullet, x\rangle| :\ x \in V_\bullet\} = \|f_\bullet\|_* .$$

Infine L è un operatore suriettivo. Infatti, se $f \in V_0^{\perp}$, resta ben definita l'applicazione $f_\bullet : V_\bullet \to \mathbb{K}$ data da $f_\bullet(x) = \langle f, v\rangle$ se $v \in x$ in quanto il suo valore dipende solo da x e non da $v \in x$. Inoltre $f_\bullet$ è lineare e verifica per ogni $x \in V_\bullet$ e $v \in x$: $|f_\bullet(x)| = |\langle f, v\rangle| \leq \|f\|_* \|v\|$, da cui $|f_\bullet(x)| \leq \|f\|_* \|x\|_\bullet$ per definizione di $\|x\|_\bullet$. Dunque $f_\bullet \in V_\bullet^*$ e, per costruzione, $Lf_\bullet = f_\bullet \circ \pi = f$. □

3.11. *Esercizio.* Siano $V_1, \ldots, V_N$ spazi normati, V il loro prodotto e V_* il prodotto dei loro duali. Si dimostri che, se $(f_1, \ldots, f_N) \in V_*$, la formula

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \langle f_i, x_i\rangle \quad \text{per ogni } x = (x_1, \ldots, x_n) \in V \tag{3.10}$$

definisce un elemento $f \in V^*$ e che l'applicazione che a ogni $(f_1, \ldots, f_N) \in V_*$ associa l'elemento $f \in V^*$ che verifica la (3.10) è un isomorfismo di V_* su V^*.

Capitolo 4
Spazi di Hilbert

Gli spazi di Hilbert sono la categoria più vicina a quella degli spazi euclidei e in questo capitolo sviluppiamo i punti più semplici della teoria. Tuttavia già quanto diciamo consente una vasta gamma di applicazioni, ad esempio nel campo di certi tipi di equazioni alle derivate parziali.

1. Proiezioni e rappresentazione dei funzionali

Nel piano si sa condurre la perpendicolare da un punto dato a una retta fissata e il piede della perpendicolare è, fra i punti di tale retta, quello più vicino al punto assegnato. Il punto più vicino, che dunque rende minima la distanza, esiste anche in situazioni più generali. Il risultato su cui basiamo la teoria stessa è proprio in questa direzione.

1.1. Teorema (di proiezione sui convessi). *Siano* H *uno spazio di Hilbert e* C *un suo sottoinsieme convesso chiuso e non vuoto. Allora, per ogni* $w \in H$ *, esiste uno e un solo* $u \in C$ *tale che* $\|u - w\| \le \|v - w\|$ *per ogni* $v \in C$ *. Inoltre tale* u *è anche l'unico elemento di* C *che verifica*

$$\operatorname{Re}(u - w, u - v) \le 0 \quad \textit{per ogni } v \in C . \tag{1.1}$$

Infine, se $w_1, w_2 \in H$ *e* u_1, u_2 *sono i corrispondenti elementi di* C *che verificano le* (1.1)*, si ha* $\|u_1 - u_2\| \le \|w_1 - w_2\|$. □

Dimostrazione. Fissiamo w e dimostriamo che sono equivalenti i due problemi: $i)$ trovare $u \in C$ tale che $\|u - w\| \le \|v - w\|$ per ogni $v \in C$; $ii)$ trovare $u \in C$ verificante la (1.1). Sia u come in $i)$. Fissiamo $v \in C$ e osserviamo che il punto $v_t = u + t(v - u)$ appartiene a C per ogni $t \in [0, 1]$. Posto allora $\varphi(t) = \|v_t - w\|^2$ per $t \in [0, 1]$, abbiamo che $t = 0$ è un punto di minimo per φ . Deduciamo che $\varphi'(0) \ge 0$ non appena la derivata esista. Ora si ha

$$\varphi(t) = \|u - w + t(v - u)\|^2 = \|u - w\|^2 + t^2 \|v - u\|^2 + 2t \operatorname{Re}(u - w, v - u)$$

da cui $\varphi'(0) = 2 \operatorname{Re}(u - w, v - u)$. Dunque vale la (1.1) e u risolve $ii)$. Viceversa, sia u una soluzione di $ii)$. Allora, per ogni $v \in C$, abbiamo

$$\|v - w\|^2 = \|(v - u) + (u - w)\|^2 = \|v - u\|^2 + \|u - w\|^2 + 2 \operatorname{Re}(v - u, u - w) \ge \|u - w\|^2$$

e quindi u risolve $i)$. Dunque è indifferente dimostrare l'esistenza per l'uno o per l'altro dei due problemi e lo stesso discorso vale per l'unicità. Partiamo da quest'ultimo, che è facile. Anzi, dimostriamo l'ultima tesi dell'enunciato e l'unicità per $ii)$ seguirà semplicemente prendendo $w_1 = w_2$. Si ha

$$\operatorname{Re}(u_1 - w_1, u_1 - v) \le 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}(u_2 - w_2, u_2 - v) \le 0 \quad \text{per ogni } v \in C .$$

Prendendo $v = u_2$ nella prima disuguaglianza e $v = u_1$ nella seconda e sommando membro a membro deduciamo che $\operatorname{Re}(u_1 - w_1 - u_2 + w_2, u_1 - u_2) \le 0$. Grazie anche alla disuguaglianza di Schwarz, otteniamo

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \operatorname{Re}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \le \operatorname{Re}(w_1 - w_2, u_1 - u_2) \le \|w_1 - w_2\| \, \|u_1 - u_2\|$$

da cui subito $\|u_1 - u_2\| \le \|w_1 - w_2\|$. Per concludere, dimostriamo che esiste almeno una soluzione del problema $i)$. Sia $\lambda = \inf\{\|v - w\| : v \in C\}$. Si ha $\lambda \in [0, +\infty)$ dato che C non è vuoto. Per definizione di estremo inferiore esiste una successione $\{v_n\}$ di elementi di C tale che $\lambda^2 \le \|v_n - w\|^2 \le \lambda^2 + 1/n$ per ogni n. Dimostriamo che $\{v_n\}$ è di Cauchy. Per ogni m, n, per la regola del parallelogrammo, abbiamo

$$\|v_n - v_m\|^2 = \|(v_n - w) - (v_m - w)\|^2 = 2\|v_n - w\|^2 + 2\|v_m - w\|^2 - \|v_n + v_m - 2w\|^2.$$

Ma, da un lato, $\|v_k - w\|^2 \le \lambda^2 + 1/k$ per $k = m, n$. D'altra parte $\|v_n + v_m - 2w\|^2 = 4\|(v_n + v_m)/2 - w\|^2$ e $(v_n + v_m)/2 \in C$ in quanto C è convesso. Segue che $\|v_n + v_m - 2w\|^2 \ge 4\lambda^2$ e quindi che

$$\|v_n - v_m\|^2 \le 4\lambda^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 4\lambda^2 = \frac{2}{n} + \frac{2}{m}\,.$$

Pertanto la successione in questione è di Cauchy. Siccome H è completo essa converge a un certo elemento $u \in H$. Siccome C è chiuso, deve essere $u \in C$. Infine, dato che la norma è una funzione continua, abbiamo $\|u - w\| = \lim_{n\to\infty} \|v_n - w\| = \lambda$ e quindi concludiamo u è la soluzione cercata. $\square$

1.2. Osservazione. Notiamo che la completezza di H è stata usata solo per dimostrare l'esistenza dell'elemento u. La sua unicità e l'equivalenza dei due problemi considerati nella dimostrazione valgono anche negli spazi prehilbertiani.

1.3. Definizione. *Nelle condizioni del Teorema 1.1, se $w \in H$, l'unico elemento $u \in C$ dato dal teorema stesso si chiama proiezione di w su C. L'operatore di H in H che a ogni $w \in H$ associa la sua proiezione su C si chiama operatore di proiezione su C.* $\square$

1.4. Osservazione. Nel caso reale la (1.1) diventa $(u - w, u - v) \le 0$ per ogni $v \in C$ e si interpreta come segue: l'angolo dei due vettori $u - w$ e $u - v$ non può essere acuto per nessun $v \in C$. Almeno questa è l'interpretazione geometrica nel caso $H = \mathbb{R}^d$ con $d = 2, 3$. Notiamo poi che l'ultima parte dell'enunciato assicura che l'operatore di proiezione su C (in generale non lineare) è continuo. Precisamente esso è lipschitziano con costante di Lipschitz uguale a 1, il che ancora si interpreta bene geometricamente.

1.5. Esempio. Se $H = \mathbb{R}$ e $C = [0, +\infty)$, la proiezione di x è la sua parte positiva $(x)^+$.

1.6. Esempio. Siano $H = L^2(\Omega)$ (lo spazio reale) e $C = \{v \in H :\ v(x) \ge 0 \text{ q.o.}\}$. Allora C è un convesso chiuso (non vuoto). Che C sia convesso è ovvio: $\vartheta u + (1 - \vartheta) v \ge 0$ q.o. se $u, v \in C$ e $\vartheta \in (0, 1)$. Sia ora $\{v_n\}$ una successione di elementi di C convergente in H a $v \in H$. Siccome una certa sottosuccessione converge a v q.o., la condizione di positività vale anche per v e quindi $v \in C$. Visto ciò, possiamo parlare di proiezioni e, per ogni $w \in H$, la proiezione u di w su C è data da $u = w^+$, la parte positiva di w. Infatti, con tale scelta di u, si ha $u \in C$ e, per l'esercizio precedente, $|u - w| \le |v - w|$ q.o. per ogni $v \in V$, da cui $\int_\Omega |u - w|^2 \, d\mu \le \int_\Omega |v - w|^2 \, d\mu$ e dunque $\|u - v\| \le \|v - w\|$ per ogni $v \in C$.

1.7. *Esercizio.* Scrivere la caratterizzazione (1.1) nel caso dell'esercizio precedente.

1.8. *Esercizio.* Se $H = L^2(\Omega)$ (lo spazio reale), trovare la proiezione su C di $w \in H$ in ciascuno dei casi seguenti: *i)* $C = \{v \in H :\ v \le \psi\}$; *ii)* $C = \{v \in H :\ \varphi \le v \le \psi\}$. Resta inteso che φ, ψ sono assegnate in H. Discutere che cosa accade se φ, ψ sono solo misurabili.

1.9. *Esercizio.* Siano H uno spazio di Hilbert e $C = \overline{B}_r(0)$ ove $r > 0$. Trovare la proiezione su C del generico elemento $w \in H$. $\square$

Dalla possibilità di proiettare sui convessi chiusi deduciamo il risultato seguente, che costituisce uno dei capisaldi della teoria degli spazi di Hilbert.

1.10. Teorema (delle proiezioni). *Siano H uno spazio di Hilbert e V_0 un suo sottospazio chiuso. Allora, per ogni $w \in H$, esiste uno e un solo $u \in V_0$ tale che $\|u - w\| \le \|v - w\|$ per ogni $v \in V_0$. Inoltre tale u è l'unico elemento di H che verifica le condizioni*

$$u \in V_0 \quad \text{e} \quad (u, v) = (w, v) \quad \text{per ogni } v \in V_0\,. \tag{1.2}$$

Infine l'operatore di proiezione $P_{V_0} : H \to H$ è lineare e continuo e, se $V_0 \ne \{0\}$, esso ha norma unitaria nello spazio $\mathcal{L}(H; H)$ degli operatori lineari e continui. $\square$

Dimostrazione. Siccome V_0 è convesso chiuso e non vuoto e l'ultima affermazione sulla norma è ovvia, restano da dimostrare solo due cose: *i)* l'equivalenza fra la (1.1) con $C = V_0$ e la (1.2); *ii)* la linearità dell'operatore di proiezione. Chiaramente la (1.2) implica la (1.1) dato che $u - v \in V_0$ per ogni $v \in V_0$. Viceversa, valga la (1.1) e sia $v \in V_0$. Siccome $u \pm v \in V_0$ deduciamo $\mathrm{Re}(u-w, v) = 0$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ abbiamo concluso. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, usiamo il fatto che $u \pm iv \in V_0$ e deduciamo che si ha anche $\mathrm{Im}(u - w, v) = 0$. Per quanto riguarda la linearità dell'operatore di proiezione, basta osservare che, se u_i verifica la (1.2) con $w = w_i$ per $i = 1, 2$ e se $\lambda_i \in \mathbb{K}$, allora $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ verifica la (1.2) con $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$. □

Nel caso del sottospazio si parla abitualmente di *proiezione ortogonale* anziché semplicemente di proiezione. In generale l'esistenza di un prodotto scalare consente di dare una nozione di ortogonalità e risulta conveniente esprimere vari risultati facendo intervenire tale nozione.

1.11. Definizione. *Siano H uno spazio prehilbertiano. Due elementi $x, y \in H$ si dicono ortogonali quando $(x, y) = 0$.* □

1.12. Osservazione. La (1.2) può allora essere espressa dicendo che la differenza $w - u$ è ortogonale a tutti gli elementi di V_0. Osserviamo in generale che, se x e y sono ortogonali fra loro, vale la relazione pitagorica

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

come si vede usando la formula del binomio. In particolare abbiamo allora

$$\|w\|^2 = \|P_{V_0} w\|^2 + \|w - P_{V_0} w\|^2 \quad \text{per ogni } w \in H .$$

Su questi punti, tuttavia, torneremo successivamente e generalizzaremo il tutto al caso di un numero finito o addirittura di una serie di vettori.

1.13. Esempio. Siano H uno spazio di Hilbert e u_0 un elemento non nullo di H. Cerchiamo la proiezione ortogonale del generico $u \in H$ sul sottospazio $V_0 = \mathrm{span}\{u_0\}$ generato da u_0. Essa deve avere la forma cu_0 per un certo $c \in \mathbb{K}$ e la determinazione del valore di c è immediata:

$$(u - cu_0, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in V_0 \quad \text{da cui} \quad (u - cu_0, u_0) = 0 \quad \text{da cui} \quad c = \frac{(u, u_0)}{\|u_0\|^2} .$$

Abbiamo pertanto il risultato

$$\textit{la proiezione di } u \in H \textit{ sul sottospazio generato da } u_0 \neq 0 \textit{ è il vettore } \quad \frac{(u, u_0)}{\|u_0\|^2}\, u_0 \tag{1.3}$$

che in seguito generalizzeremo notevolmente.

1.14. *Esercizio.* Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$ e sia V_0 il sottospazio delle funzioni costanti. Si calcoli la proiezione su V_0 del generico elemento $w \in L^2(\Omega)$.

1.15. *Esercizio.* Sia H lo spazio $L^2(0, 1)$ reale munito del prodotto scalare definito dalla formula $(u, v) = \int_0^1 e^x\, u(x)\, v(x)\, dx$. Si dimostri che H è completo e si calcoli la proiezione del generico elemento $w \in H$ sul sottospazio generato dalla funzione costante 1.

1.16. *Esercizio.* Siano $H = L^2(-1, 1)$ con il prodotto scalare usuale e $w \in H$. Si verifichi che il sottospazio H_p delle funzioni pari è chiuso e che la proiezione u di w su H_p è data dalla formula $u(x) = (w(x) + w(-x))/2$.

1.17. *Esercizio.* Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e ω un sottoinsieme misurabile di Ω. Determinare l'operatore di proiezione in $L^2(\Omega)$ sul sottospazio delle funzioni nulle in ω.

1.18. *Esercizio.* Con le notazioni dell'esercizio precedente, si supponga $0 < \mu(\omega) < +\infty$ e si determini l'operatore di proiezione in $L^2(\Omega)$ sul sottospazio delle funzioni verificanti $\int_\omega v\, d\mu = 0$.

1.19. *Esercizio.* Siano $H = \ell^2$ e V_0 il suo sottospazio costituito dalle successioni $\{x_n\}$ tali che $x_n = 0$ per ogni n pari. Verificare che V_0 è chiuso e determinare l'operatore di proiezione su V_0.

1.20. *Esercizio.* Siano H uno spazio di Hilbert reale e $P \in \operatorname{Hom}(H;H)$ tale che $P^2 = P$ e verificante la condizione seguente di simmetria: $(Px, y) = (x, Py)$ per ogni $x, y \in H$. Si dimostri che l'immagine $R(P)$ è un sottospazio chiuso e che P coincide con l'operatore di proiezione ortogonale su $R(P)$. Si consiglia di dimostrare prima che $\|Px\| \le \|x\|$ per ogni $x \in H$. Viceversa, si verifichi che, se P è l'operatore di proiezione ortogonale su un qualunque sottospazio chiuso di H, allora P verifica tutte le condizioni di cui sopra. □

Il Teorema delle proiezioni, come si è detto, è importante. Una sua applicazione fondamentale è il successivo Teorema di Riesz che fornisce una rappresentazione del duale di uno spazio di Hilbert.

1.21. Teorema (di rappresentazione di Riesz). *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora per ogni $f \in H^*$ esiste uno e un solo $y \in H$ tale che*

$$(x, y) = \langle f, x \rangle \quad \text{per ogni } x \in H. \tag{1.4}$$

Inoltre $\|y\| = \|f\|_*$. □

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'esistenza, osserviamo che possiamo prendere $y = 0$ se $f = 0$. Supponiamo dunque $f \neq 0$. Per intuire la direzione da prendere supponiamo che y verifichi la (1.4): allora y è ortogonale a tutti i vettori del nucleo di f. Consideriamo pertanto il nucleo N di f e cerchiamo di costruire y ortogonale a tutti gli elementi di N che verifichi la (1.4). Innanzi tutto, N è un sottospazio chiuso (in quanto f è lineare e continuo) diverso da H per ipotesi. Possiamo allora fissare $z \in H$ tale che $z \notin N$ e prendere la proiezione z_0 di z su N. Siccome $z_0 \in N$ e $z \notin N$, abbiamo $z_0 \neq z$ e cerchiamo y fra i multipli del vettore non nullo $z - z_0$, che è ortogonale a tutti gli elementi di N. Poniamo per comodità

$$e_0 = \frac{z - z_0}{\|z - z_0\|} \quad \text{e} \quad y_\lambda = \lambda e_0 \quad \text{per } \lambda \in \mathbb{K}$$

e cerchiamo di determinare $\lambda \in \mathbb{K}$ in modo che $y = y_\lambda$ verifichi la (1.4). Supponiamo dapprima $x \in N$. Allora, per ogni λ e con ovvia scelta dello scalare c_λ, si ha $(x, y_\lambda) = c_\lambda (x, z - z_0) = 0$, per definizione di z_0. D'altra parte $\langle f, x \rangle = 0$. Dunque $(x, y_\lambda) = \langle f, x \rangle$ per ogni λ. Supponiamo ora $x \in \operatorname{span}\{e_0\}$, cioè $x = k e_0$ per un certo $k \in \mathbb{K}$. Allora

$$(x, y_\lambda) = k\overline{\lambda}\,(e_0, e_0) = k\overline{\lambda} \quad \text{e} \quad \langle f, x \rangle = k \langle f, e_0 \rangle.$$

Prendiamo pertanto $\lambda = \overline{\langle f, e_0 \rangle}$ e mostriamo che, con tale scelta di λ, il punto $y = y_\lambda$ verifica la (1.4) per ogni $x \in H$ e non solo per le scelte particolari di x appena fatte. A tale scopo osserviamo che $\lambda \neq 0$ dato che $\langle f, e_0 \rangle = \|z - z_0\|^{-1} \langle f, z - z_0 \rangle = \|z - z_0\|^{-1} \langle f, z \rangle \neq 0$. Dunque, se $x \in H$, sono ben definiti i vettori $u = (\langle f, x \rangle / \overline{\lambda})\, e_0$ e $v = x - u$. Allora $u \in \operatorname{span}\{e_0\}$, ovviamente, e $v \in N$ in quanto $\langle f, u \rangle = \langle f, x \rangle$ per come sono stati scelti λ e u. Segue $(u, y) = \langle f, u \rangle$ e $(v, y) = \langle f, v \rangle$ per quanto visto sopra. Dunque

$$(x, y) = (u + v, y) = (u, y) + (v, y) = \langle f, u \rangle + \langle f, v \rangle = \langle f, u + v \rangle = \langle f, x \rangle.$$

Ciò conclude la dimostrazione dell'esistenza. Dimostriamo ora l'uguaglianza $\|y\| = \|f\|_*$ e deduciamone l'unicità. Se y verifica la (1.4), si ha $|\langle f, x \rangle| = |(x, y)| \le \|y\|\,\|x\|$ per ogni $x \in H$, da cui $\|f\|_* \le \|y\|$. Ma si ha anche, in particolare, $\|y\|^2 = (y, y) = \langle f, y \rangle \le \|f\|_*\,\|y\|$, da cui $\|y\| \le \|f\|_*$. Segue $\|y\| = \|f\|_*$ per tutti gli y verificanti la (1.4). Ciò implica unicità quando $f = 0$, dunque per ogni $f \in H^*$ per linearità. □

1.22. Osservazione. Riprendiamo l'Esempio III.3.2. La formula

$$\langle \mathcal{R} y, x \rangle = (x, y) \quad \text{per ogni } x, y \in H \tag{1.5}$$

effettivamente definisce un'applicazione $\mathcal{R} : H \to H^*$ (il che giustifica a posteriori l'uso del prodotto di dualità) che chiamiamo *mappa di Riesz* dello spazio H. Il Teorema di Riesz afferma che $\mathcal{R}$ è un'isometria suriettiva. Inoltre $\mathcal{R}$ è lineare se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e anti-lineare se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Quindi, nel caso lineare e solo in questo, $\mathcal{R}$ è anche un isomorfismo. Per questo motivo $\mathcal{R}$ può essere interpretata come identificazione di H^* con H solo nel caso reale, altrimenti verrebbero identificati i due spazi metrici H e H^* ma non i due spazi vettoriali. Nel caso complesso si può invece considerare l'antiduale, di solito denotato con lo stesso simbolo H^*, in quanto in uno stesso discorso si evita di introdurre sia il duale sia l'antiduale, così che non vi è possibilità di confusione. Con questa nuova interpretazione del simbolo H^*, se modifichiamo la definizione di $\mathcal{R}$ come segue

$$\langle \mathcal{R}y, x \rangle = (y, x) \quad \text{per ogni } x, y \in H \tag{1.6}$$

otteniamo un'isomorfismo isometrico di H sul suo antiduale. □

Sebbene esistano versioni valide tanto in ambito reale quanto in ambito complesso, nei prossimi risultati ci limitiamo a considerare il caso reale, rimandando il caso complesso agli esercizi.

1.23. Corollario. *Siano H uno spazio di Hilbert reale e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e simmetrica verificante l'ipotesi di coercività seguente*

$$\textit{esiste } \alpha > 0 \textit{ tale che } \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \textit{per ogni } v \in H\,. \tag{1.7}$$

Allora, per ogni $f \in H^*$, esiste uno e un solo elemento $u \in H$ tale che

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \textit{per ogni } v \in H\,. \tag{1.8}$$

Inoltre $\|u\| \leq (1/\alpha)\, \|f\|_*$. □

Dimostrazione. La forma a è un prodotto scalare in V. Inoltre la norma indotta, che denotiamo con $\|\cdot\|_a$, è equivalente a $\|\cdot\|$ in quanto

$$\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = \|v\|_a^2 = a(v, v) \leq M \|v\|^2 \quad \text{per ogni } v \in V$$

ove M è la norma di a (Definizione III.1.27). Siccome la sostituzione di una norma con una equivalente non compromette la completezza e il duale H^* è indipendente dalla norma considerata (nell'ambito di quelle che inducono la topologia data), basta applicare il Teorema di Riesz allo spazio di Hilbert $(H, a(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ per concludere esistenza e unicità. Per quanto riguarda poi la disuguaglianza $\|u\| \leq (1/\alpha)\, \|f\|_*$, basta osservare che $\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_* \, \|u\|$. □

Il risultato successivo elimina l'ipotesi di simmetria presente nel Corollario 1.23 ed è importante, in particolare, nella teoria variazionale delle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico.

1.24. Teorema (di Lax-Milgram). *Siano H uno spazio di Hilbert reale e $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua coerciva nel senso della* (1.7). *Allora valgono le stesse conclusioni del Corollario 1.23.* □

Dimostrazione. La disuguaglianza $\|u\| \leq (1/\alpha)\, \|f\|_*$ è stata dimostrata senza usare l'ipotesi che a fosse simmetrica. Siccome da questa segue facilmente anche un risultato di unicità, resterebbe da dimostrare solo l'esistenza della soluzione. Tuttavia il metodo che utilizziamo, detto metodo del prolungamento rispetto al parametro, dimostra contemporaneamente esistenza e unicità. Introduciamo le parti simmetrica e antisimmetrica di a e una famiglia di forme dipendenti dal parametro reale t. Definiamo dunque $a_0, b, a_t : H \times H \to \mathbb{R}$ mediante le formule

$$a_0(u, v) = \frac{a(u, v) + a(v, u)}{2}\,, \quad b(u, v) = \frac{a(u, v) - a(v, u)}{2} \quad \text{e} \quad a_t(u, v) = a_0(u, v) + t b(u, v) \quad \text{per } u, v \in H\,.$$

Osserviamo che a_t con $t = 0$ coincide proprio con a_0, per cui non c'è conflitto di notazioni. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ consideriamo l'affermazione

$$\text{per ogni } f \in H^* \text{ esiste un e un solo } u \in H \text{ tale che } \quad a_t(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{per ogni } v \in H \tag{1.9}$$

e denotiamo con $\mathcal{T}$ l'insieme dei $t \in \mathbb{R}$ tali che (1.9) è vera. Siccome $a_1 = a$, la tesi equivale al fatto che $1 \in \mathcal{T}$ e noi dimostriamo addirittura che $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ verificando che: *i*) 0 appartiene a $\mathcal{T}$; *ii*) esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $t_0 \in \mathcal{T}$, vale l'inclusione $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq \mathcal{T}$. Mostriamo precisamente che si può prendere $\delta = \alpha/(2M)$, ove M è la norma di a (Definizione III.1.27). Osserviamo preliminarmente che

$$|b(u,v)| \le M\|u\|\,\|v\| \quad \text{e} \quad a_t(v,v) \ge \alpha\|v\|^2 \quad \text{per ogni } u,v \in H \text{ e } t \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Per quanto riguarda *i*) , siccome la forma a_0 è anche simmetrica, essa verifica tutte le ipotesi del Corollario 1.23. D'altra parte la (1.9) con $t = 0$ coincide con le conclusioni del corollario citato quando esso sia applicato alla forma a_0 . Dunque $0 \in \mathcal{T}$. Passiamo a *ii*) e supponiamo $t_0 \in \mathcal{T}$. Presentiamo la (1.9) per t generico come un problema di punto fisso che fa intervenire la forma a_{t_0} osservando che $a_t = a_{t_0} + (t - t_0)b$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Fissato dunque $f_0 \in H^*$, dobbiamo trovare $u \in H$ tale che

$$a_{t_0}(u,v) = \langle f_0, v\rangle + (t_0 - t)\, b(u,v) \quad \text{per ogni } v \in H . \tag{1.11}$$

Per $u \in H$ fissato, consideriamo il problema ausiliario di trovare $w \in H$ tale che

$$a_{t_0}(w,v) = \langle f_0, v\rangle + (t_0 - t)\, b(u,v) \quad \text{per ogni } v \in H .$$

Siccome $t_0 \in \mathcal{T}$ e l'applicazione di H in $\mathbb{R}$ data da $f(v) = \langle f_0, v\rangle + (t_0 - t)\, b(u,v)$ è lineare e continua, il problema ausiliario ha una e una sola soluzione w . Possiamo allora considerare l'applicazione $\mathcal{F} : H \to H$ che a ogni $u \in H$ associa tale soluzione, così che la (1.11) equivale all'equazione $\mathcal{F}(u) = u$. Controlliamo che, per $\delta > 0$ opportuno indipendente da t_0 e da f_0 , l'applicazione $\mathcal{F}$ è una contrazione in H (Definizione A.1.28). Siano $u_1, u_2 \in H$. Poniamo per comodità $w_i = \mathcal{F}(u_i)$ per $i = 1, 2$. Semplicemente esplicitando ciò, sottraendo membro a membro e usando la bilinearità di a_{t_0} e di b , abbiamo

$$a_{t_0}(w_1 - w_2, v) = (t_0 - t)\, b(u_1 - u_2, v) \quad \text{per ogni } v \in H .$$

Scelta $v = w_1 - w_2$ e usando le (1.10), otteniamo

$$\alpha\|w_1 - w_2\|^2 \le a_{t_0}(w_1 - w_2, w_1 - w_2) = |t_0 - t|\, |b(u_1 - u_2, w_1 - w_2)| \le |t_0 - t|\, M\, \|u_1 - u_2\|\, \|w_1 - w_2\|.$$

Dunque $\|\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2)\| \le (M|t_0 - t|/\alpha)\, \|u_1 - u_2\|$. Poniamo $\delta = \alpha/(2M)$ come preannunciato. Allora, se $|t_0 - t| \le \delta$, si ha $M|t_0 - t|/\alpha \le 1/2$ e l'applicazione $\mathcal{F}$ è una contrazione. Quindi essa ha uno e un solo punto fisso per il Teorema delle contrazioni (vedi A.1.29) e deduciamo che $t \in \mathcal{T}$. Pertanto, con tale scelta di δ , vale quanto affermato in *ii*) e la dimostrazione è conclusa. □

1.25. Esempio. Sappiamo che $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, così come ogni suo sottospazio chiuso. Un'applicazione notevole del Teorema di Lax-Milgram riguarda la risolubilità di problemi ai limiti per certe equazioni a derivate parziali, dette di tipo ellittico. Siano A una matrice $d \times d$ di funzioni $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $b \in L^\infty(\Omega)^d$ e $c \in L^\infty(\Omega)$. L'equazione che vogliamo considerare è la seguente

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \nabla u \cdot b + cu = f \quad \text{in } \Omega \tag{1.12}$$

ove u è l'incognita e f è una funzione data. Oltre alla regolarità già imposta, ai coefficienti richiederemo appunto anche la condizione detta di ellitticità che espliciteremo tra breve.

Le equazioni ellittiche costituiscono spesso il modello matematico di un fenomeno stazionario. In particolare ciò avviene per la (1.12): essa è il modello di un fenomeno stazionario di diffusione-trasporto-reazione, i tre termini corrispondendo ordinatamente ai tre addedndi del primo membro.

Dal punto di vista matematico l'equazione (1.12) è "in forma di divergenza", dato che la sua *parte principale*, cioè $-\operatorname{div}(A\nabla u)$, è appunto una divergenza. Gli altri addendi sono *i termini di ordine inferiore*. La locuzione usata si contrappone all'esplicitazione delle derivate seconde

$$-\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} D_i D_j u + \sum_{i=1}^{d} b_i^* D_i u + cu = f \quad \text{ove} \quad b_i^* = b_i - \sum_{j=1}^{d} D_j a_{ij} . \tag{1.13}$$

Notiamo che nella (1.13) si ha una diversa ripartizione fra parte principale (la prima somma) e termini di ordine inferiore rispetto alla prima delle (1.12).

Nel caso più elementare in cui $d = 1$, i coefficienti sono costanti (con A non nullo) e $f = 0$ un'equazione di tipo (1.12) o (1.13) non ha soluzione unica: la soluzione, infatti, dipende da due parametri arbitrari. In generale, cioè in dimensione qualunque, a una delle equazioni precedenti vanno affiancate condizioni ulteriori se si vuole avere la speranza di ottenere un problema ben posto in qualche classe funzionale. La più semplice di tali condizioni aggiuntive è la cosiddetta *condizione di Dirichlet*, che consiste nell'assegnare i valori che u deve avere nei punti del bordo $\partial\Omega$. Più in generale, se si vuole sperare in un problema ben posto, occorre assegnare una condizione su u in ogni punto del bordo. In particolare, nel caso monodimensionale in cui Ω sia un intervallo limitato, va assegnata una condizione in ciascuno dei due estremi. Il sistema che si ottiene abbinando l'equazione alla condizione al bordo è detto *problema ai limiti* per l'equazione considerata. Nel caso della condizione di Dirichlet si parla di *problema di Dirichlet*, omogeneo o non omogeneo a seconda che all'incognita si impongano valori al bordo nulli o generici, per l'equazione alle derivate parziali considerata. Tuttavia l'applicazione del Teorema di Lax-Milgram consiste nello studio, piuttosto che di un problema ai limiti per l'equazione (1.12), di un problema diverso, anche se in qualche modo collegato a quello, detto di tipo *variazionale*.

Si considerino la forma bilineare $a : H \times H \to \mathbb{R}$ e il funzionale lineare $F : H \to \mathbb{R}$ definiti dalle formule

$$a(u,v) = \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega \nabla u\cdot bv\,dx + \int_\Omega cuv\,dx \quad \text{e} \quad F(v) = \int_\Omega fv\,dx \quad \text{per } u,v \in H \tag{1.14}$$

ove $H = H^1(\Omega)$ o un suo sottospazio chiuso e $f \in L^2(\Omega)$ è fissata. La forma e il funzionale sono ben definiti grazie alle ipotesi fatte sui coefficienti e alla disuguaglianza di Hölder (Esercizio I.5.20). Per lo stesso motivo entrambi sono continui. Notiamo che a è una forma simmetrica se A è una matrice simmetrica e $b = 0$, mentre non lo è nel caso generale. Cerchiamo condizioni sui coefficienti perché essa sia coerciva. La richiesta naturale perché la sua *parte principale* (il primo degli integrali) domini il quadrato della seminorma $|\cdot|_{1,2}$ di $H = H^1(\Omega)$ è la cosiddetta condizione di *ellitticità uniforme* seguente

$$\text{esiste } \alpha > 0 \text{ tale che } \quad (A(x)\xi)\cdot\xi \ge \alpha|\xi|^2 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ e q.o. } x \in \Omega\,. \tag{1.15}$$

In tali condizioni abbiamo infatti per ogni $v \in H$

$$(A\nabla v)\cdot\nabla v \ge \alpha|\nabla v|^2 \quad \text{q.o. in } \Omega\,, \quad \text{da cui} \quad \int_\Omega (A\nabla v)\cdot\nabla v\,dx \ge \alpha\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx = \alpha|v|_{1,2}^2\,.$$

Allora, se $b = 0$ e $\inf c = \delta > 0$ (estremo inferiore essenziale), deduciamo che

$$a(v,v) \ge \alpha|v|_{1,2}^2 + \delta\|v\|_2^2 \ge \min\{\alpha,\delta\}\|v\|_{1,2}^2 \quad \text{per ogni } v \in H$$

e a è coerciva. Nel caso in cui $b \ne 0$, senza pretendere nulla di ottimale, abbiamo per ogni $\varepsilon > 0$

$$\Big|\int_\Omega \nabla v\cdot bv\,dx\Big| \le \|\nabla v\|_2\,\|b\|_\infty\,\|v\|_2 = \varepsilon|v|_{1,2}\,\varepsilon^{-1}\|b\|_\infty\,\|v\|_2 \le \varepsilon^2|v|_{1,2}^2 + \varepsilon^{-2}\|b\|_\infty^2\,\|v\|_2^2$$

e quindi riunendo tutto deduciamo che

$$a(v,v) \ge (\alpha - \varepsilon^2)|v|_{1,2}^2 + (\inf c - \varepsilon^{-2}\|b\|_\infty^2)\|v\|_2^2\,.$$

Prendendo ad esempio $\varepsilon = (\alpha/2)^{1/2}$ e supponendo $c - (2/\alpha)\|b\|_\infty^2 \ge \delta > 0$, concludiamo che

$$a(v,v) \ge \min\{\alpha/2,\delta\}\|v\|_{1,2}^2 \quad \text{per ogni } v \in H\,.$$

Dunque, in ipotesi di uniforme ellitticità, la forma è coerciva se c ha estremo inferiore (essenziale) abbastanza grande e in tali condizioni possiamo applicare il Teorema di Lax-Milgram.

Va detto che l'ipotesi astratta (1.7) è proprio ispirata a situazioni concrete del tipo di quella che stiamo considerando. Per questo motivo la (1.7) è anche chiamata condizione di H *-ellitticità*.

Chiusa questa parentesi, riprendiamo il discorso: se $H = H^1(\Omega)$ o un suo sottospazio chiuso, esiste una e una sola funzione $u \in H$ che verifica l'equazione variazionale

$$\int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \nabla u \cdot bv \, dx + \int_\Omega cuv \, dx = \int_\Omega fv \, dx \quad \text{per ogni } v \in H . \tag{1.16}$$

Se tutto ciò che abbiamo detto vale per un sottospazio chiuso qualunque H di $H^1(\Omega)$, vale la pena di spendere due parole sull'interpretazione di quanto abbiamo ottenuto nel caso del sottospazio $H = H^1_0(\Omega)$ di $H^1(\Omega)$, nel quale $C^\infty_c(\Omega)$ è denso per definizione (Esempio II.3.16). Ricordiamo che H coincide con $H^1(\mathbb{R}^d)$ se $\Omega = \mathbb{R}^d$ (unico caso, se si considerano solo aperti che intervengono nei casi concreti) in quanto $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ è denso in $H^1(\mathbb{R}^d)$ (Esempio II.3.15). Al contrario, se Ω è un aperto limitato, si ha senz'altro $H^1_0(\Omega) \neq H^1(\Omega)$. Se poi Ω è anche lipschitziano, $H^1_0(\Omega)$ è costituito esattamente dalle funzioni $v \in H^1(\Omega)$ nulle sul bordo (Osservazione III.1.15), così che richiedere $u \in H^1_0(\Omega)$ corrisponde a imporre alla soluzione u la condizione di Dirichlet omogenea.

Sia dunque $H = H^1_0(\Omega)$. Allora è equivalente lasciare variare v in tutto H o solo in $C^\infty_c(\Omega)$: infatti, fissata u, i due membri della (1.16) sono continui rispetto a v rispetto alla topologia di $H^1(\Omega)$, per cui essi sono uguali per ogni v di un sottospazio se e solo se essi sono uguali per ogni v della chiusura. Segue che la (1.16) equivale a

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot b + cu - f) \, v \, dx = - \int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v \, dx \quad \text{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega) .$$

Osservato che $A\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ in quanto $u \in H^1(\Omega)$ e $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ e ricordati l'Esmpio I.5.59 e l'Osservazione I.5.60, l'ultima uguaglianza dice che

$$A\nabla u \in H(\mathrm{div}; \Omega) = W^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \quad \text{e} \quad \mathrm{div}(A\nabla u) = \nabla u \cdot b + cu - f.$$

Si è dunque risolta, in senso debole, l'equazione (1.12) trovando una e una sola soluzione $u \in H^1_0(\Omega)$. In particolare, se Ω è un aperto limitato, si è risolto in forma generalizzata il problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione (1.12).

1.26. Osservazione. Segnaliamo che, al contrario, se $H = H^1(\Omega)$ con Ω aperto limitato, le cose vanno diversamente in quanto $C^\infty_c(\Omega)$ non è denso in $H^1(\Omega)$, come abbiamo sottolineato nell'Esempio II.3.16. Precisamente scrivere la (1.12) equivale a imporre la (1.16) per le sole funzioni $v \in C^\infty_c(\Omega)$ o, equivalentemente, per tutte le funzioni $v \in H^1_0(\Omega)$ dato che $H^1_0(\Omega)$ è proprio la chiusura di $C^\infty_c(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$, ma non per tutte le $v \in H$. Ne segue che nella (1.16) è nascosto qualcos'altro, precisamente certe condizioni al bordo, sulle quali, tuttavia, soprassediamo (ma si veda l'esercizio dato di seguito relativo al caso monodimensionale).

Analogamente, se come H si prenda un sottospazio di $H^1(\Omega)$, chiuso per avere la completezza, perché si possa dedurre l'equazione differenziale occorre che $H \supseteq C^\infty_c(\Omega)$ o, equivalentemente, che $H \supseteq H^1_0(\Omega)$. Ma, anche in questa ipotesi, la (1.16) contiene in modo nascosto certe condizioni al bordo, a meno che H non sia proprio $H^1_0(\Omega)$ (si veda sempre l'esercizio dato di seguito).

1.27. *Esercizio.* Posto $\Omega = (0,1)$, sia $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ la forma definita dalla formula

$$a(u,v) = \int_\Omega (u'v' + uv) \, dx \quad \text{per } u, v \in H^1(\Omega)$$

e si consideri il problema variazionale

$$u \in H \quad \text{e} \quad a(u,v) = \int_\Omega fv \, dx \quad \text{per ogni } v \in H \tag{1.17}$$

ove H è uno dei sottospazi chiusi di $H^1(\Omega)$ dati di seguito e $f \in C^0(\overline{\Omega})$ (ipotesi questa che garantisce $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e rende senz'altro lecite le integrazioni per parti che possono essere utili). Dimostrare che, per ciascuna delle scelte di H considerate, il problema (1.17) equivale all'equazione $-u'' + u = f$ in Ω corredata dalle condizioni al bordo abbinate alla scelta di H data di volta in volta. Tali condizioni al bordo possono dipendere dall'appartenenza di u allo spazio H oppure essere nascoste nell'equazione variazionale.

$$\begin{array}{lll} H = H^1(\Omega) & \text{e} & u'(0) = u'(1) = 0 \\ H = \{v \in H^1(\Omega) :\ v(0) = 0\} & \text{e} & u(0) = u'(0) = 0 \\ H = \{v \in H^1(\Omega) :\ v(0) = v(1)\} & \text{e} & u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1) \\ H = \{v \in H^1(\Omega) :\ v(1) = 2v(0)\} & \text{e} & u(1) = 2u(0), \quad u'(1) = (1/2)u'(0). \end{array}$$

Si consiglia, in ciascuno dei casi, di passare per la caratterizzazione seguente: u risolve il problema (1.17) se e solo se: $u \in H$, $-u'' + u = f$ in Ω e $u'(0)v(0) = u'(1)v(1)$ per ogni $v \in H$. □

Tornando alla situazione generale e alla scelta $H = H^1_0(\Omega)$, segnaliamo che, nel caso $b = 0$, la coercività sarebbe garantita dall'ipotesi più debole $c \geq 0$, ferma restando l'uniforme ellitticità. Ciò è conseguenza del risultato successivo, che presentiamo in una versione più generale.

1.28. Proposizione. *Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$. Allora vale la disuguaglianza di Poincaré*

$$\|v\|_p \leq \ell \|\nabla v\|_p \quad \textit{per ogni } v \in W^{1,p}_0(\Omega) \tag{1.18}$$

ove ℓ è l'ampiezza di una qualunque striscia che include Ω. □

Dimostrazione. Supponiamo $d > 1$. Il caso $d = 1$, più semplice, si ottiene ignorando la variabile x' che introdurremo e la relativa integrazione. Per semplificare le notazioni, supponiamo che la striscia considerata che include Ω sia $\Omega_\ell = \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \ell)$. Rappresentiamo ogni $x \in \Omega_\ell$ nella forma $x = (x', y)$ con $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ e $y \in (0, \ell)$. Sia ora $v \in C^\infty_c(\Omega)$ e denotiamo ancora con v il prolungamento di v a Ω_ℓ nullo fuori di Ω, così che $v \in C^\infty_c(\Omega_\ell)$. Allora, posto $D = \partial/\partial x_d$, per ogni $x \in \Omega_\ell$, abbiamo (con $1/p' = 0$ se $p = 1$)

$$v(x) = v(x', y) = \int_0^y Dv(x', t)\, dt \quad \text{da cui} \quad |v(x)|^p \leq \ell^{p/p'} \int_0^\ell |Dv(x', t)|^p\, dt.$$

Integrando su Ω_ℓ otteniamo

$$\int_{\Omega_\ell} |v(x)|^p\, dx \leq \ell^{1+p/p'} \int_{\Omega_\ell} |Dv(x', t)|^p\, dt\, dx' \quad \text{da cui} \quad \|v\|_p \leq \ell \|Dv\|_p$$

le norme essendo intese indifferentemente su Ω_ℓ o su Ω dato che $v = 0$ in $\Omega_\ell \setminus \Omega$. Ciò implica la disuguaglianza voluta nel caso $v \in C^\infty_c(\Omega)$. Ma $C^\infty_c(\Omega)$ è denso in $W^{1,p}_0(\Omega)$ per definizione. Dunque la disuguaglianza ottenuta si estende a ogni $v \in W^{1,p}_0(\Omega)$. □

1.29. Osservazione. Si noti che l'ipotesi di limitatezza non è stata sfruttata completamente: in effetti la (1.18) vale non appena Ω è incluso in una striscia di ampiezza ℓ.

1.30. Osservazione. Riprendiamo l'ultima frase dell'Osservazione 1.26: in ipotesi di ellitticità uniforme e nel caso $b = 0$ e $c \geq 0$ la coercività è vera se vale una disuguaglianza del tipo

$$\|\nabla v\|_2 \geq \alpha_0 \|v\|_{1,2} \quad \text{per ogni } v \in H^1_0(\Omega)$$

per una certa costante $\alpha_0 > 0$. Questa, a sua volta, segue facilmente dalla disuguaglianza (1.18) di Poincaré con $p = 2$. In generale, infatti, dalla (1.18) si deduce immediatamente

$$\|v\|^p_{1,p} = \|v\|^p_p + \|\nabla v\|^p_p \leq (\ell^p + 1) \|\nabla v\|^p_p \quad \text{da cui} \quad \|\nabla v\|_p \geq \alpha_0 \|v\|_{1,p} \quad \text{per ogni } v \in W^{1,p}_0(\Omega)$$

ove $\alpha_0 = (\ell^p+1)^{-1/p}$. Facciamo notare che, più in generale, vanno sotto il nome di "disuguaglianze di Poincaré" disuguaglianze dei tipi seguenti

$$\int_\Omega |v|^p\,dx \le M\left(\int_{\Omega_0}|v|^p\,dx + \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx\right), \quad \int_\Omega |v|^p\,dx \le M\left(\left|\int_{\Omega_0} v\,dx\right|^p + \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx\right) \tag{1.19}$$

$$\int_\Omega |v|^p\,dx \le M\left(\int_{\Gamma_0}|v|^p\,dS + \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx\right), \quad \int_\Omega |v|^p\,dx \le M\left(\left|\int_{\Gamma_0} v\,dS\right|^p + \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx\right) \tag{1.20}$$

tutte da intendersi ora per ogni $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e non solo per v in qualche sottospazio e con diversi valori di M di volta in volta. In queste disuguaglianze $\Omega_0 \subseteq \Omega$, mentre Γ_0 è un sottoinsieme della frontiera Γ di Ω . Esse valgono per ogni $p \in [1, +\infty]$ *se* Ω *è connesso limitato e regolare e se* Ω_0 *o* Γ_0 *hanno misura positiva* (nel secondo caso la misura è quella superficiale, ovviamente). La prima di ciascuna delle due coppie di disuguaglianze segue dalla seconda e dalla disuguaglianza di Hölder e la (1.18) è caso particolare di una qualunque delle (1.20) con $p = 2$ e $\Gamma_0 = \Gamma$. I valori di M dipendono sia da Ω sia dai sottoinsiemi Ω_0 o Γ_0 , oltre che da p . Segnaliamo che esistono estensioni valide anche per certi tipi di domini illimitati Ω con ipotesi di tipo compatibilità fra Ω e Ω_0 o Γ_0 : ad esempio la prima delle (1.20) vale nel caso in cui Ω è la striscia $\Omega_\ell = \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \ell)$ con $\ell \in (0, +\infty)$ se Γ_0 è una delle due facce della striscia (si riveda l'Osservazione 1.29), mentre non è ammesso il caso in cui Ω è un semispazio (caso $\ell = +\infty$), nemmeno quando $\Gamma_0 = \Gamma$.

1.31. *Esercizio.* Dimostrare che ciascuna delle somme nelle parentesi dei secondi membri delle (1.19–20), elevata a $1/p$, definisce una norma in $W^{1,p}(\Omega)$ equivalente a quella usuale.

1.32. *Esercizio.* Sia ω un aperto di $\mathbb{R}^{d-1}$ e si prenda $\Omega = \omega \times (0, 1)$. Sia inoltre $p \in (1, +\infty)$. Imitando la procedura seguita nell'Osservazione III.1.13, ora con $\varphi \equiv 0$, ma scambiando il ruolo di $v(x', x_d)$ e di $v(x', 0)$, si mostri che esiste una costante M che rende vera la disuguaglianza

$$\int_\Omega |v(x)|^p\,dx \le M\left(\int_\omega |v(x',0)|^p\,dx' + \int_\Omega |\nabla v(x)|^p\,dx\right) \quad \text{per ogni } v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Ciò fornisce un'idea sulla validità della prima delle (1.20) con $\Gamma_0 = \omega \times \{0\}$.

1.33. *Esercizio.* Adattare la dimostrazione del Teorema di Lax-Milgram per ottenere la versione valida per spazi indifferentemente reali o complessi che si ottiene modificando l'enunciato come segue: *i*) la forma a è a valori in $\mathbb{K}$ ed è sesquilineare; *ii*) la disuguaglianza di coercività nella (1.7) diventa $\operatorname{Re} a(v, v) \ge \alpha\|v\|^2$; *iii*) l'equazione nel problema (1.8) diventa $a(v, u) = \langle f, v\rangle$ (alternativamente, si può lasciare il problema invariato ma supporre che f appartenga all'antiduale anziché al duale). Preliminarmente occorre modificare in accordo il Corollario 1.23, nel quale l'ipotesi di simmetria diventa: a è hermitiana. □

Il prossimo risultato che presentiamo rappresenta formalmente una generalizzazione di tutti i risultati precedenti. Tuttavia, nel nostro discorso logico-deduttivo, solo il Teorema di Teorema di Lax-Milgram potrebbe essere dedotto come corollario dato che la dimostrazione che diamo utilizza sia il Teorema 1.1 di proiezione sui convessi sia il Teorema di Riesz nella forma del Corollario 1.23.

1.34. Teorema (di Lions-Stampacchia). *Siano* H *uno spazio di Hilbert reale e* C *un convesso chiuso e non vuoto di* H . *Sia inoltre* $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *una forma bilineare continua e coerciva nel senso della* (1.7). *Allora, per ogni* $f \in H^*$, *esiste uno e un solo elemento* u *verificante*

$$u \in C \quad \text{e} \quad a(u, u - v) \le \langle f, u - v\rangle \quad \text{per ogni } v \in C. \tag{1.21}$$

Inoltre si ha $\|u_1 - u_2\| \le (1/\alpha)\|f_1 - f_2\|_*$ *se* u_i *è la soluzione corrispondente al dato* f_i , $i = 1, 2$. □

Dimostrazione. Dimostriamo subito l'ultima parte dell'enunciato. Abbiamo

$$a(u_1, u_1 - v) \le \langle f_1, u_1 - v\rangle \quad \text{e} \quad a(u_2, u_2 - v) \le \langle f_2, u_2 - v\rangle \quad \text{per ogni } v \in C\,.$$

prendendo $v = u_2$ nella prima e $v = u_1$ nella seconda, sommando poi membro a membro e utilizzando l'ipotesi (1.7) di coercività otteniamo

$$\alpha\|u_1 - u_2\|^2 \le a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \le \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle \le \|f_1 - f_2\|_* \, \|u_1 - u_2\|$$

e la disuguaglianza richiesta segue immediatamente. Notiamo che da qui seguirebbe facilmente anche un risultato di unicità, per cui resterebbe da dimostrare solo l'esistenza della soluzione. Tuttavia il metodo che utilizziamo, che ricalca nei limite del possibile la dimostrazione che abbiamo dato del Teorema di Lax-Milgram, dimostra contemporaneamente esistenza e unicità. Seguiamo le notazioni della dimostrazione citata e introduciamo le parti simmetrica e antisimmetrica di a e la famiglia di forme a_t dipendenti dal parametro reale t. Ancora valgono le (1.10). Modifichiamo il problema (1.9) come segue

$$\text{per ogni } f \in H^* \text{ esiste uno e un solo } u \in C \text{ tale che } \quad a_t(u, u - v) \le \langle f, u - v\rangle \quad \text{per ogni } v \in C \tag{1.22}$$

e denotiamo con $\mathcal{T}$ l'insieme dei $t \in \mathbb{R}$ tali che l'affermazione (1.22) è vera. Ancora la tesi equivale al fatto che $1 \in \mathcal{T}$ e noi dimostriamo, come nel caso del Teorema di Lax-Milgram, che $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ verificando che: *i)* 0 appartiene a $\mathcal{T}$; *ii)* se $\delta = \alpha/(2M)$, per ogni $t_0 \in \mathcal{T}$, vale l'inclusione $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq \mathcal{T}$. Ora, però, il punto *i)* è un poco più delicato. Fissato $f \in H^*$, applichiamo il Corollario 1.23 alla forma simmetrica a_0: troviamo $z \in H$ tale che $a_0(z, v) = \langle f, v\rangle$ per ogni $v \in H$. Quindi il problema da risolvere può essere riscritto nella forma equivalente

$$u \in C \quad \text{e} \quad a_0(u, u - v) \le a_0(z, u - v) \quad \text{per ogni } v \in C$$

nella quale si riconosce il problema della proiezione di z sul convesso C, proiezione nel senso del nuovo prodotto scalare a_0. Applicando dunque il Teorema 1.1, deduciamo che $0 \in \mathcal{T}$. Passiamo a *ii)* e supponiamo $t_0 \in \mathcal{T}$. Ancora presentiamo la (1.22) per t generico come un problema di punto fisso che fa intervenire la forma a_{t_0}. Fissato dunque $f_0 \in H^*$, dobbiamo trovare u verificante

$$u \in C \quad \text{e} \quad a_{t_0}(u, u - v) \le \langle f_0, u - v\rangle + (t_0 - t)\, b(u, u - v) \quad \text{per ogni } v \in C\,. \tag{1.23}$$

Per $u \in H$ fissato, consideriamo il problema ausiliario di trovare $w \in C$ verificante

$$w \in C \quad \text{e} \quad a_{t_0}(w, u - v) \le \langle f_0, u - v\rangle + (t_0 - t)\, b(u, u - v) \quad \text{per ogni } v \in C\,.$$

Troviamo una e una sola soluzione w in quanto $t_0 \in \mathcal{T}$ e il problema ha la forma

$$w \in C \quad \text{e} \quad a_{t_0}(w, u - v) \le \langle f, u - v\rangle \quad \text{per ogni } v \in C \quad \text{ove} \quad f : v \mapsto \langle f_0, v\rangle + (t_0 - t)\, b(u, v)$$

e $f \in H^*$. Ancora l'applicazione $\mathcal{F} : H \to H$ che a ogni $u \in H$ associa tale soluzione consente di vedere la (1.23) come l'equazione $\mathcal{F}(u) = u$. Controlliamo che, con la scelta annunciata di δ, $\mathcal{F}$ è una contrazione in H. Siano $u_1, u_2 \in H$. Poniamo per comodità $w_i = \mathcal{F}(u_i)$ per $i = 1, 2$. Scrivendo tali posizioni, scegliendo $v = u_2$ nella prima e $v = u_1$ nella seconda, sommando poi membro a membro e utilizzando la coercività come abbiamo fatto all'inizio, otteniamo

$$\alpha\|w_1 - w_2\|^2 \le a_{t_0}(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \le |t_0 - t|\, |b(u_1 - u_2, w_1 - w_2)| \le |t_0 - t|\, M\, \|u_1 - u_2\|\, \|w_1 - w_2\|.$$

Dunque $\|\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2)\| \le (M|t_0 - t|/\alpha)\, \|u_1 - u_2\|$ e possiamo applicare il Teorema delle contrazioni se, appunto, $|t - t_0| \le \delta$ con $\delta = \alpha/(2M)$. $\square$

1.35. Esempio. Storicamente la (1.21) prende il nome di *disequazione variazionale astratta*. Le disequazioni variazionali "concrete" si ottengono specializzando le scelte dello spazio di Hilbert, del convesso e della forma bilineare. Un esempio tipico è il cosiddetto "problema dell'ostacolo", sul quale diciamo due parole. Con riferimento all'Osservazione 1.26, prendiamo $H = H^1_0(\Omega)$, ove Ω è un aperto limitato e regolare di $\mathbb{R}^d$. Come forma a prendiamo la più semplice delle (1.14):

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{per } u, v \in H .$$

Allora, grazie alla disuguaglianza di Poincaré, la forma a è coerciva. Prendiamo poi $f = 0$ in (1.21) per semplicità. Come convesso prendiamo il seguente

$$C = \{ v \in H : \ v(x) \geq \psi(x) \text{ q.o.} \}$$

ove $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione fissata (l'ostacolo). L'insieme C è comunque convesso e chiuso, ma, se ψ è generica, accade tranquillamente che C sia vuoto. Se invece $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ e $\psi|_{\partial\Omega} \leq -\gamma$ ove γ è una costante positiva, allora C non è vuoto. Supponendo che ψ verifichi queste condizioni, si può dimostrare che la soluzione u del problema (1.21) data dal Teorema di Lions-Stampacchia verifica, in particolare, quanto segue: *i)* $u \in C^1(\overline{\Omega})$; *ii)* detto ω l'insieme in cui $u > \psi$, che è un aperto, u è di classe C^∞ in ω e si ha $-\Delta u = 0$ in ω (si noti che l'equazione (1.12) diventerebbe $-\Delta u = 0$ con la scelta fatta di a e di f se avessimo preso $C = H$); $-\Delta \psi \geq 0$ in $\Omega \setminus \omega$. Nel caso particolare in cui Ω è un intervallo di $\mathbb{R}$, l'operatore di Laplace è la derivata seconda e la condizione $-\Delta u = 0$ in ω diventa: u è un polinomio di grado ≤ 1 in ogni componente connessa di ω. In tali condizioni la soluzione u rappresenta la configurazione che assume un filo elastico fissato agli estremi (deve verificare $u = 0$ agli estremi) e costretto a restare sopra l'ostacolo ψ.

2. Decomposizioni e serie di Fourier

Il Teorema 1.10 delle proiezioni ha conseguenze notevolissime, oltre al Teorema di Riesz che abbiamo già visto. In questo paragrafo vediamo come esso consenta di costruire decomposizioni di uno spazio di Hilbert in suoi sottospazi ortogonali e di dedurre una teoria astratta delle serie di Fourier.

2.1. Definizione. *Siano H uno spazio prehilbertiano. Due sottoinsiemi X, Y di H si dicono ortogonali quando $(x,y) = 0$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$. Se S è un sottoinsieme di H, l'insieme*

$$S^\perp = \{ x \in H : \ (x,y) = 0 \text{ per ogni } y \in S \} \tag{2.1}$$

è detto l'ortogonale di S. □

2.2. Osservazione. Facciamo notare l'articolo determinativo nell'ultima frase: $S^\perp$ non è un qualunque sottoinsieme ortogonale a S, ma il più grande dei sottoinsiemi di questo tipo. Si verifica immediatamente che

$$S^\perp = (\operatorname{span} S)^\perp = (\overline{\operatorname{span}}\, S)^\perp$$

e che $S^\perp$ è sempre un sottospazio chiuso di H. Notiamo infine che l'intersezione $S \cap S^\perp$ o è vuota oppure è ridotta all'origine, dato che ogni suo (eventuale) elemento x deve verificare $(x,x) = 0$.

2.3. Lemma. *Siano H uno spazio di Hilbert e V_0 un suo sottospazio chiuso. Allora l'ortogonale $(V_0^\perp)^\perp$ di $V_0^\perp$ coincide con V_0.* □

Dimostrazione. Sia $u \in V_0$. Allora per ogni $v \in V_0^\perp$ si ha $(u,v) = 0$. Ciò mostra che $u \in (V_0^\perp)^\perp$. Vale dunque l'inclusione $V_0 \subseteq (V_0^\perp)^\perp$. Sia ora $u \in (V_0^\perp)^\perp$ e sia u_0 la sua proiezione su V_0. Allora $u_0 \in (V_0^\perp)^\perp$ per quanto abbiamo appena dimostrato. Segue $u - u_0 \in (V_0^\perp)^\perp$. D'altra parte si ha $u - u_0 \in V_0^\perp$. Deduciamo che $u - u_0 = 0$ e quindi che $u = u_0 \in V_0$. □

2.4. *Esercizio.* Dimostrare che, se S è un sottoinsieme non vuoto, allora $(S^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}}\, S$. □

Il risultato che segue generalizza la relazione pitagorica, già evidenziata nel caso di due elementi ortogonali, al caso di un numero finito o addirittura di una serie.

2.5. Proposizione. *Siano H uno spazio prehilbertiano e $v_1, \dots, v_n$ elementi di H ortogonali a due a due. Allora vale la formula*

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2 \quad \textit{ove} \quad v = \sum_{k=1}^{n} v_k \,. \tag{2.2}$$

Se $\{v_n\}$ è una successione di elementi di H ortogonali a due a due e se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge in H, allora vale la formula

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2 \quad \textit{ove} \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \,. \ \square \tag{2.3}$$

Dimostrazione. La (2.2) è immediata:

$$\|v\|^2 = \Bigl(\sum_{k=1}^{n} v_k, \sum_{j=1}^{n} v_j \Bigr) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (v_k, v_j) = \sum_{k=1}^{n} (v_k, v_k) = \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2$$

dato che $(v_k, v_j) = 0$ se $j \neq k$. La (2.3) discende facilmente dalla continuità del prodotto scalare, in quanto

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= (v, v) = \Bigl(\lim_{n\to\infty} s_n, v \Bigr) = \lim_{n\to\infty} (s_n, v) = \lim_{n\to\infty} \Bigl(s_n, \lim_{k\to\infty} s_k \Bigr) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} (s_n, s_k) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\min\{n,k\}} \|v_j\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|^2 \end{aligned}$$

ove $\{s_n\}$ è la successione delle ridotte. $\square$

Il primo risultato di decomposizione è il teorema seguente:

2.6. Teorema (di decomposizione). *Siano H uno spazio di Hilbert e V_0 un suo sottospazio chiuso. Allora si ha*

$$H = V_0 \oplus V_0^{\perp}$$

e valgono le formule

$$u = P_0 u + P_\perp u \quad \textit{e} \quad \|u\|^2 = \|P_0 u\|^2 + \|P_\perp u\|^2 \quad \textit{per ogni } u \in H \tag{2.4}$$

ove P_0 e $P_\perp$ sono gli operatori di proiezione su V_0 e su $V_0^{\perp}$ rispettivamente. $\square$

Dimostrazione. L'intersezione $V_0 \cap V_0^{\perp}$ è ridotta all'origine (Osservazione 2.2). Dunque, se H è la somma dei due sottospazi, la somma è diretta. Vediamo che effettivamente H è la somma dei due sottospazi e che vale il resto dell'enunciato. Sia $u \in H$ e sia $u_0 = P_0 u$. Allora $u - u_0 \in V_0^{\perp}$, il che mostra l'esistenza di una decomposizione: $u = u_0 + (u - u_0)$. Sia ora $u_\perp = P_\perp u$. Allora $u - u_\perp$ appartiene a $(V_0^{\perp})^{\perp}$, cioè a V_0 per il lemma. Dunque un'altra decomposizione è data da $u = (u - u_\perp) + u_\perp$. Per l'unicità deduciamo che $u - u_0 = u_\perp$, cioè la prima delle (2.4). La seconda è la conseguente relazione pitagorica. $\square$

Il passo successivo riguarda il caso di una famiglia finita di sottospazi ortogonali. Ricordiamo che, se V uno spazio vettoriale e $V_1, \dots, V_n$ sono suoi sottospazi vettoriali, sono equivalenti le due affermazioni: *i*) l'unione dei V_k genera V; *ii*) ogni elemento $u \in V$ ha almeno una rappresentazione della forma $u = \sum_{k=1}^{n} u_k$ con $u_k \in V_k$ per $k = 1, \dots, n$. Se tali condizioni sono soddisfatte si scrive $V = V_1 + \ldots + V_n$ e si dice che V è la somma dei V_k. Si dice poi che la somma è diretta, e si scrive $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ oppure $V = \bigoplus_{k=1}^{n} V_k$, quando la rappresentazione di cui in *ii*) è unica. Premettiamo un semplice lemma.

2.7. Lemma. *Siano H uno spazio di Hilbert, V_1 e V_2 due sottospazi chiusi di H tali che $V_1 \subseteq V_2$ e P_1 e P_2 gli operatori di proiezione ortogonale su V_1 e su V_2 rispettivamente. Allora si ha $P_1 P_2 u = P_1 u$ per ogni $u \in H$.* □

Dimostrazione. Siccome $P_1 P_2 u \in V_1$, basta controllare che $(P_1 P_2 u, v) = (u, v)$ per ogni $v \in V_1$. Sia $v \in V_1$. Allora $(P_1 P_2 u, v) = (P_2 u, v)$. Ma siccome $v \in V_1 \subseteq V_2$, si ha anche $(P_2 u, v) = (u, v)$. □

2.8. Teorema. *Siano H uno spazio di Hilbert, $V_1, \ldots, V_n$ sottospazi chiusi di H ortogonali a due a due e V il sottospazio somma. Allora la somma è diretta e V è un sottospazio chiuso. Precisamente valgono le formule*

$$u = \sum_{k=1}^{n} P_k u + P_\perp u \quad \text{e} \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|P_k u\|^2 + \|P_\perp u\|^2 \quad \text{per ogni } u \in H \tag{2.5}$$

ove P_k e $P_\perp$ sono gli operatori di proiezione su V_k e su $V^\perp$. □

Dimostrazione. Dimostriamo che V è somma diretta dei V_k. Siano $u \in V$ e $u_k \in V_k$, $k = 1, \ldots, n$, tali che $u = \sum_{k=1}^{n} u_k$ e si fissi m con $1 \leq m \leq n$. Allora $u_m \in V_m$ e per ogni $v \in V_m$ si ha

$$(u, v) = \sum_{k=1}^{n} (u_k, v) = (u_m, v)$$

così che $u_m = P_m u$. Ciò mostra, in particolare, l'unicità della decomposizione, ma consente anche di verificare che V è chiuso. Supponiamo infatti che una successione $\{u^j\}$ di elementi di V converga a un elemento $u \in H$. Allora $u^j = \sum_{k=1}^{n} P_k u^j$ per ogni j. D'altra parte gli operatori P_k sono continui. Deduciamo che $P_k u^j \to P_k u$ per ogni k e quindi che $\{u^j\}$ converge anche a $\sum_{k=1}^{n} P_k u$. Per l'unicità del limite, segue che $u = \sum_{k=1}^{n} P_k u \in V$. Denotiamo con P l'operatore di proiezione su V e verifichiamo le (2.5). Sia $u \in H$. Siccome $V_k \subseteq V$, grazie al lemma abbiamo

$$Pu = \sum_{k=1}^{n} P_k P u = \sum_{k=1}^{n} P_k u$$

e il resto segue dal Teorema 2.6 e dalla Proposizione 2.5. □

Passiamo infine a considerare decomposizioni numerabili. Siccome le serie sono limiti di ridotte, conviene dare un risultato generale sui limiti di proiezioni ortogonali.

2.9. Proposizione. *Siano H uno spazio di Hilbert e $\{V_n\}$ una successione non decrescente di sottospazi chiusi e siano V_∞ la chiusura dell'unione dei V_n e P_n e P_∞ gli operatori di proiezione su V_n e su V_∞ rispettivamente. Allora $P_n u \to P_\infty u$ per ogni $u \in H$.* □

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $V_\infty = H$ e fissiamo $u \in H$. La successione costituita dalle norme $\|P_n u - u\|$ è non crescente in quanto $V_{n+1} \supseteq V_n$ per ogni n e quindi converge a un limite $\lambda \geq 0$. Dobbiamo dimostrare che $\lambda = 0$. Per assurdo, sia $\lambda > 0$. Allora, per ogni n e ogni $v \in V_n$, si ha $0 < \lambda \leq \|P_n u - u\| \leq \|v - u\|$. Ciò mostra che u non appartiene alla chiusura dell'unione dei V_n, assurdo.

Consideriamo ora il caso generale. Fissiamo $u \in H$. Per il lemma 2.7 abbiamo $P_n P_\infty u = P_n u$. Applicando quanto abbiamo già dimostrato allo spazio V_∞ (che è di Hilbert in quanto sottospazio chiuso) e al suo elemento $P_\infty u$, otteniamo $P_n u = P_n P_\infty u \to P_\infty u$. □

2.10. Teorema. *Siano H uno spazio di Hilbert, $\{V_n\}$ una successione di sottospazi chiusi di H ortogonali a due a due e V_∞ la chiusura del sottospazio generato dalla loro unione. Allora, detti P_n e $P_\perp$ gli operatori di proiezione su V_n e su $V_\infty^\perp$, si ha*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} P_n u + P_\perp u \quad \text{e} \quad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n u\|^2 + \|P_\perp u\|^2 \quad \text{per ogni } u \in H. \tag{2.6}$$

In particolare vale la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n u\|^2 \le \|u\|^2 \quad \textit{per ogni } u \in H \tag{2.7}$$

e, per ogni $u \in H$ *, le tre condizioni*

$$i)\ u = \sum_{n=1}^{\infty} P_n u, \quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n u\|^2 = \|u\|^2, \quad iii)\ u \in V_\infty \tag{2.8}$$

sono equivalenti. Infine, per ogni $u \in H$ *, la* (2.6) *è l'unica decomposizione di* u *nella forma* $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + u_\perp$ *con* $u_n \in V_n$ *per ogni* n *e* $u_\perp \in V_\infty^\perp$ *.* □

Dimostrazione. Per ogni n denotiamo con V^n il sottospazio generato dall'unione dei sottospazi V_k , $k = 1, \ldots, n$. Esso è chiuso per il Teorema 2.8. Denotiamo inoltre con P^n l'operatore di proiezione su V^n . Possiamo allora applicare la Proposizione 2.9 alla successione $\{V^n\}$. Osservato che V_∞ è anche la chiusura del sottospazio generato dall'unione dei V^n e combinando con il Teorema 2.8, otteniamo per ogni $u \in H$

$$P_\infty u = \lim_{n\to\infty} P^n u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P_k u = \sum_{n=1}^{\infty} P_n u.$$

Allora le (2.6) seguono dai Teoremi 2.6 e 2.8 e dalla Proposizione 2.5. I due punti successivi dell'enunciato si verificano poi immediatamente: la (2.7) è ovvia conseguenza della seconda delle (2.6) e l'equivalenza delle (2.8) è chiara in quanto ciascuna di esse equivale a $P_\perp u = 0$. Concludiamo verificando l'unicità della decomposizione. Con le notazioni dell'enunciato, il vettore $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ appartiene a V_∞ , per cui, per il Teorema 2.6, esso è la proiezione Pu di u su tale spazio. Per lo stesso teorema $u_\perp = P_\perp u$. Fissiamo ora $m \ge 1$. Siccome P_m è lineare e continuo, tenendo conto del Lemma 2.7 deduciamo che

$$P_m u = P_m P u = P_m \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_m u_n = u_m$$

dato che, per $n \ne m$, $V_m \subseteq V_n^\perp$ per cui $P_m u_n = 0$. Ciò conclude la dimostrazione. □

2.11. Osservazione. Nel caso particolare in cui l'unione dei V_n è densa, si ha $V_\infty = H$ e $V_\infty^\perp = \{0\}$. Allora le proiezioni su $V_\infty^\perp$ sono sistematicamente nulle e si usa condensare questo fatto nella scrittura

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V_n \tag{2.9}$$

e dire che H è la *somma hilbertiana* della successione $\{V_n\}$. Si noti che, nelle condizioni dette, le $i)$ e $ii)$ della (2.8) valgono per ogni $u \in H$. □

Ora specializziamo la scelta dei sottospazi V_n nel teorema precedente: prendiamo $\dim V_n = 1$ per ogni n . Conviene allora assegnare ciascuno dei V_n mediante un generatore u_n . Abbiamo pertanto $u_n \ne 0$ per ogni n e $(u_n, u_m) = 0$ per $m \ne n$. Possiamo anche normalizzare tutto e richiedere $\|u_n\| = 1$ per ogni n . Tenendo conto dell'Esempio 1.13, il risultato che diamo dopo la definizione che segue è un banale corollario del Teorema 2.10 e non necessita di alcuna dimostrazione.

2.12. Definizione. *Siano* H *uno spazio di Hilbert e* $\{u_n\}$ *una successione di elementi di* H *. Diciamo che essa è ortonormale quando* $(u_n, u_m) = 0$ *per* $m \ne n$ *e* $\|u_n\| = 1$ *per ogni* n *.* □

2.13. Teorema. *Siano H uno spazio di Hilbert e $\{u_n\}$ una successione ortonormale di elementi di H. Detta V_∞ la chiusura del sottospazio generato dall'insieme $\{u_n:\ n \geq 1\}$ si ha*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n)\, u_n + P_\perp u \quad e \quad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, u_n)|^2 + \|P_\perp u\|^2 \quad \textit{per ogni } u \in H \tag{2.10}$$

ove $P_\perp$ è l'operatore di proiezione su $V_\infty^\perp$. In particolare vale la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u, u_n)|^2 \leq \|u\|^2 \quad \textit{per ogni } u \in H \tag{2.11}$$

e, per ogni $u \in H$, le tre condizioni

$$i)\ u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n)\, u_n\,, \quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} |(u, u_n)|^2 = \|u\|^2, \quad iii)\ u \in V_\infty \tag{2.12}$$

sono equivalenti. Infine, per ogni $u \in H$, la (2.10) è l'unica decomposizione di u nella forma $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n + u_\perp$ con $c_n \in \mathbb{K}$ per ogni n e $u_\perp \in V_\infty^\perp$. $\square$

2.14. Osservazione. Osserviamo che, siccome la possibilità di riordinare vale per le serie dei quadrati delle norme, che sono serie a termini reali positivi, deduciamo che la stessa possibilità vale per le serie di vettori. Basta infatti scrivere le (2.10) per la successione data e per un suo riordinamento e confrontare tenendo conto dell'unicità della decomposizione. Per questo motivo si usa più spesso il termine *sistema ortonormale* e si pensa all'insieme dei vettori u_n e non necessariamente a una precisa successione. Quando poi tale sistema genera un sottospazio denso, si dice comunemente che esso è un *sistema ortonormale completo*, oppure che è una *base hilbertiana*, di H. In tali condizioni, e solo in questo caso, le $i)$ e $ii)$ della (2.12) valgono per ogni $u \in H$.

2.15. Definizione. *Siano H uno spazio di Hilbert e $\{u_n\}$ un sistema ortonormale di elementi di H. Se $u \in H$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(u, u_n)u_n$ si chiama serie di Fourier di u rispetto al sistema considerato e i coefficienti (u, u_n) si chiamano coefficienti di Fourier.* $\square$

2.16. Osservazione. Vale forse la pena di sottolineare che, se $u \in H$, la serie di Fourier di u converge comunque, ma non a u in generale, bensì alla proiezione di u sulla chiusura del sottospazio generato dal sistema ortonormale considerato. La serie di Fourier di u converge a u per ogni $u \in H$ se e solo se il sistema è completo.

2.17. Esempio (serie di Fourier classiche). Il nome attribuito alle serie di Fourier trae origine dalle serie trigonometriche. Conviene tuttavia considerare la versione complessa. Ci limitiamo al caso del periodo 2π, nel quale non ci sono i fronzoli aggiuntivi che complicano le notazioni. Lo spazio naturale da prendere in considerazione è quello delle funzioni 2π-periodiche di quadrato sommabile cioè delle (classi di) funzioni misurabili $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ il cui quadrato è integrabile su ogni intervallo di ampiezza 2π. Tuttavia, la restrizione a $(-\pi, \pi)$ di ogni funzione di questo tipo appartiene a $L^2(-\pi, \pi)$ e, viceversa, ogni elemento di $L^2(-\pi, \pi)$ ha uno e un solo prolungamento 2π-periodico verificante la condizione di sommabilità richiesta. Dunque possiamo prendere più semplicemente $H = L^2(-\pi, \pi)$ e pensare ai prolungamenti periodici solo se la cosa ci piace di più. Il sistema da considerare è quello dato dalle funzioni u_n definite dalle formule $u_n(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(int)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Si verifica immediatamente che esso è ortonormale. Il fatto che esso sia anche completo è invece meno banale. Una traccia di una possibile dimostrazione è la seguente. Si usa la teoria classica delle serie trigonometriche e si dimostra che, se $u \in C^1[-\pi, \pi]$ verifica $u(-\pi) = u(\pi)$, allora la serie di Fourier di u converge a u uniformemente. Ciò vale, in particolare, per ogni $u \in C_c^\infty(-\pi, \pi)$. Siccome la convergenza uniforme in $(-\pi, \pi)$ implica la convergenza in H, ciò mostra che, con le notazioni del Teorema 2.13, ogni $u \in C_c^\infty(-\pi, \pi)$ verifica la i) di (2.12). Di conseguenza ogni u di questo tipo verifica anche la iii) di (2.12). Dunque $C_c^\infty(-\pi,\pi) \subseteq V_\infty$. Siccome $C_c^\infty(-\pi,\pi)$ è denso in H, V_∞ è denso a maggior ragione. Siccome V_∞ è chiuso per definizione, deduciamo che $V_\infty = H$. Esplicitato il calcolo dei coefficienti di Fourier, vediamo allora che per ogni $u \in L^2(-\pi,\pi)$ abbiamo

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{int} \quad \text{ove} \quad \alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)e^{-int}\,dt \quad \text{per } n \in \mathbb{Z} \tag{2.13}$$

la serie convergendo nel senso di $L^2(-\pi,\pi)$.

2.18. Esempio (serie di soli seni e di soli coseni). Con le notazioni dell'esempio precedente, consideriamo ora il sistema $\{s_n\}_{n\ge1}$ definito dalla formula $s_n(t) = \pi^{-1/2}\sin nt$ per $n = 1,2,\dots$. Anche questo è un sistema ortonormale in H. Tuttavia esso non è completo: infatti ogni combinazione lineare finita degli s_n è necessariamente dispari e quindi la stessa proprietà vale per tutti gli elementi di V_∞, che ora chiamiamo V_{sin}. Abbiamo dunque che V_{sin} è incluso nel sottospazio $H_d = \{v \in H : v(-x) = -v(x) \text{ q.o.}\}$ delle funzioni dispari. Vedremo che $V_{sin} = H_d$. Consideriamo l'analogo sistema $\{c_n\}_{n\ge0}$ ove c_n è data dalla formula $c_n(t) = \pi^{-1/2}\cos nt$ per $n = 1,2,\dots$ e c_0 è la funzione costante $(2\pi)^{-1}$. Allora valgono considerazioni analoghe: la chiusura del sottospazio generato dal sistema $\{c_n\}$, cioè lo spazio V_∞ da considerare ora, che naturalmente chiamiamo V_{cos}, è incluso nel sottospazio $H_p = \{v \in H : v(-x) = v(x) \text{ q.o.}\}$ delle funzioni pari. D'altra parte l'unione dei due sistemi $\{s_n\}$ e $\{c_n\}$ è un sistema ancora ortogonale (come si verifica) e completo, non essendo altro che una versione reale del sistema $\{u_n\}$ considerato nell'esempio precedente. Sia ora $u \in H$ ad arbitrio. Scritta la (2.13) per u, riscritta la serie in termini di seni e coseni e separati i seni e i coseni in due serie, vediamo che deve valere una decomposizione del tipo

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n s_n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n$$

con certi coefficienti b_n e a_n. Ciò mostra, in particolare, che $H = V_{sin} + V_{cos}$ e, siccome i due sottospazi sono ortogonali, la somma è necessariamente diretta. Ma possiamo andare oltre. Infatti le due serie di Fourier di u rispetto ai due sistemi $\{s_n\}$ e $\{c_n\}$ costituiscono una decomposizione di u dello stesso tipo. Concludiamo che le due serie sono proprio le serie di Fourier di u rispetto ai due sistemi (fatto che poteva essere controllato direttamente, ma in modo laborioso, calcolandone davvero i coefficienti). Proseguiamo. Lo spazio H è anche somma (diretta) di H_d e H_p, dato che, per ogni $u \in H$, si ha

$$u = u_d + u_p \quad \text{ove} \quad u_d(x) = \frac{1}{2}\,(u(x) - u(-x)) \quad \text{e} \quad u_p(x) = \frac{1}{2}\,(u(x) + u(-x))$$

e, come è ovvio, $u_d \in H_d$ e $u_p \in H_p$. Combinando ciò con le inclusioni $V_{sin} \subseteq H_d$ e $V_{cos} \subseteq H_p$, concludiamo che $V_{sin} = H_d$ e $V_{cos} = H_p$ e che i due addendi di ciascuna delle due decomposizioni di u sono le proiezioni di u su tali sottospazi.

2.19. Osservazione. Se gli esempi precedenti sono importanti e storici, dobbiamo sottolineare che la teoria astratta delle serie di Fourier ha una vasta gamma di applicazioni in svariate direzioni, ad esempio nella teoria delle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico nei domini limitati, in quanto i sistemi di autofunzioni associate agli operatori differenziali di una vasta classe sono sistemi ortonormali completi nello spazio $L^2(\Omega)$. □

Terminiamo il paragrafo con qualche risultato collaterale, fra cui un importante teorema di isomorfismo. Ricordiamo che uno spazio topologico è separabile quando contiene un sottoinsieme al più numerabile denso. Tale insieme è necessariamente infinito, dunque numerabile, se lo spazio topologico considerato è uno spazio di Hilbert non ridotto allo zero. La nozione di separabilità verrà discussa con un certo dettaglio successivamente e dimostreremo, in particolare, che sono separabili gli spazi $L^2(\Omega)$ e $H^k(\Omega)$ qualunque sia l'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

2.20. Proposizione. *Siano H uno spazio di Hilbert e $\{u_n\}$ una successione di elementi di H a due a due ortogonali. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge in H se e solo se la successione $\{\|u_n\|\}$ delle norme appartiene a ℓ^2.* $\square$

Dimostrazione. Grazie alla (2.2), per $1 \leq m < n$ abbiamo $\left\|\sum_{k=m}^{n} u_k\right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} \|u_k\|^2$ per cui la condizione di Cauchy per la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ in H e quella per la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2$ hanno lo stesso significato. $\square$

2.21. Proposizione. *Siano H uno spazio prehilbertiano e $\{x_n\}$ una successione di vettori linearmente indipendenti di H. Allora esiste una successione ortonormale $\{u_n\}$ tale che*

$$\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} \quad \textit{per ogni } n. \ \square$$

Dimostrazione. Usiamo il cosiddetto procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Poniamo $u_1 = x_1 / \|x_1\|$ e procediamo per induzione. Sia $n \geq 1$ e, supponendo di aver già costruito $u_1, \ldots, u_n$ in modo che tali vettori e i vettori $x_1, \ldots, x_n$ generino lo stesso sottospazio, che chiamiamo V_n, costruiamo u_{n+1} come segue. Detto P_n l'operatore di proiezione su V_n, poniamo

$$v_{n+1} = x_{n+1} - P_n x_{n+1} \quad \text{e} \quad u_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|}.$$

Osserviamo innanzi tutto che la definizione di u_{n+1} ha senso in quanto $v_{n+1} \neq 0$, come ora mostriamo. Infatti, grazie all'indipendenza data dall'ipotesi, x_{n+1} non appartiene a V_n mentre $P_n x_{n+1}$ appartiene a V_n, per cui i due vettori sono diversi. Ricordata ora l'ipotesi di induzione, osserviamo che la definizione di u_{n+1} implica che, per certi coefficienti $c_n', c_n'' > 0$, risulta

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P_n x_{n+1} + c_n' u_{n+1} \in \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} \\ u_{n+1} &= c_n''\bigl(x_{n+1} - P_n x_{n+1}\bigr) \in \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Segue che $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{n+1}\} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. $\square$

Sia ora H uno spazio di Hilbert separabile non ridotto allo zero. Se H ha dimensione finita n allora H è isometricamente isomorfo allo spazio euclideo $\mathbb{K}^n$, come sappiamo. Il risultato successivo riguarda il caso opposto della dimensione infinita.

2.22. Teorema. *Ogni spazio di Hilbert H separabile e di dimensione infinita è isometricamente isomorfo allo spazio ℓ^2.* $\square$

Dimostrazione. Sia $D = \{y_k : \ k \geq 1\}$ un sottoinsieme numerabile denso. Per ogni $k \geq 1$ poniamo $V_k = \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_k\}$ e $d_k = \dim V_k$. La successione $\{d_k\}$ è non decrescente e, siccome D è denso e H ha dimensione infinita, essa non è limitata. Infine si ha $d_1 \leq 1$ e $d_{k+1} \leq d_k + 1$ per ogni k. Di conseguenza è ben definita la successione $\{k_n\}$ data dalla formula $k_n = \min\{k : \ d_k = n\}$. Possiamo allora costruire una successione $\{x_n\}$ di vettori indipendenti che verifica $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} = V_{k_n}$ per ogni n semplicemente scegliendo i vettori x_n fra gli elementi della successione $\{y_k\}$. Segue che $\{x_n\}$ e $\{y_k\}$ generano lo stesso sottospazio, necessariamente denso in quanto contenente D. Per la Proposizione 2.21, esiste una successione ortonormale $\{u_n\}$ che genera lo stesso sottospazio generato da $\{x_n\}$. Quindi $\{u_n\}$ è un sistema ortonormale completo. Definiamo allora $L : H \to \ell^2$ come segue: se $u \in H$ denotiamo con Lu la successione dei coefficienti di Fourier di u rispetto al sistema $\{u_n\}$. Effettivamente Lu appartiene a ℓ^2 grazie alla seconda delle (2.12), la quale implica anche che L è un'isometria, dato che L è ovviamente lineare. Resta da dimostrare che L è suriettiva. Sia $\{c_n\} \in \ell^2$. Allora $\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n u_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$. Applicando la Proposizione 2.20 deduciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ converge a un certo elemento $u \in H$. Per l'ultima affermazione del Teorema 2.13 deduciamo che $c_n = (u, u_n)$ per ogni n, cioè che Lu è la successione $\{c_n\}$ assegnata. $\square$

3. Il problema della compattezza

Questo paragrafo costituisce una digressione. Tuttavia esso nasce spontaneamente dal problema che ora poniamo e chiarisce una questione importante. Inoltre, di fatto, prepara la strada a un risultato di compattezza che presentiamo in uno dei paragrafi successivi.

Immaginiamo di cercare il minimo di una funzione $f : S \to \mathbb{R}$, diciamo limitata inferiormente, ove S è un sottoinsieme di uno spazio normato V. Sia $\lambda = \inf_{x \in S} f(x)$ e sia $\{x_n\}$ una *successione minimizzante*, cioè costituita da elementi di S e tale che $\{f(x_n)\}$ converga a λ. Notiamo che una successione minimizzante esiste sempre, per definizione di estremo inferiore. Occorre imporre condizioni perché $\{x_n\}$ sia limitata: si può allora supporre che S stesso sia limitato oppure che $f(x)$ diverga a $+\infty$ al tendere all'infinito di $\|x\|$, cioè che, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esista $r > 0$ tale che $f(x) \geq M$ per ogni $x \in S \setminus B_r(0)$. Se $V = \mathbb{R}^N$, si può estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione convergente. Detto x il suo limite, per poter concludere che x è un punto di minimo per f, cioè che $x \in S$ e che $f(x) = \lambda$, basta supporre che S sia chiuso e che f sia continua.

La stessa strategia ovviamente funziona per tutti gli spazi normati che hanno la seguente proprietà di *compattezza* (o di compattezza sequenziale): *da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente*. Ma, a questo proposito, vi sono sorprese molto sgradite.

3.1. Esempio. Si considerino le funzioni $x_n \in V = C^0[0,1]$ date dalle formule $x_n(t) = t^n$. Queste verificano tutte $\|x_n\|_\infty = 1$. D'altra parte nessuna sottosuccessione di $\{x_n\}$ può convergere uniformemente a un elemento $x \in V$. Ogni sottosuccessione, infatti, converge puntualmente, come l'intera successione, a una funzione discontinua.

3.2. Esempio. Nessuno spazio di Hilbert H di dimensione infinita ha la proprietà di compattezza desiderata. Sia infatti $\{e_n\}$ una qualunque successione ortonormale di H. Essendo $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ per $n \neq m$, la successione $\{e_n\}$ non ha sottosuccessioni di Cauchy, dunque nemmeno sottosuccessioni convergenti. □

Quindi sembrano rari gli spazi normati che posseggono la compattezza necessaria perché si possa applicare il procedimento diretto di costruzione del minimo al quale si è accennato sopra. Nelle righe successive dimostriamo che, precisamente, essi sono *tutti e soli quelli di dimensione finita*. In particolare l'ipotesi che lo spazio sia di Hilbert non aiuta affatto e dobbiamo aggiustare il tiro. Precisamente, nel caso della dimensione infinita, occorre proprio cambiare topologia e nei due paragrafi successivi introduciamo, se non una nuova topologia, almeno un tipo nuovo di convergenza e un risultato, valido nel quadro hilbertiano, di compattezza sequenziale. Ora, invece, intendiamo discutere brevemente la relazione detta fra compattezza e dimensione finita e dare un esempio di caratterizzazione dei sottoinsiemi (relativamente) compatti in un caso infinito-dimensionale: quello particolarmente importante degli spazi di funzioni continue. Per quanto riguarda il problema generale della compattezza, la chiave di volta è il lemma seguente, dovuto a Riesz, e la non compattezza nel caso della dimensione infinita diventa una facile conseguenza.

3.3. Lemma. *Siano V uno spazio normato e V_0 un sottospazio chiuso di V diverso da V. Allora, per ogni $\vartheta \in (0,1)$, esiste $v \in V$ verificante*

$$\|v\| = 1 \quad e \quad \operatorname{dist}(v, V_0) \geq \vartheta. \ \square \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Prendiamo $x \in V \setminus V_0$. Se V fosse uno spazio di Hilbert si potrebbe semplicemente osservare che la proiezione y di x su $V_0^\perp$ è diversa da 0 e quindi prendere $v = y/\|y\|$ ottenendo la (3.1) con $\vartheta = 1$ e l'uguaglianza. Notiamo che $y = x - v_0$ ove v_0 è la proiezione di x su V_0. Cerchiamo allora di seguire la stessa procedura nel caso di un generico spazio normato costruendo un surrogato di v_0.

Fissiamo $\vartheta \in (0,1)$. Siccome V_0 è chiuso, esiste un intorno di x disgiunto da V_0, per cui il numero reale $\delta = \operatorname{dist}(x, V_0)$ è strettamente positivo. Siccome $\delta/\vartheta > \delta$, esiste $v_0 \in V_0$ tale che $\|x - v_0\| \leq \delta/\vartheta$. Poniamo $y = x - v_0$. Allora $y \neq 0$ e possiamo definire $\lambda = \|y\| > 0$ e $v = y/\|y\|$. Ovviamente $\|v\| = 1$. Inoltre, per ogni $v' \in V_0$, osservato che $v_0 + \lambda v' \in V_0$, si ha

$$\|v - v'\| = \frac{1}{\lambda}\,\|y - \lambda v'\| = \frac{1}{\lambda}\,\|x - (v_0 + \lambda v')\| \geq \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta}{\|x - v_0\|} \geq \frac{\delta}{\delta/\vartheta} = \vartheta.$$

Dunque vale anche la seconda delle (3.1). □

3.4. Teorema. *Sia V uno spazio normato. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: i) da ogni successione limitata di V si può estrarre una sottosuccessione convergente; ii) la palla chiusa unitaria B di V è compatta; iii) la sfera unitaria S di V è compatta; iv) V ha dimensione finita. Più precisamente, se $\dim V = +\infty$ e $\{x_n\}$ una successione di vettori indipendenti di V, per ogni $\vartheta \in (0,1)$ esiste una successione $\{u_n\}$ di elementi di V fra loro indipendenti e verificanti $\operatorname{span}\{u_1,\dots,u_n\} = \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_n\}$ e $\|u_n\| = 1$ per ogni n e $\|u_n - u_m\| \geq \vartheta$ per $m \neq n$.* □

Dimostrazione. Naturalmente i termini che abbiamo usato per B e S sono quelli della Definizione I.3.4. Dimostriamo che i) e ii) sono equivalenti. Valga i). Allora da ogni successione di elementi di B si può estrarre una sottosuccessione convergente, necessariamente a un elemento di B. Ciò prova che vale anche ii). Viceversa, valga ii) e siano $\{x_n\}$ una successione limitata di elementi di B e $r > 0$ tale che $\|x_n\| \leq r$ per ogni n. Siccome $\overline{B}_r(0)$ è omeomorfa a B, anch'essa è compatta e dalla successione considerata si può estrarre una sottosuccessione convergente. Ciò prova i). Dimostriamo ora che ii) e iii) sono equivalenti. Se B è compatta, anche S lo è dato che S è un chiuso di B. Se S è compatta, anche B lo è in quanto immagine dell'applicazione continua $f : S \times [0,1] \to B$ definita dalla formula $f(x,\lambda) = \lambda x$. Supponiamo ora V di dimensione finita. Allora V è isomorfo a uno spazio euclideo per cui vale, ad esempio, la condizione i). Supponiamo infine V di dimensione infinita e dimostriamo prima l'ultima affermazione dell'enunciato. Fissiamo $\vartheta \in (0,1)$ e il sistema indipendente $\{x_n\}$. L'idea è la stessa della Proposizione 2.21, ove la possibilità di proiettare è rimpiazzata dal Lemma 3.3 di Riesz. Notiamo che tutti i sottospazi che consideriamo sono chiusi in quanto di dimensione finita. Chiaramente prendiamo $u_1 = x_1/\|x_1\|$. Per induzione, sia $n \geq 1$ e supponiamo di aver costruito i primi n vettori u_k indipendenti, di norma unitaria e verificanti $\operatorname{span}\{u_1,\dots,u_n\} = \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_n\}$ e $\|u_m - u_k\| \geq \vartheta$ per $m \neq k$. Poniamo $V_n = \operatorname{span}\{u_1,\dots,u_n\}$ e $V_{n+1} = \operatorname{span}\{u_1,\dots,u_n,x_{n+1}\}$. Applicando il lemma, troviamo $u_{n+1} \in V_{n+1}$ di norma unitaria e verificante $\operatorname{dist}(u_{n+1},V_n) \geq \vartheta$. In particolare i vettori $u_1,\dots,u_{n+1}$ sono indipendenti (dato che $u_{n+1} \notin V_n$ e i primi n vettori sono indipendenti per ipotesi di induzione), anch'essi generano V_{n+1} e risulta $\|u_m - u_{n+1}\| \geq \vartheta$ per $m = 1,\dots,n$. Allora è chiaro che la successione $\{u_n\}$ così costruita verifica tutte le condizioni che abbiamo richiesto nell'enunciato. Da ciò la conclusione della dimostrazione segue immediatamente. Fissato infatti uno dei valori ammissibili di ϑ, ad esempio $\vartheta = 1/2$, e una qualunque successione indipendente $\{x_n\}$, che esiste in quanto V ha dimensione infinita, la successione $\{u_n\}$ che esiste in corrispondenza è limitata e non ha sottosuccessioni di Cauchy, dunque nemmeno sottosuccessioni convergenti. Ciò prova che non vale la condizione i). □

Il teorema fornisce tre condizioni importanti che sono equivalenti al fatto che lo spazio abbia dimensione finita. Le righe immediatamente successive contengono altri esempi ed osservazioni e portano a caratterizzazioni ulteriori.

3.5. Osservazione. Siano V uno spazio normato di dimensione infinita e $\{u_n\}$ data dal teorema precedente ad esempio con $\vartheta = 1/2$. Detta ancora B la palla unitaria chiusa di V, costruiamo una funzione $f : B \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(B)$ non sia un insieme limitato. Fissiamo $r > 0$ abbastanza piccolo, ad esempio $r = 1/5$ (così che $2r < 1/2$, per cui, per $\varepsilon > 0$ opportuno e per ogni n, la palla $B_{r+\varepsilon}(u_n)$ non interseca $\overline{B}_r(u_m)$ per $m \neq n$), e definiamo $f : B \to \mathbb{R}$ come segue: $f(x) = n(r - \|x - u_n\|)$ se $x \in B \cap \overline{B}_r(u_n)$ e $f(x) = 0$ se $\|x - u_n\| > r$ per ogni n. Si verifica senza difficoltà che f è continua. Eppure $u_n \in B$ e $f(u_n) = nr$ per ogni n, per cui $f(B)$ non è un insieme limitato. Siccome nel caso della dimensione finita tutte le funzioni reali continue in B sono limitate, abbiamo ottenuto quest'altra caratterizzazione:

$$\dim V < +\infty \text{ se e solo se ogni } f : \overline{B}_1(0) \to \mathbb{R} \text{ continua è limitata.} \tag{3.2}$$

Osserviamo che la funzione costruita or ora non è uniformemente continua. Infatti, posto $v_n = (n-1)n^{-1}u_n$ per $n \geq 5$, si ha $v_n \in B$ e $\|v_n - u_n\| = 1/n \leq r$. Segue che $v_n \in B \cap \overline{B}_r(u_n)$ da cui $f(v_n) = n(r - 1/n) = nr - 1$. Si vede quindi che $\lim_{n\to\infty}\|v_n - u_n\| = 0$, mentre chiaramente $\lim_{n\to\infty}|f(v_n) - f(u_n)| = +\infty$. Siccome nel caso della dimensione finita tutte le funzioni reali continue in B sono uniformemente continue, abbiamo ottenuto anche la caratterizzazione seguente:

$$\dim V < +\infty \text{ se e solo se ogni } f : \overline{B}_1(0) \to \mathbb{R} \text{ continua è uniformemente continua.} \tag{3.3}$$

3.6. *Esercizio.* Dimostrare che, se V è uno spazio normato, ciascuna delle condizioni seguenti equivale a $\dim V < +\infty$: *i*) ogni funzione $f : V \to \mathbb{R}$ continua è limitata su ogni limitato di V ; *ii*) ogni funzione $f : V \to \mathbb{R}$ continua è uniformemente continua su ogni limitato di V .

3.7. Osservazione. Notiamo che, senza ipotesi ulteriori sugli spazi normati V e W , rimane vero che, se B è una palla di V , ogni funzione $f : B \to W$ uniformemente continua è limitata, come ora mostriamo supponendo $B = B_1(0)$. Siano $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \le 1$ per ogni coppia di punti $x, y \in B$ verificanti $\|x - y\| \le \delta$ e n un intero $\ge 1/\delta$. Allora $|f(x) - f(0)| \le n$ per ogni $x \in B$. Infatti, fissato $x \in B$ e posto $x_k = (k/n)x$ per $k = 0, \dots, n$, si ha $x_k \in B$ per per ogni k e $\|x_{k-1} - x_k\| = (1/n)\|x\| \le \delta$ per $k = 1, \dots, n$ così che $|f(x_{k-1}) - f(x_k)| \le 1$.

3.8. Esempio. Riprendiamo le notazioni dell'Osservazione 3.5, denotiamo con U l'unione di tutte le palle chiuse $\overline{B}_r(u_n)$, poniamo $C = B \cap U$ e costruiamo $f : C \to \mathbb{R}$ ponendo più semplicemente $f(x) = n$ se $x \in \overline{B}_r(u_n)$, ove, ricordiamo, abbiamo preso $r = 1/5$. La verifica della continuità di f è ora ancora più banale e, se la palla chiusa B fosse compatta, anche C , che è un chiuso di B , sarebbe compatto e f sarebbe limitata, il che non è. Osserviamo che tale funzione f è anche uniformemente continua. Infatti, se $x \in \overline{B}_r(u_n)$ e $y \in \overline{B}_r(u_m)$ con $n \neq m$, si ha $\|x - y\| \ge \vartheta - 2r = 1/10$. Dunque, se $x, y \in C$ verificano $\|x - y\| < 1/10$, essi appartengono alla stessa palla e si ha $f(x) = f(y)$. Tuttavia, per quanto appena detto, tale funzione non ha alcuna estensione $F : B \to \mathbb{R}$ ancora uniformemente continua. □

Per il Teorema 3.4, in dimensione infinita ogni compatto ha interno vuoto e perché un sottoinsieme chiuso e limitato sia compatto occorre imporgli condizioni di solito restrittive. Le stesse condizioni aggiuntive forniranno la relativa compattezza in assenza di ipotesi di chiusura. Un esempio particolarmente significativo e importante è quello dello spazio $C(K)$ delle funzioni continue in uno spazio topologico compatto (vedi Esempio I.5.4) almeno nel caso in cui K sia uno spazio metrizzabile (che denoteremo con S), caso che comprende quello dello spazio $C^0(\overline{\Omega})$ (Esempio I.5.5) delle funzioni uniformente continue in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Qui la situazione è perfettamente chiara e ci concediamo la digressione. Al fondamentale risultato di caratterizzazione dei sottoinsiemi relativamente compatti premettiamo una definizione e qualche elemento propedeutico.

3.9. Definizione. *Siano (S, d) uno spazio metrico e $\mathcal{F}$ un sottoinsieme di $C(S)$. Diciamo che $\mathcal{F}$ è equicontinuo quando, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che*

$$|v(x) - v(y)| \le \varepsilon \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{F} \text{ e } x, y \in S \text{ verificanti } d(x, y) \le \delta . \tag{3.4}$$

Diremo poi che una successione $\{v_n\}$ di elementi di $C(S)$ è equicontinua quando è equicontinua la sua immagine, cioè l'insieme descritto da v_n al variare di n . □

Segnaliamo che, se $\mathcal{F} \subset C(S)$, si dice anche che gli elementi di $\mathcal{F}$ sono funzioni equicontinue (fra loro), ma noi preferiamo riferire il termine "equicontinuità" all'insieme $\mathcal{F}$ anziché ai suoi elementi. Notiamo che nella definizione avremmo potuto considerare un generico insieme $\mathcal{F}$ di funzioni $v : S \to \mathbb{K}$ senza imporre $\mathcal{F} \subset C(S)$. Tuttavia, così facendo, avremmo ottenuto una generalizzazione solo apparentemente. L'equicontinuità di $\mathcal{F}$, infatti, avrebbe comunque implicato addirittura la continuità uniforme di ogni $v \in \mathcal{F}$. Ma, si noti bene, l'equicontinuità richiede, in aggiunta, che il δ dell'uniforme continuità che si può associare a ogni $\varepsilon > 0$ in corrispondenza a ogni elemento $v \in \mathcal{F}$ possa essere lo stesso per tutte le funzioni considerate.

3.10. Esempio. La nozione di funzione α -holderiana (lipschitziana se $\alpha = 1$) si estende in modo naturale al caso in cui il suo dominio sia uno spazio metrico (S, d) : la funzione $v : S \to \mathbb{K}$ si dirà α -holderiana quando esiste una costante L (detta di Hölder, di Lipschitz se $\alpha = 1$) tale che $|v(x) - v(y)| \le L(d(x, y))^\alpha$ per ogni $x, y \in S$. Detto ciò, come nei casi elementari è ancora vero che ogni funzione α -holderiana è uniformemente continua. Inoltre perché un insieme $\mathcal{F}$ di funzioni α -holderiane sia equicontinuo è sufficiente che gli elementi di $\mathcal{F}$ abbiano una costante di Hölder comune, diciamo L . In tal caso, infatti, possiamo prendere δ dato dalla relazione $L\delta^\alpha = \varepsilon$ per soddisfare l'uniforme continuità di tutte le funzioni di $\mathcal{F}$ contemporaneamente. In riferimento ai sottoinsiemi di $C^0(\overline{\Omega})$, ove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$, ciò può essere sintetizzato nella frase: *ogni sottoinsieme limitato di $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ è equicontinuo.* □

Per meglio chiarire la dimostrazione del teorema che ci accingiamo a presentare premettiamo qualche considerazione generale sul cosiddetto *procedimento o metodo diagonale di Cantor*, il quale torna utile in più di una situazione. Ricordiamo inoltre due proprietà degli spazi metrici compatti.

3.11. Il procedimento diagonale. Immaginiamo di avere una successione $\{x_n\}$ di oggetti di natura qualunque e di estrarre da questa una successione. Dall'estratta estraiamo ancora una sottosuccessione. Immaginiamo di procedere all'infinito costruendo in tal modo infinite successioni ciascuna delle quali è una sottosuccessione della precedente. Per formalizzare una situazione di questo tipo conviene assumere delle notazioni ad hoc: denotiamo gli indici, che sono numeri naturali, con coppie (n,k) di indici interi positivi. L'indice n corrisponde al fatto che siamo all' n-esima estrazione, mentre k indica quale elemento dell' n-esima sottosuccessione stiamo considerando. Poi, per brevità, omettiamo le parentesi tonde nel simbolo di coppia. Costruiamo allora la "matrice"

$$\begin{array}{cccc} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots\cdots \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots\cdots \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdots\cdots \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

Abbiamo dunque $(n,1) < (n,2) < (n,3) < \ldots$ per ogni n. Inoltre $(2,1),(2,2),\ldots$ sono scelti fra gli indici $(1,k)$ e allo stesso modo $(3,1),(3,2),\ldots$ sono scelti fra gli indici $(2,k)$, eccetera. Il metodo diagonale consiste nel prendere in considerazione la successione $\{x_{k,k}\}$. Vediamo che accade. Si ha $(2,2) > (2,1) \geq (1,1)$. Analogamente si vede che $(3,3) > (2,2)$, eccetera. Si conclude che $\{x_{k,k}\}$ è una sottosuccessione della successione $\{x_n\}$ di partenza. Inoltre ciascuno degli indici (k,k) è scelto fra gli indici della prima sottosuccessione, per cui $\{x_{k,k}\}$ è anche sottosuccessione di $\{x_{1,k}\}$. Analogamente si vede che, se si esclude il valore $k=1$, gli indici (k,k) sono scelti fra gli indici della seconda sottosuccessione, per cui $\{x_{k,k}\}$ è, a meno del suo primo termine, una sottosuccessione di $\{x_{2,k}\}$. In generale, per ogni n, se si escludono i valori $k<n$, la successione $\{x_{k,k}\}$ è una sottosuccessione di $\{x_{n,k}\}$. In particolare, se le estrazioni successive sono fatte in modo che, per ogni n, una certa successione $\{\mathcal{X}_n(x_{n,k})\}$ di elementi di uno spazio topologico, costruita a partire da $\{x_{n,k}\}$ con qualche procedura, converga a un elemento y_n di tale spazio per $k\to\infty$, la stessa cosa avviene per la successione $\{\mathcal{X}_n(x_{k,k})\}$, e ciò per ogni n. □

Come preannunciato, ricordiamo, dimostrandole per completezza, due proprietà degli spazi metrici compatti. La prima è la seguente: se (S,d) è uno spazio metrico compatto, allora

$$\textit{per ogni } \delta>0\,,\ \textit{esistono punti } x_1,\ldots,x_p\in S \ \textit{ tali che } \quad S=\bigcup_{i=1}^{p} B_\delta(x_i) \tag{3.5}$$

come enunciato nel Teorema A.1.20 (limitatezza totale dello spazio metrico). Infatti la famiglia $\{B_\delta(x):\ x\in S\}$ che, banalmente, ricopre S ed è costituita da aperti contiene una famiglia finita che ancora ricopre S. Ecco l'altra proprietà che vogliamo evidenziare:

3.12. Lemma. *Sia (S,d) uno spazio metrico compatto. Allora esiste un sottoinsieme $D\subseteq S$ che è al più numerabile e denso.* □

Dimostrazione. Per $m=1,2,\ldots$ ricopriamo S con un numero finito di palle $B_{1/m}(z_i^m)$, $i=1,\ldots,p_m$, e poniamo $D=\{z_i^m:\ i=1,\ldots,p_m,\ m=1,2,\ldots\}$. Allora D è al più numerabile, chiaramente. Ma D è anche denso. Presa infatti una palla $B_r(x)$ ad arbitrio, scegliamo m tale che $1/m\leq r$ e un valore di i tale che $x\in B_{1/m}(z_i^m)$. Allora $d(x,z_i^m)<r$, cioè $z_i^m\in B_r(x)$. Dunque D interseca la palla data. □

3.13. Teorema (di Ascoli). *Siano (S,d) uno spazio metrico compatto e $\mathcal{F}$ un sottoinsieme limitato di $C(S)$. Allora $\mathcal{F}$ è relativamente compatto se e solo se è equicontinuo.* □

Dimostrazione. Supponiamo $\mathcal{F}$ relativamente compatto. Per dimostrare che $\mathcal{F}$ è anche equicontinuo ragioniamo per assurdo. Supponiamo cioè che $\mathcal{F}$ non sia equicontinuo e cerchiamo di arrivare a una contraddizione. Negando l'equicontinuità vediamo che esiste $\varepsilon>0$ tale che per ogni $\delta>0$ esistano $v\in\mathcal{F}$ e $x,y\in S$ verificanti $d(x,y)\leq\delta$ e $|v(x)-v(y)|\geq\varepsilon$. Fissiamo un tale ε e una successione $\{\delta_n\}$ reale positiva infinitesima. Prendendo $\delta = \delta_n$ per $n = 1, 2, \ldots$, costruiamo una successione $\{v_n\}$ di elementi di $\mathcal{F}$ e due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ di elementi di S tali che $d(x_n, y_n) \le \delta_n$ e $|v_n(x_n) - v_n(y_n)| \ge \varepsilon$ per ogni $n \ge 1$. Ma $\mathcal{F}$ è relativamente compatto per ipotesi. Dunque da $\{v_n\}$ possiamo estrarre una sottosuccessione convergente in $C(S)$ a una certa funzione $v \in C(S)$. Per non complicare le notazioni, continuiamo a denotare con $\{v_n\}$ anche la sottosuccessione estratta. Ora usiamo la compattezza dello spazio metrico S: da $\{x_n\}$ estraiamo una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a un certo punto x_0 di S. Siccome $d(x_n, y_n) \le \delta_n$ per ogni n, anche la corrispondente sottosuccessione $\{y_{n_k}\}$ converge a x_0. Ora per ogni k abbiamo

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \le |v_{n_k}(x_{n_k}) - v_{n_k}(y_{n_k})| \\
&\le |v_{n_k}(x_{n_k}) - v(x_{n_k})| + |v(x_{n_k}) - v(x_0)| + |v(x_0) - v(y_{n_k})| + |v(y_{n_k}) - v_{n_k}(y_{n_k})| \\
&\le 2\|v_{n_k} - v\|_\infty + |v(x_{n_k}) - v(x_0)| + |v(x_0) - v(y_{n_k})|.
\end{aligned}$$

Ma l'ultimo membro è infinitesimo per $k \to \infty$, assurdo.

Viceversa, supponendo $\mathcal{F}$ equicontinuo, dobbiamo dimostrare la sua relativa compattezza. Fissiamo pertanto una qualunque successione $\{v_n\}$ di elementi di $\mathcal{F}$ e costruiamo una sua sottosuccessione convergente in $C(S)$. A tale scopo fissiamo un sottoinsieme $D \subseteq S$ denso al più numerabile, che esiste grazie al lemma, e usiamo il procedimento diagonale di Cantor. Ricordando che $\mathcal{F}$ è un limitato di $C(S)$, fissiamo una costante M tale che $\|v\|_\infty \le M$ per ogni $v \in \mathcal{F}$. Allora $\|v_n\|_\infty \le M$ per ogni n. In particolare, per ogni $z \in D$, la successione $\{v_n(z)\}$ è una successione di scalari limitata. Dunque si può applicare il Teorema di Bolzano-Weierstrass a ciascuna di tali successioni e, ovviamente, anche a ogni sottosuccessione eventualmente estratta. Allora, presentato provvisoriamente D come immagine di una successione $\{z_m\}$ (senza ipotesi di iniettività, in modo da comprendere il caso, anche se banale, in cui D sia finito) e procedendo ricorsivamente, si estraggono dalla successione data infinite sottosuccessioni $\{x_{1,k}\}$, $\{x_{2,k}\} \ldots$, ciascuna essendo sottosuccessione della precedente, in modo che tutti i limiti $\lim_{k\to\infty} v_{m,k}(z_m)$ esistano finiti. Consideriamo allora la successione $\{v_{k,k}\}$: questa è una sottosuccessione della successione data e, a meno di un numero finito di termini, anche una sottosuccessione di ciascuna delle estratte, così che, per ogni m, il limite $\lim_{k\to\infty} v_{k,k}(z_m)$ esiste finito. Abbandonata la notazione riguardante l'insieme D abbiamo pertanto che il limite $\lim_{k\to\infty} v_{k,k}(z)$ esiste finito per ogni $z \in D$. Quella così costruita è la sottosuccessione che andavamo cercando: dimostriamo che essa converge in $C(S)$. A tale scopo dimostriamo che essa è di Cauchy in $C(S)$. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$ ed eseguiamo un lavoro preliminare. Scelto $\delta > 0$ come nella definizione di equicontinuità, in particolare tale che $|v_{k,k}(x) - v_{k,k}(y)| \le \varepsilon$ per ogni k e per ogni coppia di punti $x, y \in S$ verificanti $d(x, y) \le \delta$, ricopriamo S con un numero finito di palle $B_{\delta/2}(x_i)$, $i = 1, \ldots, p$. Siccome D è denso, la palla $B_{\delta/2}(x_i)$ contiene un punto di D, che denotiamo con z_i. Fatto ciò costruiamo k^* tale che $\|v_{k,k} - v_{k',k'}\|_\infty \le \varepsilon$ per ogni $k, k' \ge k^*$. Osservato che la successione $\{v_{k,k}(z_i)\}$ è di Cauchy, in quanto convergente, sia k_i^* tale che $|v_{k,k}(z_i) - v_{k',k'}(z_i)| \le \varepsilon$ per ogni $k, k' \ge k_i^*$. Poniamo $k^* = \max_{i=1,\ldots,p} k_i^*$ e finalmente concludiamo. Siano $k, k' \ge k^*$ e $x \in S$ ad arbitrio. Scelto i tale che $x \in B_{\delta/2}(x_i)$, essendo anche $z_i \in B_{\delta/2}(x_i)$, abbiamo $d(x, z_i) < \delta$, da cui

$$|v_{k,k}(x) - v_{k',k'}(x)| \le |v_{k,k}(x) - v_{k,k}(z_i)| + |v_{k,k}(z_i) - v_{k',k'}(z_i)| + |v_{k',k'}(z_i) - v_{k',k'}(x)| \le 3\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di x deduciamo che $\|v_{k,k} - v_{k',k'}\|_\infty \le 3\varepsilon$ per ogni $k, k' \ge k^*$. Quindi la sottosuccessione costruita è di Cauchy in $C(S)$, di conseguenza convergente in tale spazio, grazie alla completezza. □

3.14. *Esercizio.* Dedurre che, per un sottoinsieme $\mathcal{F} \subset C(S)$, sono equivalenti le condizioni: *i*) $\mathcal{F}$ è compatto; *ii*) $\mathcal{F}$ è chiuso, limitato ed equicontinuo.

3.15. *Esercizio.* Rivedere l'Esempio 3.1 alla luce del Teorema di Ascoli.

3.16. Esempio. Sia Ω un aperto limitato e convesso di $\mathbb{R}^d$. Allora ogni sottoinsieme $\mathcal{F}$ limitato di $C^1(\overline{\Omega})$ è relativamente compatto in $C^0(\overline{\Omega})$. Innanzi tutto $\mathcal{F}$ è limitato anche in $C^0(\overline{\Omega})$. Verifichiamo l'equicontinuità. Lasciando al lettore l'estensione al caso complesso, consideriamo il caso degli spazi reali e osserviamo che, per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$, grazie al Teorema del valor medio di Lagrange e alla convessità di Ω, esiste un punto z sul segmento di estremi x e y tale che $v(x) - v(y) = \nabla v(z) \cdot (x - y)$. Abbiamo pertanto $|v(x) - v(y)| \le \|\nabla v\|_\infty |x - y|$. Siccome $\mathcal{F}$ è limitato in $C^1(\overline{\Omega})$, esiste L tale che $\|\nabla v\|_\infty \le L$ per ogni $v \in \mathcal{F}$, cosi che $\mathcal{F}$ è equicontinuo per l'Esempio 3.10. Dunque $\mathcal{F}$ è relativamente compatto in $C^0(\overline{\Omega})$ per il Teorema di Ascoli.

3.17. *Esercizio.* Si ponga $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty}(x_{2k+1}, x_{2k})$, ove in generale $x_k = 1/k$, e, per $n = 1, 2, \ldots$, si definisca $v_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mediante $v_n(x) = 0$ se $x > x_n$ e $v(x) = 1$ altrimenti. Si verifichi che $\{v_n\}$ è limitata in $C^1(\overline{\Omega})$ ma non equicontinua.

3.18. Esempio. Si consideri l'aperto "a pettine" $\Omega = \{(x, y) \in (0, 1) \times (-1, 1) : y < \sin^2(\pi/x)\}$ e, per $n = 1, 2, \ldots$, si definisca $v_n : \Omega \to \mathbb{R}$ con le formule $v_n(x, y) = y^2$ se $1/(n+1) < x < 1/n$ e $y > 0$ (cioè nell' n-esimo dente del pettine) e $v_n(x, y) = 0$ altrimenti. Allora, per ogni n, si ha $v_n \in C^1(\overline{\Omega})$, $\|v_n\|_\infty = 1$ e $\|\nabla v_n\|_\infty = 2$, per cui $\{v_n\}$ è limitata in $C^1(\overline{\Omega})$. D'altra parte $\{v_n\}$ converge puntualmente alla funzione nulla. Siccome la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale allo stesso limite, deduciamo che $\{v_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti uniformemente e quindi, per il Teorema di Ascoli, che essa non è equicontinua. Si noti che Ω è, oltre che limitato, anche connesso, a differenza dell'aperto dell'esercizio precedente. Si noti inoltre che, se avessimo scelto la formula $v_n(x, y) = \exp(-1/y)$ anziché $v_n(x, y) = y^2$ nella definizione di v_n, avremmo ottenuto una successione limitata in ciascuno degli spazi $C^k(\overline{\Omega})$ ma ancora non equicontinua.

3.19. Osservazione. L'esercizio e l'esempio precedenti mostrano che l'ipotesi di convessità fatta su Ω nell'Esempio 3.16 può, al più, essere indebolita in qualche modo, ma non soppressa: il risultato continua ad essere vero se Ω è connesso e sufficientemente regolare. Quanto basta è la condizione che ora presentiamo. Per $x, y \in \Omega$ introduciamo la loro *distanza geodetica*

$$d_\Omega(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 |r'(t)|\, dt : \ r : [0, 1] \to \Omega \text{ di classe } C^1 \text{ con } r(0) = x \text{ e } r(1) = y \right\}. \tag{3.6}$$

Questa misura la lunghezza "minima" (virgolette d'obbligo perché, di solito, l'estremo inferiore non è un minimo) che si può percorrere per andare da x a y restando in Ω. Supponiamo ora $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Allora, se $x, y \in \Omega$ e r è come nella (3.6), abbiamo

$$|v(x) - v(y)| = \Bigl| \int_0^1 \frac{d}{dt} v(r(t))\, dt \Bigr| = \Bigl| \int_0^1 \nabla v(r(t)) \cdot r'(t)\, dt \Bigr| \le \|\nabla v\|_\infty \int_0^1 |r'(t)|\, dt$$

da cui $|v(x) - v(y)| \le \|\nabla v\|_\infty\, d_\Omega(x, y)$. Dunque, pensando a v che varia in un limitato $\mathcal{F}$ di $C^1(\overline{\Omega})$, deduciamo ancora l'equicontinuità di $\mathcal{F}$ se Ω verifica la condizione

$$\text{esiste una costante } M \text{ tale che } \quad d_\Omega(x, y) \le M|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \Omega. \tag{3.7}$$

La (3.7) è banalmente verificata se Ω è convesso, è vera per ogni poligono del piano (dunque anche non convesso e in tal caso M dipende dall'ampiezza degli angoli rientranti) e vale, in generale, se Ω è connesso e sufficientemente regolare. □

Segnaliamo un'importante variante L^p di risultati di questo tipo:

3.20. Teorema (di Rellich-Kondrachov). *Se Ω è un aperto limitato e lipschitziano di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty]$, allora ogni limitato di $W^{1,p}(\Omega)$ è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$.* □

Il caso $p = +\infty$ si riconduce al Teorema di Ascoli grazie all'identità $W^{1,\infty}(\Omega) = C^{0,1}(\overline{\Omega})$, valida se Ω è limitato e lipschitziano. Nel caso $p < +\infty$ la dimostrazione classica si basa su una variante del Teorema di Ascoli per gli spazi $L^p(\Omega)$ che caratterizza i sottoinsiemi relativamente compatti di $L^p(\Omega)$ (Teorema di Riesz-Fréchet-Kolmogorov).

3.21. Osservazione. Notiamo che la tesi del Teorema di Rellich-Kondrachov è in generale falsa senza le due ipotesi di limitatezza e di regolarità fatte su Ω (queste potrebbero essere indebolite, ma non omesse). Considerando il caso $p < +\infty$, mostriamo che il risultato è falso per tutti gli aperti non limitati interessanti nelle applicazioni, quali l'intero spazio, un semispazio, una striscia. Per ciascuno dei tre casi, infatti, possiamo costruire un limitato di $W^{1,p}(\Omega)$ che non è relativamente compatto in $L^p(\Omega)$. A tal fine basta costruire una successione $\{v_n\}$ limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ che non ha sottosuccessioni convergenti in $L^p(\Omega)$. Scegliamo $r > 0$ e una successione $\{x_n\}$ di punti di

Ω tali che le palle $B_{2r}(x_n)$ siano incluse in Ω e mutuamente disgiunte e fissiamo $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ positiva nella palla $B_1(0)$ e nulla altrove. Definiamo $v_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo $v_n(x) = \zeta((x - x_n)/r)$, così che $v_n(x) = 0$ se $x \in \Omega \setminus B_r(x_n)$. Allora $v_n \in C_c^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ e, posto $M = \|\zeta\|_p$ e $M_1 = \|\nabla\zeta\|_p$, valgono le uguaglianze

$$\|v_n\|_p^p = r^d M^p, \quad \|\nabla v_n\|_p^p = r^{d-p} M_1^p \quad \text{e} \quad \|v_n - v_m\|_p^p = 2r^d M^p \quad (n \neq m). \tag{3.8}$$

Dunque $\{v_n\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ ma non può avere sottosuccessioni di Cauchy in $L^p(\Omega)$.

Per quanto riguarda la regolarità, lasciamo a un esercizio successivo la discussione di un caso analogo a quello dell'Esempio 3.18 e, supponendo Ω limitato, mostriamo che condizione necessaria perché valga la tesi del Teorema 3.20 è che Ω abbia un numero finito di componenti connesse (fatto vero per gli aperti limitati e lipschitziani e falso in generale). Per assurdo esista una successione $\{\Omega_n\}$ costituita da componenti connesse di Ω (necessariamente limitate dato che Ω è limitato). Poniamo $v_n = |\Omega_n|^{-1/p} \chi_n$ ove $|\cdot|$ è la misura di Lebesgue e χ_n è la funzione caratteristica di Ω_n. Allora $\|v_n\|_p = 1$, $\nabla v_n = 0$ e $\|v_n - v_m\|_p^p = 2$ per $n \neq m$, per cui, anche in questo caso, $\{v_n\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ e non ha sottosuccessioni di Cauchy in $L^p(\Omega)$.

3.22. *Esercizio.* Verificare i calcoli delle norme dell'osservazione precedente.

3.23. *Esercizio.* Si dimostri che l'equicontinuità dei limitati di $C^1(\overline{\Omega})$ segue ancora se, in sostituzione della (3.7), imponiamo l'esistenza di una funzione $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tale che

$$\lim_{t \to 0^+} \mu(t) = 0 \quad \text{e} \quad d_\Omega(x, y) \leq \mu(|x - y|) \quad \text{per ogni } x, y \in \Omega\,. \tag{3.9}$$

3.24. *Esercizio.* Si svolgano i punti seguenti: *i)* si verifichi che la (3.7) implica la (3.9); *ii)* si costruiscano esempi di aperti connessi limitati $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ che verificano la (3.9) ma non la (3.7); *iii)* si verifichi direttamente che la (3.9) non è soddisfatta nel caso dell'aperto "a pettine" dell'Esempio 3.18, ma che la distanza geodetica $d_\Omega : \Omega^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata in quel caso; *iv)* si costruiscano esempi di aperti connessi e limitati (ad esempio "a spirale" oppure "molto serpeggianti") che non verificano la (3.9) e nei quali d_Ω non è una funzione limitata.

3.25. *Esercizio.* Si costruisca l'aperto "a pettine" (analogo a quello dell'Esempio 3.18 ma più semplice per quanto riguarda i calcoli) come segue:

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^\infty D_n \quad \text{ove} \quad D_0 = (0,1) \times (-1, 0) \quad \text{e} \quad D_n = \left(\frac{1}{2n+1}\,,\, \frac{1}{2n} \right) \times [0, 1) \quad \text{per } n > 0\,.$$

Supponendo $p \in [1, +\infty)$, si dimostri che, con tale Ω, la tesi del Teorema 3.20 è falsa sviluppando la traccia seguente: per ogni $n > 0$ intero, si definisca $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo $u_n(x) = c_n x_2$ se $x \in D_n$ e $u(x) = 0$ altrimenti, ove $c_n > 0$ è un parametro a disposizione.

4. La convergenza debole in uno spazio normato

Riprendiamo il discorso che ha iniziato il paragrafo precedente. Per aggirare l'ostacolo occorre sostituire la topologia indotta dalla norma con una topologia meno fine, in modo da aumentare la classe delle successioni convergenti. Naturalmente un'operazione di questo tipo fa diminuire sia la classe dei chiusi sia quella delle funzioni continue e quindi ha un rovescio della medaglia: ipotesi di chiusura e di continuità diventano restrittive. Vedremo però che si riesce a trovare un compromesso soddisfacente. Ora, tuttavia, ci limitiamo a parlare di convergenza anziché di topologia. Vediamo come si può procedere considerando il caso generale degli spazi normati.

Siccome il caso della dimensione finita va bene così com'è, partiamo da questo. Se $\{x_n\}$ è una successione di elementi di $\mathbb{R}^N$, essa converge al punto $x \in \mathbb{R}^N$ se e solo se, per $i = 1, \ldots, N$, la successione delle coordinate i-esime degli elementi x_n converge alla coordinata i-esima di x. Una condizione equivalente a questa è la seguente: per ogni $y \in \mathbb{R}^N$, la successione delle "componenti" $x_n \cdot y$ secondo il vettore y converge alla corrispondente componente $x \cdot y$. Nel caso di un generico spazio normato V le componenti $x_n \cdot y$ e $x \cdot y$ possono essere ragionevolmente sostituite dai prodotti di dualità $\langle f, x_n \rangle$ e $\langle f, x \rangle$, ove f varia nel duale.

4.1. Definizione. *Sia V uno spazio normato. Diciamo che una successione $\{x_n\}$ di elementi di V converge debolmente all'elemento $x \in V$, e scriviamo $x_n \rightharpoonup x$ in V, quando*

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle \quad \textit{per ogni } f \in V^* .$$

La convergenza $x_n \to x$ indotta dalla norma è detta anche convergenza forte in V. □

4.2. Osservazione. Se si riprende l'Esempio III.3.1 e si tiene conto del Teorema 1.21 di Riesz, si vede immediatamente che

$$i) \text{ se } \dim V < +\infty \quad x_n \rightharpoonup x \quad \text{se e solo se} \quad x_n \to x\,; \tag{4.1}$$

$$ii) \text{ se } V = H \text{ è uno spazio di Hilbert} \quad x_n \rightharpoonup x \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, y) = (x, y) \quad \text{per ogni } y \in H. \tag{4.2}$$

4.3. Proposizione. *Siano V uno spazio normato, $\{x_n\}$ una successione di elementi di V e $x \in V$. Allora $x_n \to x$ implica $x_n \rightharpoonup x$.* □

Dimostrazione. Se $f \in V^*$ abbiamo infatti $|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \le \|f\|_* \|x_n - x\|$ e concludiamo. □

Nel caso degli spazi di dimensione infinita le convergenze debole e forte sono diverse nella maggior parte delle situazioni importanti nelle applicazioni. Tuttavia abbiamo che

$$\text{la convergenza debole in } \ell^1 \text{ coincide con la convergenza forte} \tag{4.3}$$

ma la dimostrazione di questo fatto, diciamo anomalo, non è immediata. Nel caso degli spazi di Hilbert di dimensioni infinita le convergenze debole e forte sono sicuramente diverse, come afferma il risultato enunciato di seguito. Quello successivo fornisce poi informazioni sulla convergenza debole e una condizione sufficiente per la convergenza forte, sempre relativamente al caso hilbertiano.

4.4. Proposizione. *Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Allora ogni successione $\{e_n\}$ ortonormale converge debolmente a 0 e le nozioni di convergenza debole e di convergenza forte sono diverse.* □

Dimostrazione. Per ogni $v \in H$ la serie $\sum_{n=1}^\infty |(e_n, v)|^2$ converge per la disuguaglianza (2.11) di Bessel. Segue che la successione $\{(e_n, v)\}$ è infinitesima, e ciò dimostra la prima tesi. La seconda parte segue dall'esistenza di una successione ortonormale, garantita dalla Proposizione 2.21 in ogni spazio di Hilbert di dimensione infinita, e dalla prima, in quanto $\{e_n\}$ non converge fortemente a 0. □

4.5. Proposizione. *Sia H uno spazio di Hilbert. Se $x_n \rightharpoonup x$ e $x_n \rightharpoonup y$ in H, allora $x = y$, cioè il limite debole è unico. Inoltre*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \textit{implica} \quad \|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|. \tag{4.4}$$

Infine, se

$$x_n \rightharpoonup x \quad \textit{e} \quad \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \le \|x\| \tag{4.5}$$

allora si ha la convergenza forte $x_n \to x$. □

Dimostrazione. Le due convergenze deboli implicano

$$\|x-y\|^2 = (x, x-y) - (y, x-y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, x-y) - \lim_{n\to\infty} (x_n, x-y) = 0$$

da cui $x = y$. Inoltre, se $x_n \rightharpoonup x$, si ha

$$\|x\|^2 = (x,x) = \lim_{n\to\infty} (x_n, x) = \liminf_{n\to\infty} (x_n, x) \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \, \|x\| = \|x\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

e quindi la (4.4). Passiamo all'ultima affermazione. Valga la (4.5). Tenendo conto della (4.4) appena dimostrata, abbiamo $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$. Quindi, usando la formula del binomio, otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 - 2 \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(x_n, x) = \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x,x) = 0$$

cioè la convergenza forte. □

4.6. Osservazione. Notiamo che l'unicità del limite debole e la (4.4) nel caso degli spazi normati non sono affatto ovvie, anche in ipotesi di completezza. Tuttavia esse sono vere, come vedremo in seguito. Al contrario, l'ultima affermazione della Proposizione 4.5 è falsa nel caso di un generico spazio normato, anche in ipotesi di completezza. Essa vale per una classe particolare di spazi normati, che comprende, ad esempio, gli spazi $L^p(\Omega)$ e $W^{k,p}(\Omega)$, purché $p \in (1,+\infty)$.

4.7. Proposizione. *Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathcal{L}(V;W)$ e si supponga che $x_n \rightharpoonup x$ in V. Allora $Lx_n \rightharpoonup Lx$ in W.* $\square$

Dimostrazione. Sia $f \in W^*$. Allora $f \circ L \in V^*$. Deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, Lx_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f \circ L, x_n \rangle = \langle f \circ L, x \rangle = \langle f, Lx \rangle.$$

Quindi $Lx_n \rightharpoonup Lx$ in W. $\square$

4.8. Corollario. *Siano V e W due spazi normati tali che $V \subseteq W$ con immersione continua. Allora $x_n \rightharpoonup x$ in V implica $x_n \rightharpoonup x$ in W.* $\square$

4.9. *Esercizio.* Se $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \rightharpoonup y$ allora $\alpha x_n + \beta y_n \rightharpoonup \alpha x + \beta y$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

4.10. *Esercizio.* Si dimostri che, se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$, la convergenza debole in $C^0(\overline{\Omega})$ implica la convergenza puntuale allo stesso limite.

4.11. *Esercizio.* Sia $(V_1, \ldots, V_N)$ una N-upla di spazi normati e sia V il loro prodotto. Siano poi $\{x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^N)\}$ una successione di elementi di V e $x = (x^1, \ldots, x^n) \in V$. Dimostrare che $\{x_n\}$ converge debolmente a x in V se e solo se $\{x_n^i\}$ converge debolmente a x^i in V_i per $i = 1, \ldots, N$.

4.12. *Esercizio.* Siano V uno spazio normato, $\{x_n\}$ una successione di elementi di V e $x \in V$. Si supponga la successione limitata in V e che esista un sottoinsieme $S^* \subseteq V^*$ denso in V^* tale che

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle \quad \text{per ogni } f \in S^*.$$

Si dimostri che $x_n \rightharpoonup x$ in V.

4.13. *Esercizio.* Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $1 \le p < +\infty$. Si dimostri che

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\, v\, d\mu = \int_\Omega u\, v\, d\mu \quad \text{per ogni } v \in L^{p'}(\Omega) \tag{4.6}$$

ove p' è l'esponente coniugato di p.

4.14. *Esercizio.* Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $p, q, r \in [1,+\infty)$ tali che $1/r = 1/p + 1/q$. Si dimostri che, se $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ e $\varphi \in L^q(\Omega)$, allora $u_n\varphi \rightharpoonup u\varphi$ in $L^r(\Omega)$.

4.15. *Esercizio.* Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $p \in [1,+\infty)$. Si supponga che $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ in $L^p(\Omega)$ e che $u_n \le v_n$ q.o. per ogni n. Si dimostri che $u \le v$ q.o.

4.16. *Esercizio.* Siano $p \in [1,+\infty)$ e $u \in L^p(0,1)$. Sia inoltre λ la media di u in $(0,1)$. Sia infine $\widetilde{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ il prolungamento 1-periodico di u, cioè la funzione definita (q.o.) dalla formula $\widetilde{u}(x) = u(x - [x])$ ove $[\,\cdot\,]$ è la parte intera. Si dimostri che $\widetilde{u}(nx) \rightharpoonup \lambda$ in $L^p(a,b)$ per ogni intervallo limitato (a,b). In particolare la convergenza debole in L^p non implica la convergenza q.o. Si consiglia di tener conto degli esercizi precedenti e di considerare i casi seguenti: *i)* $p \in (1,+\infty)$ e $\lambda = 0$; *ii)* $p \in (1,+\infty)$ e λ qualunque; *iii)* $p = 1$ e λ qualunque.

4.17. *Esercizio.* Si dimostri che valgono le convergenze deboli $\sin nx \rightharpoonup 0$ e $\sin^2 nx \rightharpoonup 1/2$ in $L^p(a,b)$ per ogni $p \in [1,+\infty)$ e ogni intervallo (a,b) limitato.

4.18. *Esercizio.* Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $f(t) = O(|t|)$ per $|t| \to +\infty$ e $p \in [1, +\infty)$. Si dimostri che la formula $(F(v))(x) = f(v(x))$ per q.o. $x \in (0,1)$ definisce un'applicazione F di $L^p(0,1)$ in sé continua. Si supponga inoltre che f non sia un polinomio di grado ≤ 1 e si costruisca una successione $\{v_n\}$ di elementi di $L^p(0,1)$ che converge debolmente a una certa v in tale spazio tale che la successione corrispondente $\{F(v_n)\}$ non converga a $F(v)$ in $L^p(0,1)$. Ciò mostra che F è sequenzialmente continua rispetto alle convergenze deboli solo nel caso in cui f è un polinomio di grado ≤ 1. Si consiglia di sfruttare la formula di Taylor per f vicino a un punto t_0 in cui $f''(t_0) \ne 0$ e i due esercizi precedenti.

Notiamo che, spesso, ad esempio in situazioni simili a quelle dell'Esercizio 4.16, si ha convergenza debole in $L^p(\Omega)$ ma non convergenza q.o. Ciò nonostante i due tipi di convergenza sono "compatibili", come afferma il risultato che enunciamo di seguito senza dimostrazione.

4.19. Proposizione. *Siano* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura* σ*-finito e* $1 \le p < +\infty$. *Se*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{in } L^p(\Omega) \quad \textit{e} \quad \lim_{n\to\infty} u_n(x) = v(x) \quad \textit{q.o.}$$

allora $u = v$ *q.o.* $\square$

5. Compattezza debole sequenziale negli spazi di Hilbert

Più avanti dimostreremo che, addirittura in un generico spazio normato, ogni successione debolmente convergente è limitata. Qui dimostriamo, limitatamente al caso hilbertiano, che ogni successione limitata ha una sottosuccessione debolmente convergente. Abbiamo infatti il seguente

5.1. Teorema (di compattezza debole sequenziale). *Siano* H *uno spazio di Hilbert. Allora da ogni successione* $\{x_n\}$ *limitata di elementi di* H *si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente a un punto di* H.

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ la successione in questione e sia $M \ge 0$ tale che $\|x_n\| \le M$ per ogni n. Usiamo, come nella dimostrazione del Teorema di Ascoli, il metodo diagonale di Cantor. Osserviamo preliminarmente che, per ogni n fissato, si ha $|(x_n, x_k)| \le \|x_n\|\,\|x_k\| \le M^2$ per ogni k, per cui si può applicare il Teorema di Bolzano-Weierstrass a ciascuna di tali successioni e, ovviamente, anche a ogni sottosuccessione eventualmente estratta. Allora, procedendo ricorsivamente, si estraggono dalla successione data infinite sottosuccessioni $\{x_{1,k}\}$, $\{x_{2,k}\}$ ..., ciascuna essendo sottosuccessione della precedente, in modo che tutti i limiti $\lim_{k\to\infty}(x_n, x_{n,k})$ esistano finiti. Consideriamo allora la successione $\{x_{k,k}\}$: questa è una sottosuccessione della successione data e, a meno di un numero finito di termini, anche una sottosuccessione di ciascuna delle estratte, così che, per ogni n, il limite $\lim_{k\to\infty}(x_n, x_{k,k})$ esiste finito. Introduciamo i funzionali $f_k \in H^*$ definiti da $\langle f_k, x\rangle = (x, x_{k,k})$ per $x \in H$ e l'insieme $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ immagine della successione $\{x_n\}$, osservando che $\|f_k\|_* = \|x_{k,k}\| \le M$. Per costruzione, la successione $\{\langle f_k, x\rangle\}$ converge se $x \in S$. La stessa cosa avviene allora se $x \in \operatorname{span} S$ dato che ogni f_k è lineare. Posto $H_0 = \overline{\operatorname{span} S}$, la chiusura di $\operatorname{span} S$, sia $x \in H_0$. Verifichiamo che anche in questo caso $\{\langle f_k, x\rangle\}$ converge. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora esiste $y \in \operatorname{span} S$ tale che $\|x - y\| \le \varepsilon$. Per k, m arbitrari abbiamo

$$|\langle f_k, x\rangle - \langle f_m, x\rangle| \le |\langle f_k, x - y\rangle| + |\langle f_k, y\rangle - \langle f_m, y\rangle| + |\langle f_m, y - x\rangle| \le 2M\varepsilon + |\langle f_k, y\rangle - \langle f_m, y\rangle|.$$

Siccome la successione $\{\langle f_k, y\rangle\}$ converge dato che $y \in \operatorname{span} S$, essa è di Cauchy e l'ultimo addendo della catena scritta è $\le \varepsilon$ per k, m abbastanza grandi. Ciò mostra che anche $\{\langle f_k, x\rangle\}$ è di Cauchy e quindi convergente. Sia infine $x \in H$. Dette x' e x'' le sue proiezioni su H_0 e $H_0^\perp$, abbiamo subito $\langle f_k, x\rangle = \langle f_k, x'\rangle + \langle f_k, x''\rangle = \langle f_k, x'\rangle + (x'', x_{k,k}) = \langle f_k, x'\rangle$ dato che $x_{k,k} \in S \subseteq H_0$. Dunque $\{\langle f_k, x\rangle\}$ converge. A questo punto ha senso porre $f(x) = \lim_{k\to\infty}\langle f_k, x\rangle$ per $x \in H$. Si vede immediatamente che f è lineare. Inoltre f è anche limitato in quanto $|f(x)| \le M\|x\|$ dato che l'analoga disuguaglianza vale per tutti gli f_k. Per il Teorema 1.21 di Riesz esiste dunque $y \in H$ tale che $\langle f, x\rangle = (x, y)$ per ogni $x \in H$. Abbiamo allora

$$\lim_{k\to\infty}(x, x_{k,k}) = \lim_{k\to\infty}\langle f_k, x\rangle = \langle f, x\rangle = (x, y) \quad \text{per ogni } x \in H$$

cioè la successione $\{x_{k,k}\}$ converge debolmente a y. $\square$

Diamo due applicazioni del Teorema di compattezza debole mettendoci in ambito reale per semplicità. La prima è una dimostrazione diversa di una parte del Teorema di Lax-Milgram, valida in un caso particolare; la seconda è una tecnica di regolarizzazione di tipo astratto.

5.2. Applicazione. Supponendo lo spazio di Hilbert H separabile, dimostriamo in altro modo la parte del Teorema 1.24 di Lax-Milgram riguardante l'esistenza. Nell'ipotesi fatta vale la proprietà seguente (si veda ad esempio la dimostrazione del Teorema 2.22):

esiste una successione non decrescente $\{V_n\}$ di sottospazi di dimensione finita la cui unione è densa in H.

Il procedimento che utilizziamo è detto *metodo di Faedo-Galerkin* ed è usato spesso sia per scopi teorici in vista di risultati di esistenza sia nelle applicazioni di tipo numerico, eventualmente in qualche forma variata, ad esempio senza l'ipotesi di monotonia della successione di sottospazi oppure con una famiglia di sottospazi dipendenti da un parametro reale anziché intero.

Seguendo le notazioni del Teorema 1.24, introduciamo la successione di problemi appossimati seguenti: per n fissato, trovare $u_n \in V_n$ che verifica

$$a(u_n, v) = \langle f, v\rangle \quad \text{per ogni } v \in V_n . \tag{5.1}$$

L'esistenza di una soluzione del problema (1.8) si ottiene sviluppando i passi seguenti: *i*) il problema approssimato (5.1) ha almeno un soluzione u_n (unica in realtà); *ii*) la successione $\{u_n\}$ è limitata e, di conseguenza, ha una sottosuccessione debolmente convergente; *iii*) il limite debole di cui al punto precedente risolve il problema (1.8).

Risolviamo il problema (5.1) presentandolo nella forma di sistema lineare. Siccome n è fissato, non sempre evidenziamo la dipendenza da n di certe quantità. Posto $m = \dim V_n$, sia $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base di V_n. Le "vere incognite" del problema sono allora i coefficienti λ_j della rappresentazione della soluzione u_n nella forma $u_n = \sum_{j=1}^m \lambda_j w_j$. La (5.1) diventa

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j = \langle f, w_i\rangle \quad \text{per } i = 1, \ldots, m$$

ove abbiamo posto $a_{ij} = a(w_j, w_i)$ per $i, j = 1, \ldots, m$. Infatti è equivalente richiedere la (5.1) per ogni $v \in V_n$ oppure solo per gli elementi della base. Per dimostrare che il sistema lineare ottenuto è risolubile, verifichiamo che la matrice $A = (a_{ij})$ è definita positiva. Sia dunque $\xi \in \mathbb{R}^m$ non nullo. Posto $v = \sum_{j=1}^m \xi_j w_j$, si ha $v \neq 0$ da cui

$$\xi^T A\, \xi = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, \xi_j \xi_i = \sum_{i,j=1}^{m} a(\xi_j w_j, \xi_i w_i) = a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 > 0.$$

Allora la matrice A è anche invertibile e il problema (5.1) ha una e una sola soluzione. Passiamo a *ii*), che è immediato. Per ogni n abbiamo infatti

$$\alpha \|u_n\|^2 \leq a(u_n, u_n) = \langle f, u_n\rangle \leq \|f\|_* \, \|u_n\| \quad \text{da cui} \quad \|u_n\| \leq \frac{1}{\alpha}\, \|f\|_*$$

per cui il Teorema 5.1 di compattezza debole assicura l'esistenza di una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente debolmente a un certo $u \in H$. Dimostriamo allora quanto affermato in *iii*) : l'elemento u risolve la (1.8). Sia dapprima v appartenente all'unione dei sottospazi V_n. Sia allora n_0 tale che $v \in V_{n_0}$ e sia k_0 tale che $n_{k_0} \geq n_0$. Allora $V_{n_k} \supseteq V_{n_0}$ se $k \geq k_0$ e possiamo scrivere

$$a(u_{n_k}, v) = \langle f, v\rangle \quad \text{per ogni } k \geq k_0 \quad \text{da cui} \quad a(u, v) = \langle f, v\rangle$$

per definizione di convergenza debole, in quanto l'applicazione $z \mapsto a(z, v)$ di H in $\mathbb{R}$ è un funzionale lineare e continuo su H. Sia ora $v \in H$. Siccome l'unione dei V_n è densa, possiamo trovare una successione $\{v_i\}$ di elementi di tale unione che converge (fortemente, e basterebbe debolmente) a v. Abbiamo allora

$$a(u, v_i) = \langle f, v_i\rangle \quad \text{per ogni } i \quad \text{da cui} \quad a(u, v) = \langle f, v\rangle$$

cioè u risolve (1.8).

5.3. Osservazione. Senza alcun aggravio di ipotesi vediamo che *tutta la successione* $\{u_n\}$ converge a u. Anzi, la convergenza è forte. A tale scopo osserviamo che, per ogni n, se $v \in V_n$, si ha $u_n - v \in V_n$, oltre a $u_n - v \in V$, e quindi

$$a(u_n - u, u_n - v) = a(u_n, u_n - v) - a(u, u_n - v) = \langle f, u_n - v \rangle - \langle f, u_n - v \rangle = 0.$$

Segue allora

$$\begin{aligned}\alpha \|u_n - u\|^2 &\le a(u_n - u, u_n - u) = a(u_n - u, u_n - v) + a(u_n - u, v - u) \\ &= a(u_n - u, v - u) \le M \|u_n - u\| \, \|v - u\|\end{aligned}$$

ove M è la norma della forma a. Deduciamo che

$$\|u_n - u\| \le \frac{M}{\alpha} \|v - u\| \quad \text{per ogni } v \in V_n \quad \text{da cui} \quad \|u_n - u\| \le \frac{M}{\alpha} \|P_n u - u\| \tag{5.2}$$

ove $P_n u$ è la proiezione ortogonale di u sul sottospazio V_n. Ma, siccome la successione $\{V_n\}$ è non decrescente e la sua unione è densa in V, la successione $\{P_n u\}$ converge fortemente a u (Proposizione 2.9), da cui la convergenza forte a u anche della successione $\{u_n\}$.

5.4. Applicazione numerica. Descriviamo un'approssimazione numerica (con "elementi finiti conformi") di un problema ellittico del tipo descritto nell'Osservazione 1.26 in una situazione di coercività: prendiamo dunque $H = H_0^1(\Omega)$ e, in ipotesi di limitatezza ed ellitticità uniforme sulla matrice A, scegliamo $b = 0$ e $c = 0$. Stiamo pertanto abbinando la condizione al bordo (di "Dirichlet omogenea") $u|_{\partial\Omega} = 0$ all'equazione $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$ (diciamo $f \in L^2(\Omega)$). Supponiamo inoltre che Ω sia un poligono di $\mathbb{R}^2$ e ad ogni $h \in (0,1)$ associamo una famiglia finita $\mathcal{T}_h$ ("triangolazione" di Ω) di sottoinsiemi di Ω verificante le condizioni seguenti: *i)* ogni $T \in \mathcal{T}_h$ è un triangolo aperto e l'unione delle chiusure dei $T \in \mathcal{T}_h$ è $\overline{\Omega}$; *ii)* le chiusure di due triangoli $T_i \in \mathcal{T}_h$ non disgiunte hanno in comune esattamente un lato oppure un vertice dei T_i; *iii)* tutti i lati di ogni $T \in \mathcal{T}_h$ hanno lunghezza $\le h$. A $\mathcal{T}_h$ associamo il sottospazio V_h (di dimensione finita) di H costituito dalle funzioni $v \in H$ le cui restrizioni $v|_T$ sono polinomi di grado ≤ 1 per ogni $T \in \mathcal{T}_h$. Anche se non siamo nella situazione della successione crescente $\{V_n\}$ ipotizzata sopra, abbiamo: *i)* il problema approssimato, detto "discreto", ottenuto rimpiazzando H con V_h ha una e una sola soluzione u_h (stessa dimostrazione); *ii)* vale l'analoga della (5.2) (stessa dimostrazione) e da qui si può dedurre (non banale) che la famiglia $\{u_h\}$ converge fortemente in $H^1(\Omega)$ alla soluzione u del problema "continuo" per $h \to 0$ se la famiglia $\{\mathcal{T}_h\}$ di triangolazioni verifica la condizione seguente di "non assottigliamento": esiste $\alpha > 0$ tale che, per ogni h e ogni $T \in \mathcal{T}_h$, tutti gli angoli di T hanno ampiezza $\ge \alpha$. Questo metodo ha i pregi seguenti: *i)* si presta a metodi di triangolazione automatica; *ii)* è facile scegliere una base $\{w_i, \dots, w_m\}$ di V_h in modo che la matrice associata al problema discreto sia facilmente calcolabile e sparsa (cioè a prevalenza di elementi nulli). Siano infatti y_i, $i = 1, \dots, m$, i vertici dei triangoli di $\mathcal{T}_h$ che non stanno su $\partial\Omega$. Per $i = 1, \dots, m$ definiamo allora: w_i è l'unica funzione di V_h che verifica $w_i(y_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker). □

L'applicazione successiva necessita di una costruzione preliminare: la cosiddetta *terna hilbertiana*. Siano V e H due spazi di Hilbert reali. Usiamo le notazioni abbreviate seguenti:

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_V, \quad |\cdot| = \|\cdot\|_H, \quad (\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_H \quad \text{e} \quad \langle \cdot,\cdot \rangle = {}_{V^*}\langle \cdot,\cdot \rangle_V. \tag{5.3}$$

Si supponga ora che: *i)* V *sia un sottospazio vettoriale di* H *denso in* H; *ii)* *l'immersione di* V *in* H *sia continua*, il che equivale all'esistenza di una costante c tale che $|v| \le c\|v\|$ per ogni $v \in V$. Allora, se $u \in H$ e $v \in V$, si ha $|(u,v)| \le |u|\,|v| \le c|u|\,\|v\|$, per cui il funzionale lineare $I_u : V \to \mathbb{R}$ che a $v \in V$ associa (u,v) è continuo, cioè appartiene a V^*. Inoltre l'applicazione $I : H \to V^*$ che a ogni $u \in H$ associa I_u è lineare e iniettiva, l'iniettività essendo vera perché $I_u = 0$ implica che u sia ortogonale a V in H e dunque sia nullo, data la densità di V in H. Quindi possiamo *interpretare* I *come un'immersione*, cosa che facciamo, e abbiamo

$$\langle u, v \rangle = (u, v) \quad \text{per ogni } u \in H \text{ e } v \in V. \tag{5.4}$$

Risulta pertanto giustificata la definizione seguente, nella quale le notazioni (5.3) sono in vigore.

5.5. Definizione. *Una terna hilbertiana è una terna (V, H, V^*) verificante le condizioni seguenti: i) V e H sono spazi di Hilbert e V^* è il duale di V ; ii) V è un sottospazio vettoriale di H denso in H ; iii) l'immersione di V in H è continua; iv) H è identificato a un sottospazio di V^* mediante la condizione seguente: il generico elemento $u \in H$ denota anche il funzionale $v \mapsto (u, v)$, $v \in V$.* □

Osserviamo che anche l'immersione di H in V^* è continua. Infatti, se c denota la norma dell'immersione continua di V in H , abbiamo

$$|\langle u, v\rangle| \le |u|\,|v| \le c|u|\,\|v\| \quad \text{da cui} \quad \|u\|_* \le c|u| \quad \text{per ogni } u \in H$$

e dimostreremo che H è denso in V^* . Dunque su V coesistono due topologie, la prima più fine della seconda: quelle indotte dalla norma $\|\cdot\|$ e dalla restrizione a V della norma $|\cdot|$. Allo stesso modo su H coesistono due topologie, la prima più fine della seconda: quelle indotte dalla norma $|\cdot|$ e dalla restrizione ad H della norma $\|\cdot\|_*$, duale in V^* della norma $\|\cdot\|$. Notiamo infine che la (5.4) con $u = v \in V$ implica $|v|^2 = (v, v) = \langle v, v\rangle \le \|v\|_*\,\|v\|$. Concludiamo che

$$|v| \le \|v\|_*^{1/2}\,\|v\|^{1/2} \quad \text{per ogni } v \in V \tag{5.5}$$

che è una disuguaglianza di tipo interpolazione.

5.6. Osservazione. Notiamo che nella costruzione della terna hilbertiana (V, H, V^*) è in qualche modo nascosta l'identificazione di H con H^* tramite l'isomorfismo $\mathcal{R}_H$ di Riesz dello spazio H . Infatti, se conserviamo la notazione I per l'immersione di H in V^* , vediamo che, per $u \in H$, il funzionale $Iu \in V^*$ coincide con la restrizione a V del funzionale $\mathcal{R}_H u \in H^*$. Se dunque introduciamo l'applicazione di restrizione $R : H^* \to V^*$ data da $f \mapsto f|_V$, abbiamo $I = R \circ \mathcal{R}_H$ e l'iniettività e la continuità (già viste) di I seguono ora da quelle di $\mathcal{R}_H$ e di R . Si scrive dunque spesso $V \subseteq H = H^* \subseteq V^*$, l'uguaglianza essendo l'identificazione tramite $\mathcal{R}_H$ e la seconda inclusione essendo frutto dell'identificazione di H^* a un sottospazio di V^* tramite R .

Cogliamo anche l'occasione per osservare che non è lecito identificare V con V^* tramite l'isomorfismo di Riesz $\mathcal{R}_V$ di V , se non in situazioni estreme e sostanzialmente prive di interesse. Infatti V , in quanto sottospazio di H , è già identificato ad un sottospazio di V^* e l'identificazione di V con V^* tramite questo altro altro isomorfismo deve essere compatibile con quella già effettuata, vale a dire, deve essere $\mathcal{R}_V = I \circ \iota$ ove ι è l'immersione di V in H . Ma ciò implica, in particolare, che ι sia suriettiva, data la suriettività di $\mathcal{R}_V$. Dunque V e H devono essere lo stesso spazio vettoriale. Se poi c è la costante introdotta sopra, per ogni $v \in V$ deve valere la relazione $\|v\| = \|v\|_* \le c|v|$, che unita alla disuguaglianza $|v| \le c\|v\|$ implica che le due norme $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ sono equivalenti. Dunque V e H devono avere anche la stessa topologia.

5.7. Esempio. Un esempio tipico di terna hilbertiana si ottiene prendendo $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ e $V = H^k(\mathbb{R}^d)$ con $k > 0$. In tal caso, se $\mathcal{R}$ è l'isomorfismo di Riesz di V , l'equazione $\mathcal{R}u = \varphi$ con $\varphi \in V^*$ assegnato è un'equazione alle derivate parziali in senso generalizzato. In particolare, se $\varphi \in H$, si ottiene un'equazione "concreta". Ricordiamo che in V si possono scegliere prodotti scalari diversi da quello standard ma ad esso equivalenti. In tal caso l'equazione a derivate parziali che si ottiene può avere coefficienti non costanti.

5.8. Perturbazioni singolari astratte. Sia (V, H, V^*) una terna hilbertiana. Denotiamo con $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(V; V^*)$ l'isomorfismo di Riesz dello spazio V e introduciamo un parametro $\varepsilon > 0$ che poi faremo tendere a 0 . Per ogni $f \in V^*$ consideriamo il problema di trovare $u_\varepsilon \in V$ verificante

$$u_\varepsilon + \varepsilon^2 \mathcal{R} u_\varepsilon = f \quad \text{cioè} \quad (u_\varepsilon, v) + \varepsilon^2 (\!(u_\varepsilon, v)\!) = \langle f, v\rangle \quad \text{per ogni } v \in V \tag{5.6}$$

ove $(\!(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\!)$ è il prodotto scalare di V . Usando il Corollario 1.23, vediamo immediatamente che il problema considerato ha una e una sola soluzione. Infatti la forma $a_\varepsilon : V \times V \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $a_\varepsilon(u,v) = (u,v) + \varepsilon^2((u,v))$ è ovviamente ben definita, bilineare e simmetrica ed è anche continua e coerciva in quanto

$$|a_\varepsilon(u,v)| \le |u|\,|v| + \varepsilon^2\|u\|\,\|v\| \le (c^2+\varepsilon^2)\|u\|\,\|v\| \quad \text{e} \quad a_\varepsilon(v,v) = |v|^2 + \varepsilon^2\|v\|^2 \ge \varepsilon^2\|v\|^2$$

per ogni $u, v \in V$, ove c è sempre la norma dell'immersione continua di V in H. Ci proponiamo di dimostrare che, per $\varepsilon \to 0$, si hanno le convergenze forti

$$u_\varepsilon \to f \text{ in } V^* \text{ se } f \in V^*, \quad u_\varepsilon \to f \text{ in } H \text{ se } f \in H \quad \text{e} \quad u_\varepsilon \to f \text{ in } V \text{ se } f \in V. \tag{5.7}$$

Applichiamo $\mathcal{R}^{-1}$ all'equazione, osservando che tutti i termini dell'uguaglianza ottenuta appartengono a V, e moltiplichiamo scalarmente per u_ε nel prodotto scalare di H. Otteniamo

$$(u_\varepsilon, \mathcal{R}^{-1}u_\varepsilon) + (u_\varepsilon, \varepsilon^2 u_\varepsilon) = (u_\varepsilon, \mathcal{R}^{-1}f) \quad \text{cioè} \quad \langle \mathcal{R}v_\varepsilon, v_\varepsilon\rangle + \varepsilon^2|u_\varepsilon|^2 = \langle u_\varepsilon, \mathcal{R}^{-1}f\rangle \quad \text{ove} \quad v_\varepsilon = \mathcal{R}^{-1}u_\varepsilon.$$

Ma $\langle \mathcal{R}v_\varepsilon, v_\varepsilon\rangle = ((v_\varepsilon, v_\varepsilon)) = \|v_\varepsilon\|^2 = \|u_\varepsilon\|_*^2$ e $\langle u_\varepsilon, \mathcal{R}^{-1}f\rangle \le \|u_\varepsilon\|_* \|\mathcal{R}^{-1}f\| = \|u_\varepsilon\|_*\,\|f\|_*$. Quindi

$$\|u_\varepsilon\|_*^2 + \varepsilon^2|u_\varepsilon|^2 \le \|u_\varepsilon\|_*\,\|f\|_* \quad \text{da cui} \quad \|u_\varepsilon\|_*^2 \le \|u_\varepsilon\|_*\,\|f\|_* \quad \text{da cui} \quad \|u_\varepsilon\|_* \le \|f\|_*. \tag{5.8}$$

Riprendendo la prima delle disuguaglianze (5.8) e tenendo conto dell'ultima, deduciamo

$$\varepsilon^2|u_\varepsilon|^2 \le \|u_\varepsilon\|_*\,\|f\|_* \le \|f\|_*^2 \quad \text{da cui} \quad \varepsilon|u_\varepsilon| \le \|f\|_*. \tag{5.9}$$

Sia ora $\{\varepsilon_n\}$ una qualunque successione infinitesima. Mostriamo che da questa possiamo estrarre una sottosuccessione $\{\varepsilon_{n_k}\}$ tale che la corrispondente successione ottenuta prendendo $\varepsilon = \varepsilon_{n_k}$ in u_ε converge a f in V^*. Allora, per la Proposizione A.1.9, o meglio a una sua variante ovvia in cui il parametro discreto n è sostituito dal parametro continuo ε, varrà la prima delle (5.7). Tuttavia, per semplificare le notazioni, scriviamo ε sia al posto di ε_n sia al posto di ε_{n_k}. Grazie al Teorema 5.1 di compattezza debole, abbiamo $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in V^* per una certa sottosuccessione e per un certo $u \in V^*$. Dimostriamo che $u = f$. Siccome $\mathcal{R}^{-1} \in \mathcal{L}(V^*; V)$ abbiamo $\mathcal{R}^{-1}u_\varepsilon \rightharpoonup \mathcal{R}^{-1}u$ in V (si ricordi il Corollario 4.8). D'altra parte, applicando $\mathcal{R}^{-1}$ alla (5.6) e tenendo conto della (5.9), deduciamo che

$$\mathcal{R}^{-1}f - \mathcal{R}^{-1}u_\varepsilon = \varepsilon^2 u_\varepsilon \quad \text{e} \quad \varepsilon^2|u_\varepsilon| \le \varepsilon\|f\|_*, \quad \text{da cui} \quad \mathcal{R}^{-1}u_\varepsilon \to \mathcal{R}^{-1}f \quad \text{in } H.$$

Concludiamo che $\mathcal{R}^{-1}u = \mathcal{R}^{-1}f$ e quindi che $u = f$. Dunque $u_\varepsilon \rightharpoonup f$ in V^*, sempre per la sottosuccessione estratta. Ma la (5.8) implica che $\limsup \|u_\varepsilon\|_* \le \|f\|_*$. Per la Proposizione 4.5 concludiamo che la convergenza è forte e quindi che vale la prima delle (5.7). Per ottenere la seconda, supponiamo $f \in H$ e scegliamo $v = u_\varepsilon$ nella seconda delle (5.6). Otteniamo subito

$$|u_\varepsilon|^2 + \varepsilon^2\|u_\varepsilon\|^2 = (f, u_\varepsilon) \quad \text{da cui} \quad |u_\varepsilon| \le |f| \tag{5.10}$$

imitando il ragionamento precedente. Ancora per il Teorema di compattezza debole, applicato ora allo spazio H, abbiamo $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in H per una certa sottosuccessione e per un certo $u \in H$. Ma ciò implica che $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ in V^* e quanto abbiamo già dimostrato continua a valere. Dunque $u = f$ e tutta la famiglia $\{u_\varepsilon\}$, e non solo la sottosuccessione, converge a f debolmente in H. Lo stesso ragionamento fatto sopra, appoggiato ora alla stima (5.10), mostra poi che la convergenza è forte. Supponiamo infine $f \in V$. Siccome $u_\varepsilon \in V$, abbiamo anche $\mathcal{R}u_\varepsilon = \varepsilon^{-2}(f - u_\varepsilon) \in V$ e possiamo applicare $\mathcal{R}$ a tutti i termini dell'equazione (5.6). Otteniamo $\mathcal{R}u_\varepsilon + \varepsilon^2\mathcal{R}(\mathcal{R}u_\varepsilon) = \mathcal{R}f$, cioè che $\mathcal{R}u_\varepsilon$ è la soluzione della stessa equazione (5.6) quando f è sostituito da $\mathcal{R}f$. Allora, siccome $\mathcal{R}f \in V^*$, possiamo applicare a $\mathcal{R}u_\varepsilon$ e a $\mathcal{R}f$ la prima delle (5.7) e concludere che $\mathcal{R}u_\varepsilon \to \mathcal{R}f$ in V^*. Applicando $\mathcal{R}^{-1}$, che è continuo, concludiamo che $u_\varepsilon \to f$ in V.

5.9. Osservazione. Riprendiamo la dimostrazione appena conclusa e deduciamo stime di stabilità o di controllo dell'instabilità e ordini di convergenza. Nell'ipotesi $f \in V^*$, dall'equazione segue che $\|u_\varepsilon\| = \|\mathcal{R}u_\varepsilon\|_* = \varepsilon^{-2}\|f - u_\varepsilon\|_*$. Allora tenendo conto delle (5.8–9) e riassumendo, abbiamo

$$\|u_\varepsilon\|_* \le \|f\|_*, \quad |u_\varepsilon| \le \varepsilon^{-1}\|f\|_* \quad \text{e} \quad \|u_\varepsilon\| \le 2\varepsilon^{-2}\|f\|_*. \tag{5.11}$$

Supponiamo ora $f \in H$. Dalle (5.10) deduciamo $|u_\varepsilon| \le |f|$ e $\varepsilon^2\|u_\varepsilon\|^2 \le |f|\,|u_\varepsilon| \le |f|^2$. Usando di nuovo l'equazione abbiamo $\|f - u_\varepsilon\|_* = \varepsilon^2\|\mathcal{R}u_\varepsilon\|_* = \varepsilon^2\|u_\varepsilon\|$. Combinando e riassumendo concludiamo che

$$|u_\varepsilon| \le |f|, \quad \|u_\varepsilon\| \le \varepsilon^{-1}|f| \quad \text{e} \quad \|f - u_\varepsilon\|_* \le \varepsilon|f|. \tag{5.12}$$

Supponiamo infine $f \in V$ e ricordiamo che $\mathcal{R}u_\varepsilon$ risolve l'equazione con f rimpiazzata da $\mathcal{R}f$. Allora la prima delle (5.11) vale per $\mathcal{R}u_\varepsilon$ e $\mathcal{R}f$, si ha cioè $\|u_\varepsilon\| \le \|f\|$ in quanto $\mathcal{R}$ è un'isometria. D'altra parte, posto $w_\varepsilon = \mathcal{R}^{-1}(f - u_\varepsilon)$, l'equazione equivale a $w_\varepsilon = \varepsilon^2 u_\varepsilon$ e deduciamo che

$$\|w_\varepsilon\|^2 = ((w_\varepsilon, w_\varepsilon)) = \langle \mathcal{R}w_\varepsilon, w_\varepsilon\rangle = \langle f - u_\varepsilon, w_\varepsilon\rangle = \varepsilon^2\langle \mathcal{R}u_\varepsilon, w_\varepsilon\rangle \le \varepsilon^2\|\mathcal{R}u_\varepsilon\|_*\,\|w_\varepsilon\| = \varepsilon^2\|u_\varepsilon\|\,\|w_\varepsilon\|.$$

Combinando abbiamo $\|f - u_\varepsilon\|_* = \|w_\varepsilon\| \le \varepsilon^2\|u_\varepsilon\| \le \varepsilon^2\|f\|$. Usiamo infine la (5.5) con $v = f - u_\varepsilon$. Siccome $\|f - u_\varepsilon\| \le 2\|f\|$, riunendo il tutto e riordinando, concludiamo che

$$\|u_\varepsilon\| \le \|f\|, \quad |f - u_\varepsilon| \le 2^{1/2}\varepsilon\|f\| \quad \text{e} \quad \|f - u_\varepsilon\|_* \le \varepsilon^2\|f\|. \tag{5.13}$$

5.10. Osservazione. Prendiamo una situazione concreta in cui V e H sono spazi funzionali e $\mathcal{R}$ è legato a un operatore differenziale. Una situazione tipica è quella dell'Esempio 1.25, nel quale leggiamo V anziché H. Abbiamo dunque $V = H^1_0(\Omega)$, ove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$, diciamo limitato oppure coincidente con l'intero spazio per fissare le idee. E basta già considerare il caso più semplice possibile in cui A è la matrice identità e $b = 0$. Riguardo a c, per avere casi semplici e concreti, prendiamo $c = 0$ o $c = 1$ a seconda che Ω sia limitato oppure l'intero spazio. Allora il prodotto scalare è quello usuale di V nel secondo caso e uno equivalente a quello nel primo (grazie alla disuguaglianza (1.18) di Poincaré). Se prendiamo $H = L^2(\Omega)$, possiamo costruire la terna hilbertiana e interpretare l'equazione (5.6) esattamente come abbiamo fatto nell'esempio citato: abbiamo un problema ai limiti per un'equazione alle derivate parziali, precisamente $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ e, nei due casi Ω limitato con $c = 0$ e $\Omega = \mathbb{R}^d$ con $c = 1$,

$$u_\varepsilon - \varepsilon^2\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{e} \quad (1+\varepsilon^2)u_\varepsilon - \varepsilon^2\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{in } \Omega$$

da intendersi in un certo senso generalizzato se $f \in V^*$ e nello stesso senso dell'esempio se invece $f \in H$. Pertanto abbiamo "perturbato" l'uguaglianza $u = f$ introducendo un operatore del secondo ordine, dunque di ordine superiore rispetto all'applicazione identica, da cui l'aggettivo "singolare". Ciò che si ottiene è un'approssimazione di f più regolare: infatti $u_\varepsilon \in V = H^1_0(\Omega)$.

5.11. Esempio. In riferimento all'osservazione precedente, consideriamo il caso in cui $\Omega = \mathbb{R}$ e $c = 1$ e come f prendiamo il funzionale $v \mapsto v(0)$, $v \in V$, che è detto *massa di Dirac*. Esso è un ben definito elemento di V^* in quanto V è immerso in $C^0_b(\mathbb{R})$ con continuità grazie all'Esercizio II.3.17. Calcoliamo esplicitamente u_ε. La seconda delle (5.6) si scrive

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_\varepsilon v\,dx + \varepsilon^2\int_{-\infty}^{+\infty}(u'_\varepsilon v' + u_\varepsilon v)\,dx = v(0) \quad \text{per ogni } v \in V \tag{5.14}$$

e sappiamo che essa ha in V una e una sola soluzione. Per determinare u_ε basta allora trovare condizioni necessarie che conducano ad unica funzione. Se $z \in C^\infty_c(0,+\infty)$, allora appartiene a V la funzione v definita dalle formule $v(x) = z(x)$ se $x > 0$ e $v(x) = 0$ se $x \le 0$. Abbiamo allora

$$\int_0^\infty \varepsilon^2 u'_\varepsilon z'\,dx = -\int_0^\infty (1+\varepsilon^2)u_\varepsilon z\,dx \quad \text{per ogni } z \in C^\infty_c(0,+\infty).$$

Ma ciò significa che $(1+\varepsilon^2)u_\varepsilon|_{(0,+\infty)}$ è la derivata debole di $\varepsilon^2 u'_\varepsilon|_{(0,+\infty)}$, cioè che la funzione u_ε risolve l'equazione differenziale $(\varepsilon^2 u'_\varepsilon)' = (1+\varepsilon^2)u_\varepsilon$ in $(0,+\infty)$. Siccome questa è un'equazione lineare a coefficienti costanti e le soluzioni deboli di equazioni di questo tipo sono tutte e sole le soluzioni classiche, deduciamo che la restrizione di u_ε a $(0,+\infty)$ è una combinazione lineare delle due funzioni esponenziali $x \mapsto \exp(\pm\lambda_\varepsilon x)$ ove $\lambda_\varepsilon = \varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^2)^{1/2}$. Dovendo essere $u_\varepsilon \in V$, deduciamo che deve valere una rappresentazione del tipo $u_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \exp(-\lambda_\varepsilon x)$ per $x>0$, ove $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ rimane da determinare. Analogamente si vede che $u_\varepsilon(x) = c'_\varepsilon \exp(\lambda_\varepsilon x)$ per $x<0$ per una certa $c'_\varepsilon \in \mathbb{R}$ e l'immersione $V \subset C^0_b(\mathbb{R})$ implica $c'_\varepsilon = c_\varepsilon$. Pertanto $u_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \exp(-\lambda_\varepsilon |x|)$ per $x \in \mathbb{R}$ e ora determiniamo c_ε. Ciò può essere fatto semplicemente scegliendo nella (5.14) una funzione $v \in V$ di tipo non ancora sfruttato, cioè verificante $v(0) \neq 0$, e una possibilità che minimizza i calcoli è prendere $v = v_\varepsilon$ data dalla formula $v_\varepsilon(x) = \exp(-\lambda_\varepsilon|x|)$. Infatti $u_\varepsilon = c_\varepsilon v_\varepsilon$ e $(v'_\varepsilon)^2 = \lambda_\varepsilon^2 v_\varepsilon^2$, per cui si trova $c_\varepsilon(1+\varepsilon^2\lambda_\varepsilon^2+\varepsilon^2)I_\varepsilon = 1$, dove I_ε è l'integrale di v_ε^2, cioè $1/\lambda_\varepsilon$. Concludiamo che $c_\varepsilon = (2\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{1/2})^{-1}$. Notiamo che la convergenza $u_\varepsilon \to f$ in V^* significa

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|v\|=1} |\langle u_\varepsilon, v\rangle - \langle f, v\rangle| = 0 \quad \text{cioè} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|v\|_{1,2}=1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} c_\varepsilon\, e^{-\lambda_\varepsilon|x|}\, v(x)\, dx - v(0) \right| = 0$$

il che non è banale da dimostrare direttamente.

5.12. Osservazione. Il discorso astratto del punto 5.8 può proseguire nella direzione di convergenze in norme via via più forti, in ipotesi su f corrispondentemente più restrittive: prima $f \in V$ e $\mathcal{R}f \in H$, poi $f \in V$ e $\mathcal{R}f \in V$, eccetera. Ad esempio, nella prima delle due ipotesi abbiamo $\mathcal{R}u_\varepsilon \to \mathcal{R}f$ in H, come chiaramente emerge dall'ultima parte della dimostrazione fatta sopra. Nel caso concreto dell'osservazione precedente, grazie ai risultati di regolarità per le equazioni di tipo ellittico, procedere in questo modo significa supporre f appartenente allo spazio di Sobolev $H^k(\mathbb{R}^d)$ con k via via più elevato e a ottenere la convergenza nello stesso spazio.

5.13. *Esercizio.* Siano $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e k un intero positivo. Usare direttamente la tecnica delle perturbazioni singolari (cioè non l'osservazione precedente) per costruire una famiglia $\{u_\varepsilon\}$ di funzioni appartenenti ad $H^k(\mathbb{R}^d)$ che converge a f in $L^2(\mathbb{R}^d)$ per $\varepsilon \to 0^+$.

Capitolo 5
Il Teorema di Hahn-Banach

Partiamo da un esempio che mostra che esistono spazi vettoriali topologici, anche apparentemente "belli", il cui duale è estremamente povero. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ e sia $\mathbb{M}(\Omega)$ lo spazio delle (classi di) funzioni misurabili $v : \Omega \to \mathbb{K}$ munito della metrica definita da

$$d(u,v) = \int_\Omega \tanh |u(x) - v(x)| \, dx, \quad u,v \in \mathbb{M}(\Omega).$$

Effettivamente d è una metrica e $\mathbb{M}(\Omega)$ diventa addirittura sia uno spazio metrico completo sia uno spazio vettoriale topologico. Ebbene, l'unico funzionale $f : \mathbb{M}(\Omega) \to \mathbb{K}$ lineare e continuo è il funzionale nullo. Siccome niente di quanto abbiamo detto è banale da giustificare, preferiamo soprassedere: ci premeva solo andare un poco oltre una semplice affermazione.

L'esistenza di funzionali lineari e continui non banali non è dunque un problema di poco conto: essa non può infatti dipendere dalla sola struttura di spazio vettoriale topologico. Negli spazi normati le cose vanno molto meglio, grazie al Teorema di Hahn-Banach, caposaldo dell'Analisi Funzionale e argomento centrale del capitolo. Benché le sue applicazioni possano essere estese a una categoria più vasta di quella degli spazi normati, noi ci limiteremo a quest'ultima.

Per meglio mettere in evidenza il ruolo del Teorema di Hahn-Banach, presentiamo in questo stesso capitolo un numero consistente di applicazioni. Ciò ci porta a introdurre una quantità di concetti, per alcuni dei quali diamo anche qualche elemento dello sviluppo della relativa teoria.

1. Forma analitica del Teorema di Hahn-Banach

Vari problemi dell'Analisi Funzionale dipendono più precisamente dalla possibilità di estendere a tutto lo spazio ambiente funzionali definiti solo in un sottospazio vettoriale. Nel caso hilbertiano tutto va bene: addirittura gli operatori possono essere estesi grazie al Teorema delle proiezioni. Vediamo in concreto come si possa porre il problema e risolverlo in tale caso.

Siano H e H' due spazi di Hilbert, H_0 un sottospazio di H e $L : H_0 \to H'$ un operatore lineare e continuo. Innanzi tutto, sfruttando la completezza di H', è possibile estendere (in modo unico) L a un operatore lineare e continuo definito sulla chiusura di H_0 grazie alla Proposizione III.1.12. Per non complicare le notazioni supponiamo che già H_0 sia chiuso. Allora detto P l'operatore di proiezione di H su H_0, $L \circ P$ è un operatore lineare e continuo da H in H' che prolunga L.

Nel caso degli spazi normati, invece, non vi è un metodo generale di prolungamento degli operatori. Tuttavia almeno i funzionali, cioè gli operatori a valori nello spazio degli scalari, si possono prolungare se si accetta l'assioma della scelta. Enunciamo e dimostriamo il Teorema di Hahn-Banach in una forma sufficientemente generale ma relativa al caso degli spazi reali. Di seguito vediamo il caso complesso e le numerose applicazioni.

1.1. Teorema (di Hahn-Banach, caso reale). *Siano V uno spazio vettoriale reale, V_0 un suo sottospazio vettoriale e $\varphi \in \operatorname{Hom}(V_0;\mathbb{R})$. Sia inoltre $p : V \to \mathbb{R}$ una funzione subadditiva e positivamente omogenea, cioè verificante*

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \text{e} \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{per ogni } x,y \in V \text{ e } \lambda > 0 . \tag{1.1}$$

Se $\varphi(v) \le p(v)$ per ogni $v \in V_0$, allora esiste $f \in \operatorname{Hom}(V;\mathbb{R})$ che prolunga φ e verifica la disuguaglianza $f(x) \le p(x)$ per ogni $x \in V$. □

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso particolare in cui $V = \mathrm{span}(V_0 \cup \{x_0\})$ (con la notazione (I.1.1)) ove x_0 è un punto di V non appartenente a V_0. Allora ogni $x \in V$ si scrive come $x = v + tx_0$ per una e una sola coppia $(v,t) \in V_0 \times \mathbb{R}$. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ possiamo allora definire $f_c : V \to \mathbb{R}$ mediante la formula $f_c(v+tx_0) = \varphi(v)+ct$ e f_c risulta lineare, come si verifica senza difficoltà. Dimostriamo che si riesce a scegliere c in modo che $f_c(x) \le p(x)$ per ogni $x \in V$. A tale scopo osserviamo che

$$\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \le p(v_1 + v_2) \le p(v_1 - x_0) + p(v_2 + x_0) \quad \text{per ogni } v_1, v_2 \in V_0 .$$

Posto allora

$$\lambda_1 = \sup_{v_1 \in V_0} \{\varphi(v_1) - p(v_1 - x_0)\} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \inf_{v_2 \in V_0} \{p(v_2 + x_0) - \varphi(v_2)\}$$

si ha $\lambda_1 \le \lambda_2$. Mostriamo che, se $c \in [\lambda_1, \lambda_2]$, risulta $f_c(x) \le p(x)$ per ogni $x \in V$. Iniziamo dai punti $x = v \pm x_0$ con $v \in V_0$. Si ha $f_c(v - x_0) = \varphi(v) - c \le \varphi(v) - \lambda_1 \le p(v - x_0)$. Analogamente risulta $f_c(v + x_0) = \varphi(v) + c \le \varphi(v) + \lambda_2 \le p(v + x_0)$. Consideriamo ora i casi $x = v \pm tx_0$ con $v \in V_0$ e $t > 0$, sfruttando quanto abbiamo appena controllato. Osservato che $v/t \in V_0$ abbiamo nei due casi $f_c(v \pm tx_0) = tf_c(v/t \pm x_0) \le tp(v/t \pm x_0) = p(v \pm tx_0)$. Infine $f_c(v) = \varphi(v) \le p(v)$ per ogni $v \in V_0$. Dunque $f_c(x) \le p(x)$ per ogni $x \in V$ e la dimostrazione nel caso particolare considerato è conclusa.

Nel caso generale usiamo il Lemma di Zorn (si veda il Paragrafo A.3 per l'enunciato e la terminologia). Introduciamo l'insieme ordinato $(\mathcal{F}, \preceq)$ come segue

$$\mathcal{F} = \{f : \ f \text{ è un prolungamento lineare di } \varphi \text{ tale che } f(x) \le p(x) \text{ per ogni } x \in D(f)\}$$
$$\text{per } f, g \in \mathcal{F} \text{ diciamo che} \quad f \preceq g \quad \text{se e solo se} \quad g \text{ è un prolungamento di } f.$$

Precisamente $f \in \mathcal{F}$ se e solo se esiste un sottospazio vettoriale $D(f)$ di V che include V_0 tale che f appartenga a $\mathrm{Hom}(D(f); \mathbb{R})$ e verifichi $f|_{V_0} = \varphi$ e $f(x) \le p(x)$ per ogni $x \in D(f)$ e $f \preceq g$ significa precisamente che $D(f) \subseteq D(g)$ e $g|_{D(f)} = f$.

Innanzi tutto $\mathcal{F}$ non è vuoto in quanto $\varphi \in \mathcal{F}$ ed è chiaro che la relazione $\preceq$ è una relazione d'ordine parziale in $\mathcal{F}$. Verifichiamo che $\mathcal{F}$ è induttivo. Sia dunque $\mathcal{C}$ una catena di $\mathcal{F}$: dobbiamo costruirne un maggiorante $f_0 \in \mathcal{F}$. Consideriamo l'insieme $D(f_0) = \bigcup_{f \in \mathcal{C}} D(f)$. Verifichiamo che: *i)* $D(f_0)$ è un sottospazio vettoriale di V che include V_0; *ii)* se $x \in D(f_0)$, tutti gli elementi $f \in \mathcal{C}$ il cui dominio contiene x assumono in x lo stesso valore; *iii)* definiamo $f_0 : D(f_0) \to \mathbb{R}$ mediante la formula $f_0(x) = f(x)$ se $x \in D(f_0)$, $f \in \mathcal{C}$ e $D(f) \ni x$; *iv)* verifichiamo che f_0 è il maggiorante cercato.

Per quanto riguarda *i)*, supponiamo $x, y \in D(f_0)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siano $f, g \in \mathcal{C}$ tali che $D(f) \ni x$ e $D(g) \ni y$. Siccome $\mathcal{C}$ è una catena, risulta $f \preceq g$ a meno dello scambio dei ruoli di f e di g. Allora $x, y \in D(g)$ e quindi $\alpha x + \beta y \in D(g) \subseteq D(f_0)$. Inoltre $D(f_0) \supseteq V_0$ in quanto, scelto $f \in \mathcal{C}$, si ha $D(f_0) \supseteq D(f) \supseteq V_0$. Passiamo a *ii)*. Siano $f, g \in \mathcal{C}$ tali che $x \in D(f) \cap D(g)$. Dato che ancora possiamo supporre $f \preceq g$, abbiamo $f(x) = g(x)$. A questo punto la definizione data in *iii)* ha senso e dobbiamo verificare quanto asserito in *iv)*, cioè che $f_0 \in \mathcal{F}$ e che $f \preceq f_0$ per ogni $f \in \mathcal{C}$. Siano $x, y \in D(f_0)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ragionando come in *i)*, vediamo che esiste $g \in \mathcal{C}$ tale che $x, y \in D(g)$. Allora $f_0(\alpha x + \beta y) = g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y) = \alpha f_0(x) + \beta f_0(y)$ e f_0 è lineare. Inoltre $f_0(x) = g(x) \le p(x)$. Se poi $x \in V_0$, scelto $f \in \mathcal{C}$, si ha $x \in D(f)$ e $f_0(x) = f(x) = \varphi(x)$. Infine, se $f \in \mathcal{C}$, allora $D(f) \subseteq D(f_0)$ per costruzione e $f(x) = f_0(x)$, per cui $f \preceq f_0$.

Siamo dunque nelle condizioni di applicare il Lemma di Zorn: esiste un elemento $F \in \mathcal{F}$ che è massimale, cioè tale che nessun $f \in \mathcal{F}$ distinto da F può verificare $F \preceq f$. Allora F verifica la tesi del teorema se soddisfa la condizione $D(F) = V$. Ma questa si controlla immediatamente. Se infatti fosse $D(F) \ne V$, scelto $x_0 \in V$ che non appartiene a $D(F)$ e applicata la prima parte della dimostrazione allo spazio vettoriale $W = \mathrm{span}(D(F) \cup \{x_0\})$ e al funzionale F, costruiremmo $F' \in \mathcal{F}$ con $D(F') = W$ tale che $F \preceq F'$. Siccome $D(F') \ne D(F)$ avremmo $F' \ne F$ e la massimalità di F verrebbe contraddetta. □

1.2. Teorema (di Hahn-Banach, caso generale). *Siano V uno spazio vettoriale, V_0 un suo sottospazio vettoriale e $\varphi \in \mathrm{Hom}(V_0; \mathbb{K})$. Sia inoltre p una seminorma in V. Se $|\varphi(v)| \le p(v)$ per ogni $v \in V_0$, allora esiste $f \in \mathrm{Hom}(V; \mathbb{K})$ che prolunga φ e verifica la disuguaglianza $|f(x)| \le p(x)$ per ogni $x \in V$.* □

Dimostrazione. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, siamo nelle condizioni di applicare il Teorema 1.1 in quanto la seminorma p verifica le (1.1). Se f è il funzionale dato dal teorema stesso, allora f è lineare e prolunga φ. Inoltre, siccome p è una seminorma, per ogni $x \in V$ risulta $\pm f(x) = f(\pm x) \le p(\pm x) = p(x)$, da cui $|f(x)| \le p(x)$. Supponiamo ora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e, accanto agli spazi vettoriali complessi V e V_0, consideriamo i corrispondenti spazi vettoriali reali ottenuti prendendo gli stessi gruppi additivi V e V_0 e limitando la scelta degli scalari ai numeri reali nei prodotti fra scalari e vettori nelle condizioni di linearità (rimanendo tuttavia vero che $\lambda v \in V_0$ per ogni $v \in V_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ dato che V_0 è uno spazio complesso). Poniamo $\varphi_0 = \operatorname{Re}\varphi$ e $\psi = \operatorname{Im}\varphi$ così che $\varphi_0, \psi : V_0 \to \mathbb{R}$ sono funzionali lineari sullo spazio vettoriale reale V_0. Inoltre, siccome φ è lineare sullo spazio complesso V_0, abbiamo per ogni $v \in V_0$

$$\varphi_0(iv) + i\psi(iv) = \varphi(iv) = i\varphi(v) = i(\varphi_0(v) + i\psi(v)) = -\psi(v) + i\varphi_0(v) \quad \text{da cui} \quad \psi(v) = -\varphi_0(iv).$$

D'altra parte $\varphi_0(v) \le |\varphi(v)| \le p(v)$ per ogni $v \in V_0$. Applicato il Teorema 1.1 agli spazi reali V e V_0, troviamo $f_0 \in \operatorname{Hom}(V; \mathbb{R})$ che prolunga φ_0 e verifica $f_0(x) \le p(x)$ per ogni $x \in V$. Poniamo

$$f(x) = f_0(x) - i f_0(ix) \quad \text{per } x \in V \quad \text{da cui} \quad f_0(x) = \operatorname{Re} f(x) \quad \text{per ogni } x \in V$$

e controlliamo che f verifica quanto richiesto. Innanzi tutto vediamo che f prolunga φ in quanto

$$f(v) = f_0(v) - i f_0(iv) = \varphi_0(v) - i\varphi_0(iv) = \varphi_0(v) + i\psi(v) = \varphi(v) \quad \text{per ogni } v \in V_0 .$$

Inoltre $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in V$ e, se λ è reale, risulta anche

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= f_0(\lambda x) - i f_0(i\lambda x) = \lambda f_0(x) - i\lambda f_0(ix) = \lambda f(x) \\ f(i\lambda x) &= f_0(i\lambda x) - i f_0(-\lambda x) = \lambda f_0(ix) + i\lambda f_0(x) = i\lambda f(x). \end{aligned}$$

Deduciamo che f è lineare sullo spazio complesso V. Infatti, se $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$f(\lambda x) = f(\alpha x + i\beta x) = f(\alpha x) + f(i\beta x) = \alpha f(x) + i\beta f(x) = \lambda f(x).$$

Fissiamo infine $x \in V$ e rappresentiamo $f(x)$ come $f(x) = |f(x)| e^{i\vartheta}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$f(e^{-i\vartheta} x) = e^{-i\vartheta} f(x) = |f(x)| \in \mathbb{R} \quad \text{da cui} \quad f(e^{-i\vartheta} x) = \operatorname{Re} f(e^{-i\vartheta} x) = f_0(e^{-i\vartheta} x)$$

e deduciamo che $|f(x)| = f(e^{-i\vartheta} x) = f_0(e^{-i\vartheta} x) \le p(e^{-i\vartheta} x) = p(x)$. Ciò conclude la dimostrazione. □

2. Prime conseguenze

Come anticipato sopra, il Teorema di Hahn-Banach assicura l'esistenza di funzionali non banali e, più precisamente, consente di prolungare i funzionali lineari e continui. Ciò ha parecchie conseguenze importanti. La prima, fondamentale, è pure citata come Teorema di Hahn-Banach:

2.1. Corollario. *Siano V uno spazio normato e V_0 un suo sottospazio vettoriale. Allora ogni funzionale $\varphi \in V_0^*$ ha almeno un prolungamento $f \in V^*$ che verifica $\|f\|_* = \|\varphi\|_*$.* □

Dimostrazione. Sia p la seminorma definita da $p(x) = \|\varphi\|_* \, \|x\|$ per $x \in V$. Allora $|\varphi(v)| \le p(v)$ per ogni $v \in V_0$. Sia $f \in \operatorname{Hom}(V; \mathbb{K})$ dato dal Teorema 1.2 di Hahn-Banach. Allora f prolunga φ e verifica $|\langle f, x \rangle| \le \|\varphi\|_* \|x\|$ per ogni $x \in V$ per cui $f \in V^*$ e $\|f\|_* \le \|\varphi\|_*$. Ma la disuguaglianza opposta $\|f\|_* \ge \|\varphi\|_*$ è banalmente vera dato che f prolunga φ. Concludiamo che $\|f\|_* = \|\varphi\|_*$. □

Questo corollario dice, in particolare, come è fatto il duale del sottospazio V_0: i suoi elementi sono tutte e sole le restrizioni a V_0 degli elementi di V^* (vedi Teorema III.3.10).

Usiamo ora questo corollario per dimostrare che l'ipotesi $p < +\infty$ fatta nel Teorema III.3.4 di Riesz di rappresentazione del duale di $L^p(\Omega)$ non può essere rimossa.

2.2. Applicazione. Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$ l'applicazione $\mathcal{R}_\infty : L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)^*$, cioè l'applicazione definita dalla (III.3.3) ora con $p = \infty$, non è suriettiva. Si fissi infatti $x_0 \in \Omega$ e si definisca $f_0 : C^0(\overline{\Omega}) \to \mathbb{K}$ mediante $f_0(v) = v(x_0)$ per $v \in C^0(\overline{\Omega})$. Allora si vede immediatamente che $f_0 \in C^0(\overline{\Omega})^*$. Per il Corollario 2.1 esiste $f \in L^\infty(\Omega)^*$ la cui restrizione a $C^0(\overline{\Omega})$ è f_0. Dimostriamo che tale f non appartiene all'immagine di $L^1(\Omega)$ tramite $\mathcal{R}_\infty$. Per assurdo esista $u \in L^1(\Omega)$ tale che $f = \mathcal{R}_\infty u$. Allora in particolare

$$\int_\Omega uv\,dx = \langle f, v\rangle = \langle f_0, v\rangle = v(x_0) \quad \text{per ogni } v \in C^0(\overline{\Omega}) \tag{2.1}$$

ma ciò è in contraddizione con il Corollario I.5.55.

Si noti che la stessa dimostrazione funziona per una classe piuttosto vasta di spazi di misura: si può considerare, ad esempio, il caso della frontiera di un aperto limitato e regolare di $\mathbb{R}^d$ con $d > 1$ munito dell'usuale misura superficiale. Un caso di tipo diverso, invece, è quello dello spazio ℓ^∞, che corrisponde a scegliere come Ω l'insieme degli interi positivi con la misura che conta: dimostriamo che ancora l'applicazione $\mathcal{R}_\infty$ non è suriettiva. Prendiamo come sottospazio di ℓ^∞ quello, usualmente denotato con c, costituito dalla successioni convergenti e come $f_0 : c \to \mathbb{K}$ l'applicazione definita dalla formula $f_0(v) = \lim_{n\to\infty} v_n$ se $v = \{v_n\} \in c$. Allora $f_0 \in c^*$ e il Corollario 2.1 fornisce $f \in (\ell^\infty)^*$ che prolunga f_0. Ragionando come sopra, se tale f appartenesse a $\mathcal{R}_\infty(\ell^1)$, esisterebbe $u = \{u_n\} \in \ell^1$ tale che

$$\sum_{n=1}^\infty u_n v_n = \lim_{n\to\infty} v_n \quad \text{per ogni } v = \{v_n\} \in c\,.$$

Ma prendendo una dopo l'altra le successioni $\{v_n\}$ definite dalle formule $v_n = \delta_{1,n}$, $v_n = \delta_{2,n}$, eccetera, ove $\delta_{i,j}$ è il simbolo di Kronecker, dedurremmo successivamente $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, eccetera, dopo di che avremmo a una contraddizione scegliendo $v_n = 1$ per ogni n.

2.3. *Esercizio.* Combinare l'uso del Teorema III.3.4 di Riesz e gli Esercizi III.3.8 e III.3.11 per dimostrare il seguente risultato di rappresentazione del duale dello spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$: se $k \geq 0$ e $1 \leq p < +\infty$, gli elementi del duale sono tutti e soli i funzionali definiti dalla formula

$$\langle f, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega u_\alpha\, D^\alpha v\,dx \quad \text{per } v \in W^{k,p}(\Omega)$$

al variare di u_α in $L^{p'}(\Omega)$ (si riveda la dimostrazione del Teorema II.2.11; però si noti che, dato il funzionale $f \in (W^{k,p}(\Omega))^*$, la famiglia $\{u_\alpha\}$ non è unica se $k > 0$). Si deduca che, per $v, v_n \in W^{k,p}(\Omega)$, vale l'equivalenza

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{in } W^{k,p}(\Omega) \quad \text{se e solo se} \quad D^\alpha v_n \rightharpoonup D^\alpha v \quad \text{in } L^p(\Omega) \text{ per } |\alpha| \leq k\,.$$

2.4. *Esercizio.* Analogamente, si dimostri che gli elementi del duale dello spazio $C^k(\overline{\Omega})$ sono tutti e soli i funzionali del tipo

$$\langle f, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} \langle f_\alpha, D^\alpha v\rangle \quad \text{per } v \in C^k(\overline{\Omega})$$

al variare di f_α nel duale di $C^0(\overline{\Omega})$ (ma non si chiede di rappresentare tale duale!).

2.5. *Esercizio.* Siano V uno spazio normato, V_0 un suo sottospazio, $\{x_n\}$ una successione di elementi di V_0 e $x \in V_0$. Si dimostri che $x_n \rightharpoonup x$ in V_0 se e solo se $x_n \rightharpoonup x$ in V.

2.6. Corollario. *Siano V uno spazio normato e V_0 un suo sottospazio vettoriale. Se $x_0 \in V$ non appartiene alla chiusura di V_0, allora esiste $f \in V^*$ tale che $f|_{V_0} = 0$ e $\langle f, x_0\rangle \neq 0$.* $\square$

Dimostrazione. Poniamo $V_1 = \operatorname{span}(V_0 \cup \{x_0\})$. Siccome, in particolare, $x_0 \notin V_0$, ogni elemento di V_1 si scrive come $v + tx_0$ per una e una sola coppia $(v,t) \in V_0 \times \mathbb{K}$ e ha senso definire $\varphi : V_1 \to \mathbb{K}$ mediante la formula $\varphi(v + tx_0) = t$. Allora $\varphi \in \operatorname{Hom}(V_1; \mathbb{K})$. Inoltre $\varphi(v) = 0$ per ogni $v \in V_0$ e $\varphi(x_0) = 1$. Mostriamo che $\varphi \in V_1^*$. Siccome x_0 non appartiene alla chiusura di V_0, possiamo fissare $r > 0$ tale che $B_r(x_0)$ non intersechi V_0. Dunque $\|x_0 - v\| \ge r$ per ogni $v \in V_0$. Siano ora $v \in V_0$ e $t \in \mathbb{K}$ non nullo. Osservato che $-v/t \in V_0$, abbiamo

$$\|v + tx_0\| = |t|\,\|x_0 - (-v/t)\| \ge |t|r \quad \text{da cui} \quad |\varphi(v + tx_0)| = |t| \le \frac{1}{r}\,\|v + tx_0\|.$$

D'altra parte la stessa disuguaglianza vale banalmente anche se $t = 0$ in quanto φ si annulla in tal caso. Dunque φ è limitato. Pertanto $\varphi \in V_0^*$ e possiamo applicare il Teorema di Hahn-Banach (Corollario 2.1): troviamo $f \in V^*$ che, in particolare, prolunga φ. Dunque f, come φ, si annulla su V_0 e non in x_0. □

Segue immediatamente il risultato successivo:

2.7. Corollario. *Siano V uno spazio normato e V_0 un suo sottospazio vettoriale. Allora V_0 è denso in V se e solo se l'unico elemento $f \in V^*$ che si annulla su V_0 è il funzionale nullo.* □

2.8. Esempio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Dimostriamo che lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ delle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto (Definizione I.5.50) è denso in $L^p(\Omega)$ per $p \in [1, +\infty)$ (Esempio II.3.9). Grazie al Teorema III.3.4 di Riesz, posto $q = p'$, la tesi diventa: l'unica funzione $u \in L^q(\Omega)$ che verifica $\int_\Omega uv\,dx = 0$ per ogni funzione $v \in C_c^\infty(\Omega)$ è la funzione nulla q.o. Sia dunque u come detto. Siccome $L^q(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per l'Esercizio I.5.48, u verifica l'ipotesi del Lemma I.5.53 e si conclude che $u = 0$ q.o.

2.9. Osservazione. Si noti che lo stesso discorso fornisce la densità in $L^p(\Omega)$ per $1 \le p < +\infty$ del sottospazio delle funzioni a scala (Definizione A.2.17 e Osservazione A.2.18).

2.10. Corollario. *Siano V uno spazio normato e $x \in V$. Allora esiste $f \in V^*$ tale che*

$$\|f\|_* = \|x\| \quad \text{e} \quad \langle f, x\rangle = \|x\|^2. \ \square \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Se $x = 0$ si può prendere $f = 0$ e questa è l'unica scelta possibile. Se $x \neq 0$, consideriamo il sottospazio $V_0 = \operatorname{span}\{x\}$ e il funzionale $\varphi : V_0 \to \mathbb{K}$ definito da $\varphi(tx) = t\|x\|^2$ per $t \in \mathbb{K}$. Chiaramente φ è lineare, dunque $\varphi \in V_0^*$ perché $\dim V_0 = 1$, per cui possiamo applicare il Teorema di Hahn-Banach (Corollario 2.1): troviamo $f \in V^*$ che prolunga φ, da cui $\langle f, x\rangle = \langle \varphi, x\rangle = \|x\|^2$, e verifica $\|f\|_* = \|\varphi\|_*$. Ma un calcolo immediato mostra che $\|\varphi\|_* = \|x\|$. □

Il Corollario 2.10 è particolarmente ricco di conseguenze e nei paragrafi immediatamente successivi vediamo come esso svolga un ruolo fondamentale in connessione con vari concetti: la cosiddetta applicazione o mappa di dualità, l'isomorfismo canonico su un sottospazio del biduale, la nozione di operatore aggiunto. In corrispondenza ad alcuni di questi daremo anche qualche elemento dello sviluppo della teoria. Presentiamo ora due applicazioni immediate del corollario le quali forniscono l'una una caratterizzazione dello zero e l'altra sia l'unicità del limite debole sia l'estensione al caso degli spazi normati della disuguaglianza (IV.4.4) vista nel caso hilbertiano.

2.11. Corollario. *Siano V uno spazio normato e $x \in V$. Allora $x = 0$ se e solo se ogni $f \in V^*$ verifica $\langle f, x\rangle = 0$.* □

Dimostrazione. La necessità della condizione è ovvia. Vediamo la sufficienza ragionando per assurdo. Sia dunque $x \neq 0$. Scelto f in base al Corollario 2.10, troviamo $f \in V^*$ che non si annulla in x. □

2.12. Proposizione. *In ogni spazio normato il limite debole è unico. Inoltre abbiamo che*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \textit{implica} \quad \|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|. \ \square \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Siano $x, y \in V$ due limiti deboli della successione x_n. Per ogni $f \in V^*$ abbiamo allora

$$\langle f, x - y\rangle = \langle f, x\rangle - \langle f, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, x_n\rangle - \lim_{n\to\infty} \langle f, x_n\rangle = 0.$$

Applicando il Corollario 2.11 deduciamo $x - y = 0$, cioè $x = y$. Supponiamo ora $x_n \rightharpoonup x$ e sia $f \in V^*$ tale che $\|f\|_* = \|x\|$ e $\langle f, x\rangle = \|x\|^2$. Allora, notato che $\langle f, x\rangle$ è reale ≥ 0, si ha

$$\|x\|^2 = \langle f, x\rangle = |\langle f, x\rangle| = |\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n\rangle| = \liminf_{n\to\infty} |\langle f, x_n\rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f\|_* \|x_n\| = \|x\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

da cui la tesi. □

3. L'applicazione di dualità

Il Corollario 2.10 assicura che, fissato ad arbitrio $x \in V$, non è mai vuoto l'insieme dei funzionali $f \in V^*$ che verificano le (2.2). La corrispondenza che a ogni $x \in V$ associa l'insieme di tali funzionali svolge un ruolo di particolare rilievo soprattutto in Analisi Nonlineare.

3.1. Definizione. *Se V è uno spazio normato, l'applicazione $\mathcal{F} : V \to 2^{V^*}$ che a ogni $x \in V$ associa il sottoinsieme di V^* definito da $\mathcal{F}(x) = \{f \in V^* :$ valgano le (2.2)$\}$ si chiama applicazione di dualità dello spazio V.* □

3.2. *Esercizio.* Siano V uno spazio di Hilbert reale, $\mathcal{F}$ l'applicazione di dualità e $\mathcal{R} : V \to V^*$ l'isomorfismo di Riesz. Dimostrare che $\mathcal{R}x \in \mathcal{F}(x)$ per ogni $x \in V$. Tra breve sarà chiaro che, più precisamente, $\mathcal{F}$ coincide con $x \mapsto \{\mathcal{R}x\}$.

Chiaramente $\mathcal{F}(0) = \{0\}$ senza ipotesi particolari. Il risultato che segue fornisce condizioni sufficienti perché, per ogni $x \in V$, l'insieme $\mathcal{F}(x)$ (che, ribadiamo, non è mai vuoto) abbia esattamente un elemento. In tali condizioni si interpreta $\mathcal{F}$ come un'applicazione di V in V^* anziché nell'insieme delle parti di V^*. Ad esempio $\mathcal{F} = \mathcal{R}$ se V è uno spazio di Hilbert reale.

3.3. Definizione. *Uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ è strettamente convesso quando $\|x + y\| < 2$ per ogni coppia di punti distinti $x, y \in V$ di norma unitaria.* □

Notiamo che la definizione si riferisce a una scelta precisa della norma. Due norme equivalenti possono infatti fornire due spazi normati dei quali uno solo è strettamente convesso, come si vede facilmente già nel caso di $\mathbb{R}^2$. Si dimostra che, qualunque sia lo spazio di misura σ-finito,

$$\text{lo spazio } L^p(\Omega) \text{ con la norma usuale è strettamente convesso se } p \in (1, +\infty) \tag{3.1}$$

mentre gli spazi $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ (con le loro norme usuali) sono strettamente convessi solo in situazioni estreme e prive di interesse (si veda l'esercizio proposto tra breve). Segnaliamo un risultato, che enunciamo soltanto. La nozione di riflessività è definita nel paragrafo successivo e discussa in dettaglio in un apposito capitolo.

3.4. Teorema (di Asplund). *Sia V uno spazio di Banach riflessivo. Allora esiste una norma $\|\cdot\|$ in V che genera la topologia data e tale che entrambi gli spazi normati $(V, \|\cdot\|)$ e $(V^*, \|\cdot\|_*)$ siano strettamente convessi.* □

3.5. *Esercizio.* Dimostrare che è equivalente alla stretta convessità dello spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ ciascuna delle condizioni seguenti: *i*) per ogni coppia di punti distinti $x, y \in V$ aventi la stessa norma si ha $\|x + y\| < 2\|x\|$; *ii*) per ogni coppia di punti distinti $x, y \in V$ di norma unitaria e per ogni $t \in (0, 1)$ si ha $\|tx + (1 - t)y\| < 1$; *iii*) per ogni coppia di punti distinti $x, y \in V$ aventi la stessa norma e per ogni $t \in (0, 1)$ si ha $\|tx + (1 - t)y\| < \|x\|$.

3.6. *Esercizio.* Dimostrare che ogni spazio prehilbertiano è strettamente convesso.

3.7. *Esercizio.* Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Dimostrare quanto segue: *i*) se esistono due sottoinsiemi $A, B \in \mathcal{M}$ disgiunti e di misura positiva e finita, allora $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ non sono strettamente convessi; *ii*) $L^1(\Omega)$ è strettamente convesso se e solo se $\dim L^1(\Omega) \leq 1$; *iii*) $L^\infty(\Omega)$ è strettamente convesso se e solo se $\dim L^\infty(\Omega) \leq 1$.

3.8. *Esercizio.* Si consideri lo spazio normato $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_p)$ (vedi (I.5.1) e (I.5.17) per le definizioni della norma) con $n \geq 1$ e $p \in [1, +\infty]$. Si dimostri che esso è strettamente convesso *i*) per ogni p se $n = 1$; *ii*) se e solo se $p \in (1, +\infty)$ se $n > 1$.

3.9. Osservazione. Un'altra caratterizzazione della stretta convessità è la seguente: per ogni $x, y \in V$ vale l'implicazione

$$\text{se } x \neq 0\,,\ y \neq 0 \text{ e } \|x+y\| = \|x\| + \|y\|\,, \text{ esiste } \lambda > 0 \text{ tale che } x = \lambda y\,. \tag{3.2}$$

Infatti, se vale tale condizione e x e y verificano $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x+y\| = 2$, allora scritto x nella forma $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$ si ha subito $1 = \|x\| = \lambda\|y\| = \lambda$, da cui $x = y$ e lo spazio è strettamente convesso. Viceversa, se $(V, \|\cdot\|)$ è strettamente convesso e due elementi non nulli $x, y \in V$ verificano $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, supponendo $\|x\| \leq \|y\|$ per fissare le idee e posto $\lambda = \|x\|/\|y\|$ e $z = \lambda y$, si ha $\lambda \in (0, 1]$, $\|z\| = \|x\|$ e

$$2\|x\| = \|x\| + \|z\| \geq \|x+z\| \geq \|x+y\| - \|y-z\| = \|x\| + \|y\| - (1-\lambda)\|y\| = 2\|x\|.$$

Dunque $\|x+z\| = 2\|x\|$ e quindi $x = z = \lambda y$.

3.10. Proposizione. *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Se il duale $(V^*, \|\cdot\|_*)$ è strettamente convesso, allora, per ogni $x \in V$, l'insieme $\mathcal{F}(x)$ immagine di x nell'applicazione di dualità ha uno solo elemento.* □

Dimostrazione. Si è già osservato che $\mathcal{F}(0) = \{0\}$. Siano ora f, g verificanti la (2.2) in corrispondenza al dato $x \neq 0$. Allora

$$\|f\|_* = \|g\|_* = \|x\| \quad \text{e} \quad \langle f+g, x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle = 2\|x\|^2 \quad (\text{da cui } \langle f+g, x\rangle = |\langle f+g, x\rangle|\,)$$

e quindi anche

$$2\|x\| = \frac{\langle f+g, x\rangle}{\|x\|} \leq \|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_* = 2\|x\|.$$

Deduciamo che le disuguaglianze della catena sono uguaglianze. In particolare è un'uguaglianza la seconda delle due e la stretta convessità di V^* (vedi Esercizio 3.5) implica che $f = g$. □

3.11. Osservazione. Dunque, se V^* è strettamente convesso, l'applicazione di dualità $\mathcal{F}$ si interpreta come una funzione $\mathcal{F} : V \to V^*$. Supponiamo ora che anche V sia strettamente convesso e mostriamo che $\mathcal{F}$ è iniettiva. Per assurdo siano $x, y \in V$ tali che $x \neq y$ e $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y)$. Poniamo $x^* = \mathcal{F}(x)$ e $z = (x+y)/2$. Allora $\|x\| = \|x^*\|_* = \|y\|$, per cui abbiamo

$$2\|x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \langle x^*, x\rangle + \langle x^*, y\rangle = 2\langle x^*, z\rangle \leq 2\|x^*\|_*\|z\| \leq \|x^*\|_*(\|x\| + \|y\|) = 2\|x\|^2.$$

Deduciamo che tutte le disuguaglianze sono uguaglianze. In particolare $2\|z\| = \|x\| + \|y\|$, cioè $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ (sebbene $\|x\| = \|y\|$ e $u \neq y$), il che contraddice la stretta convessità di V.

3.12. Esempio. Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $p \in [1, +\infty)$. Vogliamo determinare l'applicazione di dualità $\mathcal{F}_p$ dello spazio $L^p(\Omega)$ reale, identificando senz'altro il suo duale con $L^{p'}(\Omega)$ tramite l'isomorfismo di Riesz $\mathcal{R}_p$. Se $p > 1$ allora $p' \in (1, +\infty)$, per cui $L^{p'}(\Omega)$ è strettamente convesso (vedi (3.1)) e la mappa è univoca: $\mathcal{F}_p : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$. Siccome la sua costruzione dal nulla costerebbe troppo lavoro, semplicemente esibiamo la formula

$$\mathcal{F}_p : u \mapsto w = c|u|^{p-1}\operatorname{sign} u \quad \text{ove} \quad c = \|u\|_p^{2-p} \tag{3.3}$$

e controlliamo che essa funziona. Si ha

$$\int_\Omega |w|^{p'}\,d\mu = c^{p'}\int_\Omega |u|^{(p-1)p'}\,d\mu = \|u\|_p^{(2-p)p'}\int_\Omega |u|^p\,d\mu = \|u\|_p^{(2-p)p'+p} = \|u\|_p^{p'}$$

da cui $w \in L^{p'}(\Omega)$ e $\|w\|_{p'} = \|u\|_p$. Siccome $wu = c|u|^p$, si ottiene anche $\int_\Omega wu\,d\mu = \|u\|_p^2$. Si noti che la (3.3) con $p = 2$ fornisce l'applicazione identica di $L^2(\Omega)$ e ora anche $\mathcal{R}_2$ è interpretata come l'identità. Ciò è dunque in accordo con l'Esercizio 3.2 dato che nel caso dello spazio reale $H = L^2(\Omega)$ si ha $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2$.

Il caso $p = 1$ è più delicato in quanto $L^\infty(\Omega)$ non è in generale strettamente convesso. Leggendo la (3.3) come relazione nel piano (u, w) e facendo tendere p a 1, siamo indotti a formulare una congettura: il caso $p = 1$ dovrebbe corrispondere a

$$(u, w) \in ((-\infty, 0) \times \{-c\}) \cup (\{0\} \times [-c, c]) \cup ((0, +\infty) \times \{c\}) \quad \text{ove} \quad c = \|u\|_1 .$$

Le $w \in \mathcal{F}_1(u)$ dovrebbero dunque essere tutte e sole quelle che verificano le condizioni

$$|w| \le \|u\|_1 \quad \text{in } \Omega, \quad \operatorname{sign} w = \operatorname{sign} u \quad \text{e} \quad |w| = \|u\|_1 \quad \text{ove} \quad u \neq 0. \tag{3.4}$$

Vediamo infatti che queste equivalgono alle seguenti

$$\|w\|_\infty = \|u\|_1 \quad \text{e} \quad \int_\Omega wu \, d\mu = \|u\|_1^2 . \tag{3.5}$$

Se $u = 0$, entrambe le condizioni forniscono $w = 0$. Supponiamo quindi $u \neq 0$ e siano $\Omega_\pm$ gli insiemi in cui $u > 0$ e $u < 0$ rispettivamente, uno almeno quali ha, dunque, misura positiva. Si vede allora subito che le (3.4) implicano la prima delle (3.5) e la seconda segue immediatamente:

$$\int_\Omega wu \, d\mu = \int_{\Omega_+} \|u\|_1 \, |u| \, d\mu + \int_{\Omega_-} (-\|u\|_1) \, (-|u|) \, d\mu = \|u\|_1 \int_{\Omega_+ \cup \Omega_-} |u| \, d\mu = \|u\|_1^2 .$$

Valgano ora le (3.5). Allora $|w| \le \|u\|_1$ in Ω. Per dedurre le altre due condizioni della (3.4), osserviamo che $wu \le \|w\|_\infty |u|$ in Ω, da cui anche

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega wu \, d\mu \le \int_\Omega \|w\|_\infty |u| \, d\mu = \|w\|_\infty \|u\|_1 = \|u\|_1^2 .$$

Deduciamo che anche la disuguaglianza intermedia deve essere un'uguaglianza. Ricordando che $wu \le \|w\|_\infty |u|$ concludiamo che $wu = \|w\|_\infty |u|$, da cui le altre condizioni (3.4) richieste.

4. Isomorfismo canonico, riflessività e convergenza debole*

Se V è uno spazio normato, anche V^* lo è (anzi, V^* è automaticamente uno spazio di Banach), per cui possiamo considerarne il duale $V^{**} = (V^*)^*$. Per ogni $x \in V$ consideriamo ora l'applicazione

$$Jx : V^* \to \mathbb{K} \quad \text{definita da} \quad Jx : f \mapsto \langle f, x \rangle.$$

Essa è lineare per definizione di operazioni in V^* ed è anche continua dato che

$$|(Jx)(f)| = |\langle f, x \rangle| \le \|f\|_* \, \|x\| \quad \text{per ogni } f \in V^* .$$

Dunque $Jx \in V^{**}$ e abbiamo il diritto di scrivere $\langle Jx, f \rangle$ anziché $(Jx)(f)$. Abbiamo pertanto

$$\langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle \quad \text{per ogni } x \in V \text{ e } f \in V^* \tag{4.1}$$

ove, naturalmente, al secondo membro della (4.1) la dualità è fra V^* e V, mentre la dualità che compare al primo membro è fra V^{**} e V^*. Risulta allora giustificata la definizione che segue.

4.1. Definizione. *Sia V uno spazio normato. Si chiama biduale di V lo spazio V^{**} duale di V^*. Si chiama isomorfismo canonico di V, o iniezione canonica di V in V^{**}, l'applicazione $J : V \to V^{**}$ che a ogni $x \in V$ associa l'elemento $Jx \in V^{**}$ che verifica la* (4.1). *Lo spazio V è detto riflessivo quando il suo isomorfismo canonico è suriettivo.* □

4.2. Osservazione. La riflessività ha conseguenze notevolissime. Conviene allora preannunciare qualche risultato, anche se ne rimandiamo la dimostrazione. Abbiamo che

$$\textit{sono riflessivi gli spazi di dimensione finita, quelli di Hilbert e gli } L^p(\Omega) \textit{ se } p \in (1, +\infty) \tag{4.2}$$

restando inteso che $L^p(\Omega)$ è costruito a partire da uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ σ-finito.

4.3. Osservazione. Il nome dato all'isomorfismo canonico è giustificato dal risultato successivo, il quale afferma che J è un isomorfismo isometrico di V su un sottospazio vettoriale di V^{**}. Si noti che ciò implica anche i tre fatti seguenti: i) condizione necessaria perché V sia riflessivo è che V sia isomorfo a V^{**} (mentre, come ha mostrato R.C. James costruendo un esempio complicato, non ogni spazio isomorfo al suo biduale è riflessivo); ii) ogni spazio riflessivo è completo; iii) la chiusura di $J(V)$ in V^{**} è un completamento di V. Ribadiamo dunque che V è riflessivo quando, *per ogni* $F \in V^{**}$, *esiste* $x \in V$ (necessariamente unico) *tale che* $\langle F, f\rangle = \langle f, x\rangle$ *per ogni* $f \in V^*$.

4.4. Teorema. *Sia V uno spazio normato. Allora l'isomorfismo canonico J dello spazio V è un'applicazione lineare e isometrica di V in V^{**}.* □

Dimostrazione. La linearità è ovvia, per cui passiamo alla seconda tesi. La definizione fornisce banalmente $J0 = 0$ per cui $\|Jx\|_{**} = \|x\|$ se $x = 0$. Sia ora $x \in V$ non nullo. Allora

$$\|Jx\|_{**} = \sup_{\|f\|_* \neq 0} \frac{|\langle Jx, f\rangle|}{\|f\|_*} = \sup_{\|f\|_* \neq 0} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|f\|_*}$$

e possiamo sia maggiorare che minorare. Deduciamo infatti

$$\|Jx\|_{**} \leq \sup_{\|f\|_* \neq 0} \frac{\|f\|_* \|x\|}{\|f\|_*} = \|x\| \qquad \text{e} \qquad \|Jx\|_{**} \geq \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|f\|_*} \quad \text{per ogni } f \in V^* \setminus \{0\}.$$

Se come f prendiamo il funzionale verificante le (2.2) (Corollario 2.10), concludiamo che vale, accanto a $\|Jx\|_{**} \leq \|x\|$, anche la disuguaglianza opposta $\|Jx\|_{**} \geq \|x\|$. □

4.5. Osservazione. Vi è un collegamento interessante fra la mappa di dualità (Definizione 3.1) e l'isomorfismo canonico che qui vogliamo mettere in evidenza, almeno per una classe di spazi, del resto molto vasta. Supponiamo che V sia uno spazio di Banach riflessivo e che V e V^* siano strettamente convessi (vedi Definizione 3.3 e Teorema 3.4 di Asplund). Allora anche V^{**}, in quanto isometricamente isomorfo (e non solo isomorfo) a V, è strettamente convesso. Per la Proposizione 3.10 sono entrambe a un valore le due applicazioni di dualità $\mathcal{F} : V \to V^*$ e $\mathcal{F}^* : V^* \to V^{**}$. Allora possiamo considerare la loro composizione $\mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} : V \to V^{**}$. Dimostriamo che questa coincide con l'isomorfismo canonico $J : V \to V^{**}$. Sia infatti $v \in V$. Posto $v^* = \mathcal{F}(v)$ per comodità, abbiamo

$$\|Jv\|_{**} = \|v\| = \|v^*\|_* \quad \text{e} \quad \langle Jv, v^*\rangle = \langle v^*, v\rangle = \|v\|^2 = \|v^*\|_*^2$$

così che Jv verifica la definizione di $\mathcal{F}^*(v^*)$. Ma, grazie all'Osservazione 3.11, le applicazioni $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^*$ sono inettive. Siccome J è suriettivo, concludiamo che entrambe $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^*$ sono anche suriettive, dunque che esse sono biettive, oltre a J. Allora l'uguaglianza $J = \mathcal{F}^* \circ \mathcal{F}$ implica che

$$\mathcal{F}^{-1} = J^{-1} \circ \mathcal{F}^* \quad \text{e} \quad (\mathcal{F}^*)^{-1} = \mathcal{F} \circ J^{-1}.$$

Dunque, se interpretiamo J come una identificazione di V^{**} a V, le due applicazioni $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^*$ sono l'una l'inversa dell'altra. □

Risulta naturale esaminare come l'isomorfismo canonico trasformi la convergenza debole. A questo proposito è utile e importante introdurre un concetto generale.

4.6. Definizione. *Sia V uno spazio normato. Si dice che una successione $\{f_n\}$ di elementi di V^* converge debolmente* in V^* all'elemento $f \in V^*$ quando*

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, x\rangle = \langle f, x\rangle \quad \textit{per ogni } x \in V\,. \tag{4.3}$$

Quando $\{f_n\}$ converge debolmente in V^* a f si scrive $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in V^*.* □

4.7. Esempio (convergenza debole* in $L^\infty(\Omega)$). Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Allora il Teorema III.3.4 di Riesz afferma che gli elementi del duale V^* di $V = L^1(\Omega)$ sono tutti e soli quelli ottenuti per mezzo della formula

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega uv\, d\mu \quad \text{per ogni } v \in L^1(\Omega)$$

al variare di u in $L^\infty(\Omega)$ e che la corrispondenza fra $u \in L^\infty(\Omega)$ e $f \in V^*$ stabilita dalla formula stessa è un isomorfismo isometrico. Interpretato questo come identificazione, vediamo $L^\infty(\Omega)$ come il duale di uno spazio normato, lo spazio $L^1(\Omega)$, e possiamo parlare di convergenza debole*. Abbiamo allora

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \textit{in } L^\infty(\Omega) \quad \textit{se e solo se} \quad \int_\Omega u_n v\, d\mu \to \int_\Omega uv\, d\mu \quad \textit{per ogni } v \in L^1(\Omega)\,. \tag{4.4}$$

4.8. Osservazione. Se $p \in (1, +\infty)$ possiamo considerare la convergenza debole in $L^p(\Omega)$. D'altra parte, posto $q = p'$, si ha $p = q'$ per cui $L^p(\Omega)$ può essere identificato al duale di $L^q(\Omega)$ tramite la mappa di Riesz. Così facendo, possiamo parlare di convergenza debole* in $L^p(\Omega)$ (esattamente come abbiamo fatto per $L^\infty(\Omega)$). Allora, come si vede subito esplicitandone le definizioni, le due convergenze hanno lo stesso significato. Fissiamo questo fatto:

$$\text{se } p \in (1, +\infty) \text{ allora} \quad u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{in } L^p(\Omega) = L^{p'}(\Omega)^* \quad \text{se e solo se} \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } L^p(\Omega)\,.$$

Di fatto, poi, non si parla mai di convergenza debole* in $L^p(\Omega)$ ma solo di convergenza debole.

4.9. *Esercizio.* Dimostrare che, se $\mu(\Omega) < +\infty$ e $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$, allora $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.

4.10. *Esercizio.* Si riprenda l'Esercizio IV.4.16, ma si supponga $p = +\infty$. Si dimostri che $\widetilde{u}(nx) \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ in $L^\infty(\mathbb{R})$.

4.11. Esempio (convergenza delle traslate). Sia $p \in [1, +\infty]$. Siano $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $\{h_n\}$ una successione infinitesima di elementi di $\mathbb{R}^d$. Poniamo $u_n(x) = u(x + h_n)$ q.o. e per ogni n, così che $u_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Sebbene ci si aspetti comunque una convergenza di u_n a u in qualche senso, la convergenza da considerare è diversa nei casi $p < +\infty$ e $p = +\infty$. Osserviamo per inciso che la convergenza q.o. non è da prendere in considerazione: supponendo infatti di scegliere per u un rappresentante ovunque definito e di definire di conseguenza u_n in ogni punto, vediamo che i punti x nei quali $\{u_n(x)\}$ converge a $u(x)$ sono tutti e soli quelli di continuità di u. Ma i rappresentanti ovunque definiti di una funzione di $L^p(\mathbb{R}^d)$ possono essere tutti discontinui addirittura in ogni punto. Riprendiamo il discorso e dimostriamo che

$$\text{se } p < +\infty \text{ allora } \{u_n\} \text{ converge a } u \text{ fortemente in } L^p(\mathbb{R}^d)\,. \tag{4.5}$$

Sia $\varepsilon > 0$. Siccome $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^d)$, esiste $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $\|v\|_p \le \varepsilon$. Introdotte le analoghe v_n, abbiamo allora

$$\|u - u_n\|_p \le \|u - v\|_p + \|v - v_n\|_p + \|v_n - u_n\|_p = 2\|u - v\|_p + \|v - v_n\|_p \le 2\varepsilon + \|v - v_n\|_p\,.$$

Ma una semplice applicazione del Teorema del valor medio mostra che

$$|v(x) - v_n(x)| = |v(x) - v(x + h_n)| \le |h_n| \, \|\nabla v\|_\infty \quad \text{per ogni } x\,.$$

Allora, scelto R tale che $v(x) = 0$ per $|x| > R$ e supposto $|h_n| \le 1$, risulta

$$\|v - v_n\|_p^p = \int_{B_{R+1}(0)} |v - v_n|^p \, dx \le M |h_n|^p \|\nabla v\|_\infty^p$$

ove M è la misura di $B_{R+1}(0)$. Dunque $\|v - v_n\|_p \le \varepsilon$ per n abbastanza grande e concludiamo.

Al contrario, se $p = +\infty$ in generale è falso che $\{u_n\}$ converga fortemente a u in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, come si vede prendendo come u una funzione caratteristica (mentre il fatto è vero, come si vede facilmente, se u è anche uniformemente continua). Senza altre ipotesi si ha però

$$\text{se } p = +\infty \text{ allora } \{u_n\} \text{ converge a } u \text{ debolmente* in } L^\infty(\mathbb{R}^d) \tag{4.6}$$

come ora mostriamo. Per ogni $v \in L^1(\mathbb{R}^d)$ abbiamo infatti

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_n v \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(x + h_n) \, v(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \, v(y - h_n) \, dy = \int_{\mathbb{R}^d} u v_n \, dy$$

ove abbiamo posto $v_n(y) = v(y - h_n)$. Ma v_n converge a v fortemente in $L^1(\mathbb{R}^d)$ per la (4.5). Deduciamo che l'ultimo integrale converge all'integrale di uv e concludiamo.

4.12. Osservazione. Notiamo che avremmo potuto trarre la stessa conclusione anche se la convergenza di v_n a v in $L^1(\mathbb{R}^d)$ fosse stata solo debole.

4.13. Esempio (convergenza di misure). Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ e μ una misura di Borel finita su Ω, vale a dire una misura finita definita sulla σ-algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ degli insiemi di Borel di Ω. A μ associamo il funzionale $f_\mu \in C^0(\overline{\Omega})^*$ definito dalla formula

$$f_\mu(v) = \int_\Omega v \, d\mu \quad \text{per } v \in C^0(\overline{\Omega})\,. \tag{4.7}$$

Si noti che l'integrale ha senso: infatti la controimmagine tramite v di ogni aperto di $\mathbb{K}$ è aperta (poiché v è continua), dunque di Borel, per cui v è misurabile. D'altra parte v è anche limitata e $\mu(\Omega)$ è finita. Si vede poi banalmente che tale f_μ è lineare e che $|f_\mu(v)| \le \mu(\Omega)\|v\|_\infty$, per cui, effettivamente, $f_\mu \in C^0(\overline{\Omega})^*$. Notiamo ora che l'applicazione che a ogni μ di tipo detto associa il corrispondente f_μ è iniettiva. Supponiamo infatti $f_\mu = f_\nu$. Allora, se R è un rettangolo compatto incluso in Ω e χ è la sua funzione caratteristica, approssimata χ rispetto alla convergenza puntuale con funzioni $\chi_n \in C^0(\overline{\Omega})$ (analogamente come si è fatto nella dimostrazione del Lemma I.5.53) tutte verificanti $0 \le \chi_n \le 1$, abbiamo per il Teorema di Lebesgue della convergenza dominata

$$\mu(R) = \int_\Omega \chi \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \chi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} f_\mu(\chi_n) = \lim_{n\to\infty} f_\nu(\chi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \chi_n \, d\nu = \int_\Omega \chi \, d\nu = \nu(R).$$

Allora μ e ν coincidono anche sugli insiemi di Borel, cioè $\mu = \nu$. Grazie all'iniettività possiamo identificare ogni misura μ considerata con il funzionale corrispondente, scrivere più semplicemente

$$\langle \mu, v \rangle = \int_\Omega v \, d\mu \quad \text{per } v \in C^0(\overline{\Omega})$$

e parlare di convergenza debole* di una successione $\{\mu_n\}$ alla misura μ: essa significa

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega v \, d\mu_n = \int_\Omega v \, d\mu \quad \text{per } v \in C^0(\overline{\Omega})\,.$$

Segnaliamo che, in situazioni di questo tipo, si parla spesso di convergenza debole anziché debole*. Ad esempio, se $x_0 \in \Omega$, posto $B_n = B_{1/n}(x_0)$, possiamo considerare la misura μ_n definita da

$$\mu_n(\omega) = n^d |\omega \cap B_n| \quad \text{per } \omega \in \mathcal{B}(\Omega)\,, \text{ ove } |\cdot| \text{ denota la misura di Lebesgue.} \tag{4.8}$$

Allora $\{\mu_n\}$ converge debolmente* in $C^0(\overline{\Omega})^*$ alla misura $\mu = |B_1(0)|\delta_{x_0}$, ove δ_{x_0} è la massa di Dirac concentrata in x_0. Per $v \in C^0(\overline{\Omega})$ abbiamo infatti

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega v\,d\mu_n = \lim_{n\to\infty} n^d \int_{B_n} v\,dx = |B_1(0)| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} v\,dx = |B_1(0)|\,v(x_0) = \int_\Omega v\,d\mu.$$

Segnaliamo infine che, grazie a un risultato di Riesz, ogni funzionale $f \in C^0(\overline{\Omega})^*$, almeno nel caso reale, si riesce a rappresentare come differenza di funzionali simili ai precedenti: occorre però considerare $\overline{\Omega}$ anziché Ω come ambiente. Tuttavia non approfondiamo oltre.

Vogliamo invece immergere $L^1(\Omega)$ in $C^0(\overline{\Omega})^*$ attraverso la corrispondenza introdotta sopra fra misure e funzionali. Se $w \in L^1(\Omega)$, consideriamo la misura μ definita dalla formula

$$\mu_w(B) = \int_B w\,dx \quad \text{per } B \in \mathcal{B}(\Omega)$$

che, effettivamente, è una misura di Borel finita. Mostriamo che la corrispondenza che a ogni funzione $w \in L^1(\Omega)$ associa la misura corrispondente è iniettiva: infatti, se $w_1, w_2 \in L^1(\Omega)$ e se le corrispondenti misure coincidono, allora w_1 e w_2 hanno lo stesso integrale su ogni insieme di Borel, per cui $w_1 = w_2$ q.o. in Ω. Dunque identifichiamo ogni $w \in L^1(\Omega)$ con la misura μ_w associata. Ma questa, a sua volta, è identificata a un elemento di $C^0(\overline{\Omega})^*$ tramite la (4.7) ove si legga $\mu = \mu_w$, per cui w resta identificata a tale elemento. Riassumendo, la funzione $w \in L^1(\Omega)$ è identificata al funzionale

$$v \mapsto \langle \mu_w, v \rangle = \int_\Omega w\,d\mu_w = \int_\Omega wv\,dx, \quad \text{per } v \in C^0(\overline{\Omega})\,.$$

Ha senso, pertanto, chiedersi se una successione $\{u_n\}$ di elementi di $L^1(\Omega)$ converga debolmente* in $C^0(\overline{\Omega})^*$ a una funzione di $L^1(\Omega)$, oppure a una misura di Borel finita μ, o più in generale a un elemento $f \in C^0(\overline{\Omega})^*$. Ad esempio, se $x_0 \in \Omega$ e $u_n = n^d \chi_n$ ove χ_n è la funzione caratteristica di $B_{1/n}(x_0)$, la misura μ_n associata è esattamente quella data dalla (4.8) e possiamo dire che $\{u_n\}$ converge debolmente* in $C^0(\overline{\Omega})^*$ alla misura $\mu = |B_1(0)|\delta_{x_0}$. □

Confrontiamo ora la convergenza debole in uno spazio normato V con la convergenza debole*, nel biduale, delle immagini tramite l'isomorfismo canonico J: vediamo che esse hanno esattamente lo stesso significato semplicemente esplicitando la definizione di J. Inoltre, ancora semplicemente esplicitando le definizioni di convergenze forte, debole e debole* nel duale di V si vedono chiaramente i loro legami. Valgono pertanto i due risultati che seguono.

4.14. Proposizione. *Siano V uno spazio normato, J l'isomorfismo canonico di V, $\{x_n\}$ una successione di elementi di V e $x \in V$. Allora*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{in } V \quad \text{se e solo se} \quad Jx_n \overset{*}{\rightharpoonup} Jx \quad \text{in } V^{**}\,. \;\square \tag{4.9}$$

4.15. Proposizione. *Siano V uno spazio normato, $\{f_n\}$ una successione di elementi di V^* e $f \in V^*$. Allora valgono le conclusioni seguenti:*

i) da $f_n \to f$ in V^* segue $f_n \rightharpoonup f$ in V^*;
ii) da $f_n \rightharpoonup f$ in V^* segue $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in V^*;
iii) se V è riflessivo, $f_n \rightharpoonup f$ in V^* se e solo se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in V^*. □

4.16. Osservazione. Vale l'implicazione

$$\text{da} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{in } V^* \quad \text{segue} \quad \|f\|_* \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_*\,. \tag{4.10}$$

Si ha infatti

$$|\langle f, x\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle f_n, x\rangle| \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_* \|x\| \quad \text{per ogni } x \in V$$

da cui subito la (4.10). Da questa, usando il Teorema 4.4 e la (4.9), riotteniamo la (V.2.3). □

5. Spazi separabili

Sebbene le questioni di separabilità e il Teorema di Hahn-Banach non sembrino connessi (ma una connessione la troveremo), preferiamo chiarire subito il concetto e dare almeno un paio di risultati. Il primo si applica, in particolare, agli spazi normati e il secondo costituisce una comoda caratterizzazione degli spazi normati separabili. Continuiamo il paragrafo con esempi e applicazioni.

5.1. Proposizione. *Se S è uno spazio metrizzabile separabile e S' è un suo sottoinsieme non vuoto, allora S' è separabile rispetto alla topologia indotta.* □

Dimostrazione. Siano d una metrica che induce la topologia e D un sottoinsieme al più numerabile denso in S. Per ogni $x \in D$ e ogni $r' > 0$ razionale, consideriamo l'insieme $S' \cap B_{r'}(x)$ e, se questo è non vuoto, scegliamo un suo punto. Denotiamo con D' l'insieme di tutti i punti scelti con la procedura descritta. Allora D' è un sottoinsieme al più numerabile di S'. Verifichiamo che D' è anche denso in S'. Siano $x_0 \in S'$ e $r > 0$: dobbiamo dimostrare che $D' \cap B_r(x_0)$ non è vuoto. La palla $B_{r/2}(x_0)$ contiene un elemento $x \in D$ e, siccome $d(x, x_0) < r/2$, esiste un razionale $r' \in (d(x, x_0), r/2)$. Allora $x_0 \in S' \cap B_{r'}(x)$, per cui tale intersezione non è vuota. Dunque in essa era stato scelto un certo punto, che denotiamo con x', nella costruzione di D'. Pertanto $x' \in D' \cap B_{r'}(x)$. Deduciamo in particolare $d(x', x_0) \le d(x', x) + d(x, x_0) < r' + r/2 < r$, per cui si ha anche $x' \in B_r(x_0)$. Dunque $D' \cap B_r(x_0) \neq \emptyset$. □

5.2. Teorema. *Sia V uno spazio normato. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: $i)$ lo spazio V è separabile; $ii)$ esiste un sottoinsieme $S \subseteq V$ al più numerabile tale che $\overline{\operatorname{span}} S = V$; $iii)$ esiste una successione $\{V_n\}$ di sottospazi di V di dimensione finita la cui unione sia densa in V; $iv)$ esiste una successione non decrescente $\{V_n\}$ di sottospazi di V di dimensione finita la cui unione sia densa in V.* □

Dimostrazione. L'enunciato è dato in modo che anche lo spazio ridotto alla sola origine rientri come caso particolare e in tali condizioni tutto si banalizza. Supponiamo dunque $\dim V > 0$, nel qual caso l'insieme S di $ii)$ è necessariamente numerabile in quanto ogni sottoinsieme finito è chiuso. Procediamo. Ovviamente $i)$ implica $ii)$ dato che $\overline{\operatorname{span}} S \supseteq S$ per ogni sottoinsieme S. Vediamo ora che $iii)$ e $iv)$ sono equivalenti. Ovviamente $iv)$ implica $iii)$, ma, viceversa, se $\{V_n\}$ è una successione di sottospazi di dimensione finita la cui unione sia densa in V, la successione definita dalla formula $W_n = \operatorname{span}\bigl(\bigcup_{k=1}^n V_k\bigr)$ non decresce e gode della stessa proprietà dato che $W_n \supseteq V_n$ per ogni n. Proviamo che $ii)$ implica $iv)$. Sia S come in $ii)$ e numerabile: presentiamolo come immagine di una successione $\{x_n\}$. Posto allora $V_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ per $n \ge 1$, otteniamo la successione desiderata di sottospazi in quanto $\bigcup_{n=1}^\infty V_n \supseteq S$. Dimostriamo infine che $iv)$ implica $i)$. Se $\{V_n\}$ è come in $iv)$, posto $d_n = \dim V_n$ e supponendo senz'altro $d_n > 0$, si fissi un isomorfismo I_n di $\mathbb{K}^{d_n}$ su V_n e si denoti con D_n un sottoinsieme numerabile denso di $\mathbb{K}^{d_n}$ (ad esempio l'insieme dei punti le cui coordinate sono razionali se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e hanno parti reale e immaginaria razionali se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Allora l'insieme $D = \bigcup_{n=1}^\infty I_n(D_n)$ è numerabile e denso in V come si verifica facilmente. □

Nel prossimo risultato dimostriamo la separabilità di $C^0(\overline{\Omega})$. La dimostrazione che diamo è un po' complessa perché da un lato non vogliamo fare ipotesi restrittive su Ω e, d'altro canto, vogliamo ottenere un altro risultato interessante come sottoprodotto.

5.3. Proposizione. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$. Allora lo spazio $C^0(\overline{\Omega})$ è separabile.* □

Dimostrazione. Verifichiamo la proprietà $iii)$ del Teorema 5.2. Più precisamente, costruiamo una successione $\{V_n\}$ di sottospazi verificanti

$$V_n \subseteq C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{e} \quad \dim V_n < +\infty \quad \text{per ogni } n \quad \text{e} \quad \bigcup_{n=1}^\infty V_n \quad \text{è densa in } C^0(\overline{\Omega}). \tag{5.1}$$

La prima delle (5.1) seguirà dal fatto che gli elementi di V_n sono restrizioni a Ω di funzioni di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}^d$ (Osservazione I.5.43). Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ per semplicità, ma il discorso vale anche nel caso complesso passando alle parti reali e immaginarie.

Per ogni $n \ge 1$, "quadrettiamo" $\mathbb{R}^d$ con passo $1/n$, consideriamo cioè la famiglia $\mathcal{Q}_n$ di tutti i "quadrati" aperti Q di $\mathbb{R}^d$ della forma $Q = \prod_{i=1}^d (a_i, a_i + 1/n)$ tali che na_i sia intero per $i = 1, \dots, d$.

Per comodità diciamo che due quadrati $Q, Q' \in \mathcal{Q}_n$ distinti sono adiacenti quando le loro chiusure hanno intersezione non vuota e poniamo $\delta_n = d^{1/2}/n$, così che $|x-y| \le \delta_n$ per ogni coppia di punti di uno stesso quadrato $Q \in \mathcal{Q}_n$ e $|x-y| \le 2\delta_n$ se x e y appartengono a due quadrati adiacenti. Denotiamo con Ω_n l'interno dell'unione delle chiusure di tutti i $Q \in \mathcal{Q}_n$ che intersecano $\overline{\Omega}$ e osserviamo che Ω_n è un aperto che include il compatto $\overline{\Omega}$. Per la Proposizione A.1.21, esiste $\varepsilon_n \in (0, \delta_n)$ tale che $B_{\varepsilon_n}(x) \subseteq \Omega_n$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$, in particolare per ogni $x \in \Omega$. Introduciamo l'insieme $\mathcal{S}_n$ delle funzioni $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ verificanti le due condizioni seguenti: *i)* $v|_Q$ è (q.o. uguale a una) costante per ogni $Q \in \mathcal{Q}_n$; *ii)* $v|_Q = 0$ se $Q \in \mathcal{Q}_n$ non interseca Ω. Siccome Ω è limitato, $\mathcal{S}_n$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita. Costruiamo ora un'applicazione $R_n : \mathcal{S}_n \to C^\infty(\mathbb{R}^d)$ lineare usando la procedura di regolarizzazione introdotta nell'Osservazione I.5.51. Fissiamo $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ verificante le (I.5.28) e definiamo la regolarizzata $R_n v$ di $v \in \mathcal{S}_n$ e il sottospazio V_n di $C^0(\overline{\Omega})$ mediante le formule

$$(R_n v)(x) = \int_{B_1(0)} v(x + \varepsilon_n\, y)\, \rho(y)\, dy, \quad \text{per } v \in \mathcal{S}_n \text{ e } x \in \mathbb{R}^d, \quad \text{e} \quad V_n = \{(R_n v)|_\Omega :\ v \in \mathcal{S}_n\}.$$

Allora V_n è uno spazio vettoriale e verifica le prime due delle (5.1). Dimostriamo che l'unione di tutti i V_n è densa in $C^0(\overline{\Omega})$. Fissiamo dunque $u \in C^0(\overline{\Omega})$ e $\varepsilon > 0$ e costruiamo n e $u_n \in V_n$ tali che $\|u - u_n\|_\infty \le 2\varepsilon$. Siccome u è uniformemente continua, possiamo scegliere $\delta > 0$ tale che $|u(x) - u(y)| \le \varepsilon$ per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega$ verificanti $|x-y| \le \delta$. Fissiamo n in modo che $\delta_n \le \delta/2$, così che, se due punti $x, y \in \Omega$ appartengono allo stesso quadrato $Q \in \mathcal{Q}_n$ oppure a due quadrati adiacenti, risulta $|x-y| \le \delta$ e quindi $|u(x) - u(y)| \le \varepsilon$. Denotiamo con s_n l'unico elemento di $\mathcal{S}_n$ che verifica la condizione: se $Q \in \mathcal{Q}_n$ e Q interseca Ω, il valore costante che assume s_n è la media di u in $Q \cap \Omega$. Poniamo $u_n = (R_n s_n)|_\Omega$ così che $u_n \in V_n$ e dimostriamo che $\|u - u_n\|_\infty \le 2\varepsilon$.

Sia $Q \in \mathcal{Q}_n$ che interseca Ω e siano $M_\pm$ gli estremi superiore e inferiore di u in $Q \cap \Omega$. Allora $M_+ - M_- \le \varepsilon$ e la media di u su $Q \cap \Omega$ è compresa fra M_- e M_+. Segue che $|u(x) - s_n(x)| \le \varepsilon$ per ogni $x \in Q \cap \Omega$. Data l'arbitrarietà di Q risulta $\|u - s_n\|_\infty \le \varepsilon$. Quindi resta da valutare $\|u_n - s_n\|_\infty$. Osserviamo che, se $Q, Q' \in \mathcal{Q}_n$ intersecano Ω e sono adiacenti, allora la differenza dei due valori costanti che s_n assume in Q e in Q' ha modulo $\le \varepsilon$. Basta infatti ripetere quanto ci ha portato alla stima appena fatta sostituendo Q con $Q \cup Q'$ nella definizione di $M_\pm$ e ricordare che $2\delta_n \le \delta$. Sia $x \in \Omega$ e sia $Q \in \mathcal{Q}_n$ un quadrato la cui chiusura contiene x. Allora si danno due casi: *i)* la palla $B_{\varepsilon_n}(x)$ è inclusa in Q; *ii)* la palla $B_{\varepsilon_n}(x)$ non è inclusa in Q. Denotiamo con c il valore costante che s_n assume su Q. Nel primo caso si ha $s_n(x + \varepsilon_n\, y) = c$ per ogni $y \in B_1(0)$ e quindi $u_n(x) = c = s_n(x)$. Nel secondo osserviamo che $B_{\varepsilon_n}(x) \subseteq \Omega_n$, per cui i valori che s_n può assumere in $B_{\varepsilon_n}(x)$ sono tutti medie su $Q' \cap \Omega$ ove Q' è Q oppure un quadrato adiacente a Q. Segue che $c - \varepsilon \le s_n(x + \varepsilon_n\, y) \le c + \varepsilon$ per ogni $y \in B_1(0)$, per cui $c - \varepsilon \le u_n(x) \le c + \varepsilon$, cioè $|u_n(x) - s_n(x)| \le \varepsilon$. Concludiamo quindi che $\|u_n - s_n\|_\infty \le \varepsilon$, da cui $\|u - u_n\|_\infty \le 2\varepsilon$, e la dimostrazione è conclusa. □

5.4. Osservazione. Si noti che, grazie alla (5.1), abbiamo che

$$\textit{per ogni aperto } \Omega \subset \mathbb{R}^d \textit{ limitato } C^\infty(\overline{\Omega}) \textit{ è denso in } C^0(\overline{\Omega}). \tag{5.2}$$

5.5. *Esercizio.* Dimostrare la separabilità di $C^0[a, b]$ come segue. Per ogni n, si suddivida $[a, b]$ in n intervalli di uguale ampiezza e si consideri il sottospazio delle funzioni $v : [a, b] \to \mathbb{K}$ la cui restrizione a ciascuno degli intervalli della suddivisione è un polinomio di grado ≤ 1.

5.6. *Esercizio.* Adattare il discorso dell'esercizio precedente al caso in cui Ω è un poligono di $\mathbb{R}^2$. Per ogni n, si suddivida Ω in triangoli aventi tutti i lati di lunghezza $\le 1/n$.

5.7. Proposizione. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Allora lo spazio $L^p(\Omega)$ è separabile se $p < +\infty$.* □

Dimostrazione. Se $A \subseteq \Omega$ è un insieme misurabile, denotiamo con $|A|$ la sua misura di Lebesgue. Sia $\mathcal{R}$ la famiglia, che è numerabile, costituita dai rettangoli inclusi in Ω i cui vertici hanno coordinate razionali. Consideriamo l'insieme $\mathcal{X}$ delle funzioni caratteristiche degli elementi di $\mathcal{R}$, che è, come $\mathcal{R}$, numerabile. Mostriamo che $\operatorname{span} \mathcal{X}$ è denso in $L^p(\Omega)$. Siano $v \in L^p(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Siccome $p < +\infty$, per l'Osservazione 2.9 esiste una funzione a scala s tale che $\|s - v\|_p \le \varepsilon$. Si fissino i rettangoli $R_1, \ldots, R_n$ in numero finito e fra loro disgiunti e altrettante costanti $c_1, \ldots, c_n$ tali che s assuma il valore costante c_i in

R_i per $i = 1, \ldots, n$ e si annulli altrove e sia $M > 0$ tale che $M \geq \max_{i=1,\ldots,n} |c_i|$. Per $i = 1, \ldots, n$, si prenda $R'_i \in \mathcal{R}$ incluso in R_i tale che $|R_i \setminus R'_i| \leq \varepsilon^p/(nM^p)$ e sia $\chi_i \in \mathcal{X}$ la funzione caratteristica di R'_i. Allora la funzione $w = \sum_{i=1}^n c_i \chi_i$ appartiene a $\operatorname{span} \mathcal{X}$ e verifica

$$\|w - s\|_p^p = \sum_{i=1}^n \int_{R_i} |w - s|^p \, dx = \sum_{i=1}^n |c_i|^p \, |R_i \setminus R'_i| \leq \sum_{i=1}^n M^p \, \frac{\varepsilon^p}{nM^p} = \varepsilon^p.$$

Segue che $\|w - v\|_p \leq \|w - s\|_p + \|s - v\|_p \leq 2\varepsilon$. □

5.8. Osservazione. Il risultato precedente vale in realtà per ogni spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ σ-finito che è *separabile* nel senso seguente: esiste un sottoinsieme $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ al più numerabile che genera la σ-algebra $\mathcal{M}$ a meno di insiemi di misura nulla.

Il caso dell'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ considerato sopra rientra appunto in questa categoria dato che, come $\mathcal{M}'$, si può prendere la famiglia $\mathcal{R}$ utilizzata nella dimostrazione. Questa, infatti, genera l'algebra di Borel e ogni insieme misurabile secondo Lebesgue differisce da un insieme di Borel per un insieme di misura nulla.

Un altro spazio importante che rientra in questa categoria è quello della frontiera Γ di un aperto regolare di $\mathbb{R}^d$, diciamo limitato e di classe C^1 con $d > 1$, quando la misura è la misura $(d-1)$-dimensionale usuale (lunghezza d'arco se $d = 2$, area superficiale se $d = 3$). In tal caso, infatti, Γ si ricopre con un numero finito di sue parti Γ_i, $i = 1, \ldots, m$, che sono le immagini di altrettanti aperti ω_i di $\mathbb{R}^{d-1}$ tramite funzioni φ_i di classe C^1 con matrice jacobiana di rango costante $d-1$. Allora si possono prendere, in ciascuno degli ω_i, i rettangoli con vertici di coordinate razionali e su Γ le immagini di questi tramite le funzioni φ_i: anche in questo caso la σ-algebra generata è l'algebra di Borel di Γ.

5.9. Corollario. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $k \geq 0$ un intero e si supponga $p \in [1, +\infty)$. Allora $W^{k,p}(\Omega)$ è separabile.* □

Dimostrazione. Lo spazio $W^{k,p}(\Omega)$ è isomorfo a un sottospazio (chiuso) di una certa potenza $L^p(\Omega)^N$ di $L^p(\Omega)$. Siccome il prodotto di spazi separabili è separabile (facile verifica) e ogni spazio topologico omeomorfo a uno spazio separabile è separabile, la tesi segue dalle Proposizioni 5.7 e 5.1. □

Se $L^p(\Omega)$ è separabile per una vasta classe di spazi di misura, lo spazio $L^\infty(\Omega)$, al contrario, è separabile solo in casi estremi e privi di interesse. Esso, infatti, rientra di solito nel criterio di non separabilità che diamo di seguito.

5.10. Proposizione. *Sia (S, d) uno spazio metrico. Se esistono un sottoinsieme A non numerabile e un numero $\delta > 0$ tali che*

$$d(x, y) \geq \delta \quad \textit{per ogni coppia di punti distinti } x, y \in A$$

allora (S, d) non è separabile. □

Dimostrazione. Sia S' un sottoinsieme al più numerabile, che presentiamo come immagine di una successione $\{x_n\}$, iniettiva o meno. Per ogni n si consideri la palla $B_n = B_{\delta/3}(x_n)$: questa contiene al massimo un punto di A. Sia A' l'insieme dei punti $x \in A$ che appartengono ad almeno un B_n: allora A' è al più numerabile. Segue che $A \setminus A'$ non è vuoto. Sia $x_0 \in A \setminus A'$. Allora $d(x_0, x_n) \geq \delta/3$ per ogni n, cioè $d(x_0, y) \geq \delta/3$ per ogni $y \in S'$, così che S' non è un sottoinsieme denso. □

5.11. Esempio. Per vedere che $L^\infty(\Omega)$ non è separabile, basta allora essere in grado di costruire un'applicazione $t \mapsto v_t$ da un intervallo I in $L^\infty(\Omega)$ e un numero $\delta > 0$ tali che $\|v_t - v_s\|_\infty \geq \delta$ per ogni coppia di punti $s, t \in I$ distinti, e ciò, di solito, si riesce a fare. Ad esempio, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$, fissata una palla $B_r(x_0) \subseteq \Omega$, per $t \in (0, r)$, consideriamo la funzione caratteristica v_t della palla $B_t(x_0)$. Allora $\|v_t - v_s\|_\infty = 1$ per $0 < s < t < r$. □

Si noti che, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$, anche $(L^1(\Omega))^*$, in quanto isometricamente isomorfo a $L^\infty(\Omega)$, non è separabile, mentre $L^1(\Omega)$ lo è. Concludiamo che

$$\textit{la separabilità di uno spazio di Banach non implica quella del suo duale.} \tag{5.3}$$

Usiamo invece ancora una volta il Teorema di Hahn-Banach (attraverso il Corollario 2.7) per dimostrare il risultato successivo.

5.12. Teorema. *Sia V uno spazio normato. Se V^* è separabile, allora anche V lo è.* □

Dimostrazione. Sia $\{f_n : n = 1, 2, \ldots\}$ un sottoinsieme numerabile denso di V^*. Per ogni n sia $x_n \in V$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $|\langle f_n, x_n\rangle| \geq (1/2)\|f_n\|_*$. Dimostriamo che il sottospazio $V_0 = \operatorname{span}\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ è denso in V, cioè la *ii)* del Teorema 5.2. Ma ciò segue dal Corollario 2.7 se dimostriamo che l'unico elemento $f \in V^*$ che si annulla su V_0 è il funzionale nullo. Sia dunque $f \in V^*$ tale che $\langle f, v\rangle = 0$ per ogni $v \in V_0$. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, scegliamo n tale che $\|f - f_n\|_* \leq \varepsilon$. Allora

$$\begin{aligned}\|f\|_* &\leq \|f - f_n\|_* + \|f_n\|_* \leq \varepsilon + \|f_n\|_* \leq \varepsilon + 2|\langle f_n, x_n\rangle| \\ &= \varepsilon + 2|\langle f_n - f, x_n\rangle| \leq \varepsilon + \leq 2\|f_n - f\|_*\|x_n\| \leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

da cui $f = 0$ per l'arbitrarietà di ε. □

5.13. Corollario. *Se V è uno spazio di Banach riflessivo, allora esso è separabile se e solo se il suo duale è separabile.*

Dimostrazione. Se V^* è separabile, anche V lo è per il teorema precedente. Supponiamo ora V separabile. Siccome V è riflessivo, V^{**} è isomorfo a V, dunque separabile. Applicando il teorema precedente a V^*, deduciamo che esso è separabile. □

6. Compattezza debole* sequenziale

Questo paragrafo è dedicato principalmente a un fondamentale risultato di compattezza sequenziale, analogo, dunque, al Teorema IV.5.1. Esso riguarda la convergenza debole*. Premettiamo un risultato propedeutico, la proposizione enunciata di seguito, che è anche utile di per sé, come mostrano le applicazioni significative che diamo tra breve. Altrettanto utile è poi il corollario che la segue e che costituisce una sorta di duale della proposizione stessa.

6.1. Proposizione. *Siano V uno spazio normato e D un sottoinsieme denso di V. Sia inoltre $\{f_n\}$ una successione limitata in V^* tale che, per ogni $x \in D$, la successione $\{\langle f_n, x\rangle\}$ converga. Allora $\{f_n\}$ converge debolmente* in V^*.* □

Dimostrazione. Sia M tale che $\|f_n\|_* \leq M$ per ogni n. Sia ora $x \in V$: proviamo che la successione numerica $\{\langle f_n, x\rangle\}$ converge. A tale scopo basta controllare che essa è di Cauchy. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$. Siccome D è denso in V, possiamo scegliere $y \in D$ tale che $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Per ogni n, m abbiamo allora

$$\begin{aligned}&|\langle f_n, x\rangle - \langle f_m, x\rangle| \leq |\langle f_n, x\rangle - \langle f_n, y\rangle| + |\langle f_n, y\rangle - \langle f_m, y\rangle| + |\langle f_m, y\rangle - \langle f_m, x\rangle| \\ &\leq \|f_n\|\,\|x - y\| + \|f_m\|\,\|y - x\| + |\langle f_n, y\rangle - \langle f_m, y\rangle| \leq 2M\varepsilon + |\langle f_n, y\rangle - \langle f_m, y\rangle|.\end{aligned}$$

Ma la successione $\{\langle f_n, y\rangle\}$ è di Cauchy in quanto convergente. Allora esiste n^* tale che, per ogni coppia di indici $n, m \geq n^*$, l'ultimo termine della catena precedente sia $\leq \varepsilon$. Per $n, m \geq n^*$, dunque, abbiamo che $|\langle f_n, x\rangle - \langle f_m, x\rangle| \leq (2M + 1)\varepsilon$. Controllata la convergenza della successione $\{\langle f_n, x\rangle\}$ per ogni x, possiamo definire $f : V \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, x\rangle \quad \text{per } x \in V .$$

Si controlla immediatamente che f è lineare. D'altra parte si ha $|\langle f_n, x\rangle| \leq M\|x\|$ per ogni $x \in V$ e $n \geq 1$. Dunque, passando al limite, otteniamo $|f(x)| \leq M\|x\|$ per ogni $x \in V$. Ciò mostra che $f \in V^*$. Allora la definizione stessa di f fornisce $f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$ in V^*. □

6.2. Corollario. *Siano V uno spazio di Banach riflessivo e D^* un sottoinsieme denso di V^*. Sia inoltre $\{x_n\}$ una successione limitata in V tale che, per ogni $f \in D^*$, la successione $\{\langle f, x_n\rangle\}$ converga. Allora la successione $\{x_n\}$ converge debolmente in V.* □

Dimostrazione. Si consideri la successione $\{Jx_n\}$ immagine tramite l'isomorfismo canonico: essa è una successione limitata in V^{**} tale che, per ogni $f \in D^*$, la successione numerica $\{\langle Jx_n, f\rangle\}$ converge. Per il risultato precedente, applicato a V^* e a D^*, la successione $\{Jx_n\}$ converge debolmente* in V^{**} a un certo $F \in V^{**}$. Siccome V è riflessivo, risulta $F = Jx$ per un certo $x \in V$ e la conclusione precedente diventa: $Jx_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} Jx$ in V^{**}. Allora la tesi segue dalla (4.9). □

6.3. Osservazione. Nelle stesse ipotesi del corollario, se la successione $\{\langle f, x_n \rangle\}$ è infinitesima, allora $\{x_n\}$ tende debolmente a 0. Questa tesi, tuttavia, si può dimostrare agevolmente anche per via diretta (vedi l'Esercizio IV.4.12).

6.4. Esempio (convergenza delle traslate). Con le notazioni dell'Esempio 4.11 supponiamo ora $\lim_{n\to\infty} |h_n| = +\infty$ e studiamo la convergenza della successione $\{u_n\}$. Dato che nei casi più elementari si ha convergenza puntuale a 0, ci si aspetta una convergenza a 0 di qualche tipo (ma non q.o.: si forniscano esempi). La convergenza forte è chiaramente falsa (se u non è la funzione nulla): infatti $\|u_n\|_p = \|u\|_p$ per ogni n. Dimostriamo che

$$\text{se } p \in (1, +\infty) \text{ allora } \{u_n\} \text{ converge debolmente a } 0 \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d). \tag{6.1}$$

Si noti che, posto $q = p'$, gli spazi $L^p(\mathbb{R}^d)$ e $L^q(\mathbb{R}^d)$ sono riflessivi e l'uno il duale dell'altro. Per dimostrare la (6.1) usiamo l'Osservazione 6.3: siccome $\{u_n\}$ è limitata, basterà dimostrare che l'integrale di $u_n v$ tende a 0 per ogni v di un insieme D^* denso in $L^q(\mathbb{R}^d)$. Prendiamo ad esempio come D^* lo spazio C_c delle funzioni $v \in C^0(\mathbb{R}^d)$ a supporto compatto. Questo include $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, per cui esso è denso in $L^q(\mathbb{R}^d)$ dato che q è finito. Ma lo stesso calcolo fatto nell'Esempio 4.11 e una considerazione analoga all'Osservazione 4.12 mostrano che, per concludere, è sufficiente dimostrare che, se $v \in C_c$, tende debolmente a 0 in $L^q(\mathbb{R}^d)$ la successione $\{v_n\}$ definita dalla formula $v_n(x) = v(x - h_n)$. Ma per vedere ciò, grazie alla limitatezza di $\{v_n\}$ e ancora all'Osservazione 6.3, è sufficiente dimostrare che l'integrale di $v_n z$ è infinitesimo per ogni z appartenente a un sottoinsieme denso di $L^p(\mathbb{R}^d)$. Ora, siccome p è finito, come insieme denso possiamo prendere ancora C_c. Supponiamo dunque $v, z \in C_c$. Allora il prodotto $v_n z$ è identicamente nullo se n è abbastanza grande, per cui il suo integrale, banalmente, è infinitesimo.

6.5. *Esercizio.* Mostrare poi che ciò è assolutamente *falso nei casi* $p = 1$ *e* $p = +\infty$.

6.6. Teorema (di compattezza debole* sequenziale). *Sia V uno spazio normato separabile. Allora da ogni successione limitata in V^* si può estrarre una sottosuccessione convergente debolmente* a un elemento di V^*.* □

Dimostrazione. Adattiamo il metodo, basato sul procedimento diagonale di Cantor IV.3.11, usato per dimostrare il Teorema IV.5.1. Sia $\{f_n\}$ una successione limitata in V^* e sia M tale che $\|f_n\|_* \le M$ per ogni n. Supponendo senz'altro $\dim V > 0$, fissiamo un insieme numerabile $D = \{x_j : \ j = 1, 2, \ldots\}$ denso in V. Allora, per ogni j, abbiamo $|\langle f_n, x_j \rangle| \le M \|x_j\|$ per ogni n, per cui la successione numerica $\{\langle f_n, x_j \rangle\}$ è limitata. Dunque, usando il procedimento diagonale, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ tale che la successione $\{\langle f_{n_k}, x_j \rangle\}$ converga per tutti gli interi $j \ge 1$. La sottosuccessione così costruita è pertanto nelle condizioni della Proposizione 6.1, per cui essa converge debolmente* in V^*. □

6.7. Osservazione. Il Teorema 6.6 si applica, in particolare, allo spazio $L^1(\Omega)$ costruito su di uno spazio di misura "di ordinaria amministrazione", ad esempio un aperto Ω di $\mathbb{R}^d$ o la frontiera di un aperto limitato e regolare di $\mathbb{R}^d$ (Osservazione 5.8):

$$\textit{da ogni successione limitata in } L^\infty(\Omega) \textit{ si può estrarre una sottosuccessione che converge debolmente* in } L^\infty(\Omega). \tag{6.2}$$

Come preannunciato all'inizio del paragrafo, diamo qualche applicazione significativa della Proposizione 6.1.

6.8. Teorema. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $q \in (1, +\infty]$ e $\{u_n\}$ una successione limitata in $L^q(\Omega)$ tale che, per ogni $v \in C_c^\infty(\Omega)$, la successione numerica costituita dagli integrali $\int_\Omega u_n v \, dx$ converga. Allora $\{u_n\}$ converge debolmente in $L^q(\Omega)$ se $q \in (1, +\infty)$ e converge debolmente* in $L^\infty(\Omega)$ se $q = \infty$.* □

Dimostrazione. Tenendo conto dell'Osservazione 4.8 possiamo unificare le due tesi nella forma: la successione $\{u_n\}$ converge debolmente* in $L^q(\Omega)$. Allora basta applicare la Proposizione 6.1 con $V = L^p(\Omega)$ ove $p = q'$ e $D = C_c^\infty(\Omega)$, che è un sottospazio denso in V in quanto $p \in [1, +\infty)$. □

6.9. Osservazione. Il caso $q = 1$, non considerato nel teorema, deve essere effettivamente escluso. Per coordinare quanto diciamo con altre considerazioni supponiamo Ω anche limitato. Fissato $x_0 \in \Omega$ consideriamo la successione definita dalla formula $u_n = n^d \chi_n$ ove χ_n è la funzione caratteristica di $B_{1/n}(x_0)$. Allora $\|u_n\|_1 = |B_1|$, la misura di Lebesgue della palla unitaria, per n abbastanza grande (in modo che la palla sia inclusa in Ω) e $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v \, dx = |B_1| v(x_0)$ per ogni $v \in C^0(\overline{\Omega})$. Se $\{u_n\}$ convergesse debolmente in $L^1(\Omega)$ a $u \in L^1(\Omega)$, dovremmo avere $\int_\Omega uv \, dx = |B_1| v(x_0)$ per ogni $v \in C^0(\overline{\Omega})$. Ma ciò è impossibile per il Corollario I.5.55.

Non è inutile chiarire ulteriormente che succede alla successione $\{u_n\}$ considerata: se ricordiamo l'Esempio 4.13, vediamo chiaramente che $\{u_n\}$ converge debolmente* in $C^0(\overline{\Omega})^*$ alla misura $\mu = |B_1(0)| \delta_{x_0}$. Ora, questa misura non è immagine, tramite la corrispondenza che abbiamo interpretato come identificazione, di alcun elemento di $L^1(\Omega)$, e la dimostrazione di questo fatto è data dalle considerazioni fatte sopra. Ancora, possiamo dire che le misure che provengono da funzioni di $L^1(\Omega)$ sono quelle assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue, e la misura μ in esame non lo è, e che $L^1(\Omega)$ non è sequenzialmente chiuso rispetto alla convergenza debole* di $C^0(\overline{\Omega})^*$.

Notiamo infine che la successione $\{u_n\}$ converge a 0 q.o. in Ω, mentre la sua immagine in $C^0(\overline{\Omega})^*$ converge a un funzionale non nullo. Ne traiamo l'avvertimento seguente: la convergenza q.o., quando la topologia da considerare è legata a convergenze di tipo diverso da quelle forti degli spazi di Lebesgue, non va presa in considerazione in quanto può portare a candidati non idonei a essere limiti nelle topologie considerate.

6.10. Esempio. Siano $p \in (1, +\infty)$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Supponiamo che esista $M \geq 0$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \right|^p dx \leq M^p \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \tag{6.3}$$

e dimostriamo che $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e che, per $i = 1, \dots, d$, la derivata $D_i u$ è il limite debole in $L^p(\mathbb{R}^d)$ per $t \to 0$ del rapporto incrementale u_t^i definito da $u_t^i(x) = (u(x + te_i) - u(x))/t$ q.o. in $\mathbb{R}^d$. A tal fine osserviamo che, per ogni $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, l'analogo rapporto incrementale v_t^i converge uniformemente a $D_i v$ per il Teorema del valor medio e la continuità uniforme di $D_i v$. D'altra parte, se denotiamo con $B_R(0)$ una palla fuori della quale v è nulla e supponiamo $|t| \leq 1$, si ha $v_t^i(x) = 0$ per $|x| > R + 1$. Si deduce che v_t^i converge a $D_i v$ anche in ogni $L^q(\mathbb{R}^d)$, in particolare con $q = p'$. Ne consegue che

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} u_t^i \, v \, dx = -\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} u \, v_{-t}^i \, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} u \, D_i v \, dx \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) .$$

Ma la (6.3) implica che $\|u_t^i\| \leq M$ per ogni $t \neq 0$, per cui siamo nelle condizioni di applicare il Teorema 6.8 (nella versione con parametro $t \in \mathbb{R}$ anziché $n \in \mathbb{N}$). Deduciamo che la famiglia $\{u_t^i\}$ converge debolmente in $L^p(\mathbb{R}^d)$ a una funzione w_i e che questa verifica

$$\int_{\mathbb{R}^d} w_i \, v \, dx = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} u_t^i \, v \, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} u \, D_i v \, dx \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) .$$

Quindi w_i è la derivata debole $D_i u$ e i rapporti incrementali u_t^i convergono a tale derivata debolmente in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Siccome ciò vale per ogni i, concludiamo anche che $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

6.11. *Esercizio.* Mostrare che la funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ data dalle formule $u(x) = e^{-x}$ se $x > 0$ e $u(x) = 0$ se $x < 0$ verifica la (6.3) con $p = 1$ ma non appartiene a $W^{1,1}(\mathbb{R})$ (cioè $p = 1$ non va).

6.12. Osservazione. Notiamo invece che la (6.3) è necessaria per l'appartenenza $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ in generale per $p \in [1, +\infty)$. Sia infatti $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora, usando la formula fondamentale del calcolo, la disuguaglianza di Hölder, il Teorema di Fubini e un cambiamento di variabile, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \right|^p dx = |h|^{-p} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^1 \nabla u(x+th) \cdot h \, dt \right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p \, dt \, dx$$
$$= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x+th)|^p \, dx \, dt = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(y)|^p \, dy \, dt = \|\nabla u\|_p^p .$$

Siccome $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ (si ricordi la (II.3.5)), la disuguaglianza ottenuta vale anche per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Riassumendo

> *se* $p \in (1, +\infty)$ *condizione necessaria e sufficiente perché una funzione* $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *appartenga a* $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ *è che esista una costante* M *tale che valga la* (6.3).

La condizione è solo necessaria se $p = 1$ e, per $p \in [1, +\infty)$, se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, si può prendere $M = \|\nabla u\|_p$ nella (6.3). □

7. Compattezza debole sequenziale

Cerchiamo di dedurre un risultato di compattezza debole sequenziale dal Teorema 6.6: ogni successione limitata $\{x_n\}$ di elementi dello spazio di Banach V ha una sottosuccessione debolmente convergente. Questo risultato è *falso per un generico spazio di Banach* e ora ne vediamo il motivo.

Considerando la successione $\{Jx_n\}$ immagine della data tramite l'isomorfismo canonico, successione che pure è limitata. Ricordando la corrispondenza (4.9) che J induce fra convergenza debole in V e convergenza debole* in V^{**}, si può pensare di dedurre che $\{x_n\}$ ha una sottosuccessione convergente debolmente. Ma questo tentativo si inceppa. Prima occorrerebbe un'ipotesi di separabilità su V^*. D'altra parte da $\{Jx_n\}$ potremmo solo estrarre una sottosuccessione $\{Jx_{n_k}\}$ convergente debolmente* in V^{**} a un certo elemento $F \in V^{**}$ e un candidato $x \in V$ limite debole di $\{x_{n_k}\}$ dovrebbe verificare $Jx = F$. Dunque serve anche l'ipotesi di riflessività.

Al fondamentale risultato di compattezza debole ne premettiamo uno di riflessività, che riesce a farci evitare ipotesi di separabilità. Segnaliamo però fin d'ora che questo ha anche altre conseguenze notevoli, come sarà evidenziato nel capitolo dedicato agli spazi riflessivi. La dimostrazione che diamo utilizza per ben due volte il Teorema di Hahn-Banach.

7.1. Teorema. *Ogni sottospazio chiuso* V_0 *di uno spazio riflessivo* V *è esso stesso riflessivo.* □

Dimostrazione. Denotiamo con $J : V \to V^{**}$ e con $J_0 : V_0 \to V_0^{**}$ gli isomorfismi canonici degli spazi V e V_0 rispettivamente. Usando il fatto che J è suriettivo e che V_0 è chiuso dimostriamo che J_0 è suriettivo. Sia $F_0 \in V_0^{**}$. Definiamo $F : V^* \to \mathbb{K}$ mediante la formula $F(f) = \langle F_0, f|_{V_0} \rangle$ per $f \in V^*$ e osserviamo che $F \in V^{**}$, per cui $F = Jx$ per un certo $x \in V$. Abbiamo dunque

$$\langle f, x \rangle = \langle F, f \rangle = \langle F_0, f|_{V_0} \rangle \quad \text{per ogni } f \in V^* . \tag{7.1}$$

Dimostriamo che $x \in V_0$. Ragionando per assurdo, supponiamo $x \notin V_0$. Allora, per il Corollario 2.6 del Teorema di Hahn-Banach, esiste $g \in V^*$ che si annulla su V_0, per cui $\langle F_0, g|_{V_0} \rangle = 0$, e che verifica $\langle g, x \rangle \neq 0$. Ma ciò contraddice la (7.1). Dunque $x \in V_0$ e ora dimostriamo che $F_0 = J_0 x$. Sia infatti $f_0 \in V_0^*$. Applicato il Corollario 2.1 del Teorema di Hahn-Banach, troviamo $f \in V^*$ che prolunga f_0. Ricordando la (7.1) abbiamo pertanto

$$\langle F_0, f_0 \rangle = \langle F_0, f|_{V_0} \rangle = \langle f, x \rangle = \langle f_0, x \rangle$$

e l'arbitrarietà di $f_0 \in V_0^*$ implica che $F_0 = J_0 x$. □

7.2. Teorema (di compattezza debole sequenziale). *Sia* V *uno spazio di Banach riflessivo. Allora da ogni successione limitata* $\{x_n\}$ *di elementi di* V *si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente ad un elemento* $x \in V$. □

Dimostrazione. Riprendiamo il discorso introduttivo e formalizziamolo. Supponiamo dapprima V anche separabile. Per il Corollario 5.13, anche V^* è separabile. Allora possiamo applicare il Teorema 6.6 allo spazio V^* e alla successione $\{Jx_n\}$, che è limitata in V^{**}. Troviamo $F \in V^{**}$ e una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\{Jx_{n_k}\}$ converga debolmente* a F. Grazie all'ipotesi di riflessività, esiste $x \in V$ tale che $Jx = F$. Dunque $x_{n_k} \rightharpoonup x$ in V per la (4.9).

Consideriamo ora il caso generale. Siano S l'immagine della successione data $\{x_n\}$ e $V_0 = \overline{\operatorname{span}} S$. Allora V_0 è separabile. D'altra parte esso è anche riflessivo per il Teorema 7.1. Allora da $\{x_n\}$ possiamo estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente debolmente in V_0 a un certo $x \in V_0$. Sia ora $f \in V^*$, siccome la restrizione f_0 di f a V_0 appartiene a V_0^*, abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} \langle f, x_{n_k}\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f_0, x_{n_k}\rangle = \langle f_0, x\rangle = \langle f, x\rangle.$$

Dunque $x_{n_k} \rightharpoonup x$ in V. $\square$

L'ipotesi di riflessività che compare nel Teorema 7.2 non può assolutamente essere rimossa. Vale infatti il seguente risultato, che ci limitiamo a enunciare:

7.3. Teorema (di Eberlein-Šmulian). *Se da ogni successione limitata in uno spazio di Banach V si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente, allora V è riflessivo.* $\square$

Di fatto il Teorema di Eberlein-Šmulian dimostra una cosa diversa, sulla quale per ora non possiamo dire nulla, e ha l'enunciato precedente come conseguenza.

7.4. *Esercizio.* Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$. Si dimostri che se $v_n \rightharpoonup v$ in $C^0(\overline{\Omega})$ allora $\{v_n\}$ converge puntualmente a v. Usando prima il Teorema 7.2 e poi il Teorema 7.1, si deduca che $C^0(\overline{\Omega})$ non è riflessivo e che nemmeno $L^\infty(\Omega)$ lo è, almeno nel caso considerato.

7.5. Esempio. Siano Ω un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e $p, q \in [1, +\infty]$ e si definisca

$$C_{pq} = \{v \in L^p(\Omega) :\ v' \in L^q(\Omega),\ \|v'\|_q \le 1\}$$

ove v' va intesa in senso debole. Vogliamo decidere se C_{pq} è chiuso in $L^p(\Omega)$. Sia dunque $\{u_n\}$ una successione di elementi di C_{pq} convergente in $L^p(\Omega)$ a un certo $u \in L^p(\Omega)$: dobbiamo vedere se $u \in C_{pq}$. Supponiamo dapprima $q > 1$. Allora, applicando, rispettivamente nei due casi $q \in (1, +\infty)$ e $q = +\infty$, i teoremi di compattezza sequenziale 7.2 e 6.6 alla successione $\{u'_n\}$ delle derivate e tenendo conto dell'Esercizio IV.4.11, vediamo che esistono $w \in L^q(\Omega)$ e una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tali che

$$u'_{n_k} \rightharpoonup w \quad \text{e} \quad u'_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} w \quad \text{rispettivamente per } q \in (1, +\infty) \text{ e } q = +\infty\,.$$

Dimostriamo che $w = u'$ in senso debole. Se $v \in C_c^\infty(\Omega)$, si ha

$$\int_\Omega u'_{n_k} v\, dx = -\int_\Omega u_{n_k} v'\, dx \quad \text{per ogni } k \quad \text{da cui} \quad \int_\Omega wv\, dx = -\int_\Omega uv'\, dx$$

dato che $v \in L^{q'}(\Omega)$. Dunque $w = u'$ in senso debole. La disuguaglianza $\|w\|_q \le 1$ segue poi dalle (2.3) e (4.10) rispettivamente per $q \in (1, +\infty)$ e $q = +\infty$. Quindi $u \in C_{pq}$ e C_{pq} è chiuso. Se $q = 1$, invece, non abbiamo risultati di compattezza utili allo scopo. Di fatto le cose vanno diversamente come mostra l'esempio seguente: supponendo $p < +\infty$, prendiamo $\Omega = (-1, 1)$ e $u_n \in C^1[-1, 1]$ non decrescente, nulla in $(-1, 0)$ e tale che $u_n(x) = 1$ per $x \ge 1/n$. Allora $u'_n \ge 0$, per cui $\|u'_n\|_1 = 1$, e quindi $u_n \in C_{p1}$ per ogni n. Ma la successione $\{u_n\}$ converge in $L^p(-1, 1)$ alla funzione caratteristica di $(0, 1)$ e questa non ha derivata debole (Osservazione I.5.64). Quindi il limite non appartiene a C_{p1}, il quale, dunque, non è chiuso in $L^p(-1, 1)$. Se $p = +\infty$, si deve modificare il discorso e prendere funzioni u_n differenti a causa della convergenza uniforme, ma si arriva comunque a dimostrare che nemmeno $C_{\infty 1}$ è chiuso: si prendano le funzioni u_n, tutte lipschitziane e non decrescenti, e la funzione u di Vitali definite nell'Esempio I.5.65.

Vogliamo ora dimostrare che risulta chiusa in $L^p(\Omega)$ l'intersezione C_p, ottenuta al variare di q in $[1, +\infty]$, di tutti gli insiemi C_{pq}. Siccome il caso $q = 1$ è, come abbiamo visto, eccezionale, occorre un trucco:

$$C_p = \bigcap_{q\in[1,+\infty]} C_{pq} = (C_{p1} \cap C_{p2}) \bigcap \Bigl(\bigcap_{q\in(1,+\infty]} C_{pq} \Bigr).$$

Basta allora dimostrare che è chiusa l'intersezione $C_{p1} \cap C_{p2}$. Sia $\{u_n\}$ una successione di elementi di tale insieme convergente a u in $L^p(\Omega)$. Siccome C_{p2} è chiuso abbiamo $u \in C_{p2}$ e ora dimostriamo che u appartiene anche a C_{p1}. Per la dimostrazione fatta sopra vediamo che, almeno per una sottosuccessione che tuttavia continuiamo a chiamare $\{u_n\}$ per semplicità, si ha $u'_n \rightharpoonup u'$ in $L^2(\Omega)$. Allora, per ogni intervallo $\omega \subseteq \Omega$ limitato, si ha $u'_n \rightharpoonup u'$ anche in $L^1(\omega)$. Grazie alla (2.3), deduciamo

$$\int_\omega |u'| \, dx = \|u'\|_{L^1(\omega)} \le \liminf_{n\to\infty} \|u'_n\|_{L^1(\omega)} \le \liminf_{n\to\infty} \|u'_n\|_{L^1(\Omega)} \le 1.$$

Dunque $\int_\omega |u'| \, dx \le 1$ per ogni intervallo $\omega \subseteq \Omega$ limitato, da cui $\int_\Omega |u'| \, dx \le 1$ e $u \in C_{p1}$. □

Non distante, come ordine di idee, dall'esempio fatto è il seguente corollario del Teorema 7.2, spesso utile. Rimandiamo tuttavia esempi in proposito dato che gli spazi vettoriali topologici adatti alle situazioni concrete fanno intervenire le topologie deboli che trattiamo più avanti.

7.6. Corollario. *Siano V uno spazio di Banach immerso in uno spazio vettoriale topologico $\mathcal{W}$ e si supponga che ogni successione debolmente convergente in V converga in $\mathcal{W}$ allo stesso limite. Siano inoltre $\{v_n\}$ una successione di elementi di V e $w \in \mathcal{W}$ tali che $v_n \to w$ in $\mathcal{W}$. Allora, se V è riflessivo e $\{v_n\}$ è limitata in V, si ha $w \in V$ e $v_n \rightharpoonup w$ in V.* □

Dimostrazione. Dimostriamo che $w \in V$. Siccome $\{v_n\}$ è limitata e V è riflessivo, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ convergente debolmente in V a un certo $v \in V$. D'altra parte questa sottosuccessione, come tutta la successione data, converge a w in $\mathcal{W}$. Siccome $\mathcal{W}$ è uno spazio di Hausdorff, deduciamo che $w = v \in V$.

Ora che sappiamo che $w \in V$, possiamo passare alla dimostrazione della convergenza debole di $\{v_n\}$ a w in V. Grazie alla Proposizione A.1.9, basta dimostrare che da ogni sottosuccessione estratta da $\{v_n\}$ si può ulteriormente estrarre una sottosuccessione convergente debolmente a w in V. A tale scopo, basta ripetere il discorso appena fatto sostituendo la successione data con la sottosuccessione dalla quale si vuole estrarre ulteriormente. □

8. L'aggiunto di un operatore lineare e continuo

Se A è una matrice con m righe e n colonne, essa può essere interpretata come un operatore lineare $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, precisamente operatore $x \mapsto Ax$, ove resta inteso che x è visto come vettore colonna. Sia ora A^T la matrice trasposta di A. Anche questa rappresenta un operatore lineare A^T, questa volta $A^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, il quale realizza l'uguaglianza $x^T A^T y = y^T A x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Se rileggiamo tale uguaglianza nella forma $(A^T y) \cdot x = y \cdot Ax$, ove il punto rappresenta ciascuno dei due prodotti scalari euclidei, abbiamo indicazioni su come estendere la nozione di trasposizione al caso di un operatore $L : V \to W$ che opera fra spazi prehilbertiani reali: la formula da realizzare dovrà essere $(L^* w, v) = (w, Lv)$ e L^* dovrà operare da W a V. Se infine vogliamo vedere come procedere nell'ambito degli spazi normati, supponiamo dapprima V e W spazi di Hilbert reali e riscriviamo la formula precedente in forma di dualità utilizzando l'isomorfismo di Riesz: $\langle L^* w, v \rangle = \langle w, Lv \rangle$. Questa volta, però, L^* opera dal duale W^* nel duale V^* e w appartiene a W^* anziché a W.

Dopo questo discorso euristico, tuttavia, occorre procedere con precisione e si vede che non si incontrano difficoltà se si considerano solo operatori lineari e continui che operano fra spazi normati, indifferentemente reali o complessi. Il caso degli operatori lineari non limitati (cioè, lo ricordiamo, non necessariamente definiti su tutto lo spazio e non necessariamente continui) verrà considerato successivamente. In tale occasione vedremo anche come si tratta il caso degli spazi di Hilbert complessi, per i quali l'identificazione con i rispettivi duali offre qualche problema di antilinearità.

8.1. Definizione. *Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathcal{L}(V; W)$. L'operatore duale o trasposto o aggiunto di L è l'operatore*

$$L^* : W^* \to V^* \quad \text{definito da} \quad w^* \mapsto w^* \circ L$$

cioè l'operatore che rende vera l'uguaglianza

$$\langle L^* w^*, v \rangle = \langle w^*, Lv \rangle \quad \text{per ogni } v \in V \text{ e } w^* \in W^* \tag{8.1}$$

ove le due dualità sono quella fra V^* e V e quella fra W^* e W rispettivamente. □

8.2. Osservazione. Naturalmente, se V e W sono spazi di Hilbert reali, si può pensare o meno di identificarli ai rispettivi duali tramite l'isomorfismo di Riesz. Se si decide di effettuare le identificazioni, la formula (8.1) diventa

$$(L^* w^*, v) = (w^*, Lv) \quad \text{per ogni } v \in V \text{ e } w^* \in W \tag{8.2}$$

ove, ovviamente, i due prodotti scalari sono quello di V e quello di W rispettivamente.

8.3. Osservazione. La relazione con l'operazione di traposizione della matrice si estende al caso di generici spazi, reali o complessi, di dimensione finita, pur di coordinare le scelte delle basi. Siano n e m le dimensioni di V e di W rispettivamente. Supposto senz'altro $n, m > 0$, scegliamo due basi $(e_1, \ldots, e_n)$ e $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ dei due spazi. Per i duali V^* e W^* scegliamo le rispettive basi duali (Esempio III.3.1), che denotiamo con $(e^1, \ldots, e^n)$ e $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m)$. Allora, grazie alla (III.3.2), le dualità ${}_{V^*}\langle \cdot\,, \cdot \rangle_V$ e ${}_{W^*}\langle \cdot\,, \cdot \rangle_W$ si rappresentano in forma diagonale, cioè

$$\langle v^*, v \rangle = \sum_{j=1}^n x'_j \, x_j \quad \text{se} \quad v = \sum_{j=1}^n x_j \, e_j \quad \text{e} \quad v^* = \sum_{j=1}^n x'_j \, e^j$$
$$\langle w^*, w \rangle = \sum_{i=1}^m y'_i \, y_i \quad \text{se} \quad w = \sum_{i=1}^m y_i \, \varepsilon_i \quad \text{e} \quad w^* = \sum_{i=1}^m y'_i \, \varepsilon^i \,.$$

Scegliendo le notazioni in modo che $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$ in ogni caso, siano $A = (a_{ij})$ e $A^* = (a^*_{ji})$ le matrici che rappresentano L e L^* nelle basi considerate, cioè definite dalle condizioni: a_{ij} è la i-esima coordinata di Le_j e a^*_{ji} è la j-esima coordinata di $L^*\varepsilon^i$. Allora, per ogni $w^* \in W^*$ e $v \in V$, dette y'_i e x_j le rispettive coordinate e dette x'_j e y_i le coordinate di L^*w^* e di Lv, si ha $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \, x_j$ e $x'_j = \sum_{i=1}^m a^*_{ji} \, y'_i$, da cui

$$\langle w^*, Lv \rangle = \sum_{i=1}^m y'_i \, y_i = \sum_{ij} a_{ij} \, y'_i \, x_j \quad \text{e} \quad \langle L^* w^*, v \rangle = \sum_{j=1}^n x'_j \, x_j = \sum_{ij} a^*_{ji} \, y'_i \, x_j \,.$$

Uguagliando in base alla definizione di L^*, si vede che $a^*_{ji} = a_{ij}$ per ogni i e j, cioè che $A^* = A^T$.

8.4. *Esercizio.* Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $p, q \in (1, +\infty)$ due esponenti coniugati. Sia poi $k \in L^q(\Omega \times \Omega)$. Si verifichi che, per ogni $v \in L^p(\Omega)$, la formula

$$(Kv)(x) = \int_\Omega k(x,y) \, v(y) \, dy$$

definisce $(Kv)(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e che la funzione Kv appartiene a $L^q(\Omega)$. Si controlli che l'applicazione di $K : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ che a ogni $v \in L^p(\Omega)$ associa Kv è lineare e continua. Infine si determini l'aggiunto $K^* : L^q(\Omega)^* = L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega)$, le identificazioni essendo effettuate tramite le mappe di Riesz.

8.5. *Esercizio.* Siano $p \in [1, +\infty)$ e $V = L^p(\mathbb{R}^d)$. Per $h \in \mathbb{R}^d$ si definisca $T^p_h : V \to V$ mediante la formula $(T^p_h v)(x) = v(x+h)$ q.o. Si verifichi che T^p_h è un operatore lineare e continuo e, scritto $V^* = L^q(\mathbb{R}^d)$, ove $q = p'$, tramite la mappa di Riesz, si determini l'aggiunto $(T^p_h)^*$.

8.6. *Esercizio.* Si risolva l'esercizio precedente sostituendo la definizione di $T^p_h v$ con la seguente: $(T^p_h v)(x) = v(hx)$ q.o., ove ora h è una matrice $d \times d$ reale non singolare.

8.7. *Esercizio.* Siano $p \in [1, +\infty)$ e $q = p'$. Per $x = \{x_n\} \in \ell^p$ si definisca $y = \{y_n\}$ mediante le formule $y_1 = 0$ e $y_n = x_{n-1}$ se $n \geq 2$. Controllato che $y \in \ell^p$, si denoti con L l'applicazione $x \mapsto y$. Si verifichi che L è lineare e continuo e si determini l'aggiunto $L^* : \ell^q \to \ell^q$, avendo identificato gli spazi $(\ell^p)^*$ e ℓ^q tramite la mappa di Riesz.

8.8. *Esercizio.* Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito, $\omega \in \mathcal{M}$, $p \in [1, +\infty)$ e $q = p'$. Si definisca $L \in \mathcal{L}(L^p(\Omega); L^p(\omega))$ mediante la formula $Lv = v|_\omega$. Effettuate le identificazioni $L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega)$ e $L^p(\omega)^* = L^q(\omega)$ mediante le mappe di Riesz, si determini L^*. □

Rimandando a un paragrafo successivo lo studio della trasposizione in un ambito anche più generale, qui ci limitiamo a dimostrare alcuni risultati molto semplici, il primo dei quali discende direttamente dal Corollario 2.10 del Teorema di Hahn-Banach.

8.9. Teorema. *Se $L \in \mathcal{L}(V; W)$ allora $L^* \in \mathcal{L}(W^*; V^*)$ e $\|L^*\| = \|L\|$.* □

Dimostrazione. La linearità di L^* è immediata. Vediamo la continuità. Se $w^* \in W^*$ e $v \in V$ si ha

$$|\langle L^* w^*, v\rangle| = |\langle w^*, Lv\rangle| \le \|w^*\|_{W^*} \|Lv\|_W \le \|w^*\|_{W^*} \|L\| \, \|v\|_V$$

da cui $\|L^* w^*\|_{V^*} \le \|L\| \, \|w^*\|_{W^*}$ per ogni $w^* \in W^*$. Deduciamo che L^* è limitato e che $\|L^*\| \le \|L\|$. Dimostriamo la disuguaglianza opposta. Sia $v \in V$. Se $Lv \neq 0$, applicando il Corollario 2.10 allo spazio W e all'elemento Lv, troviamo $f \in W^*$ tale che $\|f\|_{W^*} = \|Lv\|_W$ e $\langle f, Lv\rangle = \|Lv\|_W^2$. Osservato che $f \neq 0$ dato che $\|f\|_{W^*} \neq 0$, deduciamo che

$$\|Lv\|_W = \frac{\|Lv\|_W^2}{\|Lv\|_W} = \frac{\langle f, Lv\rangle}{\|f\|_{W^*}} = \frac{\langle L^* f, v\rangle}{\|f\|_{W^*}} \le \frac{\|L^* f\|_{V^*}}{\|f\|_{W^*}} \|v\|_V \le \|L^*\| \, \|v\|_V .$$

Siccome è banalmente vero che $\|Lv\|_W \le \|L^*\| \, \|v\|_V$ se $Lv = 0$, concludiamo che $\|L\| \le \|L^*\|$. □

8.10. Teorema. *Siano V, W e Z tre spazi normati, $L_1 \in \mathcal{L}(V; W)$ e $L_2 \in \mathcal{L}(W; Z)$. Allora vale la formula*

$$(L_2 L_1)^* = L_1^* L_2^* . \tag{8.3}$$

In particolare, se L è un isomorfismo di V su W, anche L^* è un isomorfismo di W^* su V^*. □

Dimostrazione. Siano $z^* \in Z^*$ e $v \in V$. Allora si ha

$$\langle (L_2 L_1)^* z^*, v\rangle = \langle z^*, L_2 L_1 v\rangle = \langle L_2^* z^*, L_1 v\rangle = \langle L_1^* L_2^* z^*, v\rangle.$$

Per l'arbitrarietà di v segue $(L_2 L_1)^* z^* = L_1^* L_2^* z^*$ per ogni $z^* \in Z^*$, da cui la (8.3). Per dimostrare la seconda affermazione, applichiamo la (8.3) agli operatori L e L^{-1} nei due modi possibili. Se I_V e I_W sono le applicazioni identiche di V e di W, abbiamo

$$I_V^* = (L^{-1} L)^* = L^* (L^{-1})^* \quad \text{e} \quad I_W^* = (L L^{-1})^* = (L^{-1})^* L^*.$$

Siccome I_W^* e I_V^* sono le applicazioni identiche di W^* e di V^*, come si vede subito dalla definizione, segue che L^* è biiettiva e che la sua inversa è $(L^{-1})^*$, che è lineare e continua per il teorema precedente. □

9. Forme geometriche del Teorema di Hahn-Banach

La nozione di insieme convesso è stata richiamata nella Definizione I.4.4. Invitiamo il lettore a rivedere anche le cose collegate, quali l'Osservazione I.4.5 e l'Esercizio I.4.6.

Anche se nel seguito supporremo gli spazi in questione reali, per ora il campo $\mathbb{K}$ è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ indifferentemente. Ci preme infatti introdurre la definizione del funzionale di Minkowski, che è uno strumento importante in Analisi Funzionale, ed evidenziarne un certo numero di proprietà, anche se solo alcune di esse saranno utilizzate in questo capitolo.

9.1. Definizione. *Siano V uno spazio vettoriale e C un suo sottoinsieme non vuoto. Diciamo che C è assorbente quando $\bigcup_{\lambda>0} \lambda C = V$, cioè quando per ogni $x \in V$ esiste $\lambda > 0$ tale che $x/\lambda \in C$. Se C è assorbente, il funzionale di Minkowski di C è l'applicazione $\operatorname{mink}_C : V \to \mathbb{R}$ definita da*

$$\operatorname{mink}_C(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ x/\lambda \in C\} \quad \textit{per } x \in V . \ \square \tag{9.1}$$

9.2. Osservazione. Notiamo che, se C è assorbente, anche per $x = 0$ deve esistere $\lambda > 0$ tale che $x/\lambda \in C$. Concludiamo che

$$\text{ogni insieme assorbente contiene l'origine.} \tag{9.2}$$

Segue allora che $0/\lambda = 0 \in C$ per ogni $\lambda > 0$, da cui $\operatorname{mink}_C(0) = 0$.

9.3. Definizione. *Siano V uno spazio vettoriale e C un suo sottoinsieme. Diciamo che C è equilibrato quando da $x \in C$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $|\alpha| \le 1$ segue $\alpha x \in C$.* □

9.4. *Esercizio.* Dimostrare che: *i)* se V è uno spazio vettoriale topologico, ogni intorno dell'origine è assorbente; *ii)* ogni insieme non vuoto equilibrato contiene l'origine; *iii)* nel caso reale, C è equilibrato se e solo se, per ogni $x \in C$, il segmento di estremi $\pm x$ è incluso in C.

9.5. *Esercizio.* Costruire $C \subset \mathbb{R}^2$ che è assorbente ma non è un intorno dell'origine.

9.6. *Esercizio.* Sia V uno spazio normato. Calcolare i funzionali di Minkowski della palla $B_r(0)$ e della palla chiusa $\overline{B}_r(0)$.

9.7. *Esercizio.* Derivare velocemente dall'esercizio precedente i funzionali di Minkowski dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$: $C_1 = (-1,1)^2$ e $C_2 = \mathrm{co}\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$.

9.8. Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale e C un suo sottoinsieme assorbente e convesso. Allora il funzionale di Minkowski di C verifica le proprietà seguenti:*

$$\begin{aligned} &i) \ \mathrm{mink}_C(x+y) \le \mathrm{mink}_C(x) + \mathrm{mink}_C(y) \quad \textit{per ogni } x, y \in V; \\ &ii) \ \mathrm{mink}_C(\alpha x) = \alpha \, \mathrm{mink}_C(x) \quad \textit{per ogni } x \in V \textit{ e } \alpha \textit{ reale positivo}; \\ &iii) \ \textit{se } C \textit{ è anche equilibrato, } \mathrm{mink}_C \textit{ è una seminorma in } V. \end{aligned}$$

Nelle sole ipotesi iniziali valgono inoltre le inclusioni

$$iv) \ \{x \in V : \ \mathrm{mink}_C(x) < 1\} \subseteq C \subseteq \{x \in V : \ \mathrm{mink}_C(x) \le 1\}.$$

Se poi V è uno spazio vettoriale topologico, si ha più precisamente

$$\begin{aligned} v) \ C &= \{x \in V : \ \mathrm{mink}_C(x) < 1\} \quad \textit{se } C \textit{ è aperto}; \\ vi) \ C &= \{x \in V : \ \mathrm{mink}_C(x) \le 1\} \quad \textit{se } C \textit{ è chiuso} \end{aligned}$$

e, se in aggiunta V è uno spazio normato, risulta

$$\begin{aligned} &vii) \ \textit{esiste } M > 0 \textit{ tale che } \mathrm{mink}_C(x) \le M\|x\| \textit{ per ogni } x \in V \textit{ se } C \textit{ è un intorno dell'origine;} \\ &viii) \ \textit{esiste } \alpha > 0 \textit{ tale che } \mathrm{mink}_C(x) \ge \alpha\|x\| \textit{ per ogni } x \in V \textit{ se } C \textit{ è limitato.} \end{aligned}$$

In particolare, se V è normato e C è un intorno convesso equilibrato limitato dell'origine, mink_C è una norma equivalente a quella originaria. □

Dimostrazione. Ricordiamo che $0 \in C$ per l'Esercizio 9.4 e poniamo $p = \mathrm{mink}_C$ per semplificare le notazioni. In particolare $p(0) = 0$. Dimostriamo *i)*. Fissiamo $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Allora esistono $\alpha, \beta > 0$ tali che $x/\alpha \in C$, $y/\beta \in C$, $\alpha \le p(x) + \varepsilon$ e $\beta \le p(y) + \varepsilon$. Siccome C è convesso, deduciamo che

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{y}{\beta} \in C \quad \text{da cui} \quad p(x+y) \le \alpha + \beta \le p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε concludiamo. La *ii)* è del tutto immediata e passiamo a *iii)*: dobbiamo solo dimostrare che $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ per $\alpha \in \mathbb{K}$ e non solo per α reale positivo. Se $\alpha = 0$ l'uguaglianza è vera in quanto $p(0) = 0$. Supponiamo ora $\alpha \neq 0$. Scriviamo $\alpha = \rho\, e^{i\vartheta}$ con $\rho > 0$ e $\vartheta = 0, \pi$ nel caso reale e $\vartheta \in \mathbb{R}$ nel caso complesso. Allora $p(\alpha x) = p(\rho e^{i\vartheta} x) = \rho p(e^{i\vartheta} x) = |\alpha| p(e^{i\vartheta} x)$. Ma $e^{i\vartheta} x/\lambda \in C$ se e solo se $x/\lambda \in C$ dato che C è equilibrato. Deduciamo che $p(e^{i\vartheta} x) = p(x)$ e combinando concludiamo.

Dimostriamo ora le inclusioni *iv)* e le uguaglianze *v)* e *vi)*. Se $p(x) < 1$ allora esiste $\lambda \in (0,1)$ tale che $x/\lambda \in C$. Siccome $0 \in C$ e C è convesso, deduciamo $x = \lambda(x/\lambda) + (1-\lambda)0 \in C$. Supponiamo ora $x \in C$. Allora $x/1 \in C$ da cui $p(x) \le 1$. Aggiungiamo ora l'ipotesi che V sia uno spazio vettoriale topologico e che C sia aperto: dobbiamo solo dimostrare che da $x \in C$ segue $p(x) < 1$. Sia dunque $x \in C$. Siccome l'applicazione $\alpha \mapsto \alpha x$ da $\mathbb{K}$ in V è continua in 1 e C è aperto, si ha $\alpha x \in C$ per tutti gli $\alpha \in \mathbb{K}$ sufficientemente vicini a 1. In particolare esiste α reale > 1 tale che $\alpha x \in C$ e concludiamo che $p(x) \le 1/\alpha < 1$. Sia invece C chiuso: dobbiamo solo dimostrare che da $p(x) = 1$ segue $x \in C$. Sia $\{\lambda_n\}$ una successione reale positiva convergente a 1 e tale che $x/\lambda_n \in C$ per ogni n . Ma x/λ_n converge a $1x = x$ in quanto V è vettoriale topologico. Siccome C è chiuso, concludiamo che $x \in C$.

Supponiamo infine V normato e C intorno di 0 . Sia $r > 0$ tale che $\overline{B}_r(0) \subseteq C$. Se $x \ne 0$ (il caso $x = 0$ è banale), posto $\lambda = \|x\|/r$, si ha $\|x/\lambda\| = r$ da cui $x/\lambda \in C$. Segue $p(x) \le \lambda$, da cui la *vii)* con $M = 1/r$. Se invece C è limitato e $r > 0$ è tale che $C \subseteq \overline{B}_r(0)$, ogni $\lambda > 0$ verificante $x/\lambda \in C$ verifica anche $\|x/\lambda\| \le r$, cioè $\|x\| \le r\lambda$. Deduciamo che $\|x\| \le rp(x)$, cioè la *viii)* con $\alpha = 1/r$. □

Siamo ora in grado di presentare le cosiddette forme geometriche del Teorema di Hahn-Banach. La più importante è la seconda, ma la prima è propedeutica. D'ora in avanti supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

9.9. Teorema (prima forma). *Siano V uno spazio normato reale e A e B due convessi non vuoti e disgiunti di V . Se A è aperto, esiste $f \in V^*$ tale che*

$$\langle f, x \rangle < \langle f, y \rangle \quad \textit{per ogni } x \in A \textit{ e } y \in B . \ \square \tag{9.3}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema in tre tappe. Nella prima supponiamo che A contenga l'origine e B sia costituito da un solo punto $x_0 \in V$ che non appartiene ad A . Siccome A è assorbente per l'Esercizio 9.4, ha senso porre $p = \operatorname{mink}_A$, il funzionale di Minkowski di A . Definiamo poi $V_0 = \operatorname{span}\{x_0\}$ e $\varphi : V_0 \to \mathbb{R}$ mediante $\varphi(tx_0) = t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora $\varphi \in \operatorname{Hom}(V_0; \mathbb{R})$. Per la Proposizione 9.8, la funzione non negativa p è subadditiva e positivamente omogenea e verifica $A = \{x \in V : \ p(x) < 1\}$, $p(x_0) \ge 1$ e $p(x) \le M\|x\|$ per ogni $x \in V$ per una certa costante $M > 0$. Deduciamo che *i)* se $t \ge 0$, $\varphi(tx_0) = t \le tp(x_0) = p(tx_0)$; *ii)* se $t < 0$, $\varphi(tx_0) = t \le 0 \le p(tx_0)$. Dunque $\varphi(v) \le p(v)$ per ogni $v \in V_0$. Possiamo allora applicare il Teorema 1.1 di Hahn-Banach e trovare $f \in \operatorname{Hom}(V; \mathbb{R})$ che prolunga φ e verifica $f(x) \le p(x)$ per ogni $x \in V$. Di conseguenza, in particolare, $f(x) \le M\|x\|$ per ogni $x \in V$, per cui $f \in V^*$. D'altra parte $f(x) \le p(x) < 1$ per ogni $x \in A$ e $f(x_0) = \varphi(x_0) = 1$. Dunque $f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in A$, cioè è verificata la tesi nel caso particolare considerato.

Nella seconda tappa rimuoviamo l'ipotesi che A contenga l'origine, fermo restando che B sia costituito dal solo punto $x_0 \in V$. Fissato $a_0 \in A$ poniamo $A' = A - a_0$ (cioè $-a_0 + A$ con la notazione (I.1.3)) e $x_0' = x_0 - a_0$. Allora A' è un aperto convesso contenente 0 e $x_0' \notin A'$. Per quanto dimostrato sopra esiste $f \in V^*$ che verifica $f(x') < f(x_0')$ per ogni $x' \in A'$. Ma ciò significa $f(x) - f(a_0) < f(x_0) - f(a_0)$ per ogni $x \in A$, dunque ancora la tesi.

Nel caso generale poniamo $C = A - B$ (sempre con le notazioni del Paragrafo I.1) e osserviamo che C è convesso. Se infatti $x, x' \in C$ e $t \in (0,1)$, scritti x e x' nella forma $x = a - b$ e $x' = a' - b'$ con $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$ e posto $a'' = ta + (1-t)a'$ e $b'' = tb + (1-t)b'$, si ha $a'' \in A$, $b'' \in B$ e $tx + (1-t)x' = a'' - b''$, così che $tx + (1-t)x' \in C$. Osserviamo inoltre che C si rappresenta come $C = \bigcup_{y \in B}(A - y)$, per cui C è anche aperto. Infine $0 \notin C$ dato che A e B sono disgiunti. Applicata la seconda tappa, troviamo $f \in V^*$ tale che $f(z) < f(0)$ per ogni $z \in C$, cioè $f(x-y) < 0$, vale a dire $f(x) < f(y)$, per ogni $x \in A$ e $y \in B$. Dunque f verifica tutte le condizioni richieste. □

9.10. Teorema (seconda forma). *Siano V uno spazio normato reale e C e K due convessi non vuoti e disgiunti di V . Se C è chiuso e K è compatto, esistono $f \in V^*$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\langle f, x \rangle \le \alpha < \beta \le \langle f, y \rangle \quad \textit{per ogni } x \in C \textit{ e } y \in K . \ \square \tag{9.4}$$

Dimostrazione. Dalla teoria generale degli spazi metrici (Proposizione A.1.21) si sa che il chiuso C e il compatto K hanno distanza positiva, cioè esiste $\delta > 0$ tale che $\|x - y\| \ge \delta$ per ogni $x \in C$ e $y \in K$. Poniamo ad esempio $\varepsilon = \delta/3$ e introduciamo gli insiemi

$$A = \bigcup_{x \in C} B_\varepsilon(x) \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{y \in K} B_\varepsilon(y)$$

che risultano aperti e disgiunti per costruzione. Mostriamo che A è convesso. Siano $x, y \in A$ e $\vartheta \in (0,1)$ e si ponga $z = \vartheta x + (1-\vartheta)y$. Allora esistono $x', y' \in C$ tali che $\|x' - x\| < \varepsilon$ e $\|y' - y\| < \varepsilon$. Posto $z' = \vartheta x' + (1-\vartheta)y'$, si ha $z' \in C$ per la convessità. D'altra parte si ha anche

$$\|z - z'\| \le \vartheta\|x - x'\| + (1-\vartheta)\|y - y'\| < \vartheta\varepsilon + (1-\vartheta)\varepsilon = \varepsilon.$$

Dunque $z \in A$. Siccome anche B è convesso per lo stesso motivo, possiamo applicare il teorema precedente e dedurre l'esistenza di $f \in V^*$ tale che $\langle f, x\rangle < \langle f, y\rangle$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$. Allora deve essere $f \neq 0$ e anche $\langle f, x\rangle \leq \gamma \leq \langle f, y\rangle$ per ogni $x \in A$ e $y \in B$, ove, ad esempio, γ è l'estremo superiore di $f|_A$. Ma per ogni $x \in C$, $y \in K$ e $z \in B_1(0)$ si ha $x + \varepsilon z \in A$ e $y - \varepsilon z \in B$, da cui

$$\langle f, x\rangle + \varepsilon \sup_{\|z\|<1} \langle f, z\rangle = \sup_{\|z\|<1} \langle f, x + \varepsilon z\rangle \leq \gamma \leq \inf_{\|z\|<1} \langle f, y - \varepsilon z\rangle = \langle f, y\rangle - \varepsilon \sup_{\|z\|<1} \langle f, z\rangle$$

vale a dire $\langle f, x\rangle + \varepsilon\|f\|_* \leq \gamma \leq \langle f, y\rangle - \varepsilon\|f\|_*$. Possiamo dunque prendere $\alpha = \gamma - \varepsilon\|f\|_*$ e $\beta = \gamma + \varepsilon\|f\|_*$. □

9.11. Osservazione. Di solito questi risultati vengono espressi con un linguaggio geometrico che risulta piuttosto suggestivo. Generalizzando a partire dalla situazione elementare di $\mathbb{R}^3$, nella quale ogni disuguaglianza del tipo $f(x) \leq \alpha$ con $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ non identicamente nullo e $\alpha \in \mathbb{R}$ rappresenta un semispazio nel senso della geometria elementare, possiamo chiamare *semispazio* di uno spazio normato V ogni sottoinsieme S descritto dall'analoga disuguaglianza $f(x) \leq \alpha$ con $f \in \mathrm{Hom}(V; \mathbb{R})$ non identicamente nullo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Siccome un tale S risulta chiuso se e solo se f è anche continuo (vedi Esercizio III.1.8), possiamo chiamare *semispazio chiuso* ogni sottoinsieme del tipo descritto quando $f \in V^*$. Naturalmente anche la disuguaglianza $\langle f, x\rangle \geq \alpha$ descrive un semispazio, dato che è del tipo precedente con $-f$ e $-\alpha$ al posto di f e di α . L'equazione $\langle f, x\rangle = \alpha$ rappresenta allora un *iperpiano* (chiuso se e solo se $f \in V^*$ per l'esercizio appena citato), precisamente quello che costituisce il bordo dei due semispazi opposti, e si usa dire che esso *separa* i sottoinsiemi dell'uno e dell'altro semispazio. Il Teorema 9.10 viene perciò spesso enunciato nella forma seguente: *un convesso chiuso e un convesso compatto disgiunti si possono separare con un iperpiano chiuso in senso stretto*. L'analoga locuzione *in senso largo* viene utilizzata per enunciare la separazione più debole data dal Teorema 9.9.

9.12. Corollario. *Siano V uno spazio normato reale e C un convesso chiuso non vuoto di V . Si definisca*

$$\mathcal{A}(C) = \{(f, \alpha) \in V^* \times \mathbb{R} : \ \langle f, x\rangle \leq \alpha \text{ per ogni } x \in C\}.$$

Allora risulta

$$C = \bigcap_{(f,\alpha)\in\mathcal{A}(C)} \{x \in V : \ \langle f, x\rangle \leq \alpha\} \tag{9.5}$$

cioè C è l'intersezione di tutti i semispazi chiusi che lo contengono. □

Dimostrazione. Denotiamo con C' il secondo membro della (9.5). Se $x \in C$ e $(f, \alpha) \in \mathcal{A}(C)$, allora $\langle f, x\rangle \leq \alpha$ per definizione. Dunque $x \in C'$. Ciò dimostra la prima inclusione. Dimostriamo l'inclusione opposta ragionando per assurdo. Supponiamo dunque che $x_0 \in C'$ e $x_0 \notin C$. Per il teorema precedente, applicato a C e a $K = \{x_0\}$, esistono $f_0 \in V^*$ e $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tali che $\langle f_0, x\rangle \leq \alpha_0 < \langle f_0, x_0\rangle$ per ogni $x \in C$. Deduciamo in particolare che $(f_0, \alpha_0) \in \mathcal{A}(C)$. Siccome $x_0 \in C'$ deve allora essere $\langle f_0, x_0\rangle \leq \alpha_0$, mentre $\langle f_0, x_0\rangle > \alpha_0$, assurdo. □

9.13. Corollario. *Siano V uno spazio normato reale e C un convesso chiuso non vuoto di V . Allora C è chiuso in ogni topologia su V rispetto alla quale tutti gli elementi di V^* sono funzioni continue.* □

Dimostrazione. Infatti ciascuno degli insiemi $\{x \in V : \ \langle f, x\rangle \leq \alpha\}$ è chiuso nella topologia considerata. Dunque anche C lo è. □

Il corollario successivo è banale conseguenza del precedente non appena si conosca una topologia rispetto alla quale tutti gli elementi del duale siano funzioni continue e che induce la convergenza debole. Questa è la topologia debole, che, tuttavia, sarà introdotta molto più avanti. Pertanto enunciamo e dimostriamo il risultato direttamente.

9.14. Corollario. *Siano V uno spazio normato reale e C un convesso chiuso non vuoto di V . Allora C è sequenzialmente chiuso rispetto alla convergenza debole, cioè, se $\{x_n\}$ è una successione di elementi di C che converge debolmente a un punto $x \in V$, anche x appartiene a C .* □

Dimostrazione. Siano $\{x_n\}$ e x come specificato nell'enunciato. Grazie al Corollario 9.12, basta dimostrare quanto segue: se $f \in V^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ verificano $\langle f, x_n \rangle \le \alpha$ per ogni n, allora $\langle f, x \rangle \le \alpha$. Ma ciò è vero in quanto $\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle$. $\square$

10. La semicontinuità inferiore

Il concetto di minimo limite di una successione reale $\{c_n\}$ è ben noto:

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} c_n &= \sup_{n\ge 1} \inf_{k\ge n} c_k \\ &= \min \{\ell \in [-\infty, +\infty] : \text{ esista } \{c_{n_k}\} \subseteq \{c_n\} \text{ tale che } c_{n_k} \to \ell\} \end{aligned}$$

ove il simbolo $\{c_{n_k}\} \subseteq \{c_n\}$ significa che $\{c_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di $\{c_n\}$. Più in generale, la stessa definizione si estende al caso in cui $\{c_n\}$ possa assumere anche i valori $\pm\infty$. In tal caso continua a valere la caratterizzazione del minimo limite come minimo data dalla formula precedente.

L'accettazione di valori infiniti, e specificatamente in $(-\infty, +\infty]$, è particolarmente opportuna quando si è interessati a cercare il minimo di una funzione definita, in generale, in uno spazio topologico S (nel qual caso denotiamo con $\mathcal{I}(x)$ la famiglia degli intorni del generico punto $x \in S$).

Ad esempio, se vogliamo trovare un punto di minimo di una funzione reale u definita solo in un sottoinsieme C di S, basta considerare il prolungamento $\widetilde{u} : S \to (-\infty, +\infty]$ di u definito da $\widetilde{u}(x) = u(x)$ se $x \in C$ e $\widetilde{u}(x) = +\infty$ se $x \notin C$ e cercare i punti di minimo di $\widetilde{u}$. Se inoltre la funzione $f : S \to \mathbb{R}$ è definita su tutto S, ma si è interessati a trovare i punti di minimo della restrizione $f|_C$ di f a un sottoinsieme C di S, il prolungamento $\widetilde{u}$ di $u = f|_C$ costruito sopra coincide con la funzione $f + I_C$ ove $I_C : S \to (-\infty, +\infty]$ è la cosiddetta *funzione indicatrice di* C definita da

$$I_C(x) = 0 \quad \text{se } x \in C \quad \text{e} \quad I_C(x) = +\infty \quad \text{altrimenti.} \tag{10.1}$$

Premettiamo la definizione di qualche termine.

10.1. Definizione. *Sia $f : S \to (-\infty, +\infty]$ ove S è un insieme non vuoto. Allora il suo dominio (o dominio effettivo) e il suo epigrafo sono definiti da*

$$D(f) = \{x \in S : \ f(x) < +\infty\} \quad \text{e} \quad \operatorname{epi} f = \{(x, y) \in S \times \mathbb{R} : \ y \ge f(x)\} \tag{10.2}$$

e f è detta propria quando $D(f)$ non è vuoto. $\square$

Osserviamo esplicitamente che nella definizione di epigrafo la seconda coordinata varia in $\mathbb{R}$ e non in $(-\infty, +\infty]$, anche se la funzione assume valori in $(-\infty, +\infty]$. In particolare $\operatorname{epi} f$ è non vuoto se e solo se f è propria. Quasi sempre faremo l'ipotesi che la funzione in questione sia propria, dato che le funzioni non proprie sono prive di interesse. Tuttavia alcune affermazioni sono banalmente vere nei punti in cui f è infinita.

Diamo la definizione di minimo limite. Scambiando gli estremi inferiori e superiori si ottiene quella di massimo limite, il che corrisponde a dire che il massimo limite è l'opposto del minimo limite della funzione opposta. Si dimostra che il minimo limite non supera mai il massimo limite e che questi coincidono se e solo se la funzione ha limite, il limite essendo il valore comune di massimo e minimo limite.

10.2. Definizione. *Siano S uno spazio topologico, $x_0 \in S$ un punto di accumulazione per S e f una funzione definita in S oppure in $S \setminus \{x_0\}$ a valori in $(-\infty, +\infty]$. Poniamo*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{I\in\mathcal{I}(x_0)} \ \inf_{x\in I\setminus\{x_0\}} f(x). \ \square \tag{10.3}$$

Si verifica senza difficoltà che, se $\mathcal{B}(x_0)$ è una base di intorni di x_0, vale l'uguaglianza

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{I\in\mathcal{B}(x_0)} \ \inf_{x\in I\setminus\{x_0\}} f(x).$$

Se poi $\mathcal{B}(x_0) = \{B_n : n = 1, 2, \ldots\}$ è una base numerabile di intorni di x_0 che decresce, cioè verifica $B_{n+1} \subseteq B_n$ per ogni n, la successione degli estremi inferiori che si origina nella formula precedente cresce, per cui si ha

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{x\in B_n\setminus\{x_0\}} f(x).$$

Sia ora $\{x_n\}$ una successione di elementi di $S \setminus \{x_0\}$ convergente a x_0. Allora è facile vedere che

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \ge \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

Se poi x_0 ha una base numerabile di intorni, esiste una successione $\{x_n\}$ nelle condizioni dette tale che la successione $\{f(x_n)\}$ tenda al minimo limite che compare al secondo membro, per cui vale la caratterizzazione

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \min\{\ell \in [-\infty, +\infty] : \text{ esista } x_n \to x_0 \text{ tale che } f(x_n) \to \ell\} \tag{10.4}$$

ove resta inteso che le successioni $\{x_n\}$ considerate sono a valori in $S \setminus \{x_0\}$.

10.3. Esempio. Mostriamo che

$$\liminf_{x\to 0}(1 + x^2)\sin\frac{1}{x} = -1.$$

Se si definisce x_n per mezzo dell'uguaglianza $1/x_n = -\pi/2 + 2n\pi$, che implica $\sin(1/x_n) = -1$, si ha che l'estremo inferiore di $(1+x^2)\sin\frac{1}{x}$ in $B_n = [-x_n, x_n]$ vale $-(1+x_n^2)$. Siccome la famiglia $\mathcal{B} = \{B_n : n \ge 1\}$ è una base numerabile di intorni di 0 che decresce, il minimo limite vale il limite di $-(1 + x_n^2)$, cioè -1. Una successione che realizza il minimo nella formula (10.4) è proprio la successione $\{x_n\}$ appena considerata.

10.4. *Esercizio.* Dimostrare che

$$\liminf_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) \ge \liminf_{x\to x_0} f(x) + \liminf_{x\to x_0} g(x)$$

e costruire un esempio con la disuguaglianza stretta. Dimostrare poi che, al contrario, si ha l'uguaglianza se almeno uno dei due minimi limiti è un limite. □

Ora diamo la definizione di semicontinuità inferiore. Quella di semicontinuità superiore si ottiene sostituendo il minimo limite con il massimo limite e cambiando il verso della disuguaglianza. In modo equivalente, la semicontinuità superiore di una funzione significa la semicontinuità inferiore della sua opposta. Per l'osservazione precedente, si ha che una funzione è continua se e solo se essa semicontinua sia inferiormente sia superiormente. Tuttavia nel seguito solo la semicontinuità inferiore avrà un ruolo importante.

10.5. Definizione. *Siano S uno spazio topologico, $f : S \to (-\infty, +\infty]$ e $x_0 \in S$. Diciamo che f è semicontinua inferiormente (s.c.i.) in x_0 quando è verificata una delle due condizioni: i) x_0 è isolato; ii) x_0 è di accumulazione per S e vale la disuguaglianza*

$$f(x_0) \le \liminf_{x\to x_0} f(x). \tag{10.5}$$

Diciamo poi che f è sequenzialmente s.c.i. in x_0, oppure s.c.i. per successioni in x_0, quando, per ogni successione $\{x_n\}$ di elementi di S, vale l'implicazione

$$\text{da} \quad x_n \to x_0 \quad \text{segue} \quad f(x_0) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n). \tag{10.6}$$

Diciamo infine che f è s.c.i. (sequenzialmente s.c.i.) quando essa è s.c.i. (rispettivamente sequenzialmente s.c.i.) in ogni $x_0 \in S$. □

10.6. Osservazione. Notiamo che nella (10.6) si prendono in considerazione successioni di elementi di S e non solo di $S \setminus \{x_0\}$, dato che il fatto che qualche x_n coincida con x_0 non incide sulla disuguaglianza. Inoltre, da quanto abbiamo detto sul minimo limite, si vede che la s.c.i. in x_0 implica la s.c.i. sequenziale e che, se x_0 ha una base numerabile di intorni, vale anche il viceversa, cioè la s.c.i. in x_0 equivale alla s.c.i. sequenziale in x_0.

10.7. Osservazione. Se V è uno spazio normato di dimensione infinita, esistono funzionali lineari su V che non sono continui. Vediamo che succede rispetto alla semicontinuità. Supponiamo $f \in \mathrm{Hom}(V;\mathbb{R})$ s.c.i. in almeno un punto x_0 e sia $\{x_n\}$ una successione convergente a x_0. Allora

$$f(x_0) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Ma anche $\{2x_0 - x_n\}$ converge a x_0, per cui

$$f(x_0) \le \liminf_{n\to\infty} f(2x_0 - x_n) = 2f(x_0) - \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{da cui} \quad f(x_0) \ge \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Dunque $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$ e f è continuo in x_0. Segue che f è continuo ovunque (Proposizione I.4.9), cioè $f \in V^*$.

10.8. Proposizione. *Siano S uno spazio topologico, $f : S \to (-\infty, +\infty]$ e $x_0 \in S$. Allora f è s.c.i. in x_0 se e solo se*

$$\text{per ogni } \lambda < f(x_0), \text{ esiste un intorno } J \text{ di } x_0 \text{ tale che}$$
$$f(x) \ge \lambda \quad \text{per ogni } x \in J. \ \square \tag{10.7}$$

Dimostrazione. Se x_0 è isolato, da un lato f è s.c.i. in x_0 per definizione; d'altro canto la (10.7) vale con $J = \{x_0\}$. Supponiamo dunque x_0 di accumulazione per S.

Supponiamo f s.c.i. in x_0 e dimostriamo che vale la (10.7). Fissiamo $\lambda < f(x_0)$ e poniamo $\ell = \liminf_{x\to x_0} f(x)$. Siccome $f(x_0) \le \ell$, risulta $\lambda < \ell$. Allora, per definizione di estremo superiore, esiste $J \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che $\inf_{x\in J\setminus\{x_0\}} f(x) \ge \lambda$. Abbiamo pertanto

$$f(x) \ge \inf_{y\in J\setminus\{x_0\}} f(y) \ge \lambda$$

per ogni $x \in J \setminus \{x_0\}$ e quindi anche per ogni $x \in J$.

Supponiamo ora che valga la (10.7) e dimostriamo che f è s.c.i. in x_0. Fissato $\lambda < f(x_0)$ ad arbitrio, applichiamo l'ipotesi: troviamo $J \in \mathcal{I}(x_0)$ come specificato nella (10.7). Abbiamo allora

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \sup_{I\in\mathcal{I}(x_0)} \ \inf_{x\in I\setminus\{x_0\}} f(x) \ge \inf_{x\in J\setminus\{x_0\}} f(x) \ge \lambda.$$

Dall'arbitrarietà di $\lambda < f(x_0)$ segue la (10.5). $\square$

10.9. *Esercizio.* Meditare sul caso in cui $f(x_0) = +\infty$.

10.10. Teorema. *Siano S uno spazio topologico e $f : S \to (-\infty, +\infty]$. Allora sono equivalenti le condizioni: i) f è s.c.i.; ii) $\mathrm{epi}\, f$ è chiuso in $S \times \mathbb{R}$; iii) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ è aperto in S l'insieme $\{x \in S : f(x) > \alpha\}$; iv) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ è chiuso in S l'insieme $\{x \in S : f(x) \le \alpha\}$.* $\square$

Dimostrazione. Supponiamo f s.c.i. e dimostriamo che $\mathrm{epi}\, f$ è chiuso. Fissiamo $p_0 = (x_0, y_0) \in S \times \mathbb{R}$ non appartenente a $\mathrm{epi}\, f$ e dimostriamo che p_0 ha un intorno I disgiunto da $\mathrm{epi}\, f$. Si ha $y_0 < f(x_0)$ e possiamo scegliere $\lambda \in (y_0, f(x_0))$, così che $(-\infty, \lambda)$ è un intorno di y_0. Applichiamo la (10.7): troviamo $J \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che $f(x) \ge \lambda$ per ogni $x \in J$. Prendiamo allora $I = J \times (-\infty, \lambda)$: se $(x, y) \in I$, risulta $y < \lambda \le f(x)$, per cui $(x, y) \notin \mathrm{epi}\, f$. Dunque I è disgiunto da $\mathrm{epi}\, f$.

Viceversa, supponiamo $\mathrm{epi}\, f$ chiuso e dimostriamo che f è s.c.i. Fissiamo dunque $x_0 \in S$ e cerchiamo di verificare la (10.7). Fissiamo allora anche $\lambda < f(x_0)$. Osservato che il punto (x_0, λ) non appartiene al chiuso $\operatorname{epi} f$, troviamo un suo intorno I disgiunto da $\operatorname{epi} f$. Ma I contiene un prodotto cartesiano del tipo $J \times (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$, ove $J \in \mathcal{I}(x_0)$ e $\delta > 0$. Supponiamo ora $x \in J$. Allora $(x, \lambda) \in I$, da cui $(x, \lambda) \notin \operatorname{epi} f$, cioè $f(x) > \lambda$ e la (10.7) è stata verificata.

Siccome le condizioni $iii)$ e $iv)$ sono ovviamente equivalenti, per concludere dimostriamo l'equivalenza fra la $i)$ e la $iii)$.

Supponiamo che f sia s.c.i. e, fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, dimostriamo che l'insieme $A_\alpha = \{x \in S : f(x) > \alpha\}$ è aperto. Sia $x_0 \in A_\alpha$. Essendo $f(x_0) > \alpha$ possiamo scegliere $\lambda \in (\alpha, f(x_0))$ e applicando la (10.7) troviamo $J \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che $f(x) \geq \lambda > \alpha$ per ogni $x \in J$. Dunque $J \subseteq A_\alpha$.

Supponiamo infine che valga la $iii)$ e, fissato $x_0 \in S$, dimostriamo che f è s.c.i. in x_0 provando la (10.7). Sia $\lambda < f(x_0)$ ad arbitrio. Siccome l'insieme A_λ dei punti $x \in S$ tali che $f(x) > \lambda$ è aperto e $x_0 \in A_\lambda$, troviamo $J \in \mathcal{I}(x_0)$ incluso in A_λ. Allora $f(x) > \lambda$ per ogni $x \in J$. □

10.11. *Esercizio.* Per $c \in (-\infty, +\infty]$, sia $f_c : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ definita dalle formule $f(x) = \operatorname{sign} x$ se $x \neq 0$ e $f(0) = c$. Determinare per quali valori di c la funzione f_c è s.c.i. applicando sia la definizione, sia la Proposizione 10.8, sia le condizioni del Teorema 10.10.

10.12. Osservazione. La funzione indicatrice (10.1) del sottoinsieme C è s.c.i. se e solo se C è chiuso e la somma di due funzioni s.c.i. è s.c.i. In particolare la somma di una funzione s.c.i. e della funzione indicatrice di un chiuso è s.c.i. Infine, se $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ è una famiglia non vuota di funzioni tutte s.c.i., è s.c.i. anche la funzione $f : S \to (-\infty, +\infty]$ definita dalla formula

$$f(x) = \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x) \quad \text{per } x \in S \tag{10.8}$$

che viene detta *inviluppo superiore* della famiglia considerata.

10.13. *Esercizio.* Dimostrare le affermazioni dell'osservazione precedente. □

Le funzioni continue trasformano compatti in compatti. In particolare ogni funzione reale continua su un compatto ha massimo e minimo (Teorema di Weierstrass). Se però si è interessati all'esistenza del solo minimo, l'ipotesi di continuità può essere indebolita, come mostra il risultato dato di seguito. Le due ipotesi prese in considerazione, equivalenti nel caso degli spazi metrici, sono indipendenti nel caso generale.

10.14. Teorema. *Siano S uno spazio topologico e $f : S \to (-\infty, +\infty]$ una funzione propria. Allora f ha minimo in ciascuno dei due casi seguenti: $i)$ S è compatto e f è s.c.i.; $ii)$ S è sequenzialmente compatto e f è sequenzialmente s.c.i.* □

Dimostrazione. Sia $\lambda = \inf_{x \in S} f(x)$. Si ha $\lambda < +\infty$ perché f è propria, ma per ora non possiamo escludere che $\lambda = -\infty$. Ciò nonostante, un punto $x_0 \in S$ è di minimo se e solo se $f(x_0) \leq \lambda$. Dimostriamo appunto che, in ciascuna delle due ipotesi dell'enunciato, esiste $x_0 \in S$ tale che $f(x_0) \leq \lambda$. Valga $i)$. Sia $\{\lambda_n\}$ una successione decrescente di numeri reali $\lambda_n > \lambda$ che tende a λ. Posto $C_n = \{x \in S : f(x) \leq \lambda_n\}$, ciascuno dei C_n è non vuoto perché $\lambda_n > \lambda$ e chiuso per il Teorema 10.10. Inoltre, se $n_1, \ldots, n_k$ sono interi positivi e m è il loro massimo, si ha $\bigcap_{i=1}^k C_{n_i} = C_m$, che non è vuoto come ogni C_n. Siccome S è compatto, l'intersezione di tutti i C_n non è vuota (Proposizione A.1.17). Sia x_0 un punto di tale intersezione. Allora $f(x_0) \leq \lambda_n$ per ogni n e dunque $f(x_0) \leq \lambda$. Valga ora $ii)$. Sia $\{x_n\}$ una successione minimizzante, cioè una successione di elementi di S tale che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$. Siccome per ipotesi S è sequenzialmente compatto, possiamo estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a un certo punto $x_0 \in S$. Per la semicontinuità inferiore sequenziale abbiamo allora $f(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$. □

11. Funzioni convesse

La definizione ricalca quella nota per funzioni reali definite sullo spazio euclideo. In tutto il paragrafo supponiamo che tutti gli spazi normati che intervengono siano reali.

11.1. Definizione. *Siano V uno spazio vettoriale e $f : V \to (-\infty, +\infty]$. Diciamo che f è convessa quando $\operatorname{epi} f$ è un sottoinsieme convesso di $V \times \mathbb{R}$.* □

11.2. *Esercizio.* Dimostrare che l'indicatrice I_C di C data dalla (10.1) è una funzione convessa se e solo se C è convesso. $\square$

Il risultato successivo afferma che f è convessa se e solo se vale la disuguaglianza

$$f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y) \quad \text{per ogni } x,y \in V \text{ e } t \in (0,1) \tag{11.1}$$

o, in modo equivalente, se e solo se vale la disuguaglianza

$$f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y) \quad \text{per ogni } x,y \in D(f) \text{ e } t \in (0,1)\,. \tag{11.2}$$

L'equivalenza fra le (11.1) e (11.2) è chiara: fissati infatti x e y, la disuguaglianza di (11.1) è automaticamente soddisfatta da ogni funzione f se almeno uno dei punti considerati non appartiene a $D(f)$, dato che il secondo membro è $+\infty$ in questo caso. Notiamo che la (11.2) si può riscrivere nella forma

$$f(y+t(x-y)) \le f(y)+t(f(x)-f(y)) \quad \text{per ogni } x,y \in D(f) \text{ e } t \in (0,1)\,.$$

Al contrario, l'analoga scrittura con $x,y \in V$ potrebbe far intervenire $+\infty-\infty$ ed è quindi da evitare. Allo stesso modo sono da evitare i due valori $t=0$ e $t=1$ se si vogliono lasciare x e y generici in V, per non incappare nella forma $0\cdot\infty$.

11.3. Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale e $f : V \to (-\infty,+\infty]$. Allora f è convessa se e solo se vale la* (11.1), *o, equivalentemente, la* (11.2). $\square$

Dimostrazione. Sia f convessa e siano $x,y \in D(f)$ e $t \in (0,1)$. Allora i due punti $p=(x,f(x))$ e $q=(y,f(y))$ appartengono a $\operatorname{epi} f$ per cui a $\operatorname{epi} f$ pure appartiene il punto $tp+(1-t)q$. Esplicitato ciò, si ha la (11.2). Valga ora la (11.2) e siano $p=(x,u)$ e $q=(y,v)$ due punti di $\operatorname{epi} f$ e $t \in (0,1)$. Allora $f(x) \le u$ e $f(y) \le v$ da cui

$$f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y) \le tu+(1-t)v.$$

Quindi $tp+(1-t)q = (tx+(1-t)y, tu+(1-t)v) \in \operatorname{epi} f$. $\square$

11.4. *Esercizio.* Con le notazioni della Definizione 11.1, dimostrare che il dominio $D(f)$ è convesso e che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, è convesso l'insieme $S_\alpha = \{x \in V : \ f(x) \le \alpha\}$. Mostrare poi che, al contrario, la convessità di tutti gli S_α non implica quella di f.

11.5. *Esercizio.* Si osservi che, se V è uno spazio normato, la composizione $g \circ h$ di una funzione $h : V \to \mathbb{R}$ convessa con una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non decrescente e convessa è una funzione convessa e si deduca che per ogni $p \ge 1$ è convessa la funzione $x \mapsto \|x\|^p$, $x \in V$.

11.6. Osservazione. Analogamente è convessa la funzione $x \mapsto |x|^p$ se $|\cdot|$ è una seminorma. Ad esempio, è convessa la funzione $f : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definita da $f(v) = \|\nabla v\|_p^p$. $\square$

Sappiamo che, se V è uno spazio normato di dimensione infinita, esistono funzionali lineari $L : V \to \mathbb{R}$ che non sono continui. Anzi, un tale funzionale è discontinuo in ogni punto. Siccome ogni funzionale lineare è convesso, vediamo che la nozione di convessità è lontana dall'implicare quella di continuità. D'altra parte l'aggiunta dell'ipotesi di continuità a quella di convessità è spesso inutilmente gravosa. Nei problemi di minimo, le buone ipotesi si ottengono abbinando convessità, s.c.i. e una condizione all'infinito. Più precisamente, abbiamo il teorema che presentiamo dopo due lemmi di validità generale. Segnaliamo comunque che si può dimostrare che *ogni funzione convessa propria s.c.i. è continua in tutti i punti interni al suo dominio*.

11.7. Lemma. *Siano V uno spazio normato e $f : V \to (-\infty,+\infty]$ una funzione convessa s.c.i. Siano inoltre $\{x_n\}$ una successione debolmente convergente a un punto $x \in V$ tale che la successione $\{f(x_n)\}$ converga a un numero reale λ. Allora $f(x) \le \lambda$.* $\square$

Dimostrazione. L'epigrafo $\operatorname{epi} f$ è convesso in quanto f è convessa e chiuso in quanto f è s.c.i. D'altra parte, per l'Esercizio IV.4.11, la successione $\{(x_n, f(x_n))\}$ converge debolmente a (x, λ) nello spazio prodotto $V \times \mathbb{R}$. Allora possiamo applicare il Corollario 9.14 e concludere che $(x, \lambda) \in \operatorname{epi} f$, vale a dire che $f(x) \leq \lambda$. □

Il lemma successivo, ovvio nel caso $V = \mathbb{R}$, fornisce una proprietà generale di ogni funzione convessa propria f che sia anche s.c.i. Tale proprietà si esprime dicendo che f *ha una minorante affine continua*.

11.8. Lemma. *Siano V uno spazio normato e $f : V \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa propria s.c.i. Allora esistono $\xi \in V^*$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che*

$$f(x) \geq \langle \xi, x \rangle + c \quad \textit{per ogni } x \in V \text{ . □} \tag{11.3}$$

Dimostrazione. Si fissino $x_0 \in D(f)$ e $y_0 < f(x_0)$. Allora possiamo applicare la Seconda forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach (Teorema 9.10) e separare il convesso chiuso non vuoto $\operatorname{epi} f$ e il punto (x_0, y_0) che non gli appartiene. Troviamo $F \in (V \times \mathbb{R})^* \setminus \{0\}$ tale che

$$\langle F, (x, r) \rangle < \langle F, (x_0, y_0) \rangle \quad \text{per ogni } (x, r) \in \operatorname{epi} f$$

(potremmo dire di meglio, ma qui ci basta questa disuguaglianza). Ora, F si rappresenta nella forma

$$\langle F, (x, r) \rangle = \langle \varphi, x \rangle + \gamma r \quad \text{per ogni } (x, r) \in V \times \mathbb{R}$$

per opportuni $\varphi \in V^*$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ (vedi Teorema III.3.10, formula (III.3.7)). Otteniamo che

$$\langle \varphi, x \rangle + \gamma f(x) < \langle \varphi, x_0 \rangle + \gamma y_0 \quad \text{per ogni } x \in D(f) .$$

Scegliendo in particolare $x = x_0$ deduciamo $\gamma f(x_0) < \gamma y_0$, da cui $\gamma < 0$ dato che $y_0 > f(x_0)$. Allora, dividendo per γ, concludiamo che

$$\langle \varphi/\gamma, x \rangle + f(x) > \alpha/\gamma \quad \text{ove} \quad \alpha = \langle \varphi, x_0 \rangle + \gamma y_0$$

da cui la (11.3) con $\xi = -\varphi/\gamma$ e $c = \alpha/\gamma$. □

11.9. Corollario. *Siano V uno spazio normato e $f : V \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa propria s.c.i. Allora f è inferiormente limitata su ogni limitato di V.* □

Dimostrazione. Siano $B \subseteq V$ limitato. Sia $R > 0$ tale che $B \subseteq \overline{B}_R(0)$. Per il Lemma 11.8, esistono φ e c verificanti la (11.3). Per $x \in B$ abbiamo allora $f(x) \geq c - \|\varphi\|_* \|x\| \geq c - R\|\varphi\|_*$. □

11.10. Teorema. *Siano V uno spazio di Banach riflessivo e $f : V \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, propria, s.c.i. e coerciva nel senso seguente*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty. \tag{11.4}$$

Allora f ha minimo. Inoltre l'insieme dei punti di minimo è convesso e chiuso. □

Dimostrazione. Sia $\lambda = \inf_{x \in V} f(x)$. Dimostriamo preliminarmente che $\lambda \in \mathbb{R}$. Si ha $\lambda < +\infty$, dato che f è propria. D'altra parte, per l'ipotesi (11.4) di coercività, troviamo $R > 0$ tale che $f(x) \geq 0$ se $\|x\| > R$ e, per il Corollario 11.9, f è limitata inferiormente anche su $\overline{B}_R(0)$. Dunque $\lambda > -\infty$.

Sia ora $\{x_n\}$ una successione minimizzante, cioè tale che $\{f(x_n)\}$ tenda a λ. Essendo $\lambda \in \mathbb{R}$, possiamo supporre $x_n \in D(f)$ per ogni n. D'altra parte l'ipotesi di coercività assicura che $\{x_n\}$ è limitata. Per il Teorema 7.2 di compattezza debole sequenziale, possiamo quindi estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ debolmente convergente a un certo $x \in V$. Allora, siccome $\{f(x_{n_k})\}$ converge a λ, abbiamo $f(x) \leq \lambda$ grazie al Lemma 11.7, per cui x è un punto di minimo.

Infine, detto C l'insieme dei punti di minimo, si ha che $C = \{x \in V : f(x) \leq \min f\}$. Dunque C è convesso in quanto f è convessa (Esercizio 11.4) e chiuso in quanto f è s.c.i. (Teorema 10.10). □

11.11. Osservazione. Si noti che la (11.4) è banalmente vera se $D(f)$ è limitato.

11.12. *Esercizio.* Dimostrare che il punto di minimo è unico se vale la condizione aggiuntiva

$$f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y) \quad \text{se } x,y \in D(f)\,,\ x \neq y \ \text{ e } \ t \in (0,1) \tag{11.5}$$

detta di *stretta convessità*.

11.13. *Esercizio.* Siano C è un convesso chiuso e non vuoto di V e $f_0 : C \to \mathbb{R}$ convessa e continua (o, più in generale s.c.i.). Si definisca $f : V \to (-\infty, +\infty]$ ponendo $f(x) = f_0(x)$ se $x \in C$ e $f(x) = +\infty$ altrimenti. Si dimostri che f è una funzione convessa, propria e s.c.i. Si noti allora, in particolare, che tale f ha minimo se V è riflessivo e C è limitato.

11.14. Esempio. Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito, $p \in [1, +\infty)$ e $g \in L^q(\Omega)$, ove $q = p'$. Supponiamo $\|g\|_q = 1$ solo per semplicità. Vogliamo minimizzare il funzionale $f : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito dalla formula

$$f(v) = \frac{1}{2}\,\|v\|_p^2 - \int_\Omega gv\,d\mu + \frac{1}{2} \quad \text{per } v \in V\,. \tag{11.6}$$

Abbiamo aggiunto la costante $1/2$, ovviamente inessenziale dal punto di vista della minimizzazione, in modo l'estremo inferiore di f sia 0 (come vedremo) anziché $-1/2$. Il funzionale è somma di tre funzioni convesse (la parte quadratica è convessa per l'Esercizio 11.5), dunque convesso. Inoltre esso è chiaramente continuo, dunque s.c.i. Infine f è anche coercivo, come ora mostriamo. Per ogni $v \in V$ abbiamo

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{1}{2}\,\|v\|_p^2 - \int_\Omega gv\,d\mu + \frac{1}{2} \\ &\geq \frac{1}{2}\,\|v\|_p^2 - \|g\|_q\|v\|_p + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\|v\|_p^2 - \|v\|_p + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,(\|v\|_p - 1)^2. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Deduciamo sia la coercività, sia il fatto che $f(v) \geq 0$ per ogni v. Dunque, se $p > 1$, il funzionale ha minimo per il Teorema 11.10. Mostriamo che il valore minimo è 0 e troviamo il punto di minimo, che sarà unico. Al contrario, se $p = 1$, non abbiamo nessuna garanzia sull'esistenza del minimo, né sulla sua unicità. Unifichiamo momentaneamente i due casi e cerchiamo condizioni necessarie e sufficienti su u perché $f(u) = 0$. Queste si ottengono scrivendo la (11.7) con $v = u$ e imponendo che $f(u) = 0$: tutte le disuguaglianze devono essere uguaglianze. Dunque $f(u) = 0$ se e solo se

$$\int_\Omega gv\,d\mu = \|g\|_q\|v\|_p \quad \text{e} \quad \|v\|_p = 1.$$

Siccome $\|g\|_q = 1$, le condizioni trovate equivalgono a

$$g \in \mathcal{F}_p(u) \quad \text{ove } \mathcal{F}_p : L^p(\Omega) \to 2^{L^q(\Omega)} \text{ è l'applicazione di dualità di } L^p(\Omega) \tag{11.8}$$

avendo identificato il duale di $L^p(\Omega)$ con $L^q(\Omega)$ tramite la mappa di Riesz (si rivedano la Definizione 3.1 e l'Esempio 3.12). Distinguiamo ora di nuovo i casi $p > 1$ e $p = 1$. Se $p > 1$, allora $q \in (1, +\infty)$ e lo spazio $L^q(\Omega)$ è strettamente convesso (Definizione 3.3), per cui $\mathcal{F}_p$ è a un solo valore (Proposizione 3.10). Precisamente, grazie alla (3.3), il legame fra u e g è il seguente

$$g = c|u|^{p-1}\operatorname{sign} u \quad \text{ove} \quad c = \|u\|_p^{2-p}.$$

Essendo $\|u\|_p = \|g\|_q = 1$, abbiamo $c = 1$ e il legame scritto diventa

$$u = |g|^{1/(p-1)}\operatorname{sign} g \quad \text{cioè} \quad u = |g|^{q-1}\operatorname{sign} g$$

dato che $1/(p-1) = q-1$, vale a dire $u = \mathcal{F}_q(g)$ (e ciò non è casuale per l'Osservazione 4.5). Concludiamo che l'estremo inferiore di f è nullo e che $u = |g|^{q-1}\operatorname{sign} g$ è punto di minimo, necessariamente unico. Sia ora $p=1$. Allora, grazie alla (3.4), $f(u)=0$ se e solo se

$$|g| \le 1, \quad \operatorname{sign} g = \operatorname{sign} u \quad \text{e} \quad |g| = 1 \quad \text{ove } u \ne 0\,.$$

Siano ora Ω_0, Ω_+ e Ω_- gli insiemi (eventualmente di misura nulla) in cui u è nulla, positiva e negativa rispettivamente. Allora la condizione $g \in \mathcal{F}_1(u)$ equivale a

$$-1 \le g \le 1 \quad \text{in } \Omega_0\,, \quad g = 1 \quad \text{in } \Omega_+ \quad \text{e} \quad g = -1 \quad \text{in } \Omega_- \tag{11.9}$$

e l'esistenza e l'unicità di u dipendono da g. Ad esempio, se $g=1$ in un insieme ω di misura positiva, qualunque sia $\omega' \subseteq \omega$ di misura positiva, la funzione u che vale $1/\mu(\omega')$ in ω' e 0 altrove (per cui $\Omega_+ = \omega'$, $\Omega_0 = \Omega \setminus \omega'$ e Ω_- vuoto) realizza le (11.9). Dunque l'estremo inferiore di f è nullo e abbiamo l'esistenza di punti di minimo, ma, se lo spazio di misura garantisce l'esistenza di più insiemi ω' (essenzialmente diversi) nelle condizioni dette, non abbiamo l'unicità del punto di minimo. Invece, se $-1 < g < 1$ q.o. in Ω, gli insiemi $\Omega_\pm$ di cui sopra devono avere misura nulla e u deve essere la funzione nulla. Ma con $u=0$ abbiamo $0 = f(u) = f(0) = 1/2$, assurdo. Dunque, in questo caso, nessuna funzione u verifica $f(u)=0$. Eppure l'estremo inferiore di f è comunque nullo, come ora mostriamo. Siccome $\|g\|_\infty = 1$, possiamo supporre $\sup g = 1$, per fissare le idee (il caso $\inf g = -1$ è analogo). Per definizione di estremo superiore (essenziale), per ogni $n \ge 1$, l'insieme $\omega_n = \{x \in \Omega :\ g(x) > 1 - 1/n\}$ non può avere misura nulla e possiamo definire $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mediante $u_n = 1/\mu(\omega_n)$ in ω_n e 0 altrove. Allora

$$f(u_n) = \frac{1}{2}\,\|u_n\|_1^2 - \int_{\omega_n} g\,\frac{1}{\mu(\omega_n)}\,d\mu + \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} - \int_{\omega_n} \Bigl(1 - \frac{1}{n}\Bigr)\,\frac{1}{\mu(\omega_n)}\,d\mu + \frac{1}{2} = \frac{1}{n}$$

per cui $\{f(u_n)\}$ è infinitesima e $\inf f = 0$. Concludiamo che f non ha minimo.

11.15. Osservazione. L'ultima parte dell'Esempio 11.14 fornisce una condizione sufficiente sullo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ perché $L^1(\Omega)$ non sia riflessivo: esista $g \in L^\infty(\Omega)$ tale che $\|g\|_\infty = 1$ e $|g| < 1$ q.o. in Ω. In tali condizioni, infatti, il funzionale (11.6) con $p=1$ non ha minimo, il che è incompatibile con la riflessività di $L^1(\Omega)$ a causa del Teorema 11.10. Ma, grazie al Teorema I.5.36 e all'Osservazione I.5.37, la condizione detta è soddisfatta esattamente nel caso *iii*) del teorema citato. D'altra parte, come vedremo nel capitolo appositamente dedicato alla riflessività, ogni spazio di dimensione finita è riflessivo e uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se è riflessivo ogni spazio isomorfo al suo duale. Usando tali anticipazioni concludiamo che

$$\textit{gli spazi } L^1(\Omega) \textit{ e } L^\infty(\Omega) \textit{ sono riflessivi se e solo se essi hanno dimensione finita} \tag{11.10}$$

cioè se e solo se $\mu(\Omega) = 0$ oppure Ω è unione di un numero finito di atomi.

11.16. Osservazione. La prima parte di quanto detto nell'Esempio 11.14 (diciamo fino alla caratterizzazione (11.8) tramite l'applicazione di dualità) si estende al caso di uno spazio normato qualunque pur di sostituire l'integrale che compare nella (11.6) con $\langle g, v\rangle$, ove $g \in V^*$ è tale che $\|g\|_* = 1$ (e di reinterpretare le norme in modo ovvio). C'è dunque, anche nel caso generale, un legame fra l'applicazione di dualità di V e la minimizzazione del funzionale considerato. □

Il Teorema 11.10 consente di estendere al caso degli spazi riflessivi la possibilità di proiettare su un convesso chiuso non vuoto, come mostra il seguente

11.17. Corollario. *Siano V uno spazio di Banach riflessivo e C un convesso chiuso e non vuoto di V. Allora, per ogni $x_0 \in V$, esiste almeno un punto $x \in C$ tale che $\|x - x_0\| \le \|y - x_0\|$ per ogni $y \in C$. Inoltre l'insieme C' costituito da tali x è un sottoinsieme convesso e chiuso di C. Infine C' è ridotto a un punto se V è strettamente convesso.* □

Dimostrazione. Si introduca la funzione $f : V \to (-\infty, +\infty]$ definita dalla formula

$$f(y) = \|y - x_0\| + I_C(y) \quad \text{per } y \in V \tag{11.11}$$

ove I_C è l'indicatrice di C (cfr. (10.1)). Si noti che I_C è convessa per l'Esercizio 11.2, s.c.i. per l'Osservazione 10.12 e propria perché $C \neq \emptyset$. Siccome la norma è una funzione convessa e continua, segue che anche f è convessa, propria e s.c.i. Inoltre f è anche coerciva in quanto, per ogni $y \in V$, si ha $f(y) \geq \|y\| - \|x_0\|$. Dunque f ha almeno un punto x di minimo. Sia ora $y_0 \in C$. Allora $f(x) \leq f(y_0) < +\infty$ da cui $x \in C$. Inoltre, per ogni $y \in C$, si ha $\|x - x_0\| = f(x) \leq f(y) = \|y - x_0\|$.

Supponiamo ora V strettamente convesso e siano x_1 e x_2 due distinti punti di minimo. Allora $x_1 - x_0 \neq x_2 - x_0$ e $\|x_1 - x_0\| = \|x_2 - x_0\|$. Posto $z = (x_1 + x_2)/2$ e osservato che $z \in C$, per la stretta convessità deduciamo

$$\|z - x_0\| = \|(x_1 - x_0)/2 + (x_2 - x_0)/2\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_0\| + \frac{1}{2}\|x_2 - x_0\| = \|x_1 - x_0\|$$

e contraddiciamo il fatto che x_1 sia punto di minimo. □

11.18. Osservazione. La scelta (11.11) non è l'unica possibile in quanto minimizzare la distanza equivale, ad esempio, a minimizzarne il quadrato o il cubo o il seno iperbolico. Un'altra scelta, più conveniente in certi casi, è la seguente

$$f(y) = \frac{1}{2}\|y - x_0\|^2 + I_C(y) \quad \text{per } y \in V \tag{11.12}$$

come avremo modo di osservare nel prossimo paragrafo.

11.19. Osservazione. L'insieme dei punti x della tesi del Corollario 11.17 è un sottoinsieme convesso e chiuso di C per l'ultima tesi del Teorema 11.10 applicato alla funzione (11.11). Si noti inoltre che in generale non vi è unicità se lo spazio non è strettamente convesso (e per ottenere esempi basta prendere $V = \mathbb{R}^2$ con la norma $|\cdot|_1$ o la norma $|\cdot|_\infty$ e proiettare su una palla chiusa). Si noti infine che, nel caso di uno spazio V strettamente convesso, l'unicità che abbiamo dimostrato non discende dalla stretta convessità della funzione norma (né aiuterebbe prendere ad esempio il quadrato della norma anziché la norma), dato che una norma in uno spazio non ridotto allo zero non è mai una funzione strettamente convessa: infatti la definizione di stretta convessità, applicata a $x \neq 0$ e $y = 0$, implicherebbe $\|x/2\| < (1/2)\|x\|$, il che è ovviamente falso.

11.20. Osservazione. L'ipotesi di riflessività fatta nel Corollario 11.17 non può essere rimossa e nemmeno rimpiazzata con l'ipotesi che lo spazio sia isomorfo al duale di uno spazio separabile (il che garantirebbe una compattezza di tipo debole* sequenziale), come mostra l'esempio seguente. Sia $V = L^\infty(0,1)$ con l'usuale norma $\|\cdot\|_\infty$. Come C prendiamo

$$C = \left\{ v \in C^0[0,1] : \ v(0) = 0, \ \textstyle\int_0^1 v(t)\,dt = 0 \right\}$$

osservando che esso è addirittura un sottospazio chiuso. Mostriamo che una funzione $w \in C^0[0,1]$ con $w(0) = 0$ non ha proiezione su C se il numero reale $\lambda = \int_0^1 w(t)\,dt$ non è nullo (se $\lambda = 0$ allora $w \in C$ e w stessa è la proiezione). Sia infatti w una tale funzione. Innanzi tutto mostriamo che $\operatorname{dist}(w, C) = |\lambda|$. Se $v \in C$ si ha infatti

$$|\lambda| = \left| \int_0^1 w(t)\,dt \right| = \left| \int_0^1 (w(t) - v(t))\,dt \right| \leq \|w - v\|_\infty .$$

Per l'arbitrarietà di v segue che $|\lambda| \leq \operatorname{dist}(w, C)$. Siano ora $\varepsilon > 0$ e $v_\varepsilon \in C^0[0,1]$ definita da $v_\varepsilon(t) = w(t) - (1+\varepsilon)\lambda t^\varepsilon$. Un calcolo immediato mostra che $v_\varepsilon \in C$. Abbiamo pertanto $\operatorname{dist}(w, C) \leq \|w - v_\varepsilon\|_\infty = (1+\varepsilon)|\lambda|$ e per l'arbitrarietà di ε deduciamo la disuguaglianza opposta $\operatorname{dist}(w, C) \leq |\lambda|$. Ciò stabilito, supponiamo per assurdo che w abbia una proiezione u sul sottospazio chiuso C. Siccome $u \in C$, abbiamo

$$\sup_{t \in (0,1)} |w(t) - u(t)| = \|w - u\|_\infty = \operatorname{dist}(w, C) = |\lambda| = \left| \int_0^1 w(t)\,dt \right| = \left| \int_0^1 (w(t) - u(t))\,dt \right| .$$

Ma ciò implica facilmente che $w - u$ è costante, cioè nulla dato che è nulla in 0, vale a dire che $u = w$. D'altra parte $u \in C$ e $w \notin C$, assurdo.

12. Il sottodifferenziale

Anche in questo paragrafo supponiamo che tutti gli spazi normati che intervengono siano reali. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa differenziabile, un punto $x \in \mathbb{R}$ è di minimo per f se e solo se $f'(x) = 0$. Inoltre, f' è una funzione monotona non decrescente e continua, per cui, per ogni $\varepsilon > 0$, la funzione $x \mapsto \varepsilon x + f'(x)$ è invertibile e la sua inversa è non decrescente e differenziabile e ha derivata $\leq 1/\varepsilon$. Vogliamo generalizzare questi fatti al caso di una generica funzione convessa su uno spazio normato. Vedremo che è essenziale l'ipotesi di s.c.i. L'estensione parte da una disuguaglianza.

Riprendiamo il caso di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa differenziabile: per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, vale la disuguaglianza

$$f(x) + f'(x)(y - x) \leq f(y) \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}. \tag{12.1}$$

Se ora lasciamo cadere l'ipotesi di differenziabilità, abbiamo comunque, in ogni punto x, l'esistenza delle derivate unilatere $f'_\pm(x)$ finite e continua a valere la disuguaglianza ottenuta dalla (12.1) sostituendo $f'(x)$ con una delle due derivate $f'_\pm(x)$ o, più in generale, con un numero reale fra queste compreso. Anzi, i numeri reali ξ tali che la disuguaglianza $f(x) + \xi(y - x) \leq f(y)$ valga per ogni $y \in \mathbb{R}$ sono tutti e soli quelli dell'intervallo $[f'_-(x), f'_+(x)]$.

Consideriamo ora il caso di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa differenziabile. L'analoga della (12.1) è $f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) \leq f(y)$ e l'analoga della sua generalizzazione al caso non differenziabile diventa

$$f(x) + \xi \cdot (y - x) \leq f(y) \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n \tag{12.2}$$

ove ora ξ è un elemento di $\mathbb{R}^n$ anziché un numero reale. Se ora vogliamo generalizzare possiamo sostituire l'ambiente $\mathbb{R}^n$ con uno spazio prehilbertiano V e rimpiazzare il prodotto scalare euclideo con il prodotto scalare di V nella (12.2). Ma si può fare di più: quando non c'è il prodotto scalare, c'è comunque la dualità, che tuttavia comporta che i due argomenti non siano vettori di V ma elementi di V^* e V rispettivamente.

12.1. Definizione. *Siano V uno spazio normato e $f : V \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa propria. Se $x \in V$, chiamiamo sottodifferenziale di f in x l'insieme $\partial f(x)$ costituito dai punti $\xi \in V^*$ tali che*

$$f(x) + \langle \xi, y - x \rangle \leq f(y) \quad \text{per ogni } y \in V. \tag{12.3}$$

Chiamiamo poi sottodifferenziale di f l'applicazione $\partial f : V \to 2^{V^*}$ che a ogni $x \in V$ associa il sottodifferenziale $\partial f(x)$ di f in x e dominio di ∂f l'insieme $D(\partial f)$ costituito dagli $x \in V$ tali che $\partial f(x)$ non è vuoto. □

Notiamo che comunemente si usa identificare ∂f con il suo grafico, cioè con l'insieme delle coppie $(x, \xi) \in V \times V^*$ tali che valga la (12.3).

12.2. Esempio. Nel caso di una funzione convessa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, abbiamo

$$\partial f(x) = [f'_-(x), f'_+(x)] \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

se identifichiamo $\mathbb{R}^*$ a $\mathbb{R}$ in modo canonico. In particolare $D(\partial f) = \mathbb{R}$.

12.3. Proposizione. *Nelle condizioni della Definizione 12.1, sia $x \in D(\partial f)$. Allora x appartiene anche a $D(f)$ e f è s.c.i. in x.* □

Dimostrazione. Preso $\xi \in \partial f(x)$ e scritta la (12.3) con un $y \in D(f)$ (che esiste dato che f è propria), deduciamo $f(x) < +\infty$, cioè $x \in D(f)$. Supponiamo ora $x_n \to x$. Scelto $\xi \in \partial f(x)$ e preso $y = x_n$ nella (12.3), otteniamo $f(x) + \langle \xi, x_n - x \rangle \leq f(x_n)$ per ogni n, da cui

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \bigl(f(x) + \langle \xi, x_n - x \rangle \bigr) = \liminf_{n\to\infty} \bigl(f(x) + \langle \xi, x_n - x \rangle \bigr) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

per cui f è sequenzialmente s.c.i. in x. □

Si noti che, per $x \in D(f)$, la (12.3) è automaticamente soddisfatta per ogni $y \in V \setminus D(f)$. Dunque è equivalente richiederla per ogni $y \in V$ o per ogni $y \in D(f)$.

Il risultato precedente implica inoltre che il sottodifferenziale $\partial f(x)$ è vuoto in ogni punto x in cui f non è s.c.i. Di conseguenza, se vogliamo che il dominio del sottodifferenziale sia il più grande possibile, dobbiamo supporre f s.c.i. Si può dimostrare che

se f è anche s.c.i., allora $D(\partial f)$ e $D(f)$ hanno lo stesso interno e la stessa chiusura.

Tale risultato, tuttavia, non si dimostra in due righe.

12.4. Osservazione. Notiamo che l'inclusione $D(\partial f) \subseteq D(f)$ può essere stretta già nel caso $V = \mathbb{R}$ e in ipotesi di semicontinuità. Prendiamo infatti la funzione $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ definita dalle formule $f(x) = -\sqrt{x}$ se $x \geq 0$ e $f(x) = +\infty$ se $x < 0$. Allora f è convessa propria s.c.i. e si ha: $f(0) < +\infty$ e $\partial f(0) = \emptyset$, cioè $0 \in D(f)$ e $0 \notin D(\partial f)$.

12.5. Osservazione. Se V è uno spazio di Hilbert, spesso si identificano V e V^* tramite l'isomorfismo di Riesz, per cui la dualità diventa il prodotto scalare e la (12.3) si riscrive come

$$f(x) + (\xi, y - x) \leq f(y) \quad \text{per ogni } y \in V. \tag{12.4}$$

Va da sé che $\partial f(x)$ risulta un sottoinsieme di V.

12.6. Esempio. Sia $f = I_C$ la funzione indicatrice del convesso chiuso non vuoto C dello spazio normato V. Allora f è convessa propria s.c.i. e $D(f) = C$. In particolare $\partial f(x)$ è vuoto se $x \notin C$. Sia ora $x \in C$. Allora la (12.3) equivale alla condizione

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq 0 \quad \text{per ogni } y \in C$$

Infatti ogni scelta $y \notin C$ fornisce la disuguaglianza $0 \leq +\infty$, banalmente soddisfatta.

12.7. *Esercizio.* Determinare ∂I_C, ove $I_C : V \to (-\infty, +\infty]$ è la funzione indicatrice, in ciascuno dei casi seguenti: *i)* V è un generico spazio normato e C è costituito dal solo punto $x_0 \in V$; *ii)* $V = \mathbb{R}$ e C è un intervallo chiuso, limitato o meno; *iii)* V è uno spazio di Hilbert (identificato al duale) e C è un suo sottospazio chiuso; *iv)* $V = \mathbb{R}^2$ (identificato al duale) e C è il quadrato $[0,1]^2$ oppure il disco chiuso $\overline{B}_1(0)$.

12.8. *Esercizio.* Sia $f \in \mathrm{Hom}(V; \mathbb{R})$. Allora, come abbiamo visto nell'Osservazione 10.7, f è s.c.i. in almeno un punto se e solo se $f \in V^*$. Dimostrare che, se $f \in V^*$, allora $\partial f(x) = \{f\}$ per ogni $x \in V$.

12.9. *Esercizio.* Siano V uno spazio normato, $f : V \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa propria s.c.i. e $\varphi \in V^*$. Si dimostri che

$$D(\partial(f + \varphi)) = D(\partial f) \quad \text{e} \quad \partial(f + \varphi)(x) = \{\xi + \varphi : \ \xi \in \partial f(x)\} \quad \text{per ogni } x \in D(\partial f). \ \square$$

Il risultato che segue si dimostra in modo ovvio: basta infatti esplicitare la (12.3) con la scelta $\xi = 0$. Gli diamo la dignità di teorema perché averlo osservato è importante.

12.10. Teorema. *Siano V uno spazio normato, $f : V \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa propria e $x \in V$. Allora vale l'equivalenza*

$$x \text{ è un punto di minimo per } f \text{ se e solo se } 0 \in \partial f(x). \ \square \tag{12.5}$$

12.11. Osservazione. Se f è una funzione reale di variabile reale convessa e regolare, x è punto di minimo se e solo se $f'(x) = 0$. D'altra parte, si ha in tal caso $\partial f(x) = \{f'(x)\}$ per ogni x. La (12.5), dunque, appare come l'estensione al caso irregolare della condizione di annullamento della derivata, per cui si presenta in modo naturale il problema dell'estensione del concetto di derivata agli spazi normati e lo studio delle sue connessioni con il sottodifferenziale. Questo è l'oggetto delle considerazioni che seguono. Notiamo che, nelle applicazioni concrete, la (12.5) è un'equazione o una disequazione, diversa dalla condizione di minimo, che chiamiamo comunque *equazione di Eulero-Lagrange* del problema di minimo considerato, generalizzando nella terminologia le situazioni classiche del Calcolo delle variazioni.

12.12. Definizione. *Siano* V *uno spazio normato,* $x \in V$ *e* $f : B_r(x) \to \mathbb{R}$. *Diciamo che* f *è differenziabile secondo Gâteaux, o G-differenziabile, in* x *quando esiste* $\xi \in V^*$ *tale che*

$$\langle \xi, v \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \quad \textit{per ogni } v \in V . \tag{12.6}$$

L'elemento ξ *è detto derivata di Gâteaux di* f *in* x *e denotato con* $f'(x)$ *o* $\nabla f(x)$. □

Naturalmente, nella (12.6), t è la variabile reale. Si riconosce l'estensione del concetto di derivata direzionale, qui rispetto a un vettore di norma non necessariamente unitaria, ma con la richiesta ulteriore che la derivata stessa dipenda dal vettore in modo lineare e continuo. Si noti che la (12.6) individua univocamente il valore $\langle \xi, v \rangle$ per ogni $v \in V$, per cui il funzionale ξ è necessariamente unico e l'ultima parte della definizione ha senso.

12.13. Osservazione. Per quanto riguarda la verifica della differenziabilità secondo Gâteaux e il calcolo della derivata, si noti che il secondo membro della (12.6) non è altro che la derivata in $t = 0$ della funzione (definita in un intorno di $t = 0$ appunto) $t \mapsto f(x + tv)$. Basta allora vedere se tale derivata esiste e se essa dipende da v in modo lineare e continuo.

12.14. Osservazione. Non possiamo tacere sull'estensione della differenziabilità, che, come è ben noto, è una condizione più restrittiva dell'esistenza delle derivate direzionali, anche se questa viene accompagnata da una richiesta di linearità rispetto al vettore. Nelle condizioni della Definizione 12.12, diciamo che f è *differenziabile secondo Fréchet in* x quando esiste $\xi \in V^*$ tale che

$$f(x+h) = f(x) + \langle \xi, h \rangle + o(\|h\|) \quad \text{per } h \to 0 , \quad \text{cioè} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle \xi, h \rangle}{\|h\|} = 0. \tag{12.7}$$

L'elemento ξ è necessariamente unico e viene detto *derivata di Fréchet di* f *in* x. Come nel caso elementare degli spazi euclidei, si vede subito che la differenziabilità secondo Fréchet implica quella secondo Gâteaux e che le due derivate coincidono. In particolare, per vedere se f è differenziabile secondo Fréchet e calcolare la derivata, si può controllare la differenziabilità secondo Gâteaux calcolando, per ogni $v \in V$, il secondo membro della (12.6) e provando che esso dipende da v in modo lineare e continuo; se tutto ciò ha successo, si cerca di dimostrare che la derivata di Gâteaux verifica la (12.7), il che può essere vero o meno.

12.15. Osservazione. Anche se in questa sede non siamo interessati all'estensione, notiamo che le definizioni di derivate di Gâteaux e di Fréchet si possono dare allo stesso modo nel caso in cui la funzione in gioco assuma valori in uno spazio normato W: in tal caso la derivata è un elemento di $\mathcal{L}(V; W)$. In particolare, se Ω è un aperto di V e $f : \Omega \to W$ è differenziabile secondo Fréchet (questo è il tipo di differenziabilità che è più opportuno considerare) in tutti i punti di Ω, allora possiamo introdurre la funzione $f' : \Omega \to \mathcal{L}(V; W)$ che a ogni $x \in \Omega$ associa la derivata di Fréchet $f'(x)$ e iterare la procedura di derivazione: se ciò riesce in un punto x, abbiamo la derivata di Fréchet seconda $f''(x) \in \mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; W)) = \mathcal{L}_2(V^2; W)$, lo spazio delle applicazioni bilineari e continue da $V \times V$ in W. In generale, la derivata di ordine n di f nel punto x è un operatore $f^{(n)}(x) : V^n \to W$ n-lineare e continuo. Si può allora generalizzare buona parte dell'usuale calcolo differenziale. Ad esempio valgono l'estensione del Teorema di Schwarz (se f è differenziabile due volte secondo Fréchet in x, allora $f''(x)$ è un operatore simmetrico) e della formula di Taylor con il resto di Peano (in una versione astratta che appare formalmente identica a quella consueta delle funzioni reali di variabile reale, con l'avvertenza di interpretare la scrittura $f^{(k)}(x)h^k$ come il valore che $f^{(k)}(x)$ assume sulla k-upla formata da k vettori tutti uguali ad h).

12.16. Proposizione. *Siano* V *uno spazio normato e* $f : V(-\infty, +\infty]$ *una funzione convessa propria s.c.i. Se* x *è un punto interno a* $D(f)$ *e* f *è differenziabile secondo Gâteaux in* x, *allora il sottodifferenziale* $\partial f(x)$ *coincide con l'insieme* $\{f'(x)\}$. *In particolare, il punto* x *è di minimo per* f *se e solo se* $f'(x) = 0$. □

Dimostrazione. Sia $\xi = f'(x)$: mostriamo che vale la (12.3). Fissiamo dunque $y \in D(f)$ ad arbitrio. Allora $x + t(y-x) \in D(f)$ per ogni $t \in (0,1)$ e risulta

$$f(x + t(y-x)) \le f(x) + t\big(f(y) - f(x)\big) \quad \text{per ogni } t \in (0,1)\,, \quad \text{da cui} \quad \langle \xi, y - x\rangle \le f(y) - f(x).$$

Sia ora $\xi \in \partial f(x)$, cioè verificante la (12.3): mostriamo che $\xi = f'(x)$. Sia $v \in V$ non nullo. Se $r > 0$ è tale che $B_r(x) \subseteq D(f)$ e $t^* = r/\|v\|$, allora $x \pm tv \in D(f)$ per $t \in (0, t^*)$. Per tali t abbiamo allora

$$f(x) + \langle \xi, \pm tv\rangle \le f(x \pm tv) \quad \text{da cui} \quad \frac{f(x-tv) - f(x)}{-t} \le \langle \xi, v\rangle \le \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

e prendendo $t \to 0$ deduciamo $\langle f'(x), v\rangle \le \langle \xi, v\rangle \le \langle f'(x), v\rangle$. Dunque $\xi = f'(x)$. Ciò conclude la dimostrazione della prima parte. L'altra affermazione dell'enunciato si ottiene poi applicando il Teorema 12.10. □

12.17. Osservazione. Nell'ambito del risultato precedente, dunque, la (12.5) diventa $f'(x) = 0$, cioè un'equazione anziché un'inclusione come nel caso generale. Di equazione di Eulero-Lagrange (Osservazione 12.11) si parla più propriamente esattamente in situazioni di questo tipo. □

Consideriamo ora la somma di due funzioni $f, g : V \to (-\infty, +\infty]$ convesse proprie s.c.i.: essa è comunque convessa e s.c.i., ma in generale non propria. Precisamente $f + g$ è propria se e solo se l'intersezione $D(f) \cap D(g)$ è non vuota. In tali condizioni ha senso considerare il sottodifferenziale di $f + g$ ed è immediato verificare che

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subseteq \partial (f+g)(x) \quad \text{per ogni } x \in V \tag{12.8}$$

ove la somma al primo membro è la somma vettoriale, cioè l'insieme descritto da $\xi + \eta$ al variare di ξ ed η nei due sottodifferenziali rispettivamente. Notiamo che, in generale, l'inclusione non è un'uguaglianza, come mostra l'esempio seguente. Siano $C_\pm = \overline{B}_1(\pm 1, 0) \subset \mathbb{R}^2$ e $f_\pm = I_{C_\pm}$ le corrispondenti indicatrici. Allora $f_- + f_+$ è l'indicatrice dell'insieme $\{(0,0)\}$ e l'origine è l'unico punto che ha senso considerare. Abbiamo

$$\partial f_-(0,0) = [0, +\infty) \times \{0\} \quad \text{e} \quad \partial f_+(0,0) = (-\infty, 0] \times \{0\} \quad \text{da cui} \quad \partial f_-(0,0) + \partial f_+(0,0) = \mathbb{R} \times \{0\}$$

mentre il sottodifferenziale della somma è tutto $\mathbb{R}^2$.

Il risultato successivo, che riguarda una situazione particolare ma di indubbio interesse, assicura che nella (12.8) vale l'uguaglianza. Segnaliamo che la condizione

$$V \text{ è riflessivo ed esiste } x_0 \in D(\partial f) \cap D(\partial g) \text{ interno a } D(\partial f) \text{ o a } D(\partial g) \tag{12.9}$$

è sufficiente perché valga l'uguaglianza addirittura per ogni $x \in V$.

12.18. Proposizione. *Siano V uno spazio normato, $f, g : V \to (-\infty, +\infty]$ due funzioni convesse proprie s.c.i. e $x \in D(f) \cap D(g)$. Se x è interno a $D(f)$ e f è differenziabile secondo Gâteaux in x, allora vale la formula*

$$\partial (f+g)(x) = f'(x) + \partial g(x). \tag{12.10}$$

In particolare x è di minimo per la funzione $f + g$ se e solo se $-f'(x) \in \partial g(x)$. □

Dimostrazione. Dimostriamo le due inclusioni. Se ζ appartiene al secondo membro, allora $\zeta = f'(x) + \eta$ con $\eta \in \partial g(x)$. Grazie alla Proposizione 12.16 e alla (12.8), deduciamo che $\zeta \in \partial(f+g)(x)$. Supponiamo ora che ζ appartenga al primo membro della (12.10): dobbiamo dimostrare che ζ appartiene al secondo, cioè che $\zeta - f'(x) \in \partial g(x)$. Sia $y \in D(g)$. Siccome x è interno a $D(f)$, esiste $t^* \in (0,1)$ tale che $x + t(y-x) \in D(f)$ per ogni $t \in (0, t^*)$. Per tali t abbiamo allora $x + t(y-x) \in D(f) \cap D(g)$. Usando l'ipotesi $\zeta \in \partial(f+g)(x)$ e la convessità di g abbiamo dunque

$$f(x) + g(x) + \langle \zeta, t(y-x)\rangle \le f(x + t(y-x)) + g(x + t(y-x)) \le f(x + t(y-x)) + g(x) + t\big(g(y) - g(x)\big).$$

Semplificando fra primo e ultimo membro, riordinando e dividendo per t, deduciamo

$$\langle \zeta, y - x\rangle \le \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} + g(y) - g(x) \quad \text{da cui} \quad \langle \zeta, y - x\rangle \le \langle f'(x), y - x\rangle + g(y) - g(x).$$

Ma ciò significa, per l'arbitrarietà di y, che $\zeta - f'(x) \in \partial g(x)$. Ciò conclude la dimostrazione della prima parte. L'altra affermazione dell'enunciato si ottiene poi applicando il Teorema 12.10. □

12.19. Esempio. Sia V uno spazio di Hilbert. Per coordinare le notazioni con quelle di un esempio successivo denotiamo con $(\!(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\!)$ il prodotto scalare. Vogliamo determinare il sottodifferenziale della funzione $f : V \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = (1/2)\|x\|^2$ senza identificare V con il suo duale tramite l'isomorfismo di Riesz. A tale scopo vediamo se f è differenziabile secondo Gâteaux in x usando l'Osservazione 12.13. Per $x, v \in V$ abbiamo

$$f(x+tv) = \frac{1}{2}\,\|x\|^2 + t(\!(x,v)\!) + \frac{t^2}{2}\,\|v\|^2 \quad \text{da cui} \quad \frac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0} = (\!(x,v)\!) = \langle \mathcal{R}x, v\rangle .$$

Dunque f è G-differenziabile in x e $f'(x) = \mathcal{R}x$ per ogni $x \in V$. Per la Proposizione 12.16 concludiamo che $\partial f(x) = \{\mathcal{R}x\}$. Dunque $\partial f : V \to V^*$ coincide con l'isomorfismo di Riesz.

Ora aggiungiamo a f un contributo lineare considerando la funzione $g : V \to \mathbb{R}$ data dalla formula $g(x) = (1/2)\|x\|^2 - \langle \varphi, x\rangle$, ove $\varphi \in V^*$ è assegnato. Adattando il calcolo fatto abbiamo $\partial g(x) = \{\mathcal{R}x - \varphi\}$. Allora un punto $x \in V$ è punto di minimo per g se e solo se esso verifica $0 \in \partial g(x)$, cioè $\mathcal{R}x = \varphi$.

Si noti che questo fatto può essere usato per dimostrare il Teorema di Riesz nel caso reale. Ecco la traccia: dato $\varphi \in V^*$, per trovare $x \in V$ tale che $\mathcal{R}x = \varphi$, minimizziamo il funzionale g dimostrando che, grazie alla convessità di C e alla regola del parallelogrammo, ogni successione minimizzante è di Cauchy, dunque convergente per la completezza.

12.20. Osservazione. Si può dimostrare che, nel caso di un generico spazio normato, *il sottodifferenziale della funzione* $x \mapsto (1/2)\|x\|^2$ *è l'applicazione di dualità* $\mathcal{F} : V \to 2^{V^*}$ data dalla Definizione 3.1. Se la dimostrazione di questo fatto è complessa in generale, un collegamento fra il sottodifferenziale in questione e $\mathcal{F}$ è dato dall'Esempio 11.14 con $V = L^p(\Omega)$ e dall'Osservazione 11.16 con V spazio normato generico.

12.21. Esempio. Usiamo la Definizione IV.5.5 e le notazioni (IV.5.3). Sia (V, H, V^*) una terna hilbertiana reale e si consideri la funzione $f : H \to (-\infty, +\infty]$ definita dalle formule

$$f(v) = \frac{1}{2}\,\|v\|^2 \quad \text{se } v \in V \quad \text{e} \quad f(v) = +\infty \quad \text{altrimenti.}$$

La funzione f è ovviamente convessa e propria. Meno ovvio è che essa sia anche s.c.i., per cui facciamo questa verifica. Siano $x_n \to x$ in H e $\lambda = \liminf f(x_n)$: dobbiamo controllare che $f(x) \le \lambda$. Possiamo supporre $\lambda < +\infty$, $f(x_n) < +\infty$ per ogni n e che $\{f(x_n)\}$ converga a λ (pur di passare a una sottosuccessione opportuna). Dalla limitatezza dell'ultima successione deduciamo che la successione $\{x_n\}$ è limitata in V. Dunque, per il Teorema di compattezza debole IV.5.1, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente debolmente in V a un elemento $y \in V$. Allora abbiamo anche $x_{n_k} \rightharpoonup y$ in H. Ma $\{x_{n_k}\}$ converge a x in H, dunque anche debolmente a x in H. Per l'unicità del limite debole deduciamo $y = x$. Quindi $x_{n_k} \rightharpoonup x$ in V. D'altra parte $\{f(x_{n_k})\}$ converge a λ. Siccome la restrizione di f a V è convessa e s.c.i. (perché continua) rispetto alla topologia di V, deduciamo che $f(x) \le \lambda$.

Ora che è stabilita anche la s.c.i., vogliamo determinare il sottodifferenziale di f identificando H ad H^* ma non V a V^* tramite l'isomorfismo di Riesz. Supponiamo $x \in D(f)$ e $\xi \in \partial f(x)$. Allora $f(x) + (\xi, y - x) \le f(y)$ per ogni $y \in D(f)$. Osservato che $D(f) = V$, possiamo scrivere $\langle \xi, y - x\rangle$ anziché $(\xi, y - x)$ e riconosciamo che il problema è identico a quello dell'Esempio 12.19: la funzione f dell'esempio citato è la restrizione a V della f attuale. Ora abbiamo solo l'ipotesi supplementare che $\xi \in H$ che là non avevamo. Deduciamo pertanto che $\xi = \mathcal{R}x$, ove $\mathcal{R}$ è l'isomorfismo di Riesz dello spazio V, e che $\mathcal{R}x = \xi \in H$. Viceversa, se $x \in V$ e $\mathcal{R}x \in H$, si controlla senza difficoltà che $\xi \in \partial f(x)$. Concludiamo che

$$D(\partial f) = \{x \in V :\ \mathcal{R}x \in H\} = \mathcal{R}^{-1}(H) \quad \text{e} \quad \partial f(x) = \{\mathcal{R}x\} \quad \text{per } x \in \mathcal{R}^{-1}(H) .$$

In altre parole ∂f è la restrizione di $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}^{-1}(H)$.

Se poi consideriamo la funzione $g : H \to (-\infty, +\infty]$ data da $g(x) = f(x) - (z, x)$ ove $z \in H$

è fissato, come nel caso già trattato otteniamo che $D(\partial g) = D(\partial f)$ e che $\partial g(x) = \{\mathcal{R}x - z\}$ per $x \in D(f)$. In particolare $x \in H$ è punto di minimo per g se e solo se $x \in \mathcal{R}^{-1}(H)$ e $\mathcal{R}x = z$. Dunque, se cerchiamo il punto di minimo per la funzione g, come nell'esempio citato risolviamo l'equazione $\mathcal{R}x = z$, cioè $(\!(x, y)\!) = \langle z, y\rangle$ per ogni $y \in V$ ove $(\!(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\!)$ è il prodotto scalare di V, vale a dire $(\!(x, y)\!) = (z, y)$ per ogni $y \in V$, ora con l'ipotesi aggiuntiva $z \in H$, trovando la soluzione x in $\mathcal{R}^{-1}(H)$. □

Un esempio non banale di funzione convessa propria s.c.i. è descritto nel risultato che segue, nel quale si calcola anche il sottodifferenziale. Si osservi preliminarmente che la composizione $\varphi \circ v$ di una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i. con una funzione v misurabile su uno spazio di misura è essa stessa misurabile. Come spesso si usa, scriviamo $\varphi(v)$ anziché $\varphi \circ v$.

12.22. Proposizione. *Siano $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa propria s.c.i., $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura finito e $p \in (1, +\infty)$. Definiamo $f : L^p(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$ mediante*

$$f(v) = \int_\Omega \varphi(v(x))\, d\mu \quad \text{se } \varphi(v) \in L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad f(v) = +\infty \quad \text{altrimenti.} \tag{12.11}$$

Allora f è convessa propria s.c.i. e il suo sottodifferenziale si ottiene come segue: se $u \in L^p(\Omega)$ e $\xi \in L^{p'}(\Omega)$ risulta

$$\xi \in \partial f(u) \quad \text{se e solo se} \quad \xi(x) \in \partial\varphi(u(x)) \quad \text{q.o. in } \Omega \tag{12.12}$$

con l'identificazione $(L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega)$ tramite l'isomorfismo di Riesz. □

Dimostrazione. Osserviamo che effettivamente f non assume mai il valore $-\infty$. Infatti si scelga un polinomio P di grado ≤ 1 tale che $P(t) \le \varphi(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. L'esistenza di tale polinomio, senz'altro garantita dal Lemma 11.8 che deriva dal Teorema di Hahn-Banach, può essere in questo caso dimostrata in modo semplice e diretto come segue. Se $D(\varphi)$ ha un solo punto t_0 prendiamo $P(t) = \varphi(t_0)$. In caso contrario $D(\varphi)$ contiene un intervallo $[a, b]$ non banale e, detto Q il polinomio di grado ≤ 1 che coincide con φ in a e in b e osservato che φ è continua in $[a, b]$, si può prendere $P(t) = Q(t) - c$ ove c è il minimo di $Q - \varphi$ in $[a, b]$. Trovato il polinomio P minorante, continuiamo il discorso. Siccome $P(v) \in L^1(\Omega)$ per ogni $v \in L^1(\Omega)$ e $L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ perché $\mu(\Omega) < +\infty$, abbiamo che $f(v) > -\infty$. Inoltre f è convessa e propria, come subito si verifica. Infine f è s.c.i., come ora controlliamo. Siano $\{u_n\}$ una successione in $L^p(\Omega)$ convergente a $u \in L^p(\Omega)$ e $\lambda = \liminf_{n\to\infty} f(u_n)$. Dobbiamo verificare che $f(u) \le \lambda$. Chiaramente possiamo supporre λ finito. Mediante due estrazioni successive troviamo una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ che verifica $\lim_{k\to\infty} f(u_{n_k}) = \lambda$ e che converge a u q.o. Considerando $\varphi - P$ se occorre, ci rinconduciamo al caso in cui φ è non negativa. Allora le funzioni $\varphi(u_{n_k})$ sono non negative e risulta $0 \le \varphi(u) \le \liminf_{k\to\infty} \varphi(u_{n_k})$ q.o. Per il Lemma di Fatou, deduciamo che $\varphi(u) \in L^1(\Omega)$ e che

$$\begin{aligned} f(u) &= \int_\Omega \varphi(u)\, d\mu \le \int_\Omega \bigl(\liminf_{k\to\infty} \varphi(u_{n_k})\bigr)\, d\mu \\ &\le \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(u_{n_k})\, d\mu = \lim_{k\to\infty} f(u_{n_k}) = \lambda\,. \end{aligned}$$

Veniamo alla (12.12). Supponiamo $\xi \in \partial\varphi(u)$ q.o. Allora, per ogni $v \in D(f)$ e per q.o. $x \in \Omega$, risulta

$$\varphi(u(x)) \le \xi(x)\,\bigl(u(x) - v(x)\bigr) + \varphi(v(x))$$

e tutte le funzioni in gioco sono integrabili. Integrando si ottiene che $\xi \in \partial f(u)$.

Supponiamo, viceversa, $\xi \in \partial f(u)$, cioè

$$\int_\Omega \xi\,(u - v)\, d\mu + \int_\Omega \varphi(v)\, d\mu - \int_\Omega \varphi(u)\, d\mu \ge 0 \quad \text{per ogni } v \in D(f)\,.$$

Fissiamo ora $y \in D(\varphi)$. Se $\omega \in \mathcal{M}$ ha misura positiva, definiamo v mediante $v = y$ in ω e $v = u$ in $\Omega \setminus \omega$ e osserviamo che $v \in D(f)$. Deduciamo

$$\int_\omega \Big(\xi \, (u - y) + \varphi(y) - \varphi(u) \Big) \, d\mu \ge 0.$$

Per l'arbitrarietà di ω e di y concludiamo che $\xi(x)\,(u(x) - y) + \varphi(y) - \varphi(u(x)) \ge 0$ per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $y \in D(\varphi)$, cioè che $\varphi(u(x)) + \xi(x)\,(y - u(x)) \le \varphi(y)$ per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $y \in D(\varphi)$. Ma ciò significa che $\xi(x) \in \partial\varphi(u(x))$ per q.o. $x \in \Omega$. □

Terminiamo la carrellata di esempi con lo studio del problema di Dirichlet omogeneo per un'equazione ellittica non lineare particolarmente semplice ma già significativa.

12.23. Un problema non lineare. Consideriamo il problema di Dirichlet

$$-\Delta u + h(u) = g \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \tag{12.13}$$

ove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$ e le funzioni $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ sono assegnate. Precisamente, anziché il problema (12.13), consideriamo il problema variazionale

$$u \in H^1_0(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega h(u)\, v \, dx = \int_\Omega gv \, dx \quad \text{per ogni } v \in H^1_0(\Omega)\,. \tag{12.14}$$

Supponiamo Ω limitato, $g \in L^2(\Omega)$ e che h verifichi le condizioni seguenti:

$$h \text{ è continua e non decrescente in } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |h(r)| \le L|r| \quad \text{per ogni } r \in \mathbb{R} \tag{12.15}$$

per una certa costante $L \ge 0$. Notiamo che le (12.15) sono senz'altro soddisfatte se h è non decrescente, lipschitziana con costante di Lipschitz L e nulla in 0. Tuttavia l'ipotesi di annullamento in 0 può essere rimossa: basta infatti sostituire h con $h - h(0)$ e g con $g - h(0)$ (che pure appartiene a $L^2(\Omega)$ dato che Ω è limitato) per passare dal caso generale a quello che stiamo considerando. Osserviamo che da $u \in H^1_0(\Omega)$, per cui in particolare $u \in L^2(\Omega)$, segue $h(u) \in L^2(\Omega)$ in quanto $|h(u)| \le L|u|$ q.o. in Ω. Pertanto il secondo integrale della (12.14) ha senso. Notiamo infine che la limitatezza di Ω garantisce la validità della disuguaglianza (IV.1.18) di Poincaré. Abbiamo pertanto che $\|v\|_2 \le c_\Omega \|\nabla v\|_2$ per ogni $v \in H^1_0(\Omega)$ con una costante c_Ω che dipende solo da Ω e che la formula $\|v\| = \|\nabla v\|_2$ definisce una norma in $H^1_0(\Omega)$ (e questa converrà usare) equivalente a quella indotta dall'usuale norma di $H^1(\Omega)$.

Dimostriamo che la soluzione u esiste ed è unica. Iniziamo dall'unicità. Se u_1 e u_2 sono due soluzioni, scriviamo la (12.14) con $u = u_1$ e $v = u_1 - u_2$ e l'analoga ottenuta scambiando i ruoli di u_1 e u_2. Poi sommiamo membro a membro. Otteniamo

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx + \int_\Omega (h(u_1) - h(u_2))(u_1 - u_2) \, dx = 0 \quad \text{da cui} \quad \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, dx = 0$$

per la monotonia di h. Dunque $\|u_1 - u_2\|^2 = 0$ e $u_1 = u_2$. Veniamo all'esistenza. Sia φ la primitiva di h nulla in 0. Allora φ è una funzione convessa, ovunque definita, di classe C^1 e non negativa (perché $h(0) = 0$). Consideriamo il funzionale

$$\psi : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R} \quad \text{definito da} \quad \psi(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_\Omega \varphi(v) \, dx - \int_\Omega gv \, dx. \tag{12.16}$$

Esso convesso e s.c.i. (addirittura continuo, anche se ciò non è ovvio) ed è anche coercivo dato che verifica $\psi(v) \ge (1/2)\|v\|^2 - \|g\|_2 \|v\|_2 \ge (1/2)\|v\|^2 - c_\Omega \|g\|_2 \|v\|$. Dunque ψ ha minimo per il Teorema 11.10. Sia $u \in H^1_0(\Omega)$ un punto di minimo: verifichiamo che u risolve (12.14). A tal fine controlliamo che ψ è differenziabile secondo Gâteaux in u (di fatto lo è in ogni punto dello spazio). Se $v \in H_0^1(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\psi(u+tv) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+tv)|^2\,dx + \int_\Omega \varphi(u+tv)\,dx - \int_\Omega g(u+tv)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega gu\,dx + t\int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla v - gv)\,dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \int_\Omega \varphi(u+tv)\,dx\end{aligned}$$

e dobbiamo derivare nel punto $t = 0$. Chiaramente l'unico termine degno di nota è l'ultimo integrale. Vediamo se è lecito derivare sotto segno in $t=0$. La funzione $(x,t) \mapsto \varphi(u(x)+tv(x))$, $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$, è di classe C^1 rispetto a t per q.o. $x \in \Omega$ e misurabile rispetto a x per ogni $t \in \mathbb{R}$ e la sua derivata parziale rispetto a t vale $h(u(x)+tv(x))\,v(x)$. Siccome risulta

$$|h(u+tv)\,v| \le L|u+tv|\,|v| \le L(|u|+|v|)\,|v| \le L(|u|^2+2|v|^2) \quad \text{per } |t| \le 1 \text{ e q.o. in } \Omega$$

e l'ultimo membro appartiene a $L^1(\Omega)$, concludiamo che possiamo derivare sotto il segno di integrale in $t=0$. Quindi la derivata in $t=0$ della funzione $t \mapsto \psi(u+tv)$ effettivamente esiste e risulta

$$\langle \psi'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega h(u)\,v\,dx - \int_\Omega gv\,dx \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega)$$

dove abbiamo già usato il simbolo di dualità dato che il secondo membro della formula dipende da v in modo lineare e continuo rispetto alla topologia di $H_0^1(\Omega)$. Allora, essendo u punto di minimo di ψ, deduciamo $\psi'(u)=0$ per la Proposizione 12.16. Ma ciò significa proprio la (12.14). Dunque il problema (12.14) ha una e una sola soluzione.

Notiamo che, per quanto riguarda l'esistenza, alternativamente avremmo potuto considerare l'estensione di φ a $L^2(\Omega)$ ottenuta ponendo $\psi(v) = +\infty$ se $v \notin H_0^1(\Omega)$. Con tale scelta ψ sarebbe stata solo s.c.i. anziché continua. Inoltre avremmo perso la differenziabilità secondo Gâteaux e avremmo dovuto ricorrere alla condizione (12.5) proprio in termini di sottodifferenziale. Allora saltano all'occhio l'analogia con l'Esempio 12.21 e il collegamento alla Proposizione 12.22 con $p=2$: infatti la (12.12) diventa ora $\xi = h(v)$ dato che $\partial\varphi(r) = \{h(r)\}$ per ogni $r \in \mathbb{R}$. Tuttavia, essendo in generale falso che il sottodifferenziale di una somma è la somma dei sottodifferenziali, non ne avremmo tratto vantaggi immediati. Vediamo invece come si possano attenuare le ipotesi su h.

Per quanto riguarda l'unicità, le (12.15) sono state utilizzate solo parzialmente. Precisamente, perché il discorso fatto sia corretto, bastano le seguenti: $h(u_i) \in L^2(\Omega)$ e h è non decrescente. Ma si può dire ben di più. Se sostituiamo il problema (12.14) con il seguente

$$\begin{aligned}&u \in H_0^1(\Omega), \quad \xi \in L^2(\Omega), \quad \xi \in \partial\varphi(u) \quad \text{q.o. in } \Omega \\ &\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega \xi\,v\,dx = \int_\Omega gv\,dx \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega)\end{aligned} \tag{12.17}$$

ove $\varphi : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ è una funzione convessa propria s.c.i., lo stesso discorso, adattato rimpiazzando $h(u_i)$ con ξ_i, ancora funziona dato che $(\xi_1-\xi_2)(u_1-u_2) \ge 0$ q.o. in Ω. Infatti, se $r_i \in \mathbb{R}$ e $s_i \in \partial\varphi(r_i)$ per $i=1,2$, allora $(s_1-s_2)(r_1-r_2) \ge 0$, come si vede scrivendo $\varphi(r_1)+s_1(r_2-r_1) \le \varphi(r_2)$ e l'analoga con gli indici scambiati e sommando poi membro a membro (si veda anche il risultato generale sulla monotonia dei sottodifferenziali che diamo tra breve).

Veniamo all'esistenza con h più generale. Ferma restando l'ipotesi di monotonia, vediamo se è possibile eliminare quella di continuità. A questo proposito costruiamo un esempio di non esistenza con $\Omega = (0,3)$. Prendiamo come φ la funzione parte positiva, cioè $\varphi(r) = r^+ = \max\{r,0\}$ per $r \in \mathbb{R}$, e come h la sua derivata, dunque definita per ora solo in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si porrà il problema di scegliere il valore $h(0)$. Immaginiamo di averne scelto uno e fissiamo $u \in C^2(\overline{\Omega})$ positiva in $(0,1)$ e nulla in 0 e in $[1,3]$ e $\alpha,\beta \in [0,1]$ distinti. Definiamo $\xi \in L^2(\Omega)$ ponendo $\xi = 1$ in $(0,1)$, $\xi = \alpha$ in $(1,2)$ e $\xi = \beta$ in $(2,3)$. Allora, banalmente, il problema in (12.13) è soddisfatto se g

è la funzione data proprio dalla formula $g = -u'' + \xi$ e $h(0)$ vale contemporaneamente α e β, ma ciò non è possibile. Al contrario, è banale controllare che il problema (12.17) è risolto dalla coppia (u, ξ). Siccome, come osservato, quest'ultimo ha al massimo una soluzione, vediamo che è mal posto il problema (12.13) e concludiamo che un problema di tipo (12.13) con h monotona e discontinua va impostato nella forma più generale (12.17): la funzione ξ è una seconda incognita e sarà lei a scegliersi i valori che deve assumere nei punti x per i quali $u(x)$ è un punto di non differenziabilità di φ (cioè, nel caso $D(\varphi) = \mathbb{R}$, un punto di salto della derivata φ'). Notiamo che, se (12.17) ha una soluzione regolare u (necessariamente unica), allora tale u risolve non un'equazione a derivate parziali in Ω ma l'inclusione differenziale $-\Delta u + \partial\varphi(u) \ni g$ q.o. in Ω, che nei casi concreti si legge come un sistema di disuguaglianze e di uguaglianze. Ad esempio, nel caso in cui φ è la parte positiva e u è regolare, abbiamo: $\Delta u + g = 1$, $\Delta u + g = 0$ e $0 \le \Delta u + g \le 1$ q.o. rispettivamente negli insiemi in cui $u > 0$, $u < 0$ e $u = 0$.

Veniamo all'esistenza, che ancora possiamo cercare di ottenere tentando di minimizzare il funzionale (12.16), nella definizione del quale dobbiamo leggere $+\infty$ per le funzioni $v \in H^1_0(\Omega)$ tali che $\varphi(v) \notin L^1(\Omega)$, in particolare per le funzioni $v \in H^1_0(\Omega)$ che non verificano il vincolo $v(x) \in D(\varphi)$ su un insieme di misura positiva, cioè nello spirito della (12.11). Ora, la ricerca del minimo non offre problemi: se $\varphi \ge 0$ si ragiona esattamente come sopra; in caso contrario, come evidenziato nella dimostrazione della Proposizione 12.22, abbiamo $\varphi \ge P$ per un certo polinomio di grado ≤ 1 e il discorso si adatta facilmente (il polinomio P, se rema contro la coercività, non è peggio del termine lineare già presente). Occorre allora vedere che, se u è un punto di minimo per ψ, allora esiste $\xi \in L^2(\Omega)$ tale che la coppia (u, ξ) risolva le (12.17). Vediamo come questa strategia offra qualche ostacolo. Per vedere più chiaramente come vanno le cose, conviene porre $V = H^1_0(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$ e introdurre la terna hilbertiana (V, H, V^*). A tale proposito ricordiamo la Definizione IV.5.5 e le notazioni (IV.5.3). Restando inteso che la norma in V è data da $\|\cdot\| = \|\nabla(\cdot)\|_2$ come detto sopra, il prodotto scalare corrispondente $(\!(\cdot\,,\cdot)\!)$ è definito da $(\!(w, z)\!) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla z \, dx$ per $w, z \in V$. Inoltre introduciamo il funzionale, che qui chiamiamo f, definito su H tramite la (12.11). Siccome u è punto di minimo, si ha $\varphi(u) \in L^1(\Omega)$. Siano $v \in V$ tale che $\varphi(v) \in L^1(\Omega)$ e $t \in (0,1)$. Allora $\varphi(u + t(v-u)) \in L^1(\Omega)$ e risulta

$$f(u) + \frac{1}{2}\|u\|^2 - (g, u) \le f(u + t(v-u)) + \frac{1}{2}\|u + t(v-u)\|^2 - (g, u + t(v-u)).$$

Usando la convessità di f che discende da quella di φ deduciamo

$$\begin{aligned} &f(u) + \frac{1}{2}\|u\|^2 - (g, u) \\ &\le f(u) + t(f(v) - f(u)) + \frac{1}{2}\|u\|^2 + t(\!(u, v-u)\!) + \frac{t^2}{2}\|v-u\|^2 - (g, u) - t(g, v-u). \end{aligned}$$

Semplificando, dividendo per t e riordinando, otteniamo

$$f(u) - (\!(u, v-u)\!) + (g, v-u) \le f(v) \quad \text{cioè} \quad f(u) + \langle -\mathcal{R}u + g, v-u \rangle \le f(v)$$

ove $\mathcal{R} : V \to V^*$ è l'operatore di Riesz associato al prodotto scalare $(\!(\cdot\,,\cdot)\!)$. Tutto ciò vale dunque per ogni $v \in V$ tale che $\varphi(v) \in L^1(\Omega)$, quindi anche per ogni $v \in V$. Ora la disuguaglianza ottenuta non coincide con le (12.17): per avere qualcosa di simile all'equazione dobbiamo scegliere $\xi = -\mathcal{R}u + g$, che è un elemento di V^* e non di H. Tuttavia, se tale ξ appartiene ad H, allora la disuguaglianza in questione diventa $f(u) + (\xi, v-u) \le f(v)$ per ogni $v \in V$ e sembra ragionevole la possibilità di estenderla a ogni $v \in H$. Segue allora $\xi \in \partial f(u)$ e quindi $\xi \in \varphi(u)$ q.o. in Ω per la Proposizione 12.22, così che (u, ξ) risolve le (12.17). Notiamo che la richiesta $-\mathcal{R}u + g \in H$ coincide con $\mathcal{R}u \in H$, il che significa che esiste in $L^2(\Omega)$ il laplaciano debole $-\Delta u$ di u, e non è chiaro come la via seguita possa portare a soddisfare questa condizione.

Dunque non è ovvio come superare gli ostacoli trovati, per cui diamo qualche indicazione su un'altra via possibile, quella dell'approssimazione. Supponendo senz'altro $\varphi \ge 0$ e $\varphi(0) = 0$, immaginiamo di approssimare φ con una funzione φ_ε, dipendente dal parametro positivo ε, ancora convessa, non negativa e con $\varphi_\varepsilon(0)=0$, ma anche ovunque definita, regolare e con derivata lipschitziana. Posto $h_\varepsilon=\varphi'_\varepsilon$, siamo nelle condizioni favorevoli (12.15), per cui il problema ottenuto scrivendo h_ε anziché h nella (12.14) ha una e una sola soluzione, che denotiamo con u_ε. Lasciamo variare ε negli elementi di una successione positiva infinitesima, ad esempio $\varepsilon=1/n$ con n intero positivo, ma continuiamo a usare la notazione ε per semplicità. Scegliendo $v=u_\varepsilon$ e $v=h_\varepsilon(u_\varepsilon)$ (che effettivamente appartiene ad $H^1_0(\Omega)$ come si può dimostrare), otteniamo rispettivamente

$$\|u_\varepsilon\|^2+\int_\Omega h_\varepsilon(u_\varepsilon)\,u_\varepsilon\,dx=\int_\Omega gu_\varepsilon\,dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega h'_\varepsilon(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx+\|h_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_2^2=\int_\Omega g\,h_\varepsilon(u_\varepsilon)\,dx.$$

Ma gli integrali ai primi membri sono non negativi in quanto $h_\varepsilon(r)\,r\ge 0$ e $h'_\varepsilon(r)\ge 0$ per ogni $r\in\mathbb{R}$. Allora li eliminiamo e otteniamo due disuguaglianze. Maggiornado i secondi membri con la disuguaglianza di Schwarz, concludiamo che le due successioni $\{u_\varepsilon\}$ e $\{\xi_\varepsilon\}$, ove abbiamo posto per comodità $\xi_\varepsilon=h_\varepsilon(u_\varepsilon)$, sono limitate in $H^1_0(\Omega)$ e in $L^2(\Omega)$ rispettivamente. Usando il Teorema di compattezza debole, con due estrazioni successive, ci riconduciamo alle convergenze deboli

$$u_\varepsilon\rightharpoonup u \quad \text{in } H^1_0(\Omega) \quad \text{e} \quad \xi_\varepsilon\rightharpoonup\xi \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

per certi $u\in H^1_0(\Omega)$ e $\xi\in L^2(\Omega)$, ove resta inteso che ora ε varia fra gli elementi di una successione estratta da quella fissata all'inizio. Vediamo come si possa cercare di dimostrare che la coppia (u,ξ) verifica tutte le condizioni (12.17). Le prime due valgono e l'ultima, cioè l'equazione variazionale, segue immediatamente dall'analoga valida per $(u_\varepsilon,\xi_\varepsilon)$ e dalle convergenze deboli. Resta da vedere che $\xi\in\partial\varphi(u)$ e qui l'ambiente deve essere proprio $L^2(\Omega)$, non $H^1_0(\Omega)$, dato che intendiamo usare la Proposizione 12.22. Fissiamo dunque $v\in L^2(\Omega)$. Siccome $\xi_\varepsilon=h_\varepsilon(u_\varepsilon)=\varphi'_\varepsilon(u_\varepsilon)\in\partial\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ q.o. in Ω, abbiamo

$$\int_\Omega\varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)\,dx+\int_\Omega\xi_\varepsilon(v-u_\varepsilon)\,dx\le\int_\Omega\varphi_\varepsilon(v)\,dx.$$

Ora vorremmo passare al limite e ottenere

$$\int_\Omega\varphi(u)\,dx+\int_\Omega\xi(v-u)\,dx\le\int_\Omega\varphi(v)\,dx. \tag{12.18}$$

Un punto spinoso è la verifica seguente:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\xi_\varepsilon u_\varepsilon\,dx=\int_\Omega\xi u\,dx. \tag{12.19}$$

A tale scopo dimostriamo che u_ε tende a u fortemente in $L^2(\Omega)$ almeno per una sottosuccessione ulteriormente estratta, usando il Teorema IV.3.20 di Rellich-Kondrachov. Infatti $\{u_\varepsilon\}$ è limitata in $H^1_0(\Omega)$ e Ω è limitato (se pretendiamo il teorema per $H^1_0(\Omega)$ anziché per $H^1(\Omega)$ l'ipotesi di regolarità su Ω non è necessaria), per cui, per una sottosuccessione opportuna e un certo $w\in L^2(\Omega)$, abbiamo $u_\varepsilon\to w$ in $L^2(\Omega)$ e q.o. in Ω. Ma allora u_ε converge debolmente in $L^2(\Omega)$ sia a u sia a w, per cui $w=u$ e vale la convergenza forte $u_\varepsilon\to u$. Usando ancora la notazione $(\cdot,\cdot)$ per il prodotto scalare di $L^2(\Omega)$, dalla convergenza forte deduciamo

$$|(\xi_\varepsilon,u_\varepsilon)-(\xi,u)|\le|(\xi_\varepsilon,u_\varepsilon-u)|+|(\xi_\varepsilon-\xi,u)|\le M\|u_\varepsilon-u\|_2+|(\xi_\varepsilon-\xi,u)|$$

ove M è una costante che maggiora $\|\xi_\varepsilon\|_2$ per ogni ε, da cui la (12.19). Supponiamo ora che l'approssimazione φ_ε di φ verifichi le condizioni seguenti:

$$r_\varepsilon\to r \quad \text{implichi} \quad \varphi(r)\le\liminf_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(r_\varepsilon) \quad \text{e} \quad \varphi_\varepsilon(r)\le\varphi(r) \quad \text{per ogni } r\in\mathbb{R}. \tag{12.20}$$

Osserviamo che, pur di estrarre ulteriormente, vale la convergenza $u_\varepsilon \to u$ q.o. in Ω. Allora dalla prima delle (12.20) deduciamo che $\varphi(u(x)) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon(x))$ q.o. in Ω. Usando anche il Lemma di Fatou, abbiamo allora

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \varphi(u)\,dx + (\xi, v-u) \leq \int_\Omega \liminf_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)\,dx + (\xi, v) - (\xi, u) \\
&\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}(\xi_\varepsilon, v) - \lim_{\varepsilon\to 0}(\xi_\varepsilon, u_\varepsilon) \\
&= \liminf_{\varepsilon\to 0}\Bigl(\int_\Omega \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon)\,dx + (\xi_\varepsilon, v) - (\xi_\varepsilon, u_\varepsilon)\Bigr) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \varphi_\varepsilon(v)\,dx \leq \int_\Omega \varphi(v)\,dx.
\end{aligned}$$

Dunque la (12.18) è dimostrata e la Proposizione 12.22 assicura che $\xi \in \partial\varphi(u)$ q.o. in Ω.

Per quanto riguarda le (12.20), presentiamo due esempi: per ciascuno dei due, accanto alla definizione di φ, diamo una scelta di φ_ε che realizza le condizioni (12.20) appunto.

$$\varphi(r) = \cosh r - 1 \quad (\text{da cui } \varphi'(r) = \sinh r) \quad \text{e} \quad \varphi_\varepsilon(r) = \int_0^r \frac{\sinh s}{1+\varepsilon\sinh s}\,ds \tag{12.21}$$

$$\varphi(r) = I_{(-\infty,0]}(r) \quad \text{e} \quad \varphi_\varepsilon(r) = \frac{1}{2\varepsilon}\,(r^+)^2 = \int_0^r \frac{s^+}{\varepsilon}\,ds \quad \text{ove } (\,\cdot\,)^+ \text{ è la parte positiva.} \tag{12.22}$$

Si noti, nella seconda, il legame con la regolarizzata di Yosida di $\partial\varphi$ cui accenneremo tra breve. □

Ora torniamo a considerazioni di carattere generale. Dimostriamo un risultato molto semplice, che generalizza il fatto che la derivata f' è una funzione non decrescente se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione convessa differenziabile. Questa condizione, infatti, si può riscrivere come segue

$$(f'(x) - f'(y))(x-y) \geq 0 \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}$$

cioè in termini di prodotti di incrementi anziché di quozienti.

12.24. Proposizione. *Siano V uno spazio normato e $f: V \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa propria s.c.i. Allora il suo sottodifferenziale verifica la seguente condizione di monotonia*

$$\langle \xi - \eta, x - y\rangle \geq 0 \quad \textit{per ogni } x, y \in V\,,\ \xi \in \partial f(x) \textit{ e } \eta \in \partial f(y)\,. \;\square \tag{12.23}$$

Dimostrazione. Siano infatti x, y, ξ, η come specificato nella (12.23). Allora

$$f(x) + \langle \xi, y-x\rangle \leq f(y) \quad \text{e} \quad f(y) + \langle \eta, x-y\rangle \leq f(x).$$

Sommando membro a membro e riordinando si ottiene la (12.23). □

12.25. Definizione. *Sia V uno spazio normato. Una funzione $A: V \to 2^{V^*}$ è detta operatore monotono quando*

$$\langle \xi - \eta, x - y\rangle \geq 0 \quad \textit{per ogni } x, y \in V\,,\ \xi \in A(x) \textit{ e } \eta \in A(y)\,. \tag{12.24}$$

Il grafico di A è l'insieme $G(A) = \{(x,\xi) \in V \times V^* :\ \xi \in A(x)\}$. □

Il risultato che segue e che diamo solo nel caso hilbertiano generalizza quanto detto all'inizio del paragrafo circa la derivata di una funzione convessa differenziabile. Si noti che esso implica immediatamente che $D(\partial f)$ non è vuoto se f è anche s.c.i.: basta infatti applicare il teorema, ad esempio, con $z = 0$. Ma il corollario che seguirà dice molto di più, dato che esso lascia intuire che il grafico di un sottodifferenziale è un insieme molto ricco.

12.26. Teorema. *Siano H uno spazio di Hilbert reale, identificato al suo duale H^* tramite la mappa di Riesz $\mathcal{R}$, e $f : H \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa propria s.c.i. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ e $z \in H$, esiste una e una sola coppia $(x, \xi) \in H \times H$ tale che*

$$\varepsilon x + \xi = z \quad \text{e} \quad \xi \in \partial f(x). \tag{12.25}$$

Inoltre questa dipende con continuità da z nel senso seguente

$$\|x_1 - x_2\| \le \frac{1}{\varepsilon}\,\|z_1 - z_2\| \quad \text{e} \quad \|\xi_1 - \xi_2\| \le \|z_1 - z_2\| \quad \text{per ogni } z_1, z_2 \in H \tag{12.26}$$

ove (x_i, ξ_i) è la coppia corrispondente a z_i per $i = 1, 2$. □

Dimostrazione. Nel caso $H = \mathbb{R}$ e f anche differenziabile, la (12.25) si riscriverebbe $f'(x) + \varepsilon x - z = 0$ e sarebbe soddisfatta dall'eventuale punto di minimo della funzione $x \mapsto f(x) + (\varepsilon/2)x^2 - xz$. Consideriamo allora la funzione

$$\varphi : H \to (-\infty, +\infty] \quad \text{definita da} \quad \varphi(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,\|x\|^2 - (x, z)$$

e dimostriamo che essa ha minimo. La funzione $x \mapsto \|x\|^2$, $x \in H$, è convessa per l'Esercizio 11.5. Dunque anche φ è convessa, data la convessità di f e la linearità dell'ultimo contributo. Inoltre φ è s.c.i. in quanto somma di tre funzioni s.c.i. e propria dato che f lo è. Scelti infine $\xi \in H^*$ e $c \in \mathbb{R}$ dati dal Lemma 11.8, otteniamo per ogni $x \in H$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\ge \langle \xi, x\rangle + c + \frac{\varepsilon}{2}\,\|x\|^2 - (x, z) = \frac{\varepsilon}{2}\,\|x\|^2 + (\xi - z, x) + c \\ &\ge \frac{\varepsilon}{2}\,\|x\|^2 - \|\xi - z\|\,\|x\| + c \end{aligned}$$

e deduciamo che φ è anche coerciva. Applicando il Teorema 11.10, concludiamo che esiste un punto $x \in H$ di minimo per φ. Dimostriamo che, posto $\xi = z - \varepsilon x$, la coppia (x, ξ) verifica le (12.25). La prima è soddisfatta per costruzione e ora verifichiamo che $\xi \in \partial f(x)$. A tale scopo conviene applicare la Proposizione 12.18 prendendo come f la funzione

$$\lambda : y \mapsto \frac{\varepsilon}{2}\,\|y\|^2 - (z, y), \quad y \in H$$

e come g l'attuale funzione f. L'Esempio 12.19, applicato con $\varphi = \mathcal{R}z$ e con la sola variante del fattore ε, fornisce la derivata di Gâteaux di λ: $\lambda'(y) = \varepsilon\mathcal{R}y - \varphi = \mathcal{R}(\varepsilon y - z)$. Siccome stiamo identificando H^* con H tramite $\mathcal{R}$, ciò significa $\lambda'(y) = \varepsilon y - z$. Essendo x di minimo per f, concludiamo che $-\lambda'(x) \in \partial f(x)$, vale a dire $-(\varepsilon x - z) \in \partial f(x)$, cioè appunto $\xi = z - \varepsilon x \in \partial f(x)$.

Dimostriamo ora sia l'unicità sia la (12.26) controllando che, assegnati comunque $z_1, z_2 \in H$, la (12.26) vale se (x_i, ξ_i) è una coppia qualunque di elementi di H che verifica la (12.25) con $z = z_i$. L'applicazione di ciò al caso $z_1 = z_2$ fornisce in particolare l'unicità. Siano dunque z_i, x_i, ξ_i come appena specificato. Allora risulta

$$\varepsilon(x_1 - x_2) + (\xi_1 - \xi_2) = z_1 - z_2\,, \quad \xi_1 \in \partial f(x_1) \quad \text{e} \quad \xi_2 \in \partial f(x_2).$$

Moltiplicando scalarmente per $x_1 - x_2$ oppure per $\xi_1 - \xi_2$ otteniamo

$$\begin{aligned} &\varepsilon\|x_1 - x_2\|^2 + (\xi_1 - \xi_2, x_1 - x_2) = (z_1 - z_2, x_1 - x_2) \\ &\varepsilon(\xi_1 - \xi_2, x_1 - x_2) + \|\xi_1 - \xi_2\|^2 = (\xi_1 - \xi_2, z_1 - z_2). \end{aligned}$$

Siccome $(\xi_1 - \xi_2, x_1 - x_2) \ge 0$ per la Proposizione 12.24, deduciamo rispettivamente

$$\begin{aligned} &\varepsilon\|x_1 - x_2\|^2 \le (z_1 - z_2, x_1 - x_2) \le \|z_1 - z_2\|\,\|x_1 - x_2\| \\ &\|\xi_1 - \xi_2\|^2 \le (\xi_1 - \xi_2, z_1 - z_2) \le \|z_1 - z_2\|\,\|\xi_1 - \xi_2\| \end{aligned}$$

e le (12.26) seguono immediatamente. □

12.27. Osservazione. L'analogo enunciato per spazi di Banach vale se V è uno spazio riflessivo strettamente convesso con il suo duale e si ottiene rimpiazzando la (12.25) con le condizioni seguenti

$$\varepsilon\mathcal{F}(x) + \xi = z \quad \text{e} \quad \xi \in \partial f(x)$$

ove $\mathcal{F} : V \to V^*$ è l'applicazione di dualità di V. Ora z appartiene a V^* anziché a V.

12.28. Osservazione. Più in generale si può considerare l'equazione $\alpha x + \beta\xi = z$ in sostituzione della prima delle (12.25) con $\alpha, \beta > 0$ assegnati (si prende $\varepsilon = \alpha/\beta$ e si rimpiazza z con z/β allo stesso tempo) e il caso particolare importante è quello dell'equazione $x + \varepsilon\xi = z$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $z \in H$ esiste una e una sola coppia $(x, \xi) \in H \times H$ tale che $x + \varepsilon\xi = z$ e $\xi \in \partial f(x)$. Possiamo allora considerare l'applicazione $A_\varepsilon : H \to H$ che a ogni $z \in H$ associa $(z - x)/\varepsilon$, ove x è costruito come detto. Tale applicazione è detta *regolarizzata di Yosida di* ∂f e costituisce un'ottima approssimazione di ∂f. Ciò è vero in generale (pur di precisare il significato delle parole) e la cosa è chiara nei casi particolari. Ad esempio, nel caso $V = \mathbb{R}$, prendiamo come f l'indicatrice di $(-\infty, 0]$, per cui $\partial f(x) = \{0\}$ se $x < 0$, $\partial f(0) = [0, +\infty)$ e $\partial f(x) = \emptyset$ se $x > 0$. Allora, se $z \le 0$ o $z > 0$, la coppia (x, ξ) di cui sopra è $(z, 0)$ o $(0, z/\varepsilon)$ rispettivamente, per cui $(z - x)/\varepsilon$ vale 0 o z/ε nei due casi. Abbiamo pertanto $A_\varepsilon(z) = z^+/\varepsilon$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, ed è chiaro come la funzione A_ε approssimi ∂f regolarizzandolo. Si noti che la sua primitiva nulla in 0 approssima proprio la funzione f di partenza (si colleghi con la (12.22), come anticipato). La regolarizzazione di Yosida (le cui proprietà sono ben note e che in forma opportuna e complicata si estende al caso degli spazi di Banach riflessivi) è particolarmente utile in problemi che fanno intervenire sottodifferenziali irregolari: il problema che si ottiene sostituendo il sottodifferenziale con la sua regolarizzata, infatti, suona come un problema che contemporaneamente approssima quello di partenza ed è più facilmente risolubile in quanto più regolare. □

L'altra conseguenza importante del Teorema 12.26 è il corollario che dimostriamo di seguito nel caso hilbertiano e che pure ha un'opportuna estensione al caso degli spazi di Banach riflessivi.

12.29. Corollario. *Siano H uno spazio di Hilbert e $f : H \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa propria s.c.i. Allora ∂f è massimale fra gli operatori $A : H \to 2^H$ monotoni, l'ordinamento rispetto al quale vale la condizione di massimalità essendo quello dell'inclusione dei grafici.* □

Dimostrazione. Sia $A : H \to 2^H$ un operatore monotono il cui grafico include quello di ∂f. Dobbiamo dimostrare che $A = \partial f$. Siano dunque $x_0 \in H$ e $y_0 \in A(x_0)$: dimostriamo che $y_0 \in \partial f(x_0)$. A tal fine risolviamo la (12.25) con $\varepsilon = 1$ e $z = x_0 + y_0$: troviamo $(x, \xi) \in H \times H$ tale che $x + \xi = x_0 + y_0$ e $\xi \in \partial f(x)$. Siccome $(x, \xi) \in G(\partial f)$, segue che $(x, \xi) \in G(A)$, cioè che $\xi \in A(x)$. Siccome $x_0 - x = \xi - y_0$ e A è monotono, deduciamo che

$$-\|x - x_0\|^2 = (\xi - y_0, x - x_0) \ge 0 \quad \text{da cui} \quad x = x_0 \,.$$

Segue allora anche $\xi = y_0$. Ma $\xi \in \partial f(x)$ per costruzione. Dunque $y_0 \in \partial f(x_0)$. □

12.30. Osservazione. Si può dimostrare che, se H è *monodimensionale*, ogni operatore massimale monotono $A : H \to 2^H$ è il sottodifferenziale di una funzione $f : H \to (-\infty, +\infty]$ convessa propria s.c.i. L'analoga affermazione per spazi di dimensione > 1 è, invece, falsa.

12.31. Osservazione. La nozione di sottodifferenziale (e più in generale quella di operatore massimale monotono) ha applicazioni importanti, ad esempio, nella teoria delle equazioni a derivate parziali. Infatti, prendendo come spazio ambiente uno spazio di Sobolev, diversi operatori a derivate parziali, lineari o meno, possono essere espressi in termini di sottodifferenziali. Così certe equazioni di evoluzione alle derivate parziali, lineari o meno, possono essere scritte nella forma

$$u'(t) + \xi(t) = 0 \quad \text{e} \quad \xi(t) \in \partial f(u(t)) \tag{12.27}$$

e un esempio lineare è l'equazione del tipo del calore (ove $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$, il laplaciano)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) + u(x,t) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, +\infty) \tag{12.28}$$

della quale si cercano soluzioni $u : (0, +\infty) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ di classe C^1 secondo una definizione opportuna di C^1. Con le notazioni dell'Esempio 12.21 con $V = H^1(\mathbb{R}^d)$ e $H = L^2(\mathbb{R}^d)$, l'equazione (12.27) diventa infatti

$$(u'(t), v) + (\!(u(t), v(t))\!) = 0 \quad \text{per ogni } v \in V \quad \text{cioè}$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} u'v\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} uv\,dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in H^1(\mathbb{R}^d)$$

che è una versione generalizzata della (12.28).

Notiamo che il corrispondente problema di Cauchy $u(0) = u_0$ può essere risolto anche in ambito astratto. Ad esempio, se lo si discretizza mediante un metodo di Eulero implicito, si ottiene una sequenza di problemi “stazionari” della forma

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + \xi_{n+1} = 0 \quad \text{e} \quad \xi_{n+1} \in \partial f(u_{n+1})$$

ove τ è il passo di discretizzazione e u_n dovrà essere un'approssimazione di $u(n\tau)$. Ora l'uguaglianza precedente si riscrive come

$$\varepsilon u_{n+1} + \xi_{n+1} = \varepsilon u_n \quad \text{ove} \quad \varepsilon = 1/\tau$$

per cui tali problemi possono essere risolti l'uno dopo l'altro, grazie al Teorema 12.26. Naturalmente questo è solo il primo passo di una possibile strategia verso un teorema di esistenza oppure un metodo di approssimazione della soluzione se si sa già che il problema di Cauchy è ben posto.

Capitolo 6
Spazi riflessivi

Nel capitolo precedente abbiamo incontrato spesso l'ipotesi di riflessività. In questo capitolo trattiamo la questione in dettaglio. Ricordiamo che la definizione di isomorfismo canonico e quella di spazio riflessivo sono state date nella Definizione V.4.1.

1. Classi di spazi riflessivi

Questo paragrafo riguarda essenzialmente condizioni sufficienti per la riflessività. Resta inteso che J denota l'isomorfismo canonico dello spazio considerato di volta in volta.

1.1. Teorema. *Ogni spazio normato V di dimensione finita è riflessivo.* □

Dimostrazione. Si ha $\dim J(V) = \dim V$ e $J(V)$ è un sottospazio di V^{**}. D'altra parte si ha anche $\dim V^* = \dim V$ per l'Esempio III.3.1, per cui $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. Segue $\dim J(V) = \dim V^{**}$ e quindi che $J(V) = V^{**}$. □

1.2. Teorema. *Ogni spazio di Hilbert è riflessivo.* □

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso reale. Siano H lo spazio in esame e $\mathcal{R} : H \to H^*$ il corrispondente isomorfismo di Riesz, che, lo ricordiamo, rende vera l'uguaglianza $\langle \mathcal{R}x, y\rangle = (x, y)$ per ogni $x, y \in H$. Osservato che $\mathcal{R}^{-1} : H^* \to H$ è pure un isomorfismo, deduciamo, grazie al Teorema V.8.10, che anche $(\mathcal{R}^{-1})^* : H^* \to H^{**}$ è un isomorfismo. Dunque il teorema resta dimostrato se riusciamo a provare che $(\mathcal{R}^{-1})^*\mathcal{R}$ coincide con l'isomorfismo canonico J di H. Siano dunque $x \in H$ e $f \in H^*$. Si ha

$$\langle (\mathcal{R}^{-1})^*\mathcal{R}x, f\rangle = \langle \mathcal{R}x, \mathcal{R}^{-1}f\rangle = (x, \mathcal{R}^{-1}f) = (\mathcal{R}^{-1}f, x) = \langle \mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}f, x\rangle = \langle f, x\rangle = \langle Jx, f\rangle$$

e la dimostrazione del caso reale è conclusa. Il caso complesso procede allo stesso modo: l'operatore $\mathcal{R}$ di Riesz però è ora un anti-isomorfismo. Occorre allora dimostrare l'analogo del Teorema V.8.10 nel caso degli anti-isomorfismi. Tuttavia non ci sono difficoltà ad apportare queste modifiche. □

1.3. Teorema. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Se $1 < p < +\infty$, allora lo spazio $L^p(\Omega)$ è riflessivo.* □

Dimostrazione. Sia $q = p'$, l'esponente coniugato di p. Allora $p < +\infty$ e $q < +\infty$ e il Teorema III.3.4 di Riesz vale per entrambi gli spazi $L^p(\Omega)$ e $L^q(\Omega)$. Possiamo allora considerare i corrispondenti isomorfismi di Riesz $\mathcal{R}_p : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ e $\mathcal{R}_q : L^p(\Omega) \to (L^q(\Omega))^*$ (cfr. (III.3.3)). Grazie al Teorema V.8.10, è un isomorfismo anche l'operatore $(\mathcal{R}_p^{-1})^* : (L^q(\Omega))^* \to (L^p(\Omega))^{**}$. Allora, come nella dimostrazione precedente, tutto si riduce a dimostrare che la composizione $(\mathcal{R}_p^{-1})^*\mathcal{R}_q$ coincide con l'isomorfismo canonico J_p di $L^p(\Omega)$. Siano dunque $u \in L^p(\Omega)$ e $f \in (L^p(\Omega))^*$. Si ha

$$\langle (\mathcal{R}_p^{-1})^*\mathcal{R}_q u, f\rangle = \langle \mathcal{R}_q u, \mathcal{R}_p^{-1}f\rangle = \int_\Omega u\,(\mathcal{R}_p^{-1}f)\,d\mu = \int_\Omega (\mathcal{R}_p^{-1}f)\,u\,d\mu = \langle \mathcal{R}_p\mathcal{R}_p^{-1}f, u\rangle = \langle f, u\rangle = \langle J_p u, f\rangle$$

e la dimostrazione è conclusa. □

1.4. Osservazione. I casi $p = 1$ e $p = \infty$, esclusi dal teorema precedente, sono davvero eccezionali (vedi (V.11.10)). Una dimostrazione semplice di questo fatto utilizza un risultato successivo per cui ritorneremo sulla questione più avanti. □

Non possiamo tacere una condizione legata alla riflessività, l'uniforme convessità, che definiamo di seguito. Questa è poi di notevole importanza in varie questioni di Analisi Funzionale.

1.5. Definizione. *Uno spazio normato* $(V, \|\cdot\|)$ *è uniformemente convesso quando per ogni* $\varepsilon \in (0, 2]$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che valga l'implicazione*

$$\textit{da} \quad \|x\| \le 1, \quad \|y\| \le 1 \quad \textit{e} \quad \|x - y\| \ge \varepsilon \quad \textit{segue} \quad \|(x + y)/2\| \le 1 - \delta. \ \square \tag{1.1}$$

Nella definizione si è supposto $\varepsilon \le 2$ altrimenti non vi sono punti x e y che verificano le ipotesi dell'implicazione (1.1).

1.6. Osservazione. Le nozioni di stretta convessità, uniforme convessità e riflessività sono legate fra loro e a varie questioni di Analisi Funzionale e conviene dire almeno due parole in proposito.

i) Ogni spazio uniformemente convesso è strettamente convesso (vedi Definizione V.3.3), ma l'uniforme convessità dice qualcosa di più della stretta convessità: se due punti del bordo della palla unitaria sono distinti, non solo la loro media è un punto interno, ma si riesce anche a dare una stima di quanto questa sia interna in funzione della sola distanza dei due punti considerati, indipendentemente dalla loro posizione. Si intuisce che i due concetti coincidono al più in dimensione finita e a questo proposito si vedano l'esercizio e l'esempio dati di seguito. Inoltre, come la stretta convessità, così l'uniforme convessità è una proprietà della norma specifica e non dello spazio topologico normabile, come subito si vede considerando il caso $V = \mathbb{R}^2$.

ii) In base al Teorema V.3.4 di Asplund, se uno spazio di Banach è riflessivo, allora si può cambiare la sua norma in una equivalente in modo che sia il nuovo spazio normato ottenuto sia il suo duale (con la norma duale corrispondente) siano strettamente convessi.

iii) Le proprietà di regolarità della mappa di dualità, sulla quale abbiamo detto qualcosa nel Paragrafo V.3, dipendono da proprietà di stretta convessità dello spazio o del suo duale e migliorano in ipotesi di tipo uniforme convessità.

1.7. *Esercizio.* Si dimostri che ogni spazio normato strettamente convesso di dimensione finita è uniformemente convesso.

1.8. Esempio. Costruiamo una norma in ℓ^2 che rende lo spazio strettamente convesso ma non uniformemente convesso. Usiamo le notazioni $\|\cdot\|_2$ per la norma usuale in ℓ^2 e $|\cdot|_p$ per la norma (I.5.17) in $\mathbb{K}^2$: $|z|_p = (|z_1|^p + |z_2|^p)^{1/p}$ per $z \in \mathbb{K}^2$. Osservato preliminarmente che $|z|_p \le 2^{1/p}|z|_2$ e $|z|_2 \le 2^{1/2}|z|_p$ per ogni $z \in \mathbb{K}^2$, vediamo che la norma $\|\cdot\|$ che ci accingiamo a definire è effettivamente ben definita in ℓ^2 e addirittura equivalente alla norma $\|\cdot\|_2$. Fissiamo una successione $\{p_k\}$ di numeri reali > 1 convergente a 1 e definiamo la norma $\|\cdot\|$ mediante

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x_{2k-1}, x_{2k})|_{p_k}^2 \quad \text{per } x \in \ell^2 .$$

Dimostriamo che ℓ^2 con tale norma è strettamente convesso ma non uniformemente convesso. Per la stretta convessità ricorriamo all'Osservazione V.3.9. Siano dunque $x, y \in \ell^2$ non nulli tali che $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$: dobbiamo dimostrare che $x = \lambda y$ per un certo $\lambda > 0$. Per $k \ge 1$ poniamo $\xi_k = (x_{2k-1}, x_{2k})$ e $\eta_k = (y_{2k-1}, y_{2k})$ così che $\|x\| = \|\{|\xi_k|_{p_k}\}\|_2$ e $\|y\| = \|\{|\eta_k|_{p_k}\}\|_2$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \|x\| + \|y\| = \|x + y\| = \|\{|\xi_k + \eta_k|_{p_k}\}\|_2 &\le \|\{|\xi_k|_{p_k}\} + \{|\eta_k|_{p_k}\}\|_2 \\ &\le \|\{|\xi_k|_{p_k}\}\|_2 + \|\{|\eta_k|_{p_k}\}\|_2 = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Deduciamo che le due disuguaglianze della catena sono uguaglianze e otteniamo le uguaglianze

$$|\xi_k + \eta_k|_{p_k} = |\xi_k|_{p_k} + |\eta_k|_{p_k} \quad \text{per ogni } k \quad \text{e} \quad \|\{|\xi_k|_{p_k}\} + \{|\eta_k|_{p_k}\}\|_2 = \|\{|\xi_k|_{p_k}\}\|_2 \tag{1.2}$$

solo la prima delle quali merita un commento. Essa segue dall'uguaglianza derivata dalla prima disuguaglianza della catena tenendo conto che $|\xi_k + \eta_k|_{p_k} \le |\xi_k|_{p_k} + |\eta_k|_{p_k}$ per ogni k per cui anche una sola disuguaglianza stretta al posto dell'uguaglianza in (1.2) porterebbe a una contraddizione. Usiamo sia la stretta convessità di ℓ^2 con la norma hilbertiana $\|\cdot\|_2$ sia quella di $\mathbb{K}^2$ con la norma $|\cdot|_{p_k}$ (di facile verifica dato che $p_k > 1$). Siccome nessuna delle successioni $\{|\xi_k|_{p_k}\}$ e $\{|\eta_k|_{p_k}\}$ è la successione nulla di ℓ^2, otteniamo $\{|\xi_k|_{p_k}\} = \lambda\{|\eta_k|_{p_k}\}$ per un certo $\lambda > 0$, vale a dire $|\xi_k|_{p_k} = \lambda|\eta_k|_{p_k}$ per ogni k. D'altro canto, se $\xi_k \neq (0,0)$ e $\eta_k \neq (0,0)$, si deve avere $\xi_k = \lambda_k \eta_k$ per un certo $\lambda_k > 0$, da cui anche $|\xi_k|_{p_k} = \lambda_k|\eta_k|_{p_k}$ e il confronto con quanto appena scritto sopra implica $\lambda_k = \lambda$. Dunque $\xi_k = \lambda\eta_k$ per i k tali che ξ_k e λ_k non siano nulli. Ma l'uguaglianza $|\xi_k|_{p_k} = \lambda|\eta_k|_{p_k}$, valida comunque, implica che l'annullamento di uno dei due vettori equivale a quello dell'altro, per cui resta vero che $\xi_k = \lambda\eta_k$. Abbiamo pertanto $\xi_k = \lambda\eta_k$ per ogni k da cui immediatamente $x_k = \lambda y_k$ per ogni k e quindi $x = \lambda y$.

Più facile è vedere che lo spazio non è uniformemente convesso. Si prendano infatti i due vettori $x = e_{2n-1}$ e $y = e_{2n}$ della base canonica di ℓ^2 ove $n \geq 1$ è arbitrario. Allora $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| = \|x + y\| = 2^{p_n}$. Siccome $2^{p_n} \geq 1$ per ogni n e $\lim_{n\to\infty} 2^{p_n} = 2$, segue che $(\ell^2, \|\cdot\|)$ non è uniformemente convesso. □

Fondamentale è il risultato dato di seguito, che tuttavia enunciamo soltanto.

1.9. Teorema (di Milman). *Ogni spazio di Banach uniformemente convesso è riflessivo.* □

Recuperiamo di nuovo la riflessività degli spazi $L^p(\Omega)$ per $p \in (1, +\infty)$ e degli spazi di Hilbert per mezzo del Teorema di Milman, di quello dato di seguito, che pure soltanto enunciamo, e del risultato successivo.

1.10. Teorema (di Clarkson). *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $p \in (1, +\infty)$. Allora $L^p(\Omega)$ con la norma usuale è uniformemente convesso.* □

1.11. Proposizione. *Ogni spazio prehilbertiano è uniformemente convesso.* □

Dimostrazione. Siano x, y come in (1.1). Usando la regola del parallelogrammo si ottiene

$$\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2 \quad \text{da cui} \quad \|(x + y)/2\| \leq \sqrt{1 - (\varepsilon^2/4)}$$

e l'ultimo membro può essere scritto nella forma $1 - \delta$ con un certo $\delta > 0$. □

Terminiamo il paragrafo con una condizione (necessaria e) sufficiente per la convergenza forte valida negli spazi uniformemente convessi che generalizza la situazione della Proposizione IV.4.5 relativa agli spazi di Hilbert. Ciò naturalmente non stupisce, grazie alla Proposizione 1.11.

1.12. Proposizione. *Sia V uno spazio uniformemente convesso e si supponga che*

$$x_n \rightharpoonup x \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|. \tag{1.3}$$

Allora $x_n \to x$. □

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $\|x_n\| = \|x\| = 1$ e, per assurdo, supponiamo che $\{x_n\}$ non converga fortemente a x. Allora esistono $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tali che $\|x_{n_k} - x\| \geq \varepsilon$ per ogni k. Grazie all'ipotesi di uniforme convessità segue che $\|(x_{n_k} + x)/2\| \leq 1 - \delta$ per un certo $\delta > 0$ e per ogni k, da cui anche $\liminf_{k\to\infty} \|(x_{n_k} + x)/2\| \leq 1 - \delta$. D'altra parte $(x_{n_k} + x)/2 \rightharpoonup (x + x)/2 = x$. Tenendo conto della Proposizione V.2.12, deduciamo $1 = \|x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|(x_{n_k} + x)/2\| \leq 1 - \delta$, assurdo.

Consideriamo il caso generale. Se $x = 0$ la tesi è ovvia, per cui supponiamo $x \neq 0$. Abbinando le ipotesi (1.3) e la Proposizione V.2.12, otteniamo

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$$

da cui $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$. Allora $x_n \neq 0$ per n abbastanza grande. Poniamo $\lambda_n = 1/\|x_n\|$, $\lambda = 1/\|x\|$, $y_n = \lambda_n x_n$ e $y = \lambda x$ e verifichiamo che $y_n \rightharpoonup y$. Per ogni $f \in V^*$ si ha infatti

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, y_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \langle f, x_n \rangle = \lambda \langle f, x \rangle = \langle f, y \rangle$$

dato che $x_n \rightharpoonup x$ e $\lambda_n \to \lambda$. Siccome $\|y_n\| = \|y\| = 1$, per la prima parte della dimostrazione abbiamo che $y_n \to y$. Ma $x_n = y_n/\lambda_n$ e $x = y/\lambda$. Siccome $\{1/\lambda_n\}$ converge a $1/\lambda$, concludiamo che $x_n \to x$. □

1.13. Esempio. Si supponga $p \in (1, +\infty)$ e siano $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $\{h_n\}$ una successione infinitesima di elementi di $\mathbb{R}^d$. Per ogni n definiamo u_n mediante la formula $u_n(x) = u(x + h_n)$ e dimostriamo che $u_n \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ usando i risultati precedenti. Si ha immediatamente $\int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u|^p \, dx$ così che la seconda delle (1.3) è banalmente soddisfatta. Sia ora $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e si ponga $v_n(x) = v(x - h_n)$ per $x \in \mathbb{R}^d$. Allora, scelto $r > 0$ tale che $v(x) = 0$ per $|x| > r$ e supponendo senz'altro $|h_n| \le 1$, si ha $v(x) = v_n(x) = 0$ se $|x| > r + 1$ e

$$\int_{B_{r+1}(0)} u_n(x)\, v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_n(x)\, v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\, v(y - h_n)\, dy = \int_{B_{r+1}(0)} u(y)\, v_n(y)\, dy.$$

Ma $|v(y - h_n) - v(y)| \le |h_n| \, \|\nabla v\|_\infty$ per ogni y, per cui $v_n \to v$ in $L^q(B_{r+1}(0))$ ove $q = p'$. Per la disuguaglianza di Hölder deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_n(x)\, v(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{B_{r+1}(0)} u(y)\, v_n(y)\, dy = \int_{B_{r+1}(0)} u(x)\, v(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\, v(x)\, dx.$$

Quindi $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ grazie alla limitatezza di $\{u_n\}$ e alla densità di $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ in $L^q(\mathbb{R}^d)$ (vera perché $q < +\infty$). Concludiamo allora applicando il Teorema di Clarkson e la Proposizione 1.12. Ricordiamo però che la convergenza forte vale per ogni $p \in [1, +\infty)$ (Esempio V.4.11).

2. Costruzioni di spazi riflessivi

I prossimi risultati mostrano che, partendo da spazi riflessivi e costruendo nuovi spazi a partire da questi mediante le usuali procedure canoniche, si ottengono ancora spazi riflessivi. Conviene fissare una notazione che useremo sistematicamente

se V_α è uno spazio normato, il simbolo J_α denota l'iniezione canonica di V_α in V_α^{**} (2.1)

ove α è un simbolo qualunque, anche vuoto, e premettere un semplice lemma.

2.1. Lemma. *Se V_1 e V_2 sono spazi normati e $L \in \mathcal{L}(V_1; V_2)$, il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\quad L \quad} & V_2 \\ {\scriptstyle J_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J_2} \\ V_1^{**} & \xrightarrow[\quad L^{**} \quad]{} & V_2^{**} \end{array}$$

è commutativo. □

Dimostrazione. Per ogni $v_1 \in V_1$ e $f \in V_2^*$ si ha

$$\langle L^{**} J_1 v_1, f \rangle = \langle J_1 v_1, L^* f \rangle = \langle L^* f, v_1 \rangle = \langle f, L v_1 \rangle \quad \text{e} \quad \langle J_2 L v_1, f \rangle = \langle f, L v_1 \rangle$$

da cui la tesi. □

2.2. Teorema. *Se due spazi di Banach sono isomorfi, allora la riflessività di uno di essi implica la riflessività dell'altro.* □

Dimostrazione. Con le notazioni del lemma, si supponga che L sia un isomorfismo e che V_1 sia riflessivo. Per il lemma stesso abbiamo allora $J_2 = L^{**} \circ J_1 \circ L^{-1}$ e quindi J_2 è composizione di tre isomorfismi dato che anche L^{**} è un isomorfismo per il Teorema V.8.10 applicato prima a L e poi a L^*. □

Il prossimo risultato è già stato dimostrato (vedi Teorema V.7.1). Ne richiamiamo l'enunciato in modo da riunirlo agli altri sull'argomento e ne deriviamo alcune conseguenze importanti.

2.3. Teorema. *Se V è riflessivo, ogni suo sottospazio chiuso V_0 è riflessivo.* □

2.4. Corollario. *Uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se è riflessivo il suo duale.* □

Dimostrazione. Supponiamo V riflessivo e denotiamo con J e con J_* l'iniezione canonica di V e quella di V^* rispettivamente. Per ipotesi $J : V \to V^{**}$ è un isomorfismo. Grazie al Teorema V.8.10, è un isomorfismo anche l'operatore $(J^{-1})^* : V^* \to V^{***}$. La riflessività di V^* segue allora immediatamente se dimostriamo che $(J^{-1})^*$ coincide con J_*. Ma ciò è immediato. Per ogni $f \in V^*$ e $F \in V^{**}$ si ha infatti

$$\langle (J^{-1})^* f, F\rangle = \langle f, J^{-1}F\rangle = \langle JJ^{-1}F, f\rangle = \langle F, f\rangle = \langle J_* f, F\rangle.$$

Viceversa, supponiamo V^* riflessivo e dimostriamo che è riflessivo V. Grazie alla prima parte V^{**} è pure riflessivo. Allora, per il Teorema 2.3, è riflessivo anche il suo sottospazio chiuso $J(V)$. Segue che anche V, che è isomorfo a $J(V)$, è riflessivo. □

2.5. Osservazione. Riprendiamo l'Osservazione 1.4 e dimostriamo l'affermazione (V.11.10) preannunciata nell'Osservazione V.11.15: gli spazi $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ costruiti su uno spazio di misura σ-finito sono riflessivi se e solo se hanno dimensione finita (cioè in situazioni banali per lo spazio di misura: si rivedano il Teorema I.5.36 e l'Osservazione I.5.37). La riflessività nel caso della dimensione finita segue dal risultato generale 1.1. Supponiamo ora $L^1(\Omega)$ di dimensione infinita. In tali condizioni il fatto che esso non sia riflessivo è già stato visto appunto nell'osservazione citata. Allora, nella stessa ipotesi, grazie al Corollario 2.4 e al Teorema 2.2, non è riflessivo nemmeno $L^\infty(\Omega)$, che è isomorfo al duale di $L^1(\Omega)$.

Sebbene la dimostrazione fatta sia completa, vale la pena di notare che la non riflessività di $L^1(\Omega)$, in tutti i casi concreti interessanti, può essere ottenuta anche in un altro modo: infatti, in tali casi, $L^1(\Omega)$ è separabile mentre $L^\infty(\Omega)$ non lo è e la riflessività di $L^1(\Omega)$ implicherebbe la separabilità del suo duale (Corollario V.5.13) e quindi quella di $L^\infty(\Omega)$, che invece è falsa. □

Consideriamo ora gli spazi generati dalle altre costruzioni canoniche: il quoziente, il prodotto, l'intersezione, la somma. Dimostriamo che tutti questi spazi sono riflessivi se costruiti a partire da spazi riflessivi. Alcune delle dimostrazioni dipendono ancora dal Teorema 2.3.

2.6. Teorema. *Se V è riflessivo e V_0 è un suo sottospazio chiuso, anche V/V_0 è riflessivo.* □

Dimostrazione. Per il Teorema III.3.10, il duale di V/V_0 è isomorfo a un sottospazio chiuso di V^*. Ma la riflessività di V implica quella di V^* e dei sottospazi chiusi di V^*. Quindi anche il duale di V/V_0 è riflessivo, da cui la riflessività del quoziente stesso. □

2.7. Teorema. *Il prodotto di due spazi riflessivi è riflessivo.* □

Dimostrazione. Siano V_1 e V_2 gli spazi in questione e V il loro prodotto. Per $f_1 \in V_1^*$ e $f_2 \in V_2^*$ denotiamo con $L(f_1, f_2)$ il funzionale su V che a ogni $(v_1, v_2) \in V$ associa $\langle f_1, v_1\rangle + \langle f_2, v_2\rangle$. Si ha $L(f_1, f_2) \in V^*$ e, grazie al Teorema III.3.10, l'applicazione $L : V_1^* \times V_2^* \to V^*$ che a ogni $(f_1, f_2) \in V_1^* \times V_2^*$ associa $L(f_1, f_2)$ è un isomorfismo. In particolare è un isomorfismo anche l'analoga applicazione L_* costruita a partire dagli spazi V_1^* e V_2^*. Riassumiamo le definizioni di L e di L_*: abbiamo

$$\langle L(f_1, f_2), (v_1, v_2)\rangle = \langle f_1, v_1\rangle + \langle f_2, v_2\rangle \quad \text{e} \quad \langle L_*(F_1, F_2), (f_1, f_2)\rangle = \langle F_1, f_1\rangle + \langle F_2, f_2\rangle$$

per ogni $v_i \in V_i$, $f_i \in V_i^*$ e $F_i \in V_i^{**}$, $i = 1, 2$. Consideriamo ora il diagramma

$$\begin{tikzcd} V = V_1 \times V_2 \arrow[r, "J_1 \otimes J_2"] \arrow[d, "J"'] & V_1^{**} \times V_2^{**} \arrow[d, "L_*"] \\ V^{**} = (V_1 \times V_2)^{**} \arrow[r, "L^*"'] & (V_1^* \times V_2^*)^* \end{tikzcd}$$

ove J è l'isomorfismo canonico di V e (con la notazione (2.1)) $J_1 \otimes J_2$ è l'applicazione definita dalla formula

$$(J_1 \otimes J_2)(v_1, v_2) = (J_1 v_1, J_2 v_2) \quad \text{per } v_i \in V_1 \text{ e } v_2 \in V_2 .$$

Siccome $J_1 \otimes J_2$ è ovviamente un isomorfismo, L_* è un isomorfismo come abbiamo osservato e L^* è un isomorfismo grazie al per il Teorema V.8.10, deduciamo che anche J è un isomorfismo se dimostriamo che il diagramma è commutativo. Controlliamo dunque questo fatto. Per $(v_1, v_2) \in V$ e $(f_1, f_2) \in V_1^* \times V_2^*$ abbiamo

$$\langle L_*(J_1 \otimes J_2)(v_1, v_2), (f_1, f_2)\rangle = \langle L_*(J_1 v_1, J_2 v_2), (f_1, f_2)\rangle = \langle J_1 v_1, f_1\rangle + \langle J_2 v_2, f_2\rangle = \langle f_1, v_1\rangle + \langle f_2, v_2\rangle.$$

D'altra parte

$$\langle L^* J(v_1, v_2), (f_1, f_2)\rangle = \langle J(v_1, v_2), L(f_1, f_2)\rangle = \langle L(f_1, f_2), (v_1, v_2)\rangle = \langle f_1, v_1\rangle + \langle f_2, v_2\rangle.$$

Dunque il diagramma è commutativo e la dimostrazione è conclusa. □

2.8. *Esercizio.* Si inverta il risultato precedente dimostrando che, se il prodotto $V_1 \times V_2$ è riflessivo, allora sono riflessivi entrambi gli spazi V_1 e V_2 di partenza.

2.9. Teorema. *Siano V e W due spazi normati immersi con continuità in uno spazio vettoriale topologico $\mathcal{Z}$. Se V e W sono riflessivi, allora anche $V \cap W$ e $V + W$ lo sono.* □

Dimostrazione. Infatti l'intersezione e la somma sono spazi isomorfi a sottospazi chiusi del prodotto $V \times W$ e, rispettivamente, del quoziente di $V \times W$ rispetto a un suo sottospazio chiuso (si vedano il Teorema I.6.1 e la dimostrazione del Teorema II.1.6). □

2.10. Osservazione. Vi è un'altra costruzione canonica, di cui diamo solo un cenno e che riprenderemo più tardi, che pure porta a uno spazio riflessivo se si parte da spazi riflessivi. Siano V e W due spazi normati, $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare e $G(L)$ il suo grafico. Siccome l'applicazione $I : D(L) \to G(L)$ data da $Iv = (v, Lv)$ è un isomorfismo algebrico, scelta la norma nel prodotto $V \times W$ fra quelle naturali e considerata la norma indotta su $G(L)$, possiamo considerare la norma $\|\cdot\|_G$ (detta *norma del grafico*) in $D(L)$ che rende I isomorfismo isometrico: $\|v\|_G = \|(v, Lv)\|_{V\times W}$ per $v \in D(L)$. Supponiamo ora che $G(L)$ sia un sottospazio chiuso del prodotto (in tali condizioni si dice che L è un *operatore chiuso*). Allora, se V e W sono spazi riflessivi, anche $D(L)$, munito della norma del grafico, è uno spazio riflessivo. Infatti, per i risultati precedenti, sono riflessivi l'uno dopo l'altro gli spazi $V \times W$, $G(L)$ e $D(L)$. □

Combiniamo i risultati di questo capitolo per dimostrare la riflessività degli spazi di Sobolev per $p \in (1, +\infty)$, riflessività che, invece, è falsa nei casi estremi (si riveda l'Osservazione 2.5).

2.11. Teorema. *Gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ sono riflessivi per ogni $k \geq 0$ e $p \in (1, +\infty)$.* □

Dimostrazione. Riprendiamo velocemente la dimostrazione del Teorema II.2.11 di completezza dello spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$: esiste un isomorfismo di $W^{k,p}(\Omega)$ su un sottospazio chiuso V_0 di una certa potenza $L^p(\Omega)^N$ di $L^p(\Omega)$. Siccome $p \in (1, +\infty)$, lo spazio $L^p(\Omega)$ è riflessivo per il Teorema 1.3. Allora i Teoremi 2.7, 2.3 e 2.2 forniscono, nell'ordine, la riflessività di $L^p(\Omega)^N$, di V_0, di $W^{k,p}(\Omega)$. □

2.12. *Esercizio.* Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, e siano $k \geq 0$ intero e $p \in (1, +\infty)$. Sia poi $\{u_n\}$ una successione limitata in $W^{k,p}(\Omega)$ tale che, per $|\alpha| \leq k$ e per ogni $v \in C_c^\infty(\Omega)$, la successione numerica costituita dagli integrali $\int_\Omega (D^\alpha u_n)\, v\, dx$ converga. Si dimostri che $\{u_n\}$ converge debolmente in $W^{k,p}(\Omega)$. Consigliamo il lettore di rivedere l'Esercizio V.2.3 e il Corollario V.6.2.

2.13. *Esercizio.* Sia Ω un intervallo. Si dimostri che $W^{1,1}(\Omega)$ non è riflessivo. Si consiglia di ragionare per assurdo e di utilizzare il Teorema V.7.2 di compattezza debole sequenziale. Si estenda il risultato di non riflessività allo spazio $W^{k,1}(\Omega)$ con $k \geq 0$ arbitrario.

2.14. *Esercizio.* Sia Ω un intervallo limitato e sia $L : W^{1,\infty}(\Omega) \to L^\infty(\Omega) \times \mathbb{R}$ l'applicazione data da $v \mapsto (v', \int_\Omega v\, dx)$. Si dimostri che L è un isomorfismo e si deduca che $W^{1,\infty}(\Omega)$ non è riflessivo. Si consiglia di usare l'Esercizio 2.8. Per induzione, si generalizzi a $W^{k,\infty}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.

Capitolo 7
I teoremi fondamentali di Banach

In questo capitolo dimostriamo altri risultati fondamentali della teoria degli spazi di Banach, in particolare il Teorema di Banach-Steinhaus, detto anche *Teorema della limitatezza uniforme*, e i Teoremi dell'applicazione aperta e del grafico chiuso, che in qualche modo vanno fatti risalire a Banach. Ne deriviamo varie conseguenze rilevanti, fra le quali alcuni risultati connessi con la risolubilità rispetto all'incognita u di un'equazione del tipo $Lu = f$, ove L è un operatore lineare non limitato fra spazi di Banach. Terminiamo il capitolo con un'applicazione allo studio di un problema per un'equazione alle derivate parziali di tipo ellittico. Il punto di partenza è il Lemma di Baire, al quale dedichiamo il primo paragrafo.

1. Il Lemma di Baire

Si tratta di un risultato che può avere svariate applicazioni. Esso riguarda successioni di aperti densi e di chiusi a interno vuoto di spazi metrici completi e una sua conseguenza importante è che uno spazio metrico completo non può essere unione numerabile di chiusi a interno vuoto.

1.1. Teorema (Lemma di Baire). *Siano (S,d) uno spazio metrico completo, $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una successione di aperti e $\{C_n\}_{n\geq 1}$ una successione di chiusi. Se tutti gli aperti A_n sono densi allora è densa anche la loro intersezione e se tutti i C_n hanno interno vuoto allora ha interno vuoto anche la loro unione.* □

Dimostrazione. Le due affermazioni si equivalgono. Infatti $C \subseteq S$ è chiuso con interno vuoto se e solo se $A = S \setminus C$ è un aperto denso e il passaggio al complementare scambia unioni e intersezioni. Trattiamo dunque il caso della successione di aperti densi.

Per $y \in S$ e $r > 0$, come d'abitudine poniamo $B_r(y) = \{x \in S : \ d(x,y) < r\}$ e introduciamo la notazione $\overline{B}_r(y) = \{x \in S : \ d(x,y) \leq r\}$, osservando che quest'ultimo è un chiuso (anche se non è necessariamente la chiusura dell'altro in un generico spazio metrico). Detta A l'intersezione degli A_n, dobbiamo dimostrare che, per ogni $x_0 \in S$ e $r_0 > 0$, la palla $B_{r_0}(x_0)$ interseca A. Fissiamo dunque x_0 e r_0. Siccome A_1 è denso, $A_1 \cap B_{r_0}(x_0)$ contiene un punto x_1. Ma tale intersezione è anche un aperto, per cui essa contiene una palla di centro x_1. Pur di rimpicciolirne il raggio troviamo $r_1 > 0$ tale che

$$\overline{B}_{r_1}(x_1) \subseteq A_1 \cap B_{r_0}(x_0) \quad \text{e} \quad r_1 \leq \frac{r_0}{2}\,.$$

Consideriamo ora A_2, che pure è denso. Allora $A_2 \cap B_{r_1}(x_1)$ contiene un punto x_2. Procedendo analogamente, troviamo $r_2 > 0$ tale che

$$\overline{B}_{r_2}(x_2) \subseteq A_2 \cap B_{r_1}(x_1) \quad \text{e} \quad r_2 \leq \frac{r_1}{2}\,.$$

Ragionando per induzione, costruiamo una successione $\{x_n\}$ di punti di S e una successione $\{r_n\}$ di reali positivi tali che

$$\overline{B}_{r_n}(x_n) \subseteq A_n \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \quad \text{e} \quad r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2} \quad \text{per ogni } n \geq 1\,.$$

Verifichiamo che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy osservando preliminarmente che la successione $\{\overline{B}_{r_n}(x_n)\}$ decresce. Fissato $\varepsilon > 0$ e notato che $\{r_n\}$ è infinitesima, fissiamo $m \geq 1$ tale che $r_m \leq \varepsilon$. Allora, per $n \geq m$ abbiamo $x_n \in \overline{B}_{r_n}(x_n) \subseteq \overline{B}_{r_m}(x_m)$. Quindi, per $k,n \geq m$ risulta

$$d(x_k,x_n) \leq d(x_k,x_m) + d(x_m,x_n) \leq 2r_m \leq 2\varepsilon.$$

Siccome lo spazio metrico è completo, la successione $\{x_n\}$ converge. Detto x il suo limite, dimostriamo che x appartiene ad $A \cap B_{r_0}(x_0)$. Fissiamo $m \geq 1$ ad arbitrio. Allora $x_n \in \overline{B}_{r_m}(x_m) \subseteq \overline{B}_{r_1}(x_1)$ per ogni $n \geq m$ e siccome gli ultimi due insiemi sono chiusi, deduciamo che $x \in \overline{B}_{r_m}(x_m) \subseteq \overline{B}_{r_1}(x_1)$. In particolare $x \in A_m \cap B_{r_0}(x_0)$. Per l'arbitrarietà di $m \geq 1$ concludiamo che $x \in A \cap B_{r_0}(x_0)$. □

1.2. Corollario. *Se uno spazio metrico completo (S, d) è unione di una successione $\{C_n\}$ di chiusi, allora almeno uno di essi ha interno non vuoto.* □

Dimostrazione. Per assurdo tutti i C_n abbiano interno vuoto. Allora, per il lemma di Baire, anche l'unione dei C_n ha interno vuoto, mentre tale unione è l'intero spazio S, assurdo. □

Come abbiamo detto all'inizio del paragrafo, il lemma di Baire ha applicazioni di vario tipo. Sebbene noi l'abbiamo introdotto in vista della sua applicazione ai risultati di Analisi funzionale che dimostriamo nei paragrafi successivi, ci concediamo una digressione e dimostriamo l'esistenza di (numerosissime) funzioni continue non differenziabili in alcun punto. Lo spazio $C_b(\mathbb{R}^d)$ introdotto nel risultato dato di seguito è caso particolare di quello considerato nell'Esempio I.5.3: esso è lo spazio delle funzioni continue e limitate in $\mathbb{R}^d$, qui a valori reali per semplicità.

1.3. Proposizione. *Il sottoinsieme N di $C_b(\mathbb{R}^d)$ costituito dalle funzioni che non sono differenziabili in alcun punto di $\mathbb{R}^d$ è denso in $C_b(\mathbb{R}^d)$.* □

Dimostrazione. Poniamo per comodità $V = C_b(\mathbb{R}^d)$ e $D = V \setminus N$. Dunque D è il sottoinsieme delle funzioni differenziabili in almeno un punto. Per $n = 1, 2, \ldots$, definiamo

$$C_n = \{v \in V : \text{ esiste } x_0 \in \overline{B}_n(0) \text{ tale che } |v(x) - v(x_0)| \leq n|x - x_0| \text{ per ogni } x \in B_{1/n}(x_0)\}$$

e dimostriamo che D è incluso nell'unione dei C_n. Sia $u \in D$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un punto in cui u è differenziabile. Allora esistono $\delta > 0$ e $L > 0$ tali che

$$|u(x) - u(x_0) - df_{x_0}(x - x_0)| \leq |x - x_0| \quad \text{per } |x - x_0| \leq \delta \quad \text{e} \quad |df_{x_0}h| \leq L|h| \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R}^d .$$

Per $|x - x_0| \leq \delta$ abbiamo allora $|u(x) - u(x_0)| \leq (L + 1)|x - x_0|$. Pertanto, scelto n verificante $n \geq |x_0|$, $n \geq L + 1$ e $1/n \leq \delta$, risulta $u \in C_n$. Siccome la tesi equivale al fatto che D abbia interno vuoto, l'inclusione appena controllata assicura che è sufficiente dimostrare che di tale proprietà gode l'unione dei C_n. Verifichiamo pertanto che la successione $\{C_n\}$ soddisfa le ipotesi del Lemma di Baire relativamente allo spazio V, che è completo. Fissiamo dunque n.

Proviamo che C_n è chiuso. Sia $\{u_k\}$ una successione di elementi di C_n convergente uniformemente a $u \in V$: dimostriamo che $u \in C_n$. Sia x_k dato dall'appartenenza di u_k a C_n, cioè verificante

$$|x_k| \leq n \quad \text{e} \quad |u_k(x) - u_k(x_k)| \leq n|x - x_k| \quad \text{per ogni } x \in B_{1/n}(x_k) .$$

Estraendo una sottosuccessione, ci riconduciamo al caso in cui $\{x_k\}$ converge a un punto $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Segue $|x_0| \leq n$. Sia ora $x \in B_{1/n}(x_0)$. Allora esiste k_0 tale che $x_k \in B_{1/n}(x_0)$ per ogni $k \geq k_0$. Si ha pertanto $|u_k(x) - u_k(x_k)| \leq n|x - x_k|$ per ogni $k \geq k_0$ e passando al limite per $k \to \infty$ deduciamo facilmente la disuguaglianza $|u(x) - u(x_0)| \leq n|x - x_0|$: infatti $\{u_k(x_k)\}$ converge a $u(x_0)$ in quanto $|u_k(x_k) - u(x_0)| \leq \|u_k - u\|_\infty + |u(x_k) - u(x_0)|$. Dunque $u \in C_n$ e C_n è chiuso.

Verifichiamo ora che C_n ha interno vuoto. Siano $u \in C_n$ e $\varepsilon > 0$. Fissiamo una funzione $\rho \in C^1(\mathbb{R}^d)$ positiva in $B_1(0)$ e nulla altrove e con integrale pari a 1. Osservato che u è uniformemente continua in $\overline{B}_{n+3}(0)$, scegliamo $\delta \in (0, 1)$ tale che $|u(x) - u(y)| \leq \varepsilon$ per tutte le coppie di punti $x, y \in \overline{B}_{n+3}(0)$ verificanti $|x - y| \leq \delta$ e definiamo $w : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$w(x) = \int_{B_1(0)} u(x + \delta y)\, \rho(y)\, dy = \delta^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\, \rho\big((z - x)/\delta\big)\, dz.$$

Si ha subito che

$$|w(x) - u(x)| = \Big| \int_{B_1(0)} \big(u(x + \delta y) - u(x)\big) \rho(y)\, dy \Big| \leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \rho(y)\, dy = \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in \overline{B}_{n+2}(0) .$$

Inoltre w è di classe C^1 e per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ abbiamo $|w(x)| \le \|u\|_\infty \|\rho\|_1$ e

$$|\nabla w(x)| = \delta^{-d-1} \Bigl| \int_{\mathbb{R}^d} u(z)\, \nabla\rho\bigl((z-x)/\delta\bigr)\, dz \Bigr| = \delta^{-1} \|u\|_\infty \int_{B_1(0)} |\nabla\rho(y)|\, dy$$

per cui w è anche globalmente limitata e lipschitziana con costante di Lipschitz $L = \delta^{-1}\|u\|_\infty \|\nabla\rho\|_1$. Sia ora $\zeta : [0,+\infty) \to [0,1]$ verificante $\zeta(t) = 1$ se $t \le n+1$ e $\zeta(t) = 0$ se $t \ge n+2$ e definiamo $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$v(x) = u(x) + \zeta(|x|)\,\bigl(w(x) - u(x)\bigr).$$

Allora $v \in V$ e risulta

$$v(x) = u(x) \quad \text{se } |x| \ge n+2 \quad \text{e} \quad |v(x) - u(x)| \le |w(x) - u(x)| \le \varepsilon \quad \text{se } |x| \le n+2\,.$$

Pertanto $\|v - u\|_\infty \le \varepsilon$. Sia infine $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2-periodica che verifica $\varphi(t) = 1 - |t|$ per $|t| \le 1$ e per $k = 1, 2, \ldots$ definiamo $u_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$u_k(x) = v(x) + \varepsilon\varphi(kx_1)$$

ove naturalmente x_1 è la prima coordinata di x. Allora $u_k \in V$ e $\|u_k - v\|_\infty \le \varepsilon$ così che $\|u_k - u\| \le 2\varepsilon$. Mostriamo che per k abbastanza grande $u_k \notin C_n$, il che concluderà la verifica che C_n ha interno vuoto. Per rendere più lineare la dimostrazione fissiamo fin d'ora $k > (n+L)/\varepsilon$ (anche se il motivo di tale scelta sarà completamente chiaro solo alla fine), ove L è la costante di Lipschitz di w introdotta sopra. Per assurdo u_k appartenga a C_n e sia $x_0 \in \overline{B}_n(0)$ tale che $|u_k(x) - u_k(x_0)| \le n|x - x_0|$ per ogni $x \in B_{1/n}(x_0)$. Per tali x abbiamo allora (ove x_{01} è la prima coordinata di x_0)

$$|\varepsilon\varphi(kx_1) - \varepsilon\varphi(kx_{01})| \le |u_k(x) - u_k(x_0)| + |v(x) - v(x_0)| = |u_k(x) - u_k(x_0)| + |w(x) - w(x_0)| \le (n+L)|x - x_0|$$

dato che $v(y) = w(y)$ se $|y| \le n+1$. Ciò, in particolare, con $x = x_0 + te_1$ purché $|t| < 1/n$. Deduciamo

$$\frac{|\varphi(k(x_{01}+t)) - \varphi(kx_{01})|}{|t|} \le \frac{n+L}{\varepsilon} \quad \text{per } |t| < 1/n\,.$$

D'altra parte

$$\sup_{0<|t|<\sigma} \frac{|\varphi(k(t_0+t)) - \varphi(kt_0)|}{|t|} = k \sup_{0<|s|<k\sigma} \frac{|\varphi(kt_0+s)) - \varphi(kt_0)|}{|s|} = k$$

per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, per cui ricaviamo che $k \le (n+L)/\varepsilon$, assurdo.

Dunque il Lemma di Baire è effettivamente applicabile allo spazio completo V e alla successione $\{C_n\}$ e si conclude che D, incluso nell'unione dei C_n, ha interno vuoto, cioè che N è denso. □

1.4. *Esercizio.* Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$. Data $u \in C^0(\overline{\Omega})$ si prolunghi u a una funzione $\widetilde{u} \in C_b(\mathbb{R}^d)$ (si riveda l'Osservazione I.5.43) e si deduca che esiste una successione di funzioni di $C^0(\overline{\Omega})$, tutte non differenziabili in alcun punto di Ω, che converge uniformemente a u.

1.5. *Esercizio.* Sostituire $C_b(\mathbb{R}^d)$ nell'enunciato della Proposizione 1.3 prima con il sottospazio (chiuso) costituito dalle funzioni limitate e uniformemente continue e poi con $C^0[0,1]$ e semplificare prima un poco e poi considerevolmente la dimostrazione data.

1.6. Osservazione. Vale un analogo risultato, che si ottiene con una dimostrazione simile ma più complicata, per lo spazio $C^0(\Omega)$, ove Ω è un aperto qualunque di $\mathbb{R}^d$: il sottospazio delle funzioni non differenziabili in alcun punto è denso. Tuttavia, allo stato attuale della trattazione, $C^0(\Omega)$ è solo uno spazio vettoriale e il significato preciso di quanto abbiamo affermato è chiaro solo quando sia stata precisata la topologia. Questa verrà introdotta molto più avanti e ora possiamo dire solo che essa è una topologia metrizzabile (non indotta da una norma) che rende $C^0(\Omega)$ completo e induce la convergenza seguente: una successione $\{u_n\}$ converge alla funzione u se e solo se $\{u_n\}$ converge u uniformemente su ogni compatto incluso in Ω.

2. Il Teorema di Banach-Steinhaus

In questo paragrafo usiamo il lemma di Baire, più precisamente il Corollario 1.2, per dimostrare il Teorema di Banach-Steinhaus, detto anche *Teorema della limitatezza uniforme*, e diamo qualche consegenza notevole di questo importante risultato.

2.1. Teorema (di Banach-Steinhaus). *Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ uno spazio di Banach, $(W, \|\cdot\|_W)$ uno spazio normato e $\mathcal{F}$ un sottoinsieme di $\mathcal{L}(V;W)$. Allora la condizione*

$$\sup_{L\in\mathcal{F}} \|Lx\|_W < +\infty \quad \text{per ogni } x \in V \tag{2.1}$$

è necessaria e sufficiente perché $\mathcal{F}$ sia un limitato di $\mathcal{L}(V;W)$. $\square$

Dimostrazione. La necessità è ovvia: se M maggiora le norme di tutti gli operatori $L \in \mathcal{F}$, allora $\|Lx\|_W \le M\|x\|_V$ per ogni $L \in \mathcal{F}$ e $x \in V$, da cui la (2.1). La parte significativa del teorema, infatti, è la sufficienza. Per $x \in V$ denotiamo con $M(x)$ l'estremo superiore che compare nella (2.1) e, per ogni n intero positivo, poniamo

$$C_n = \{x \in V : \ \|Lx\|_W \le n \text{ per ogni } L \in \mathcal{F}\}.$$

Se $x \in V$, scelto $n > M(x)$, si ha $x \in C_n$. Dunque l'unione di tutti i C_n è V. D'altra parte

$$C_n = \bigcap_{L\in\mathcal{F}} C_{L,n} \quad \text{ove} \quad C_{L,n} = \{x \in V : \ \|Lx\|_W \le n\}$$

e ciascuno dei $C_{L,n}$ è chiuso dato che la funzione $\|L\cdot\|_W = (\|\cdot\|_W)\circ L$ è continua in quanto composizione di due funzioni continue. Allora è chiuso anche ogni C_n. Ma V è completo per ipotesi. Per il Corollario 1.2, possiamo fissare n in modo che C_n abbia interno non vuoto. Siano dunque $x_0 \in V$ e $\rho > 0$ tali che $B_\rho(x_0) \subseteq C_n$. Posto $r = \rho/2$, la palla chiusa $B = \overline{B}_r(x_0)$ è inclusa in C_n. Allora, per ogni $x \in V$ con $\|x\|_V = 1$ abbiamo $x_0 + rx \in B$, dunque $x_0 + rx \in C_n$. Per ogni $L \in \mathcal{F}$, deduciamo allora

$$\|Lx\|_W = \frac{1}{r}\,\|L(x_0+rx) - Lx_0\|_W \le \frac{1}{r}\,\|L(x_0+rx)\|_W + \frac{1}{r}\,\|Lx_0\|_W \le \frac{n}{r} + \frac{M(x_0)}{r}\,.$$

Concludiamo che $\|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} \le (n + M(x_0))/r$ per ogni $L \in \mathcal{F}$. $\square$

Diamo qualche applicazione relativa al caso di funzionali: un criterio di limitatezza per sottoinsiemi con una applicazione significativa, la limitatezza derivante da convergenze di tipo debole e qualche conseguenza utile in varie applicazioni.

2.2. Corollario. *Se V è uno spazio di Banach, un sottoinsieme $S^* \subset V^*$ è limitato se e solo se*

$$\text{per ogni } x \in V \text{ l'insieme } \quad \{\langle f, x\rangle : \ f \in S^*\} \quad \text{è limitato.}$$

Se V è uno spazio normato, un sottoinsieme $S \subset V$ è limitato se e solo se

$$\text{per ogni } f \in V^* \text{ l'insieme } \quad \{\langle f, x\rangle : \ x \in S\} \quad \text{è limitato.} \ \square$$

Dimostrazione. La prima affermazione rientra direttamente nel Teorema di Banach-Steinhaus nel caso $W = \mathbb{K}$, per cui passiamo alla seconda. Consideriamo l'immagine $J(S)$ di S tramite l'isomorfismo canonico, che è un'isometria. Allora S è limitato in V se e solo se $J(S)$ è limitato in V^{**}. Ma V^{**} è il duale di V^*, che è uno spazio di Banach per il Teorema III.2.5. Dunque possiamo applicare la prima parte e concludere che tale limitatezza equivale alla condizione

$$\text{per ogni } f \in V^* \text{ l'insieme } \quad \{\langle Jx, f\rangle : \ x \in S\} \quad \text{è limitato.}$$

Ma questa coincide con la condizione dell'enunciato per definizione di J. $\square$

2.3. Esempio. Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito, $p \in [1, +\infty]$ e $q = p'$. Sia poi $u : \Omega \to \mathbb{K}$ una funzione misurabile tale che $uv \in L^1(\Omega)$ per ogni $v \in L^q(\Omega)$. Dimostriamo che $u \in L^p(\Omega)$. Se $p = 1$ il fatto è ovvio dato che la costante $v = 1$ appartiene a $L^\infty(\Omega) = L^q(\Omega)$. Se $p > 1$ si potrebbe ragionare per assurdo, supporre cioè che $u \notin L^p(\Omega)$, e costruire $v \in L^q(\Omega)$ tale che $uv \notin L^1(\Omega)$. Ma ciò è laborioso. Supponendo dunque $p \in (1, +\infty]$, dimostriamo che $u \in L^p(\Omega)$ usando il Teorema di Banach-Steinhaus e la mappa di Riesz (Teorema III.3.4) $\mathcal{R}_q \in \mathcal{L}(L^p(\Omega); (L^q(\Omega))^*)$, che è suriettiva dato che $q \in [1, +\infty)$. Innanzi tutto semplifichiamo un poco la situazione osservando che, se $v \in L^q(\Omega)$, appartiene a $L^q(\Omega)$ anche la funzione z definita (q.o.) da $z = 0$ ove $u = 0$ e $z = (\bar{u}/|u|)v$ ove $u \neq 0$ e risulta $|u|v = uz$, per cui $|u|v \in L^1(\Omega)$. Non è dunque restrittivo supporre u reale non negativa. Allora resta inteso che gli spazi funzionali sono reali. Siccome Ω è σ-finito, esiste una successione crescente $\{\Omega_n\}$ di insiemi di misura finita la cui unione è Ω. Per $n = 1, 2, \ldots$, detta χ_n la funzione caratteristica di Ω_n, poniamo $u_n = \chi_n \min\{u, n\}$ così che $u_n \in L^\infty(\Omega)$ e $u|_{\Omega \setminus \Omega_n} = 0$. Segue $u_n \in L^p(\Omega)$. Definiamo allora $f, f_n : L^q(\Omega) \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(v) = \int_\Omega u\, v\, d\mu \quad \text{e} \quad \langle f_n, v \rangle = \langle \mathcal{R}_q u_n, v \rangle = \int_\Omega u_n\, v\, d\mu \quad \text{per } v \in L^q(\Omega).$$

Il funzionale f è ben definito perché, per ipotesi, la funzione integranda è effettivamente integrabile. Inoltre esso è lineare. Il funzionale f_n è un elemento del duale $(L^q(\Omega))^*$. Sia ora $v \in L^q(\Omega)$. Siccome $|v| \in L^q(\Omega)$ abbiamo $u|v| \in L^1(\Omega)$ ed essendo $0 \le u_n \le u$ q.o. in Ω concludiamo che

$$|\langle f_n, v \rangle| \le \int_\Omega u_n\, |v|\, d\mu \le \int_\Omega u\, |v|\, d\mu \quad \text{per ogni } n.$$

Ciò mostra che alla successione $\{f_n\}$ è applicabile il Teorema di Banach-Steinhaus con $V = L^q(\Omega)$ e $W = \mathbb{R}$ (oppure il Corollario 2.2). Dunque essa è limitata in $(L^q(\Omega))^*$. Ciò significa che esiste una costante M tale che

$$|\langle f_n, v \rangle| \le M \|v\|_q \quad \text{per ogni } n \text{ e ogni } v \in L^q(\Omega).$$

Osserviamo ora che

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, v \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v\, d\mu = \int_\Omega uv\, d\mu = f(v) \quad \text{per ogni } v \in L^q(\Omega).$$

Infatti, se $v \in L^q(\Omega)$, da un lato abbiamo che $u_n v \to uv$ q.o. in Ω in quanto $u_n \to u$ q.o. in Ω e, d'altra parte, $|u_n v| \le u|v|$ q.o. in Ω e $u|v| \in L^1(\Omega)$. Dunque si può passare al limite nell'integrale per il Teorema di Lebesgue. Segue che

$$|f(v)| = \lim_{n\to\infty} |\langle f_n, v \rangle| \le M \|v\|_q \quad \text{per ogni } n \text{ e ogni } v \in L^q(\Omega)$$

per cui il funzionale f è anche continuo. Siccome la mappa $\mathcal{R}_q$ è suriettiva come abbiamo osservato, esiste $w \in L^p(\Omega)$ tale che $f = \mathcal{R}_q w$. Allora

$$\int_\Omega u\, v\, d\mu = \int_\Omega w\, v\, d\mu \quad \text{per ogni } v \in L^q(\Omega)$$

da cui facilmente $u = w$ e quindi $u \in L^p(\Omega)$. □

Torniamo alle conseguenze di carattere generale annunciate.

2.4. Corollario. *Ogni successione convergente debolmente* nel duale di uno spazio di Banach è limitata e ogni successione convergente debolmente in uno spazio normato è limitata.* □

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione convergente debolmente* nel duale V^* di uno spazio di Banach V. Consideriamo l'insieme $S^* = \{f_n : \ n = 1, 2, \ldots\}$, immagine della successione. Questo rientra nella prima parte del Corollario 2.2 dato che, per ogni $x \in V$, la successione $\{\langle f_n, x\rangle\}$ è limitata in quanto convergente. Deduciamo che S^* è limitato in V^*, cioè che è limitata in V^* la successione data.

Sia ora $\{x_n\}$ una successione debolmente convergente in uno spazio normato V. Consideriamo l'insieme $S = \{x_n : \ n = 1, 2, \ldots\}$, immagine della successione. Questo rientra nella seconda parte del Corollario 2.2 dato che, per ogni $f \in V^*$, la successione $\{\langle f, x_n\rangle\}$ è limitata in quanto convergente. Deduciamo che S è limitato, cioè che è limitata in V^* la successione data. □

Più in generale, per quanto riguarda la convergenza debole*, abbiamo il risultato dimostrato di seguito, nel quale l'appartenenza di f a V^* è nella tesi e non nell'ipotesi. Esso viene spesso enunciato nella forma: *se V è uno spazio di Banach, allora V^* è sequenzialmente completo rispetto alla convergenza debole**. Infatti, data la completezza di $\mathbb{K}$, la convergenza della successione di scalari che compare nell'ipotesi equivale alla condizione di Cauchy. Ne deduciamo un risultato di convergenza debole in spazi riflessivi che, per un motivo analogo, viene anche enunciato nella forma: *ogni spazio di Banach riflessivo è sequenzialmente completo rispetto alla convergenza debole*.

2.5. Corollario. *Siano V uno spazio di Banach e $\{f_n\}$ una successione di elementi di V^* tale che per ogni $v \in V$ la successione $\{\langle f_n, v\rangle\}$ converga. Allora $\{f_n\}$ converge debolmente* in V^*.* □

Dimostrazione. Il candidato limite è il funzionale f definito dalla formula $f(v) = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, v\rangle$ per $v \in V$, formula che ha senso per ipotesi. Allora f è lineare come subito si verifica. Controlliamo che $f \in V^*$. Per ogni $v \in V$ la successione $\{\langle f_n, v\rangle\}$ è limitata in quanto convergente. Per il Teorema di Banach-Steinhaus esiste una costante $M \geq 0$ tale che $|\langle f_n, v\rangle| \leq M\|v\|$ per ogni $v \in V$ e per ogni n. Passando al limite si ha subito $|f(v)| \leq M\|v\|$ per ogni $v \in V$. Dunque $f \in V^*$ e $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in V^*. □

2.6. Corollario. *Siano V uno spazio di Banach riflessivo e $\{v_n\}$ una successione di elementi di V tale che per ogni $f \in V^*$ la successione $\{\langle f, v_n\rangle\}$ converga. Allora la successione $\{v_n\}$ converge debolmente in V.* □

Dimostrazione. Detto J l'isomorfismo canonico, la successione $\{Jv_n\}$ è nelle ipotesi del Corollario 2.5 relativamente allo spazio di Banach V^*. Dunque essa converge debolmente* in V^{**} a un certo elemento $F \in V^{**}$. Siccome V è riflessivo, abbiamo $F = Jv$ per un certo $v \in V$ e deduciamo che $v_n \rightharpoonup v$ in V. □

La completezza di V nel Teorema di Banach-Steinhaus e in ciascuna delle conseguenze che abbiamo derivato è essenziale, come mostra l'esempio che ora costruiamo.

2.7. Esempio. Prendiamo $V = C^0[0,1]$ munito della (restrizione della) norma $\|\cdot\|_1$, così che V non è completo, il suo completamento essendo $L^1(0,1)$. Per ogni $n > 0$ intero consideriamo il funzionale lineare $f_n : V \to \mathbb{R}$ definito da $f_n(v) = \sqrt{n}\int_0^{1/n} v(x)\,dx$. Esso è continuo in quanto $|f_n(v)| \leq \sqrt{n}\|v\|_1$ per ogni $v \in V$. Dunque $f_n \in V^*$ e $\|f_n\|_* \leq \sqrt{n}$. Più precisamente vale l'uguaglianza, dato che la funzione v_n definita da $v_n(x) = 2n(1-nx)^+$ appartiene a V e verifica $\|v_n\|_1 = 1$ e $\langle f_n, v_n\rangle = \sqrt{n}$. In particolare la successione $\{f_n\}$ non è limitata in V^*. Ciò nonostante $\{f_n\}$ converge a 0 in V^* in quanto

$$\langle f_n, v\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \fint_0^{1/n} v(x)\,dx \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \fint_0^{1/n} v(x)\,dx = v(0) \quad \text{per ogni } v \in C^0[0,1]\,.$$

2.8. Osservazione. Naturalmente la scelta dello spazio completo $V = L^1(0,1)$ in sostituzione di $C^0[0,1]$ non avrebbe dato contraddizioni: con la definizione di f_n formalmente identica avremmo avuto ancora $f_n \in V^*$ e $\|f_n\|_* = \sqrt{n}$, ma non la convergenza debole* dato che la successione $\{\langle f_n, v\rangle\}$ diverge se v è data da $v(x) = x^{-1/4}$ (che ora appartiene a V). Concludiamo in particolare che, se V non è completo, sebbene i duali di V e del completamento siano identificabili in modo canonico (vedi l'Esercizio III.3.9), le corrispondenti convergenze deboli* hanno un significato diverso (il che pone un'ombra sul modo di dire *convergenza debole* in V^** comunemente usato; di fatto, nei due casi, V^* è dotato di due topologie). Si noti che la nuova f_n è l'immagine tramite la mappa di Riesz $\mathcal{R}_1 : L^\infty(0,1) \to (L^1(0,1))^*$ della funzione $u_n \in L^\infty(0,1)$ data da $u_n(x) = \sqrt{n}$ se $x < 1/n$ e $u_n(x) = 0$ altrove, la quale verifica appunto $\|u_n\|_\infty = \sqrt{n}$. □

Il prossimo risultato riguarda la convergenza del prodotto di dualità in ipotesi di convergenza di tipo debole di ciascuno dei suoi argomenti. La questione non è oziosa in quanto, in generale

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{e} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{non implicano che} \quad \lim_{n\to\infty} \langle f_n, x_n \rangle = \langle f, x \rangle.$$

Basta infatti considerare il caso di una successione $\{e_n\}$ ortonormale in uno spazio di Hilbert: essa converge debolmente a 0 mentre $(e_n, e_n) = 1$ per ogni n. Per unificare i due casi che vengono considerati nel risultato successivo, assumiamo che lo spazio di partenza sia comunque completo, anche se la completezza è essenziale solo per una delle due conclusioni.

2.9. Corollario. *Siano V uno spazio di Banach, $\{x_n\}$ una successione di elementi di V e $\{f_n\}$ una successione di elementi di V^*. Se $x_n \rightharpoonup x$ in V, $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in V^* e almeno una delle due convergenze è forte, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, x_n \rangle = \langle f, x \rangle. \ \square$$

Dimostrazione. Valgono le due catene di disuguaglianze

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \le |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \le \|f_n - f\|_* \, \|x_n\| + |\langle f, x_n - x\rangle|$$
$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \le |\langle f_n, x_n - x\rangle| + |\langle f_n - f, x\rangle| \le \|f_n\|_* \, \|x_n - x\| + |\langle f_n - f, x\rangle|$$

e l'ultimo termine di ciascuna di esse è infinitesimo per definizione di convergenza debole o debole*. Inoltre le successioni delle norme di x_n e di f_n sono limitate grazie al Corollario 2.4 come conseguenza della convergenza debole o debole*. Dunque, nei due casi di convergenza forte previsti dall'enunciato, è infinitesimo l'intero ultimo membro dell'una o dell'altra catena di disuguaguaglianze. $\square$

La dimostrazione precedente ricalca quella fatta nella Sezione V.12.23 a proposito della verifica della (V.12.19), per avere la quale abbiamo dimostrato che una delle convergenze era forte. Più in generale, come conseguenza del corollario precedente, abbiamo quello presentato di seguito.

2.10. Corollario. *Siano V uno spazio di Banach, $f : V \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa propria s.c.i., $\{x_n\}$ una successione di elementi di V e $\{\xi_n\}$ una successione di elementi di V^* tali che $\xi_n \in \partial f(x_n)$ per ogni n. Se $x_n \rightharpoonup x$ in V, $\xi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \xi$ in V^* e almeno una delle due convergenze è forte, allora $\xi \in \partial f(x)$.* $\square$

Dimostrazione. Sia $y \in V$. Allora $f(x_n) + \langle \xi_n, y - x_n\rangle \le f(y)$ per ogni n e occorre passare al limite. Il Corollario 2.9 assicura che $\lim_{n\to\infty} \langle \xi_n, y - x_n\rangle = \langle \xi, y - x\rangle$. Per l'Esercizio V.10.4 deduciamo che $\liminf_{n\to\infty} \bigl(f(x_n) + \langle \xi_n, y - x_n\rangle\bigr) = \liminf_{n\to\infty} f(x_n) + \langle \xi, u - x\rangle$. D'altra parte $f(x) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ per la s.c.i. Riunendo il tutto concludiamo che

$$f(x) + \langle \xi, u - x\rangle \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n) + \langle \xi, u - x\rangle = \liminf_{n\to\infty} \bigl(f(x_n) + \langle \xi_n, y - x_n\rangle\bigr) \le f(y). \ \square$$

3. Il Teorema di Banach-Schauder dell'applicazione aperta

Con il termine *applicazione aperta* si intende un'applicazione da uno spazio topologico in un altro che manda aperti in aperti, cioè che trasforma ogni aperto del dominio in un aperto del codominio. Osserviamo subito che, se V e W sono spazi normati, ogni applicazione $L \in \mathrm{Hom}(V; W)$ aperta è suriettiva. Infatti, se L è aperta, $L(V)$ è un aperto, e questo deve contenere l'origine dato che L è lineare. Dunque $L(V)$ contiene una palla del tipo $B = B_r(0)$ di W. Sia ora $w \in W$. Scelto $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon\|w\| < r$, abbiamo $\varepsilon w \in B \subseteq L(V)$. Dunque esiste $v \in V$ tale che $Lv = \varepsilon w$. Ma allora $L(v/\varepsilon) = w$.

Il risultato che ci accingiamo a presentare inverte questo fatto nell'ipotesi che V e W siano completi e che L sia anche continua. Esso è chiamato spesso Teorema di Banach-Schauder in quanto Schauder ha generalizzato una situazione particolare già trattata da Banach. Una sua dimostrazione rapida utilizza il Lemma di Baire, più precisamente il Corollario 1.2. Premettiamo un lemma e due esempi illustrativi.

3.1. Lemma. *Siano V e W due spazi di Banach. Un operatore $L \in \mathcal{L}(V;W)$ è un'applicazione aperta se e solo se vale la condizione*

$$\text{\textit{l'immagine della palla unitaria di } } V \text{ \textit{ contiene una palla di} } W \text{ \textit{centrata nell'origine.}} \square \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Introduciamo qualche notazione per semplificare il linguaggio. I simboli $B_r(x)$ e $B'_r(x)$ denotano, rispettivamente, l'usuale palla di raggio r e centro $x \in V$ e l'analoga palla ma di centro $x \in W$. Poniamo inoltre $B_r = B_r(0)$ e $B'_r = B'_r(0)$. Se L è un'applicazione aperta, siccome B_1 è un aperto di V, la sua immagine $L(B_1)$ è un aperto di W. D'altra parte $0 = L0 \in L(B_1)$. Dunque vale la (3.1).

Viceversa, supponiamo che valga la (3.1) e sia $r > 0$ tale che $B'_r \subseteq L(B_1)$. Sia A un aperto di V: dimostriamo che $L(A)$ è un aperto di W. Sia $w \in L(A)$ ad arbitrio: dobbiamo costruire una palla del tipo $B'_\rho(w)$ inclusa in $L(A)$. Siano $v \in A$ e $\delta > 0$ tali che $Lv = w$ e $B_\delta(v) \subseteq A$. Poniamo (con le notazioni del Paragrafo I.1) $A_0 = (1/\delta)(A - v) = \{x \in V : \ v + \delta x \in A\}$. Allora A_0 è aperto e $B_1 \subseteq A_0$, per cui $L(B_1) \subseteq L(A_0)$. Per la scelta iniziale di r deduciamo che $B'_r \subseteq L(A_0)$ da cui anche

$$B'_{r\delta}(w) = w + \delta B'_r \subseteq w + \delta L(A_0) = Lv + L(\delta A_0) = L(v + \delta A_0) = L(A)$$

e la dimostrazione è conclusa. $\square$

3.2. Esempio. Siano V uno spazio normato, V_0 un suo sottospazio chiuso e $V_\bullet = V/V_0$ lo spazio quoziente con la norma quoziente $\|\cdot\|_\bullet$. Mostriamo che la proiezione canonica $\pi : V \to V_\bullet$ è aperta verificando la (3.1). Sia infatti $x \in V_\bullet$ tale che $\|x\|_\bullet < 1/2$. Per definizione di $\|\cdot\|_\bullet$, esiste $v \in x$ tale che $\|v\| < 1$. Allora tale v appartiene alla palla unitaria di V e si ha $\pi v = x$. Ciò mostra che la palla $B_{1/2}(0)$ di $V_\bullet$ è inclusa nell'immagine $\pi(B_1(0))$ della palla unitaria di V. $\square$

L'esempio successivo riguarda invece un'applicazione lineare continua e suriettiva (addirittura biiettiva) che non è aperta (necessariamente a causa della non-completezza del codominio).

3.3. Esempio. Siano V e W lo spazio $C^1[0,1]$, ma il primo con la norma usuale e il secondo con la norma del massimo. Sia $L : V \to W$ l'applicazione identica. Allora $L \in \mathcal{L}(V;W)$ ma L non è un'applicazione aperta. Infatti, se lo fosse, sarebbe un isomorfismo per cui W, come V, sarebbe completo, il che non è.

3.4. Teorema (dell'applicazione aperta). *Siano V e W due spazi di Banach. Se un operatore $L \in \mathcal{L}(V;W)$ è suriettivo, allora esso è un'applicazione aperta.* $\square$

Dimostrazione. Grazie al lemma, di cui conserviamo senz'altro le notazioni, basta dimostrare la (3.1). Osserviamo che, se $S \subseteq V$, $S' \subseteq W$, $v_0 \in V$, $w_0 \in W$ e $\lambda \neq 0$, allora S e $v_0 + \lambda S$ sono omeomorfi così come S' e $w_0 + \lambda S'$ e

$$L(v_0 + \lambda S) = Lv_0 + \lambda L(S) \quad \text{e} \quad \overline{L(v_0 + \lambda S)} = Lv_0 + \lambda \overline{L(S)}.$$

Dimostriamo ora la (3.1) in due tappe: *i)* dimostriamo che la chiusura $\overline{L(B_1)}$ contiene una palla B'_{2r} per un certo $r > 0$; *ii)* dimostriamo che $B'_r \subseteq L(B_1)$ rimuovendo così il segno di chiusura.

Dimostriamo *i)*. Siccome L è suriettivo, per ogni $w \in W$ esiste $v \in V$ tale che $Lv = w$. Se $n > \|v\|$ allora $v \in B_n$ e dunque $w \in L(B_n)$. Ciò mostra che

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(B_n) \quad \text{da cui} \quad W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{L(B_n)}.$$

Siccome W è completo, grazie al Corollario 1.2, possiamo fissare $n \geq 1$ tale che $\overline{L(B_n)}$ abbia interno non vuoto. Segue che anche $\overline{L(B_1)}$ ha interno non vuoto. Dunque esistono $w_0 \in W$ e $r > 0$ tali che $B'_{2r}(w_0) \subseteq \overline{L(B_1)}$. Ma $-\overline{L(B_1)} = \overline{L(-B_1)} = \overline{L(B_1)}$, per cui $B'_{2r}(-w_0) = -B'_{2r}(w_0) \subseteq \overline{L(B_1)}$. Infine, siccome $\overline{L(B_1)}$ è un convesso dato che B_1 lo è, L è lineare e la chiusura di un convesso è convessa, concludiamo che valgono le inclusioni $B'_{2r} \subseteq \mathrm{co}(B'_{2r}(w_0) \cup B'_{2r}(-w_0)) \subseteq \overline{L(B_1)}$ con la notazione (I.4.1). Ciò conclude la dimostrazione del punto *i)*.

Dimostriamo che $B'_r \subseteq L(B_1)$. Fissiamo dunque $w \in B'_r$ e cerchiamo $v \in B_1$ tale che $Lv = w$. Siccome $B'_{2r} \subseteq \overline{L(B_1)}$ abbiamo anche $B'_{2\lambda r} \subseteq \overline{L(B_\lambda)}$ per ogni $\lambda > 0$. Ciò significa che

$$\text{per ogni } \lambda > 0 \text{, ogni } y \in B'_{2\lambda r} \text{ e ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } x \in B_\lambda \text{ tale che } \|y - Lx\| < \varepsilon \,.$$

Usiamo ricorsivamente questa affermazione per costruire un'opportuna successione $\{x_n\}$ di elementi di V. Prendiamo $\lambda = 1/2$, $y = w$ e $\varepsilon = r/2$, osservando che tale y è ammesso in quanto $B'_{2\lambda r} = B'_r$: troviamo $x_1 \in B_{1/2}$ tale che $\|w - Lx_1\| < r/2$. Prendiamo ora $\lambda = 1/4$, $y = w - Lx_1$ e $\varepsilon = r/4$ osservando che tale y è ammesso in quanto ora $B'_{2\lambda r} = B'_{r/2}$ e $w - Lx_1 \in B'_{r/2}$ per costruzione: troviamo $x_2 \in B_{1/4}$ tale che $\|w - Lx_1 - Lx_2\| < r/4$. Procedendo ricorsivamente veniamo a costruire una successione $\{x_n\}$ di elementi di V che verifica

$$\|x_n\| < 2^{-n} \quad \text{e} \quad \Big\| w - \sum_{k=1}^{n} Lx_k \Big\| < r\, 2^{-n} \quad \text{per ogni } n \,.$$

Deduciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ per cui la formula $v = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ effettivamente definisce $v \in V$ grazie alla completezza di V (Teorema II.1.2). Abbiamo inoltre

$$\|v\| \le \|x_1\| + \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\| \le \|x_1\| + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} = \|x_1\| + \frac{1}{2} < 1$$

cioè $v \in B_1$. Ma la definizione di v implica anche $\sum_{k=1}^{n} Lx_k \to Lv$ in quanto $L \in \mathcal{L}(V; W)$. D'altra parte $\sum_{k=1}^{n} Lx_k \to w$. Concludiamo che $Lv = w$. Dunque $B'_r \subseteq L(B_1)$ e la dimostrazione è conclusa. □

3.5. Corollario. *Siano V e W due spazi di Banach e $L \in \mathrm{Hom}(V; W)$ un isomorfismo algebrico. Se L è continuo allora L è un isomorfismo* □

Dimostrazione. Occorre solo dimostrare che $L^{-1} : W \to V$ è una funzione continua. Sia dunque A un aperto di V: dobbiamo dimostrare che sua la controimmagine $(L^{-1})^{-1}(A)$ tramite L^{-1} è un aperto di W. Ma $(L^{-1})^{-1}(A) = L(A)$ e $L(A)$ è un aperto di W per il Teorema dell'applicazione aperta. □

3.6. Corollario. *Siano V uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ due norme in V tali che esista una costante $C > 0$ tale che $\|x\|'' \le C\|x\|'$ per ogni $x \in V$. Se V è completo rispetto ad entrambe le norme, allora queste sono equivalenti.* □

Dimostrazione. L'ipotesi sulla disuguaglianza fra le norme significa che l'identità, come operatore da $(V, \|\cdot\|')$ in $(V, \|\cdot\|'')$, è continua. Il corollario precedente assicura allora che essa è un isomorfismo, cioè che le due norme sono equivalenti. □

3.7. *Esercizio.* Si ridimostri, usando il Corollario 3.6, che, per $1 \le p < +\infty$, lo spazio $C^0[0,1]$ munito della norma indotta da $L^p(0,1)$ non è completo.

3.8. *Esercizio.* Usando il Corollario 3.6, dimostrare che lo spazio $L^1(\mathbb{R})$ non è completo rispetto alla norma definita dalla formula $\|v\| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |v(x)|\, dx$. Descrivere un completamento.

3.9. Corollario. *Siano $\mathcal{Z}$ uno spazio vettoriale topologico e V un sottospazio vettoriale di $\mathcal{Z}$. Se due norme in V rendono sia V completo sia le immersioni di V in $\mathcal{Z}$ continue, allora esse sono equivalenti.* □

Dimostrazione. Siano $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ le due norme. Siamo nelle condizioni di costruire lo spazio intersezione dei due spazi normati $(V, \|\cdot\|')$ e $(V, \|\cdot\|'')$ (vedi Teorema I.6.1), cioè lo stesso spazio vettoriale V, ma munito, ad esempio, della norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|' + \|\cdot\|''$. Per il Teorema II.1.6, anche $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach. Allora possiamo applicare il corollario precedente e concludere che ciascuna delle due norme di partenza è equivalente alla terza. Quindi esse sono equivalenti fra loro. □

3.10. Corollario. *Siano V uno spazio di Banach e V_1 e V_2 due sottospazi chiusi di V. Allora il sottospazio somma $V_1 + V_2$ è chiuso se e solo esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $v \in V_1 + V_2$ esistono $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ tali che*

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{e} \quad \|v_i\| \le M\|v\| \quad \text{per } i = 1, 2 \,. \; \square \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Siamo nelle condizioni di considerare lo spazio somma V_1+V_2 con la "norma quoziente" $\|\cdot\|_\bullet$ definita da $\|v\|_\bullet = \inf\{\|v_1\|+\|v_2\|\}$, l'estremo superiore essendo preso al variare di tutte le coppie $(v_1,v_2) \in V_1 \times V_2$ tali che $v_1+v_2=v$ (equivalente a quella definita in (I.6.5); si veda anche l'Osservazione I.6.4). Siccome V_1 e V_2 sono completi in quanto chiusi, anche V_1+V_2 con tale norma è completo per il Teorema II.1.6. D'altra parte possiamo considerare anche la norma $\|\cdot\|$ in V_1+V_2 (in realtà la restizione della norma) e osservare che $\|v\| \le \|v\|_\bullet$ per ogni $v \in V_1+V_2$, come si vede considerando tutte le decomposizioni. Allora, tenendo conto del Corollario 3.6, vediamo che sono equivalenti le affermazioni seguenti: *i*) V_1+V_2 è chiuso in V; *ii*) V_1+V_2 è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|$; *iii*) le norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_\bullet$ sono equivalenti come norme in V_1+V_2; *iv*) esiste $C>0$ tale che $\|v\|_\bullet \le C\|v\|$ per ogni $v \in V_1+V_2$. Basta allora dimostrare che la *iv*) equivale alla condizione data dall'enunciato. Sia M come nell'enunciato appunto e, per $v \in V_1+V_2$, siano $v_i \in V_i$ verificanti la (3.2). Allora $\|v\|_\bullet \le \|v_1\|+\|v_2\| \le 2M\|v\|$, cioè vale la *iv*) con $C=2M$. Viceversa, valga la *iv*) e sia C tale che $\|v\|_\bullet \le C\|v\|$ per ogni $v \in V_1+V_2$. Sia $v \in V_1+V_2$, che possiamo supporre non nullo. Allora $2C\|v\| > \|v\|_\bullet$, per cui, per definizione di $\|v\|_\bullet$, esiste una decomposizione $v=v_1+v_2$ di v verificante $v_i \in V_i$ per $i=1,2$ e $\|v_1\|+\|v_2\| \le 2C\|v\|$. Segue che vale la condizione dell'enunciato con $M=2C$. □

3.11. *Esercizio.* Siano H uno spazio di Hilbert e V_1 e V_2 due sottospazi chiusi di H ortogonali fra loro. Si ridimostri che V_1+V_2 è chiuso usando il Corollario 3.10.

3.12. *Esercizio.* Siano V uno spazio di Banach e V_1 e V_2 due sottospazi chiusi di V tali che $V=V_1\oplus V_2$. Se $v \in V$ e $v=v_1+v_2$ è la decomposizione (unica) di v nella somma di due elementi $v_i \in V_1$, $i=1,2$, si ponga $P_iv=v_i$ per $i=1,2$. Si dimostri che P_1 e P_2 sono operatori lineari e continui.

3.13. Osservazione. L'esercizio precedente può suggerire un problema: dati uno spazio di Banach V e un suo sottospazio chiuso V_0

$$\textit{trovare un altro sottospazio chiuso } W_0 \textit{ di } V \textit{ tale che } \quad V = V_0 \oplus W_0. \tag{3.3}$$

Ogni soluzione W_0 di (3.3) è detta *supplementare topologico di* V_0. Notiamo anche che, se V è uno spazio di Hilbert, l'esistenza di W_0 è immediata: si può infatti prendere $W_0 = V_0^\perp$. Invece, il problema generale (3.3) nell'ambito degli spazi di Banach può non avere soluzioni, cioè un sottospazio chiuso di uno spazio di Banach può non avere supplementari topologici, e un esempio è il seguente: $V=\ell^\infty$ e $V_0=(c_0)$, il sottospazio delle successioni infinitesime. Infatti è stato dimostrato (R.S. Phillips) che (c_0) non ha supplementari topologici in ℓ^∞. Il problema è più che mai spinoso dato che è stato pure dimostrato (Lindenstrauss-Tzafriri) che, se V è uno spazio di Banach tale che ogni suo sottospazio chiuso abbia un supplementare topologico, allora V ha una norma hilbertiana equivalente.

3.14. Proposizione. *Sia V uno spazio normato. Allora ogni suo sottospazio V_0 di dimensione finita ha un supplementare topologico W_0.* □

Dimostrazione. Se $V_0=\{0\}$ prendiamo $W_0=V$. Sia ora $\dim V = n > 0$. Siano $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base di V_0 e $\{e^1,\dots,e^n\}$ la corrispondente base duale (vedi (III.3.1)). Per $i=1,\dots,n$ il funzionale $e^i \in V_0^*$ ha un prolungamento $f_i \in V^*$ per il Teorema di Hahn-Banach (Corollario V.2.6). Verifichiamo che l'intersezione W_0 dei nuclei $N(f_i)$ è un supplementare topologico di V_0. Innanzi tutto W_0 è un sottospazio chiuso in quanto intersezione di sottospazi chiusi. Sia ora $v \in V$. Poniamo $v_0 = \sum_{j=1}^n \langle f_j, v\rangle\, e_j$. Allora $v_0 \in V_0$. D'altra parte $v-v_0 \in W_0$, come ora verifichiamo. Per $i=1,\dots,n$ si ha

$$\langle f_i, v_0\rangle = \sum_{j=1}^n \langle f_j, v\rangle\, \langle f_i, e_j\rangle = \sum_{j=1}^n \langle f_j, v\rangle\, \langle e^i, e_j\rangle = \sum_{j=1}^n \langle f_j, v\rangle\, \delta_{ij} = \langle f_i, v\rangle$$

da cui $\langle f_i, v-v_0\rangle = 0$. Infine controlliamo che $V_0 \cap W_0 = \{0\}$. Sia $v \in V_0$. Allora $v=\sum_{j=1}^n c_j e_j$ per certi $c_j \in \mathbb{K}$ e $\langle f_i, v\rangle = c_i$ per $i=1,\dots,n$ grazie a un calcolo identico al precedente. Dunque, se v appartiene anche a W_0, abbiamo $c_i=0$ per ogni i e di conseguenza $v=0$. □

3.15. Osservazione. Se si toglie in (3.3) la richiesta che W_0 sia chiuso, si dice che W_0 è un *supplementare algebrico di* V_0, e ciò per un sottospazio V_0 qualunque. L'esistenza di W_0 segue allora facilmente dal Lemma di Zorn, come ora mostriamo. Introduciamo per comodità una definizione: una *base di Hamel* di uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ è un suo sottoinsieme $B \subset \mathcal{V}$ indipendente che lo genera, cioè tale che ogni elemento di $\mathcal{V}$ può essere rappresentato in uno e in un sol modo come combinazione lineare finita di elementi di B.

Dimostriamo i due punti seguenti: i) ogni spazio vettoriale V di dimensione positiva ha una base di Hamel; ii) se V è uno spazio vettoriale, V_0 è un sottospazio di V di dimensione positiva e B_0 è una base di Hamel di V_0, allora esiste una base di Hamel B di V che include B_0. Per dimostrare i) introduciamo la famiglia $\mathcal{B}$ di tutti i sottoinsiemi indipendenti di V. Questo è non vuoto dato che, se $v \in V \setminus \{0\}$, il singoletto $\{v\}$ appartiene a $\mathcal{B}$. Introduciamo in $\mathcal{B}$ l'ordine parziale $\preceq$ dicendo semplicemente che $B_1 \preceq B_2$ significa $B_1 \subseteq B_2$. Si verifica senza difficoltà che $(\mathcal{B}, \preceq)$ è un insieme induttivo, in quanto l'unione di una catena di $\mathcal{B}$ appartiene ancora a $\mathcal{B}$. Detto B un elemento massimale fornito dal Lemma di Zorn, si vede che B è una base di Hamel di V. In caso contrario, infatti, preso $v_0 \in V \setminus \operatorname{span} B$, l'insieme $B \cup \{v_0\}$ apparterrebbe a $\mathcal{B}$ e si contraddirebbe la massimalità di B. Passando a ii), sia ora $\mathcal{B}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi indipendenti di V che includono la data base di Hamel B_0 di V_0. La famiglia è non vuota dato che $B_0 \in \mathcal{B}$. Introduciamo l'ordine parziale $\preceq$ come sopra e procediamo analogamente. Se B è un elemento massimale di $\mathcal{B}$, allora B è una base di Hamel di V che include B_0.

Dimostrato tutto ciò, l'esistenza di un supplementare algebrico di V_0 segue immediatamente: se $V_0 = \{0\}$ prendiamo $W_0 = V$; se $V_0 = V$ prendiamo $W_0 = \{0\}$; se V_0 ha dimensione positiva ed è diverso da V, prese una base di Hamel B_0 di V_0 e una base di Hamel B di V che include B_0, l'inclusione è stretta e $W_0 = \operatorname{span}(B \setminus B_0)$ è un supplementare algebrico di V_0.

Tornando alla questione dell'esistenza del supplementare topologico di un sottospazio chiuso V_0 di uno spazio di Banach V, notiamo non c'è motivo perché il sottospazio W_0 introdotto sopra sia chiuso, da cui la difficoltà del problema.

3.16. *Esercizio.* Siano V uno spazio di Banach, V_0 un suo sottospazio chiuso e W_0 un supplementare topologico di V_0. Dimostrare che W_0 è isomorfo a V/V_0. Dimostrare che, viceversa, se W_0 è un supplementare algebrico isomorfo a V/V_0, allora W_0 è anche supplementare topologico.

3.17. *Esercizio.* Siano V uno spazio di Banach e V_0 un suo sottospazio chiuso. Si supponga che la cosiddetta *codimensione di* V_0 $\operatorname{codim} V_0 = \dim V/V_0$ sia finita. Si dimostri che ogni supplementare algebrico di V_0 è anche un supplementare topologico. □

3.18. Osservazione. L'esistenza di un supplementare algebrico senza ipotesi aggiuntive ci consente di estendere al caso generale una formula ben nota nel caso della dimensione finita. Se V e W sono spazi vettoriali e $L \in \operatorname{Hom}(V; W)$ allora

$$\dim V = \dim N(L) + \dim R(L). \tag{3.4}$$

Sia infatti Z un supplementare algebrico di $N(L)$. Allora l'applicazione da $N(L) \times Z$ in V definita da $(v, z) \mapsto v + z$ è un isomorfismo algebrico. Segue che

$$\dim V = \dim(N(L) \times Z) = \dim N(L) + \dim Z.$$

D'altra parte possiamo introdurre l'operatore $L_0 \in \operatorname{Hom}(Z; R(L))$ ponendo $L_0 z = Lz$ per $z \in Z$ (effettivamente L_0 è lineare). Mostriamo che L_0 è suriettivo. Sia infatti $w \in R(L)$. Allora esiste $v \in V$ tale che $Lv = w$. Decomposto v in $v = v_0 + z$ con $v_0 \in N(L)$ e $z \in Z$, si ha $L_0 z = Lz = Lv = w$. Infine L_0 è anche iniettivo dato che, se $z \in N(L_0)$, allora $z \in Z \cap N(L)$ e quindi $z = 0$. Dunque L_0 è un isomorfismo algebrico, da cui $\dim Z = \dim R(L)$ e la (3.4). □

Dal Teorema dell'applicazione aperta deduciamo anche un risultato generale di isomorfismo che utilizzeremo in seguito. Sottolineiamo fin d'ora un punto: come si vede dalla dimostrazione, l'applicazione I dell'enunciato *è sempre un isomorfismo algebrico continuo* e il teorema afferma che, se V e W sono completi, I è anche un omeomorfismo se e solo se l'immagine $R(L)$ è chiusa.

3.19. Teorema. *Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Siano inoltre $V_\bullet = V/N(L)$ lo spazio quoziente e $\pi : V \to V_\bullet$ la proiezione canonica. Allora esiste una e una sola funzione $L_\bullet : V_\bullet \to W$ tale che $L = L_\bullet \circ \pi$. Valgono inoltre le proprietà seguenti: $i)$ $L_\bullet$ è lineare e iniettiva; $ii)$ $R(L_\bullet) = R(L)$; $iii)$ $L_\bullet \in \mathcal{L}(V_\bullet;W)$ e $\|L_\bullet\| = \|L\|$; $iv)$ se V e W sono di Banach, fattorizzato $L_\bullet$ come $L_\bullet = j \circ I$ ove $I : V_\bullet \to R(L)$ e $j : R(L) \to W$ è l'immersione, I è un isomorfismo se e solo se $R(L)$ è un chiuso di W.* □

Dimostrazione. Per maggior chiarezza anticipiamo il diagramma delle applicazioni, date o da costruire:

$$\begin{tikzcd} & W & \\ V \arrow[ur, "L"] \arrow[dr, "\pi"'] & & R(L) \arrow[ul, "j"'] \\ & V_\bullet \arrow[uu, "L_\bullet"] \arrow[ur, "I"'] & \end{tikzcd}$$

Innanzi tutto osserviamo che $N(L)$ è un sottospazio chiuso di V, per cui $V_\bullet$ è un ben definito spazio normato. Se $L_\bullet : V_\bullet \to W$ verifica $L = L_\bullet \circ \pi$ allora, per ogni $x \in V_\bullet$ e $v \in x$, deve essere $L_\bullet x = L_\bullet(\pi x) = Lv$, da cui l'unicità. Per dimostrare l'esistenza di $L_\bullet$, controlliamo che, per ogni $x \in V_\bullet$, la formula $L_\bullet x = Lv$, ove $v \in x$, effettivamente ha senso, cioè non dipende dal rappresentante $v \in x$. Sia infatti $v' \in x$ un altro rappresentante. Allora $v - v' \in N(L)$, da cui $Lv = Lv'$. Verifichiamo che $L_\bullet$ è lineare. Siano $x, y \in V_\bullet$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Siano inoltre $u \in x$ e $v \in y$. Allora $\alpha u + \beta v \in \alpha x + \beta y$ (per definizione di struttura vettoriale nel quoziente), per cui $L_\bullet(\alpha x + \beta y) = L(\alpha u + \beta v) = \alpha L u + \beta L v = \alpha L_\bullet x + \beta L_\bullet u$. L'iniettività di $L_\bullet$ è immediata: se $L_\bullet x = 0$ allora $Lv = 0$ per ogni $v \in x$, cioè $v \in N(L)$, da cui $x = N(L)$ (lo zero di $V_\bullet$) dato che l'inclusione fra classi di equivalenza implica la loro uguaglianza. Ciò prova la $i)$ e la $ii)$ è del tutto ovvia. Passiamo alla $iii)$. Siano $x \in V_\bullet$ e $v \in x$. Allora $\|L_\bullet x\|_W = \|Lv\|_W \le \|L\|\,\|v\|_V$ da cui, passando all'estremo inferiore, $\|L_\bullet x\|_W \le \|L\|\,\|x\|_\bullet$. Ciò mostra che $L_\bullet$ è continuo che $\|L_\bullet\| \le \|L\|$. Sia ora $v \in V$. Allora $\|Lv\|_W = \|L_\bullet \pi v\|_W \le \|L_\bullet\|\,\|\pi v\|_\bullet \le \|L_\bullet\|\,\|v\|_V$, da cui $\|L\| \le \|L_\bullet\|$. Infine, venendo a $iv)$, supponiamo V e W completi e osserviamo che anche $V_\bullet$ è completo per il Teorema II.1.6 e che I è un isomorfismo algebrico continuo. Se I è un isomorfismo, allora anche $R(L)$ è completo, dunque chiuso in W. Viceversa, se $R(L)$ è chiuso in W, allora esso è completo e I è un isomorfismo algebrico continuo dello spazio di Banach $V_\bullet$ sullo spazio di Banach $R(L)$, dunque un isomorfismo per il Teorema dell'applicazione aperta (Corollario VII.3.5). □

Passiamo al prossimo teorema, anche questo dovuto a Banach, che possiamo facilmente derivare dal Teorema dell'applicazione aperta.

3.20. Teorema (del grafico chiuso). *Siano V e W due spazi di Banach e $L : V \to W$ un operatore lineare. Se il grafico $G(L)$ di L è chiuso in $V \times W$, allora L è continuo.* □

Dimostrazione. Consideriamo l'operatore lineare $L_1 : V \to G(L)$ definito da $L_1 x = (x, Lx)$ e, osservato che esso è un isomorfismo algebrico, denotiamo con $I : G(L) \to V$ il suo inverso L_1^{-1}. Ora notiamo anche che $G(L)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma indotta da quella dello spazio prodotto $V \times W$ in quanto quest'ultimo è completo per il Teorema II.1.6 e $G(L)$ è chiuso. Infine osserviamo che I è la restrizione a $G(L)$ dell'operatore di proiezione $P : V \times W \to V$ definito da $(v, w) \mapsto v$, $v \in V$. Siccome P è continuo, anche I è un operatore continuo. Dunque esso è un isomorfismo, grazie al Corollario 3.5. Ma ciò implica che $L_1 = I^{-1}$ è continuo, da cui immediatamente la continuità di L. □

3.21. Osservazione. Talora le conseguenze del Teorema dell'applicazione aperta vengono attribuite al Teorema del grafico chiuso e il motivo è il seguente: se si dimostra quest'ultimo prima dell'altro (il che si può fare), quello può essere dedotto, cioè lo stesso Teorema dell'applicazione aperta è una conseguenza del Teorema del grafico chiuso. Nell'esercizio successivo viene data una traccia di una possibile deduzione.

3.22. Esercizio. Siano V e W due spazi di Banach e $L \in \mathcal{L}(V;W)$ un'applicazione suriettiva. $i)$ Si supponga dapprima che L sia un isomorfismo algebrico e, applicando il Teorema del grafico chiuso a L^{-1}, si dimostri che L è un isomorfismo. $ii)$ Nel caso generale si introducano le notazioni del Teorema 3.19 (tranne la fattorizzazione $L_\bullet = j \circ I$, ora inutile dato che $R(L) = W$ per ipotesi), si dimostri che $L_\bullet$ è un isomorfismo algebrico continuo di $V_\bullet$ su W e si deduca che $L_\bullet$ è un isomorfismo e che L è un'applicazione aperta.

4. L'aggiunto di un operatore non limitato

La nozione di operatore aggiunto è stata anticipata nella Definizione V.8.1 nel caso degli operatori lineari e continui. In questo paragrafo vogliamo considerare il caso più generale degli operatori lineari non limitati. Se $L : D(L) \subseteq V \to W$ è un operatore lineare non limitato, la formula da realizzare continua ad essere la (V.8.1), questa volta limitatamente agli elementi v e w^* che rendono sensata la formula stessa, cioè deve risultare

$$\langle L^* w^*, v \rangle = \langle w^*, Lv \rangle \quad \text{per ogni } v \in D(L) \text{ e } w^* \in D(L^*) \tag{4.1}$$

ove $D(L^*)$ è l'insieme degli elementi $w^* \in W^*$ tali che esista un elemento di V^* da chiamare $L^* w^*$ che rende vera, per ogni $v \in D(L)$, l'uguaglianza stessa. Ma tale uguaglianza dice che $L^* w^*$ è un funzionale lineare e continuo su V che prolunga $w^* \circ L$. D'altra parte, ammesso che un tale prolungamento di $w^* \circ L$ esista, questo può non essere unico, a meno che il dominio di $w^* \circ L$ non sia denso in V. Ma il dominio di $w^* \circ L$ coincide con $D(L)$. Siamo dunque indotti a supporre, nella definizione data di seguito, che il dominio dell'operatore sia denso.

4.1. Definizione. *Siano V e W due spazi normati e $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare non limitato il cui dominio $D(L)$ sia denso in V. Allora diciamo che un elemento $w^* \in W^*$ appartiene a $D(L^*)$ quando*

$$\textit{esiste } v^* \in V^* \textit{ tale che } \quad \langle v^*, v \rangle = \langle w^*, Lv \rangle \quad \textit{per ogni } v \in D(L) \tag{4.2}$$

e, per $w^* \in D(L^*)$, denotiamo con $L^* w^*$ l'unico elemento $v^* \in V^*$ che verifica la formula (4.2). *L'operatore*

$$L^* : D(L^*) \subseteq W^* \to V^* \quad \textit{definito da} \quad w^* \mapsto L^* w^*$$

è detto duale o trasposto o aggiunto di L. □

4.2. Osservazione. Risulta chiaro che, per la definizione stessa, vale la (4.1) e che il dominio di L^* è il più grande possibile fra i sottospazi di W^* che possono essere domini di operatori verificanti la (4.1). D'altra parte, perché un elemento $w^* \in W^*$ appartenga a $D(L^*)$ è necessario e sufficiente che $w^* \circ L$ stesso sia continuo su $D(L)$ (munito questo della topologia indotta da V). Vediamo allora che l'appartenenza di $w^* \in W^*$ a $D(L^*)$ equivale a ciascuna delle condizioni

i) $w^* \circ L$ è continuo su $D(L)$ rispetto alla topologia indotta da V
ii) esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\quad |\langle w^*, Lv \rangle| \le c \|v\|_V \quad$ per ogni $v \in D(L)$.

Naturalmente, se V e W sono spazi di Hilbert reali identificati ai rispettivi duali tramite l'isomorfismo di Riesz, la formula (4.1) diventa

$$(L^* w, v) = (w, Lv) \quad \text{per ogni } v \in D(L) \text{ e } w \in D(L^*) \tag{4.3}$$

e risulta generalizzata la (V.8.2) al caso degli operatori non limitati. Il caso degli spazi di Hilbert complessi, tuttavia, sembra sfuggire e merita di essere approfondito.

4.3. Definizione. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare non limitato il cui dominio $D(L)$ sia denso in V. Allora diciamo che un elemento $w \in W$ appartiene a $D(L^*)$ quando*

$$\textit{esiste } v' \in V \textit{ tale che } \quad (v', v) = (w, Lv) \quad \textit{per ogni } v \in D(L) \tag{4.4}$$

e, per $w \in D(L^*)$, denotiamo con $L^* w$ l'unico elemento $v' \in V$ che verifica la formula (4.4). *L'operatore*

$$L^* : D(L^*) \subseteq W \to V \quad \textit{definito da} \quad w \mapsto L^* w$$

è detto aggiunto di L. □

4.4. Osservazione. Per definizione, dunque, vale la (4.3) anche nel caso complesso. Conviene però vedere come la definizione precedente sia collegata alla Definizione 4.1. Nel caso complesso, infatti, l'identificazione di uno spazio di Hilbert con il suo duale può essere poco opportuna. Per meglio chiarire la situazione denotiamo con L' il trasposto di L nel senso della Definizione 4.1. Denotiamo inoltre con $\mathcal{R}_V$ e $\mathcal{R}_W$ gli operatori di Riesz, che sono isomorfismi nel caso reale e anti-isomorfismi nel caso complesso. Partiamo dalla formula

$$\langle L'w^*, v\rangle = \langle w^*, Lv\rangle \quad \text{per ogni } v \in D(L) \text{ e } w^* \in D(L')$$

e osserviamo che $D(L^*)$ coincide con l'insieme dei $w \in W$ tali che $\mathcal{R}_W w \in D(L')$. Riscriviamo ora la formula precedente con $w^* = \mathcal{R}_W w$, osservando che, per quanto appena detto, è equivalente far variare w^* in $D(L')$ oppure $w \in D(L^*)$. Abbiamo per ogni $v \in D(L)$

$$\langle L'\mathcal{R}_W w, v\rangle = \langle \mathcal{R}_W w, Lv\rangle.$$

Trasformiamo ora i due membri usando le definizioni degli operatori in gioco. Abbiamo

$$\langle L'\mathcal{R}_W w, v\rangle = (v, \mathcal{R}_V^{-1} L'\mathcal{R}_W w) = \overline{(\mathcal{R}_V^{-1} L'\mathcal{R}_W w, v)}$$
$$\langle \mathcal{R}_W w, Lv\rangle = (Lv, w) = \overline{(w, Lv)}.$$

Dunque $(\mathcal{R}_V^{-1} L'\mathcal{R}_W w, v) = (w, Lv)$ e il confronto con la (4.3) fornisce

$$L^* = \mathcal{R}_V^{-1} L'\mathcal{R}_W\,. \tag{4.5}$$

Se, nel caso reale, si identificano V e W ai rispettivi duali, si ritrova $L^* = L'$. In caso contrario quello è il legame fra i due operatori. Notiamo che nel caso complesso il secondo membro è la composizione di tre operatori dei quali uno lineare e due antilineari. Il prodotto, giustamente, resta lineare. Facciamo infine osservare che, quando i due operatori L' e L^* sono distinti perché non si sono identificati V e W ai rispettivi duali, il nome *aggiunto* è di solito riservato al secondo, mentre il primo viene più comunemente detto *trasposto o duale* di L. □

Cogliamo l'occasione per introdurre l'importante nozione di operatore autoaggiunto, il che corrisponde a dire che L è l'aggiunto di se stesso, cioè che $L^* = L$. L'ambito naturale è quello di un solo spazio di Hilbert.

4.5. Definizione. *Siano H uno spazio di Hilbert e $L : D(L) \subseteq H \to H$ un operatore non limitato. Si dice che H è autoaggiunto quando $L^* = L$, cioè quando*

$$D(L^*) = D(L) \quad e \quad (Lw, v) = (w, Lv) \quad \textit{per ogni } v, w \in D(L)\,. \ \square \tag{4.6}$$

Ribadiamo che la seconda delle (4.6) da sola ha un significato diverso, e si esprime dicendo che L è un *operatore simmetrico o un operatore hermitiano* a seconda che $\mathbb{K}$ sia $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$: essa afferma solo che L^* prolunga L e non che L^* e L sono lo stesso operatore. Perché L sia autoaggiunto occorre che esso sia simmetrico o hermitiano nei due casi e che il suo dominio sia sufficientemente grande, precisamente grande al punto che la formula (4.2), adattata al caso hilbertiano che stiamo considerando, non produca elementi nuovi rispetto a quelli di $D(L)$.

5. Ortogonalità

Siano V e W due spazi di Banach e $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare non limitato. Fissato $w \in W$, proprio per definizione di $R(L)$, l'equazione $Lu = w$ di incognita $u \in D(L)$ ha soluzioni se e solo se $w \in R(L)$, ma ciò non dice nulla di nuovo. Si impone pertanto il problema di trovare una caratterizzazione dell'immagine $R(L)$ comoda nelle applicazioni, e questo è l'oggetto del paragrafo. I risultati che daremo fanno intervenire l'aggiunto di L, per cui si richiede la densità del dominio, e una nozione di ortogonalità che ora introduciamo riprendendo anche una definizione che avevamo già anticipato nell'enunciato del Teorema III.3.10.

5.1. Definizione. *Siano V uno spazio normato, S un sottoinsieme non vuoto di V e S^* un sottoinsieme non vuoto di V^*. Gli insiemi*

$$S^{\perp} = \{f \in V^* : \ \langle f, x \rangle = 0 \text{ per ogni } x \in S\} \tag{5.1}$$
$$S^*_{\perp} = \{x \in V : \ \langle f, x \rangle = 0 \text{ per ogni } f \in S^*\} \tag{5.2}$$

sono detti l'ortogonale di S in V^* e l'ortogonale di S^* in V. □

5.2. Osservazione. Tali ortogonali, detti anche *annihilatori*, sono sempre sottospazi chiusi di V^* e di V rispettivamente, come mostriamo tra breve. Se poi V è uno spazio di Hilbert reale identificato al suo duale tramite l'isomorfismo di Riesz e $S^* = S$, gli insiemi $S^{\perp}$ e $S_{\perp}$ coincidono fra loro e con l'usuale ortogonale della teoria hilbertiana. Osserviamo inoltre che, se $S^* \subseteq V^*$, abbiamo $(S^*)^{\perp} \subseteq V^{**}$ e risulta $J(S^*_{\perp}) = (S^*)^{\perp} \cap J(V)$ ove J è l'isomorfismo canonico. Allora, se V è riflessivo e si interpreta J come identificazione, si ha $(S^*)^{\perp} = S^*_{\perp}$. In generale, invece, i due ortogonali non vanno confusi. In particolare l'ortogonale $S^{\perp\perp}$ dell'ortogonale $S^{\perp}$ di un sottoinsieme $S \subseteq V$ è un sottospazio chiuso di V^{**} che non va confuso con S, nemmeno quando S è un sottospazio chiuso di V, a meno che V non sia riflessivo e identificato al biduale in modo canonico. Per questo motivo abbiamo usato due notazioni diverse in (5.1) e (5.2), anche se in uno stesso discorso potrebbe non capitare di usare i due ortogonali $(S^*)^{\perp}$ e $S^*_{\perp}$ contemporaneamente. Osserviamo infine che le definizioni date dipendono dallo spazio ambiente di cui l'insieme considerato è sottoinsieme. Ad esempio, se V è a sua volta immerso in un altro spazio normato W, si hanno *due diverse nozioni di ortogonale* a seconda che si pensi S come sottoinsieme di V oppure di W: infatti i due ortogonali sono sottospazi di V^* e di W^* rispettivamente. Ciò nonostante abbiamo preferito un simbolo semplice anche se esso non evidenzia il riferimento all'ambiente.

5.3. Proposizione. *Siano V uno spazio normato, S un sottoinsieme non vuoto di V e S^* un sottoinsieme non vuoto di V^*. Allora gli ortogonali $S^{\perp}$ e $S^*_{\perp}$ sono sottospazi chiusi di V^* e di V rispettivamente. Inoltre*

$$S^{\perp} = (\operatorname{span} S)^{\perp} = (\overline{\operatorname{span}} \, S)^{\perp} \quad e \quad (S^{\perp})_{\perp} = \overline{\operatorname{span}} \, S. \ \square \tag{5.3}$$

Dimostrazione. Se $f, g \in S^{\perp}$, allora, chiaramente, anche ogni loro combinazione lineare appartiene a $S^{\perp}$. Se poi $f_n \in S^{\perp}$ per ogni n e $f_n \to f$ in V^*, allora, per ogni $x \in S$, si ha $\langle f, x \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, x \rangle = 0$ per cui $f \in S^{\perp}$. Dunque $S^{\perp}$ è un sottospazio chiuso di di V^*. Che poi $S^*_{\perp}$ sia un sottospazio chiuso di V è altrettanto immediato, in quanto esso è l'intersezione dei nuclei di tutti i funzionali che appartengono a S^* e ciascuno di tali nuclei è un sottospazio chiuso. Per quanto riguarda la prima delle (5.3), osserviamo che, da $S_1 \subseteq S_2$ segue immediatamente che $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$, per cui il $(\overline{\operatorname{span}} \, S)^{\perp} \subseteq S^{\perp}$. D'altra parte, se $f \in S^{\perp}$, si ha $\langle f, x \rangle = 0$ per ogni $x \in S$, dunque per ogni $x \in \operatorname{span} S$ in quanto f è lineare, dunque per ogni $x \in \overline{\operatorname{span}} \, S$ perché f è anche continuo, per cui $f \in (\overline{\operatorname{span}} \, S)^{\perp}$. In particolare segue che $(S^{\perp})_{\perp} = ((\overline{\operatorname{span}} \, S)^{\perp})_{\perp}$ così che la seconda delle (5.3) segue nel caso generale non appena la si sia dimostrata nel caso di un sottospazio chiuso. Sia dunque $S = V_0$ un sottospazio chiuso di V. Se $x \in V_0$ si ha $\langle f, x \rangle = 0$ per ogni $f \in V_0^{\perp}$, per cui $x \in (V_0^{\perp})_{\perp}$. Ciò mostra che $V_0 \subseteq (V_0^{\perp})_{\perp}$. Supponiamo ora $x_0 \notin V_0$ e dimostriamo che $x_0 \notin (V_0^{\perp})_{\perp}$. Siccome V_0 è un sottospazio chiuso, per il Teorema di Hahn-Banach (Corollario V.2.6), esiste $f_0 \in V^*$ tale che $\langle f_0, v \rangle = 0$ per ogni $v \in V_0$ e $\langle f_0, x_0 \rangle \neq 0$. Allora $f_0 \in V_0^{\perp}$ e $\langle f_0, x_0 \rangle \neq 0$, cioè $x_0 \notin (V_0^{\perp})_{\perp}$. □

Notiamo che l'analoga uguaglianza $(S^*_{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{span}} \, S^*$ con $S^* \subseteq V^*$ è in generale falsa, ma non andiamo oltre queste parole. Riprendiamo invece il discorso introduttivo. Consideriamo il sistema lineare $Ax = y$, ove A è una matrice reale di m righe e n colonne, $y \in \mathbb{R}^m$ è assegnato e l'incognita è $x \in \mathbb{R}^n$. Allora è ben noto che esiste almeno una soluzione se e solo se vale la condizione $\langle y^*, y \rangle = 0$ per ogni soluzione y^* del sistema $A^T y^* = 0$, ove $\langle y^*, y \rangle = \sum_{i=1}^m y_i^* y_i$. Consideriamo ora un operatore lineare $L : V \to W$ e cerchiamo condizioni per la risolubilità dell'equazione $Lv = w$ ove $w \in W$ è assegnato e $v \in V$ è l'incognita. Se gli spazi V e W sono di dimensione finita, fissate due basi in V e W, l'operatore L si rappresenta per mezzo di una matrice A e, se in V^* e W^* si prendono le basi duali corrispondenti, L^* si rappresenta mediante la matrice trasposta. Pertanto siamo ricondotti alla situazione precedente e possiamo dire che l'equazione $Lv = w$ ha soluzioni se e solo se $\langle w^*, w\rangle = 0$ per ogni soluzione w^* dell'equazione $L^* w^* = 0$. In altre parole vale la formula

$$R(L) = N(L^*)_\perp . \tag{5.4}$$

In dimensione infinita, tuttavia, le cose vanno diversamente.

5.4. Esempio. Se V è immerso con continuità in W e denso in W ma diverso da W e L è l'immersione, allora l'aggiunto L^* è lineare e continuo con dominio W^* e opera come segue: se $w^* \in W^*$, l'immagine $L^* w^*$ è la restrizione di w^* a V. Allora, siccome V è denso in W, L^* è iniettivo e l'equazione $L^* w^* = 0$ ha l'unica soluzione $w^* = 0$. Dunque il secondo membro della (5.4) è l'intero W mentre il primo membro è V. □

Si noti che, nel caso dell'esempio, $R(L)$ non è un chiuso di W. Il risultato successivo lega la validità della (5.4) proprio al fatto che l'immagine $R(L)$ sia chiusa.

5.5. Teorema. *Siano V e W due spazi normati e $L : D(L) \subseteq V \to W$ lineare non limitato con dominio denso in V. Allora*

$$\overline{R(L)} = N(L^*)_\perp \tag{5.5}$$

In particolare vale la (5.4) se e solo se il sottospazio $R(L)$ è chiuso in W. □

Dimostrazione. Dimostriamo la (5.5) controllando dapprima che

$$N(L^*) = R(L)^\perp . \tag{5.6}$$

Sono via via equivalenti le condizioni: *i)* $w^* \in N(L^*)$; *ii)* $w^* \in D(L^*)$ e $\langle L^* w^*, v\rangle = 0$ per ogni $v \in V$; *iii)* $w^* \in D(L^*)$ e $\langle L^* w^*, v\rangle = 0$ per ogni $v \in D(L)$; *iv)* $w^* \in D(L^*)$ e $\langle w^*, Lv\rangle = 0$ per ogni $v \in D(L)$; *v)* $w^* \in W^*$ e $\langle w^*, Lv\rangle = 0$ per ogni $v \in D(L)$; *vi)* $w^* \in W^*$ e $\langle w^*, w\rangle = 0$ per ogni $w \in R(L)$; *vii)* $w^* \in R(L)^\perp$. Dunque vale la (5.6). Grazie alla seconda delle (5.3) deduciamo

$$N(L^*)_\perp = (R(L)^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}\, R(L) = \overline{R(L)}$$

cioè la (5.5). Valga ora la (5.4). Confrontandola con la (5.5), deduciamo che $R(L) = \overline{R(L)}$, cioè che l'immagine $R(L)$ è chiusa. Viceversa, se $R(L)$ è chiusa, la (5.4) viene a coincidere con la (5.5), che è stata dimostrata in ogni caso. Dunque vale anche la (5.4). □

5.6. Corollario. *Siano V e W due spazi normati e $L : D(L) \subseteq V \to W$ lineare con dominio denso in V. Allora L è suriettivo se e solo se*

$$\textit{l'immagine } R(L) \textit{ è chiusa in } W \quad \textit{e} \quad \textit{l'aggiunto } L^* \textit{ è iniettivo.} \ \square \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Se valgono le (5.7), allora la (5.5) fornisce $R(L) = \overline{R(L)} = N(L^*)_\perp = \{0\}_\perp = W$. Viceversa, supponiamo L suriettivo. Allora l'immagine coincide con W e dunque è chiusa. D'altra parte, sempre dalla (5.5), deduciamo che $N(L^*)_\perp = W$, per cui, se $w^* \in N(L^*)$, si ha $\langle w^*, w\rangle = 0$ per ogni $w \in W$, da cui $w^* = 0$. Ciò mostra che l'unico elemento di $N(L^*)$ è lo zero, cioè che L^* è iniettivo. □

6. Operatori chiusi

Dunque abbiamo spostato il problema: trovare condizioni che assicurino la chiusura dell'immagine. La ricerca di risultati comodi nelle applicazioni che garantiscano la validità di questa condizione porta a una classe particolare di operatori non limitati, che è l'oggetto del paragrafo.

6.1. Definizione. *Siano V e W due spazi normati e $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare non limitato. Si dice che L è un operatore chiuso quando il suo grafico $G(L)$ è un sottospazio chiuso del prodotto $V \times W$, cioè quando, per ogni successione $\{v_n\}$ di elementi di $D(L)$, vale l'implicazione*

$$\text{da} \quad v_n \to v \ \text{ in } V \ \text{ e } \ Lv_n \to w \ \text{ in } W \quad \text{segue} \quad v \in D(L) \ \text{ e } \ w = Lv\,. \ \square \tag{6.1}$$

6.2. Osservazione. Non è inutile osservare che, se V e W sono spazi di Banach, allora

$$\textit{un operatore lineare definito su tutto } V \textit{ è chiuso se e solo se è continuo.} \tag{6.2}$$

Infatti, se L è continuo, vale la (6.1). Viceversa, se L è chiuso, allora L è continuo per il Teorema del grafico chiuso. Se invece l'operatore L *non è definito dappertutto*, esso può essere contemporaneamente non limitato e chiuso e avere dominio denso in V e diverso da V, come mostrano gli esercizi che presentiamo tra breve. Ora dimostriamo due proprietà di carattere generale.

6.3. Proposizione. *Siano V e W due spazi normati e $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare chiuso. Allora il suo nucleo $N(L)$ è chiuso in V.* $\square$

Dimostrazione. Se infatti $\{v_n\}$ è una successione di elementi di $N(L)$ che converge a v in V, si ha $v_n \in D(L)$ e $Lv_n = 0$ per ogni n e la (6.1) garantisce che $v \in D(L)$ e $Lv = 0$, cioè che $v \in N(L)$. $\square$

6.4. Proposizione. *Siano V e W due spazi normati e $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare il cui dominio sia denso in V. Allora il suo aggiunto $L^* : D(L^*) \subseteq W^* \to V^*$ è un operatore chiuso.* $\square$

Dimostrazione. Siano $w_n^* \in D(L^*)$ tali che $w_n^* \to w^*$ in W^* e $L^* w_n^* \to v^*$ in V^*. Allora, per ogni $v \in D(L)$ risulta

$$\langle v^*, v \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle L^* w_n^*, v \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle w_n^*, Lv \rangle = \langle w^*, Lv \rangle$$

da cui $w^* \in D(L^*)$ e $v^* = L^* w^*$. Dunque vale la (6.1) per l'operatore L^*. $\square$

6.5. Esempio. Prendiamo $V = W = C^0[0,1]$, entrambi con la norma del massimo. Definiamo $D(L) = C^1[0,1]$ e come L prendiamo l'operatore di derivazione. Allora L è chiuso. Infatti vale la (6.1). Più in generale, se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$, prendiamo $V = C^0(\overline{\Omega})$ e $W = (C^0(\overline{\Omega}))^d$, sempre con la norma del massimo, e definiamo $D(L) = C^1(\overline{\Omega})$ e $Lv = \nabla v$ per $v \in D(L)$. Allora ancora L è chiuso, dato che vale la (6.1). Si riveda infatti la dimostrazione del Teorema II.2.7.

6.6. Esempio. Analogamente, se $p \in [1, +\infty)$ e Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$, prendiamo $V = L^p(\Omega)$ e $W = (L^p(\Omega))^d$ con le norme usuali e definiamo $D(L) = W^{1,1}(\Omega)$ e $Lv = \nabla v$ per $v \in D(L)$. Anche in questo caso L è chiuso, dato che vale la (6.1) (dimostrazione del Teorema II.2.11).

6.7. Esercizio. Si prenda $V = W = C^0[0,1]$, entrambi con la norma del massimo. Si ponga $D(L) = C^2[0,1]$ e $Lv = v'$ per $v \in D(L)$ e si decida se L è chiuso o meno.

6.8. Esercizio. Si prenda $V = W = C^0[0,1]$, entrambi con la norma del massimo. Si ponga $D(L) = C^2[0,1]$ e $Lv = v''$ per $v \in D(L)$ e si decida se L è chiuso o meno.

6.9. Esercizio. Siano $V = L^1(\Omega)$ e $W = L^2(\Omega)$ con le norme usuali, $D(L) = V \cap W$ e $Lv = v$ per $v \in D(L)$. Si decida se L è chiuso o meno. L'operatore L è continuo? Che cosa cambia se i due spazi $L^p(\Omega)$ vengono sostituiti dai corrispondenti ℓ^p? $\square$

Soffermiamoci un attimo per dare alcune condizioni, spesso comodamente verificabili, perché un operatore lineare sia chiuso. Premettiamo una costruzione di carattere generale.

6.10. Definizione. *Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi normati e $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare. La norma in $D(L)$ definita dalla formula*

$$\|x\| = \|x\|_V + \|Lx\|_W \quad \textit{per } x \in D(L) \tag{6.3}$$

si chiama norma del grafico. $\square$

Il fatto che (6.3) definisca effettivamente una norma e il motivo del nome che le abbiamo attribuito sono chiariti nel risultato successivo. Naturalmente, poi, si chiamano con lo stesso nome anche altre norme, equivalenti alla (6.3), che si usano comunemente. Ad esempio

$$\|x\| = \max\{\|x\|_V, \|Lx\|_W\} \quad \text{oppure} \quad \|x\|_G = (\|x\|_V^2 + \|Lx\|_W^2)^{1/2}. \tag{6.4}$$

La seconda di queste è prehilbertiana se tali sono le norme di V e di W. Infatti, la formula $(x,y) = (x,y)_V + (Lx, Ly)_W$, ove $(\cdot\,,\cdot)_V$ e $(\cdot\,,\cdot)_W$ sono i prodotti scalari che inducono le date norme di V e di W, definisce un prodotto scalare in $D(L)$ che induce la norma considerata.

Nel risultato successivo, quando si parla di isometria, resta inteso che la norma in $V \times W$ è definita dalla formula $\|(v,w)\| = \|v\|_V + \|w\|_W$. Se si prendono altre norme equivalenti in $D(L)$, ad esempio una delle (6.4) o altre analoghe, tutto continua a valere se si sceglie coerentemente la norma nello spazio prodotto.

Riteniamo inoltre più che opportuno osservare che lo stesso risultato consente, in particolare, di vedere ogni operatore $L : D(L) \subseteq V \to W$ contemporaneamente come

i) operatore non limitato da V in W
ii) operatore lineare e continuo da $D(L)$ in W

nel primo caso nel senso letterale della Definizione III.1.11, nel secondo rispetto alla norma del grafico in $D(L)$ e alla norma data in W. Si noti però che, nelle due interpretazioni *i*) e *ii*), la nozione di operatore aggiunto è diversa: *i*) l'aggiunto è un operatore lineare, di solito non limitato, definito in un sottospazio di W^* a valori in V^*; *ii*) l'aggiunto è un operatore lineare e continuo definito su tutto W^* e a valori nel duale dello spazio ottenuto munendo $D(L)$ della norma del grafico. Nei casi concreti, le due possibilità bilanciano vantaggi e svantaggi: nel primo caso può essere facile trattare con i duali, ma vi è il problema della determinazione del dominio dell'aggiunto; nel secondo tale problema non sussiste, ma la rappresentazione dell'aggiunto in termini concreti è resa complessa dalla natura del suo codominio.

6.11. Teorema. *Nelle ipotesi della Definizione 6.10, la* (6.3) *definisce una norma che rende continuo l'operatore* L *da* $(D(L), \|\cdot\|_G)$ *in* $(W, \|\cdot\|_W)$. *Inoltre l'applicazione* $L_G : D(L) \to G(L)$ *definita dalla formula* $L_G(x) = (x, Lx)$ *per* $x \in D(L)$ *è un isomorfismo isometrico di* $(D(L), \|\cdot\|_G)$ *sul grafico* $G(L)$ *di* L *con la norma indotta da* $V \times W$. *Infine, se* V *e* W *sono spazi di Banach, allora* $(D(L), \|\cdot\|_G)$ *è di Banach se e solo se* $L : D(L) \subseteq V \to W$ *è un operatore chiuso.* □

Dimostrazione. La verifica che la (6.3) effettivamente definisca una norma è di tipo standard. Vale poi banalmente la disuguaglianza $\|Lx\|_W \le \|x\|_G$ per ogni $x \in D(L)$, la quale mostra che L è continuo da $(D(L), \|\cdot\|_G)$ in $(W, \|\cdot\|_W)$. Per quanto riguarda il resto del teorema, il fatto che l'applicazione L_G sia un isomorfismo isometrico è evidente, data la linearità di L. Segue allora anche l'ultima parte. Infatti $D(L)$ è completo rispetto alla norma del grafico se e solo se $G(L)$, che è uno sottospazio dello spazio di Banach $V \times W$, è completo rispetto alla norma indotta e ciò avviene se e solo se $G(L)$ è un sottoinsieme chiuso di $V \times W$ (Teorema II.1.6). □

6.12. Proposizione. *Siano* $(V, \|\cdot\|_V)$ *e* $(W, \|\cdot\|_W)$ *due spazi di Banach e* $L : D(L) \subseteq V \to W$ *un operatore lineare. Si supponga che esista una norma* $\|\cdot\|_{D(L)}$ *in* $D(L)$ *che verifichi le tre condizioni seguenti: i*) $(D(L), \|\cdot\|_{D(L)})$ *è completo; ii*) *l'immersione di* $(D(L), \|\cdot\|_{D(L)})$ *in* $(V, \|\cdot\|_V)$ *è continua; iii*) L *è continuo da* $(D(L), \|\cdot\|_{D(L)})$ *in* $(W, \|\cdot\|_W)$. *Allora* L *è chiuso se e solo se esiste una costante* $M > 0$ *tale che*

$$\|v\|_{D(L)} \le M(\|v\|_V + \|Lv\|_W) \quad \text{per ogni } v \in D(L)\,. \;\square \tag{6.5}$$

Dimostrazione. Abbiamo $\|v\|_V \le c\|v\|_{D(L)}$ e $\|Lv\|_W \le c\|v\|_{D(L)}$ per una certa costante c e per ogni $v \in D(L)$ grazie alle ipotesi *ii*) e *iii*) rispettivamente. Deduciamo che

$$\|v\|_G \le 2c\|v\|_{D(L)} \quad \text{per ogni } v \in D(L) \tag{6.6}$$

ove $\|\cdot\|_G$ è la norma del grafico in $D(L)$ definita dalla formula $\|v\|_G = \|v\|_V + \|Lv\|_W$. Valga ora la (6.5). Allora le due norme $\|\cdot\|_{D(L)}$ e $\|\cdot\|_G$ sono equivalenti e la completezza data dall'ipotesi $i)$ implica la completezza di $D(L)$ anche rispetto alla norma del grafico. Dunque L è chiuso per il Teorema 6.11. Viceversa supponiamo L chiuso. Allora, per lo stesso teorema, $D(L)$ è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_G$. D'altra parte valgono la $i)$ e la disuguaglianza (6.6) già dimostrata in ogni caso. Per il Teorema dell'applicazione aperta (Corollario VII.3.6) le due norme $\|\cdot\|_{D(L)}$ e $\|\cdot\|_G$ sono equivalenti e, di conseguenza, esiste una costante M che rende vera la (6.5). □

6.13. Proposizione. *Siano V e W due spazi normati e $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare. Si supponga che W sia immerso con continuità in uno spazio vettoriale topologico $\mathcal{Z}$ e che L abbia un prolungamento $L_{\mathcal{Z}} : V \to \mathcal{Z}$ lineare e continuo tale che $D(L) = L_{\mathcal{Z}}^{-1}(W)$. Allora L è un operatore chiuso.* □

Dimostrazione. Verifichiamo la (6.1). Supponiamo dunque $v_n \in D(L)$ per ogni n, $v_n \to v$ in V e $Lv_n \to w$ in W. Dalla prima convergenza deduciamo che $L_{\mathcal{Z}}v_n \to L_{\mathcal{Z}}v$ in $\mathcal{Z}$ per la continuità di $L_{\mathcal{Z}}$. Dalla seconda, che si riscrive come $L_{\mathcal{Z}}v_n \to w$ in W dato che $L_{\mathcal{Z}}$ prolunga L, deduciamo che $L_{\mathcal{Z}}v_n \to w$ in $\mathcal{Z}$ grazie all'immersione continua $W \subseteq \mathcal{Z}$. Per l'unicità del limite in $\mathcal{Z}$ concludiamo che $w = L_{\mathcal{Z}}v$. Ma $w \in W$, da cui $v \in L_{\mathcal{Z}}^{-1}(W) = D(L)$ e quindi anche $w = L_{\mathcal{Z}}v = Lv$. □

6.14. Esempio (spazi di Sobolev). Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Siano k un intero non negativo e $p \in [1, +\infty]$. Sia poi N il numero degli operatori D^α di derivazione D^α tali che $|\alpha| \le k$ e si supponga che tali operatori siano ordinati in qualche modo così che la loro N-upla abbia un significato preciso. Definiamo $L : D(L) \subseteq L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)^N$ così: $D(L) = W^{k,p}(\Omega)$ e $Lv = \{D^\alpha v\}$ per $v \in D(L)$. Otteniamo un operatore chiuso. Per chi ha un minimo di dimestichezza con la teoria delle distribuzioni la verifica più semplice passa per la Proposizione 6.13: si prende $V = L^p(\Omega)$, $W = L^p(\Omega)^N$ e $\mathcal{Z} = \mathcal{D}'(\Omega)^N$ e come estensione di L l'operatore $v \mapsto \{D^\alpha v\}$ da V in $\mathcal{Z}$ (si riveda la Sezione I.5.66). Per questo motivo abbiamo segnalato la proposizione citata. Tuttavia possiamo procedere direttamente controllando che vale la (6.1) nel caso in esame. Supponiamo che $v_n \in D(L)$ per ogni n e che $v_n \to v$ in V e $Lv_n \to w = \{w_\alpha\}$ in W. Allora, per $|\alpha| \le k$ e $z \in C_c^\infty(\Omega)$, abbiamo

$$\int_\Omega w_\alpha \, z \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (D^\alpha v_n) \, z \, dx = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_n \, D^\alpha z \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \, D^\alpha z \, dx$$

da cui $v \in W^{k,p}(\Omega) = D(L)$ e $w = \{w_\alpha\} = \{D^\alpha v\} = Lv$. Dunque L è un operatore chiuso. Per questo motivo, talora, in modo molto sbrigativo, si introduce $W^{k,p}(\Omega)$ semplicemente dicendo che si munisce della norma del grafico lo spazio delle funzioni $v \in L^p(\Omega)$ le cui derivate nel senso delle distribuzioni fino all'ordine k appartengono a $L^p(\Omega)$ e che la completezza è ovvia.

6.15. Operatori chiudibili. Siano V e W due spazi di Banach e $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare. Possiamo costruire lo spazio normato $D(L)$ con la norma del grafico, che denotiamo con $\|\cdot\|_L$ per chiarezza. Tuttavia tale spazio in generale non sarà completo. Ora può avvenire o meno che la chiusura del grafico di L in $V \times W$ sia essa stessa il grafico di un operatore lineare $\widetilde{L}$. Se ciò accade, e in tal caso si dice che L è *chiudibile* oppure *prechiuso*, l'operatore $\widetilde{L}$, detto *chiusura di* L, è automaticamente chiuso e lo spazio $D(\widetilde{L})$ con la norma del grafico, che denotiamo con $\|\cdot\|_{\widetilde{L}}$, è di Banach. D'altra parte si vede facilmente che $D(L)$ è denso in $(D(\widetilde{L}), \|\cdot\|_{\widetilde{L}})$. Dunque lo spazio di Banach $(D(\widetilde{L}), \|\cdot\|_{\widetilde{L}})$ è un completamento dello spazio normato $(D(L), \|\cdot\|_L)$.

Così, se ci mettiamo nella situazione dell'Esercizio 6.7, otteniamo un operatore chiudibile, la sua chiusura essendo l'operatore di derivazione con dominio $C^1[0,1]$. In altre parole, $C^1[0,1]$ con la sua norma naturale è il completamento dello spazio normato $C^2[0,1]$ munito della norma indotta dalla norma standard di $C^1[0,1]$.

Questa stessa situazione si presenta nell'Esempio II.3.19, nel quale abbiamo introdotto gli spazi $H^{k,p}(\Omega)$: possiamo infatti prendere $V = L^p(\Omega)$, $W = (L^p(\Omega))^N$ ove N è il numero delle derivate di ordine $\le k$, $D(L) = C^{k,p}(\Omega)$ e $Lv = \{D^\alpha v\}$, la N-upla delle derivate di v di ordine $\leq k$ ordinate in qualche modo. Allora $H^{k,p}(\Omega)$ è proprio il dominio della chiusura $\widetilde{L}$ dell'operatore L, chiusura che si esprime con la stessa formula $v \mapsto \{D^\alpha v\}$ ove ora $v \in H^{k,p}(\Omega)$ e le derivate sono intese come limiti in $L^p(\Omega)$ di derivate di approssimanti regolari (derivate forti). A posteriori tali derivate sono esattamente le derivate deboli (Teorema "H=W").

Un esempio di operatore lineare non chiudibile è invece il seguente: prendiamo, in ambito reale, $V = L^1(0,1)$, $W = \mathbb{R}$ e $D(L) = C^0[0,1]$ e definiamo $Lv = v(0)$ per $v \in D(L)$. Allora L è lineare e la chiusura del suo grafico in $V \times \mathbb{R}$ è l'intero spazio $V \times \mathbb{R}$, che ovviamente non è un grafico. Infatti, presa ad arbitrio la coppia $(v, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$, esiste una successione $\{v_n\}$ di funzioni di $C_c^\infty(0,1)$ che converge a v in V. Allora converge a v in V anche la successione $\{u_n\}$ data dalla formula $u_n(x) = v_n(x) + \lambda(1 - nx)^+$. D'altra parte $u_n \in D(L)$ e $Lu_n = \lambda$ per ogni n, per cui $\{(u_n, Lu_n)\}$ è una successione di elementi di $G(L)$ che converge a (v, λ) nel prodotto.

7. Immagini chiuse

Sappiamo che la (5.4) è legata al fatto che l'immagine dell'operatore in questione sia chiusa. La discussione di questa proprietà è l'oggetto del paragrafo. Diamo risultati in due contesti differenti: *i)* il primo tipo riguarda gli operatori chiusi, nell'ambito dei quali caratterizziamo la proprietà di chiusura dell'immagine; *ii)* il secondo fa intervenire la nozione di operatore compatto.

Il primo risultato nella direzione *i)*, che enunciamo senza dimostrarlo e che pure è dovuto a Banach, completa, nel caso di operatori chiusi, il precedente Teorema 5.5 più semplice. Noi, tuttavia, ci accontenteremo di abbinare il Teorema 5.5 al risultato successivo il quale, sempre nell'ambito degli operatori chiusi, caratterizza quelli a immagine chiusa per mezzo di condizioni che, nelle applicazioni concrete, consistono in stime a priori.

7.1. Teorema (dell'immagine chiusa). *Siano V e W due spazi di Banach. Sia inoltre $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare, chiuso, con dominio denso in V. Allora sono equivalenti fra loro le condizioni seguenti*

$$i)\ R(L) \text{ è chiuso}, \quad ii)\ R(L^*) \text{ è chiuso}, \quad iii)\ R(L) = N(L^*)_\perp, \quad iv)\ R(L^*) = N(L)^\perp \tag{7.1}$$

ove le proprietà di chiusura in $i)$ e in $ii)$ sono intese in W e in V^* rispettivamente. □

7.2. Teorema. *Siano V e W due spazi di Banach e sia $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare chiuso. Allora il sottospazio $R(L)$ è chiuso in W se e solo se esiste una costante M tale che*

$$\inf\{\|v\| : \ v \in D(L) \text{ e } Lv = Lu\} \leq M\|Lu\| \quad \text{per ogni } u \in D(L) . \ \square \tag{7.2}$$

Dimostrazione. Poniamo per comodità $V_0 = D(L)$ e muniamo V_0 della norma del grafico. Per il Teorema 6.11, V_0 è uno spazio di Banach e risulta $L \in \mathcal{L}(V_0; W)$. Applicato allora il punto *iv)* del Teorema 3.19 agli spazi V_0 e W e all'operatore L e seguite le altre sue notazioni, deduciamo che $R(L)$ è chiuso in W se e solo se l'applicazione $I^{-1} : R(L) \to V_\bullet$ è continua. D'altra parte ora mostriamo che la (7.2) equivale all'esistenza di $M > 0$ tale che

$$\inf\{\|v\|_G : \ v \in D(L) \text{ e } Lv = Lu\} \leq M\|Lu\| \quad \text{per ogni } u \in D(L) \tag{7.3}$$

ove $\|\cdot\|_G$ è data dalla (6.3). Infatti, fissato $u \in D(L)$, se $v \in D(L)$ e $Lv = Lu$, si ha $\|v\|_G = \|v\| + \|Lu\|$. Allora, se denotiamo con λ e λ_G i primi membri delle disuguaglianze (7.2) e (7.3), abbiamo $\lambda_G = \lambda + \|Lu\|$ e l'equivalenza delle due condizioni diventa ovvia. Basta pertanto verificare che l'esistenza di M verificante la (7.3) equivale alla continuità di I^{-1}. Esplicitiamo le quantità della (7.3), osservando che, per ogni $u, v \in D(L) = V_0$, l'uguaglianza $Lu = Lv$ equivale a $u - v \in N(L)$, vale a dire all'uguaglianza $\pi v = \pi u$. Per ogni $x \in V_\bullet$ e per ogni $u \in x$ abbiamo dunque

$$\inf\{\|v\|_G : \ v \in D(L) \text{ e } Lv = Lu\} = \|\pi u\|_\bullet = \|x\|_\bullet \quad \text{e} \quad Lu = L_\bullet x = Ix.$$

Pertanto la (7.3) diventa

$$\|x\|_\bullet \leq M\|Ix\| \quad \text{per ogni } x \in V_\bullet \quad \text{cioè} \quad \|I^{-1}w\|_\bullet \leq M\|w\| \quad \text{per ogni } w \in R(L)$$

e quindi l'esistenza di M che rende vera la (7.3) equivale alla continuità di I^{-1}. □

7.3. Corollario. *Siano V e W due spazi di Banach e sia $L : D(L) \subseteq V \to W$ un operatore lineare chiuso. Allora L è iniettivo e ha immagine chiusa in W se e solo se esiste M tale che*

$$\|u\| \leq M\|Lu\| \quad \textit{per ogni } u \in D(L)\,. \; \square \tag{7.4}$$

Dimostrazione. Supponiamo L iniettivo con immagine chiusa. Allora, per il Teorema 7.2, vale la (7.2). Ma questa coincide con la (7.4) dato che L è iniettivo. Dunque vale la (7.4). Viceversa, supponiamo che valga la (7.4). Allora $N(L)$ si riduce al vettore nullo. Segue che L è iniettivo. Ma allora vale anche la (7.2), dato che essa viene a coincidere con la (7.4) valida per ipotesi. Concludiamo che L ha anche immagine chiusa per il Teorema 7.2. □

7.4. Osservazione. Notiamo che la (7.2) viene spesso scritta in una forma diversa, precisamente

$$\operatorname{dist}(u, N(L)) \leq M\|Lu\| \quad \text{per ogni } u \in D(L)$$

equivalente alla (7.2). Fissato infatti $u \in D(L)$, un elemento $v \in V$ appartiene a $D(L)$ e verifica $Lv = Lu$ se e solo se ha la forma $v = u - z$ con $z \in N(L)$, per cui abbiamo

$$\inf\{\|v\| : \; v \in D(L) \text{ e } Lv = Lu\} = \inf\{\|u - z\| : \; z \in N(L)\} = \operatorname{dist}(u, N(L)).$$

Tornando a un'ottica vicina alla (7.2), possiamo scrivere in modo equivalente

$$\begin{aligned} &\text{esiste } M > 0 \text{ tale che, per ogni } u \in D(L), \text{ esista } v \in D(L) \text{ tale che} \\ &\quad Lv = Lu \quad \text{e} \quad \|v\| \leq M\|Lu\|. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Infatti questa condizione implica la (7.2) con lo stesso M; viceversa, se la (7.2) vale con un certo $M > 0$, possiamo prendere $2M$ al posto di M nella (7.5), semplicemente applicando la definizione di estremo inferiore se $Lu \neq 0$ e scegliendo $v = 0$ se $Lu = 0$. La (7.4), poi, resta chiaramente un caso particolare della (7.5), quello in cui è possibile scegliere proprio $v = u$. Notiamo che la verifica della (7.5) corrisponde a considerare l'equazione $Lv = f$ di incognita v, *ipotizzando a priori che una soluzione u esista* e di cercare $z \in N(L)$ in modo che $v = u + z$ realizzi la stima voluta con M indipendente da f. La (7.4), invece, corrisponde a considerare l'equazione $Lu = f$ e a cercare una *stima a priori* del tipo $\|u\|_V \leq M\|f\|_W$, sempre con M indipendente da f, per *ogni eventuale soluzione u, anche senza preoccuparsi dell'esistenza o meno delle soluzioni*.

7.5. Applicazione. Combiniamo l'uso del Teorema 7.3 con la riflessività degli spazi di Hilbert (Teorema VI.1.2) per dare una dimostrazione alternativa del Teorema IV.1.24 di Lax-Milgram. Conservando le ipotesi e le notazioni del teorema citato, applichiamo la Proposizione III.2.8 e introduciamo l'operatore $L \in \mathcal{L}(H; H^*)$, che è chiuso in quanto continuo, associato alla forma a. Abbiamo pertanto $\langle Lu, v\rangle = a(u, v)$ per ogni $u, v \in H$. Deduciamo che $\langle Lu, u\rangle = a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$ per ogni $u \in H$ e quindi che

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}\,\langle Lu, u\rangle \leq \frac{1}{\alpha}\,\|Lu\|_*\,\|u\| \quad \text{da cui} \quad \|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\,\|Lu\|_* \quad \text{per ogni } u \in H\,.$$

Dunque vale la (7.4) e concludiamo sia che L è iniettivo sia che l'immagine $R(L)$ è chiusa in H^*. In particolare vale la (5.4). Consideriamo l'aggiunto $L^* \in \mathcal{L}(H^{**}; H^*)$. Risulta

$$\langle L^* u^{**}, v\rangle = \langle u^{**}, Lv\rangle \quad \text{per ogni } u^{**} \in H^{**} \text{ e } v \in H\,.$$

Supponiamo ora $L^* u^{**} = 0$ e, detto $J : H \to H^{**}$ l'isomorfismo canonico, che è suriettivo per la riflessività di H, prendiamo $u = v = J^{-1}u^{**}$. Abbiamo allora

$$0 = \langle L^* u^{**}, v\rangle = \langle L^* Ju, v\rangle = \langle Ju, Lv\rangle = \langle Lv, u\rangle = a(v, u) = a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2 = \alpha\|u^{**}\|_{**}^2$$

e deduciamo che $u^{**} = 0$. Concludiamo che $N(L^*) = \{0\}$ e la (5.4) fornisce $R(L) = H^*$. □

7.6. Esempio (un problema di Neumann non coercivo). Come applicazione concreta studiamo un problema ellittico ancora nell'ottica dell'Esempio IV.1.25, ma ora non coercivo. Supponiamo che Ω sia un aperto limitato connesso e regolare di $\mathbb{R}^d$, poniamo per comodità $\Gamma = \partial\Omega$ e denotiamo con $\mathbf{n}$ la normale esterna. Supponiamo che la matrice A, con coefficienti $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, sia uniformemente ellittica (vedi (IV.1.15)) e scegliamo $b = 0$ e $c = 0$. Assegnate due funzioni f e g definite in Ω e su Γ rispettivamente, cerchiamo una funzione u definita in Ω e verificante

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega \qquad \text{e} \qquad (A\nabla u)\cdot\mathbf{n} = g \quad \text{su } \Gamma\,. \tag{7.6}$$

Segnaliamo che la condizione al bordo nella (7.6) è detta *condizione di Neumann*. Tutto ciò è formale a va precisato. Tuttavia noi intendiamo costruire la formulazione variazionale del problema, per cui procediamo formalmente come segue. Supponiamo che u sia una una soluzione regolare di (7.6), moltiplichiamo per la generica funzione regolare v i due membri dell'equazione (7.6) e integriamo l'uguaglianza ottenuta su Ω. Allora, grazie alla (I.5.35) con $\mathbf{w} = A\nabla u$, otteniamo

$$\begin{aligned}&\int_\Omega fv\,dx = \int_\Omega (-\operatorname{div}(A\nabla u))\,v\,dx = \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx - \int_\Gamma (A\nabla u)\cdot\mathbf{n}\,v\,dS \\ &= \int_\Gamma (A\nabla u)\cdot\mathbf{n}\,v\,dS - \int_\Gamma gv\,dS\end{aligned}$$

per cui u verifica

$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma gv\,dS \quad \text{per ogni funzione regolare } v\,. \tag{7.7}$$

Siccome il primo membro della (7.7) ha senso non appena u e v appartengano ad $H^1(\Omega)$ dato che stiamo supponendo i coefficienti di A misurabili e limitati, siamo indotti a precisare non tanto il sistema (7.6) quanto piuttosto il problema (7.7). Dunque, il problema variazionale che consideriamo è quello di trovare u verificante

$$u \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx = \langle F, v\rangle \quad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega) \tag{7.8}$$

ove, in generale, il dato F è assegnato in $H^1(\Omega)^*$ e il caso particolare del secondo membro della (7.7) si ottiene supponendo $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Gamma)$ e definendo F mediante la formula

$$F(v) = \int_\Omega fv\,dx + \int_\Gamma gv\,dS \quad \text{per } v \in H^1(\Omega)\,. \tag{7.9}$$

Controlliamo che, effettivamente, tale formula definisce $F \in H^1(\Omega)^*$. Dobbiamo verificare che il secondo membro ha senso e dipende da v in modo lineare e continuo rispetto alla topologia di $H^1(\Omega)$. A questo proposito ricordiamo il Teorema di traccia (III.1.1), in base al quale ad ogni $v \in H^1(\Omega)$ è associato un ben definito elemento $v|_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ (questo è il senso del secondo fattore dell'integrando dell'integrale su Γ della (7.9) e l'integrale ha senso) in modo che l'operatore di traccia $v \mapsto v|_\Gamma$ sia lineare e continuo da $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Gamma)$. Dunque $F(v)$ ha senso e, ovviamente, dipende linearmente da v. Detta M la norma dell'operatore di traccia, abbiamo poi

$$|F(v)| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\|v\|_{L^2(\Gamma)} \le (\|f\|_{L^2(\Omega)} + M\|g\|_{L^2(\Gamma)})\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

e quindi F è anche continuo, cioè appartiene ad $H^1(\Omega)^*$. Studiamo dunque il problema (7.8). La scelta naturale del quadro in cui operare è la seguente:

$$D(L) = V = H^1(\Omega), \quad W = V^* \quad \text{e} \quad \langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx \quad \text{per } u, v \in V\,. \tag{7.10}$$

Si osservi che la formula effettivamente definisce $L \in \mathcal{L}(V;V^*)$ e che la (7.8) si riscrive come $Lu = F$. Siccome L non è iniettivo dato che $L1 = 0$ (per ogni $k \in \mathbb{R}$, denotiamo con k anche la corrispondente funzione costante), per vedere quando la soluzione esiste cerchiamo di abbinare i Teoremi 5.5 e 7.2 (non vi sono speranze di verificare la (7.4)). A tale scopo, osservato che L è chiuso in quanto continuo su tutto lo spazio, cerchiamo di verificare la (7.2) nella forma (7.5). Preliminarmente conviene caratterizzare il nucleo $N(L)$, cioè l'insieme delle u verificanti

$$u \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx = 0 \quad \text{per } v \in H^1(\Omega)\,. \tag{7.11}$$

Chiaramente ogni costante va bene. Viceversa, u verifichi la (7.11). Osservato che la condizione di ellitticità (IV.1.15) implica

$$\int_\Omega (A\nabla v)\cdot\nabla v\,dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \quad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega) \tag{7.12}$$

e scelta $v = u$ nella (7.11), otteniamo $\nabla u = 0$ q.o. in Ω. Ricordato che stiamo supponendo Ω connesso, deduciamo che u è una costante per la (I.5.52). Detto ciò, immaginiamo di fissare $u \in V$ e scriviamo la (7.8) pensando a $F = Lu$: dobbiamo riuscire a scegliere $v \in V$ con $Lv = Lu$ in modo da ottenere una stima del tipo $\|v\| \leq M\|F\|_*$ con una costante M che non dipende da F e da u. Per quanto appena visto le scelte ammissibili di v sono del tipo $v = u - c$ con $c \in \mathbb{R}$. Scegliendo appunto $v = u - c$ nella (7.8) e applicando la (7.12) abbiamo

$$\begin{aligned} \alpha \int_\Omega |\nabla(u-c)|^2 &\leq \int_\Omega (A\nabla(u-c))\cdot\nabla(u-c)\,dx \\ &= \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla(u-c)\,dx = \langle F, u-c\rangle \leq \|F\|_*\|u-c\| \end{aligned}$$

e risulta chiaro che, perché si possa trarre qualche conclusione, occorre una stima del tipo: il primo membro è più grande di un multiplo di $\|u-c\|^2$. Ciò è falso per funzioni generiche, ovviamente, ma vero se $u - c$ ha, ad esempio, media nulla in Ω grazie alle disuguaglianze di tipo Poincaré, in questo caso alla seconda delle (IV.1.19) con $\Omega_0 = \Omega$ (Esercizio IV.1.31). Allora, se prendiamo $c = u_\Omega$, la media di u in Ω, otteniamo per una certa costante M_Ω

$$\|u - u_\Omega\|^2 = \|u - u_\Omega\|_{1,2}^2 \leq M_\Omega \int_\Omega |\nabla(u-u_\Omega)|^2 \leq \frac{M_\Omega}{\alpha}\,\|F\|_*\|u-u_\Omega\|$$

da cui $\|u - u_\Omega\| \leq (M_\Omega/\alpha)\|F\|_*$ e la (7.5) vale con $M = M_\Omega/\alpha$. Dunque L ha immagine chiusa. Grazie al Teorema 5.5, per un dato generico $F \in V^*$, il problema (7.8) ha soluzione se e solo se $F \in N(L^*)_\perp$. Tuttavia occorre calcolare l'aggiunto L^* di L e vediamo che esso opera dal biduale $H^1(\Omega)^{**}$ nel duale $H^1(\Omega)^*$, per cui la situazione è un po' scomoda. Riservandoci di ritornare su questo punto, anticipiamo la conclusione: $F \in N(L^*)_\perp$ se e solo se $\langle F, 1\rangle = 0$. Dunque

$$\textit{il problema (7.8) ha soluzioni se e solo se} \quad \langle F, 1\rangle = 0. \tag{7.13}$$

Nel caso particolare in cui F è dato dalla (7.9), la condizione di risolubilità diventa

$$\int_\Omega f\,dx + \int_\Gamma g\,dS = 0. \tag{7.14}$$

La soluzione, poi, non è unica: il nucleo $N(L)$, infatti, è costituito dalle costanti. □

La necessità della condizione $\langle F, 1\rangle = 0$ per l'esistenza di soluzioni del problema (7.8) può essere ottenuta direttamente in modo immediato: basta infatti scegliere $v = 1$ nella (7.8). La sua sufficienza, per nulla ovvia, può anche essere controllata anche con strumenti diversi da quelli esposti in questi paragrafi e gli esercizi successivi aprono una parentesi su possibili vie.

7.7. *Esercizio.* Si introducano lo spazio $V_\Omega = \{v \in H^1(\Omega) : v_\Omega = 0\}$, ove v_Ω denota la media di v su Ω, e il problema ausiliario di trovare $u \in V_\Omega$ verificante l'uguaglianza che compare nella (7.8) per ogni $v \in V_\Omega$. Si dimostri che: *i)* nella sola ipotesi $F \in H^1(\Omega)^*$ il problema ausiliario ha una e una sola soluzione; *ii)* se $\langle F, 1\rangle = 0$ tale soluzione risolve (7.8).

7.8. *Esercizio.* Si ponga $V_\Gamma = \{v \in H^1(\Omega) : v_\Gamma = 0\}$, ove v_Γ denota la media di v su Γ, e si proceda come nell'esercizio precedente con tali varianti.

7.9. *Esercizio.* Per $\varepsilon > 0$ si introduca il problema approssimato: trovare $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega (A\nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla v \, dx + \varepsilon \int_\Omega u_\varepsilon v \, dx = \langle F, v\rangle \quad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega). \tag{7.15}$$

Si svolgano i passi seguenti: *i)* senza ulteriori ipotesi su F il problema approssimato ha una e una sola soluzione u_ε; *ii)* se $\langle F, 1\rangle = 0$, tale soluzione ha media nulla in Ω; *iii)* si deduca che la famiglia $\{u_\varepsilon\}$ è limitata in $H^1(\Omega)$; *iv)* si deduca che esiste una successione $\{u_{\varepsilon_n}\}$ convergente debolmente in $H^1(\Omega)$ e si dimostri che il suo limite debole risolve (7.8).

7.10. Osservazione. In riferimento agli esercizi precedenti, consideriamo la scelta (7.9) di F e interpretiamo ciascuno dei problemi ausiliari in termini di equazioni a derivate parziali e condizioni al bordo. Nei tre casi 7.7, 7.8 e 7.9, si stanno risolvendo rispettivamente i problemi

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u_\varepsilon) &= f - f_\Omega - \rho g_{\Gamma}, \quad (A\nabla u_\varepsilon) \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = g \quad \text{e} \quad u_\Omega = 0 \\ -\operatorname{div}(A\nabla u) &= f, \quad (A\nabla u) \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = g - g_{\Gamma} - (1/\rho) f_\Omega \quad \text{e} \quad u_{\Gamma} = 0 \\ -\operatorname{div}(A\nabla u_\varepsilon) + \varepsilon u_\varepsilon &= f, \quad (A\nabla u_\varepsilon) \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = g \end{aligned}$$

con le notazioni seguenti: f_Ω e u_Ω sono le medie di f e di u in Ω, g_{Γ} e u_{Γ} sono le medie di g e di u su Γ (rapporto fra l'integrale e la misura superficiale) e ρ è il rapporto $|\Gamma|/|\Omega|$ fra le due misure, superficiale e di Lebesgue rispettivamente. Per controllare quanto asserito si può imitare quanto abbiamo nell'Esempio 7.6 per derivare la (7.7) dalle (7.6): si moltiplica l'equazione per la generica funzione regolare v, a media nulla in Ω nel primo caso, a media nulla su Γ nel secondo e senza vincoli nel terzo, poi si integra in Ω e infine si usano la formula di integrazione per parti e la condizione al bordo. Si noti che ciascuno dei primi due problemi coincide con il problema (7.6) proprio quando vale la condizione (7.14) di compatibilità e che, per ciascuno dei due, le coppie di secondi membri soddisfano la (7.14) (come deve essere, altrimenti i problemi non sarebbero risolubili). Osserviamo infine che se scriviamo formalmente il terzo con $\varepsilon = 0$ otteniamo il problema (7.6). Di fatto, però, sostituire ε con 0 è lecito solo quando vale la (7.14). Senza tale condizione, infatti, il problema limite non ha soluzioni (e u_ε non si mantiene limitata). □

Come preannunciato, diamo condizioni sufficienti perché un operatore abbia immagine chiusa che fanno intervenire la nozione di operatore compatto introdotta di seguito.

7.11. Definizione. *Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathcal{L}(V; W)$. Si dice che L è compatto quando, per ogni successione $\{v_n\}$ limitata in V, la successione $\{Lv_n\}$ ha una sottosuccessione convergente in W. L'insieme degli operatori $L : V \to W$ compatti è denotato con $\mathcal{K}(V; W)$.* □

7.12. Osservazione. In particolare, se $V \subseteq W$ con continuità, l'immersione di V in W è compatta quando ogni successione limitata in V ha una sottosuccessione convergente in W. □

La nozione di operatore compatto è di grandissima rilevanza sia teorica sia applicativa e meriterebbe un intero capitolo. Noi ci limitiamo a segnalare poche cose al riguardo.

7.13. *Esercizio.* Dimostrare che un operatore $L \in \mathcal{L}(V; W)$ è compatto se e solo, per ogni sottoinsieme $S \subseteq V$ limitato, l'immagine $L(S)$ è un sottoinsieme relativamente compatto di W (spesso questa è la frase assunta come definizione di compattezza).

7.14. *Esercizio.* Verificare che $\mathcal{K}(V; W)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(V; W)$.

7.15. *Esercizio.* Siano V, W e Z sono tre spazi normati, $A \in \mathcal{L}(V;W)$ e $B \in \mathcal{L}(W;Z)$. Dimostrare che, se almeno uno dei due operatori A e B è compatto, allora anche la composizione BA è un operatore compatto.

7.16. *Esercizio.* Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathcal{L}(V;W)$ tale che $\dim R(L) < +\infty$. Dimostrare che L è compatto.

7.17. *Esercizio.* Dimostrare che l'applicazione identica di uno spazio normato V in sé è un operatore compatto se e solo se V ha dimensione finita.

7.18. *Esercizio.* Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathcal{K}(V;W)$. Dimostrare che

$$v_n \rightharpoonup v \text{ in } V \quad \text{implica} \quad Lv_n \to Lv \text{ in } W. \tag{7.16}$$

7.19. *Esercizio.* Siano V e W due spazi normati e $L \in \operatorname{Hom}(V;W)$. Dimostrare che, se V è riflessivo e L verifica la (7.16) con $v = 0$, allora L è un operatore compatto.

7.20. *Esercizio.* Sia $V = L^2(a,b)$ ove (a,b) è un intervallo limitato e si definisca $L : V \to V$ mediante $(Lv)(x) = \int_a^x v(t)\,dt$ per $v \in V$ e $x \in (a,b)$. Si dimostri che $L \in \mathcal{K}(V;V)$.

7.21. Esempio. Ricordiamo l'Esempio IV.3.16 e l'Osservazione IV.3.19 che abbiamo dato a commento del Teorema IV.3.13 di Ascoli: se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ e $\alpha \in (0,1]$, l'immersione di $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ in $C^0(\overline{\Omega})$ è un operatore compatto. Se poi Ω è anche convesso, anche l'immersione di $C^1(\overline{\Omega})$ in $C^0(\overline{\Omega})$ è compatta. Lo stesso risultato vale se, anziché la convessità, a Ω si impone di essere regolare. Ancora in ipotesi di limitatezza e di regolarità su Ω è pure vero che è compatta l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1,+\infty]$. Si rivedano in proposito il Teorema IV.3.20 di Rellich-Kondrachov e le Osservazioni IV.3.19 e IV.3.21. □

Se $I : V \to W$ è un isomorfismo, è banalmente vero che l'immagine è chiusa. Nel risultato successivo dimostriamo che tale proprietà continua a valere se si "perturba" l'isomorfismo I aggiungendo un operatore compatto. Questo uso del termine "perturbazione" è diffuso e viene utilizzato quando un risultato relativo a una certa classe di operatori viene esteso a una classe più ampia, ottenuta sommando operatori di un certo tipo a quelli della classe precedente.

7.22. Teorema. *Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Se esiste una decomposizione $L = I + K$ nella somma di due operatori $I, K \in \mathcal{L}(V;W)$ tali che I sia un isomorfismo e K sia compatto, allora l'immagine $R(L)$ è chiusa in W e il nucleo $N(L)$ ha dimensione finita.* □

Dimostrazione. Per la prima tesi dimostriamo che esiste $M > 0$ tale che valga la (7.2) e, a tale scopo, ragioniamo per assurdo. Esistano dunque $v_n \in V$ tali che posto $\lambda_n = \inf\{\|v\| : v \in V,\ Lv = Lv_n\}$ risulti $\lambda_n > n\|Lv_n\|$ per ogni n. Osservato che $\lambda_n > 0$, poniamo $u_n = v_n/\lambda_n$. Abbiamo

$$\inf\{\|v\| : v \in V,\ Lv = Lu_n\} = 1 \quad \text{e} \quad \|Lu_n\| < 1/n \quad \text{per ogni } n.$$

Scelto allora $z_n \in V$ tale che $Lz_n = Lu_n$ e $\|z_n\| \le 2$ e usando il fatto che K è compatto, dalla successione limitata $\{z_n\}$ possiamo estrarre una sottosuccessione $\{z_{n_k}\}$ in modo che la successione $\{Kz_{n_k}\}$ converga in W a un certo elemento w. Siccome $Lz_n = Lu_n \to 0$ e $Kz_{n_k} \to w$ in W, deduciamo che $Iz_{n_k} \to -w$ in W. Posto $z = -I^{-1}w$, abbiamo che $z_{n_k} \to z$ in V dato che I è un isomorfismo. Quindi, riapplicando L, che è lineare e continuo, e ricordando che $Lz_n \to 0$ in W, concludiamo che $Lz = 0$. Segue che $L(z_n - z) = Lz_n = Lu_n$ per ogni n e quindi che $\|z_n - z\| \ge 1$ per ogni n, il che contraddice la convergenza $z_{n_k} \to z$ ottenuta sopra. Ciò mostra che vale la (7.2). Siccome L è chiuso (è continuo sull'intero spazio), possiamo applicare il Teorema 7.2 e concludere che l'immagine $R(L)$ è chiusa.

Passiamo alla seconda tesi. Sia $\{v_n\}$ una successione limitata di elementi di $N(L)$. Siccome l'operatore K è compatto, esiste una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ tale che $\{Kv_{n_k}\}$ converga in W a un certo elemento w. Ma $Iv_{n_k} = -Kv_{n_k}$ per cui $Iv_{n_k} \to -w$ in W. Siccome I è un isomorfismo, deduciamo che $v_{n_k} \to -I^{-1}w$ in V. Infine $-I^{-1}w \in N(L)$ perché $N(L)$ è chiuso data la continuità di L. Pertanto abbiamo dimostrato che ogni successione limitata di elementi di $N(L)$ ha una sottosuccessione convergente a un elemento di $N(L)$ e il Teorema IV.3.4 assicura che $N(L)$ ha dimensione finita. □

Il teorema successivo fornisce la stessa tesi in ipotesi diverse. Avvertiamo che l'enunciato completo di Peetre contiene anche l'inversa dell'implicazione che noi dimostriamo.

7.23. Teorema (di Peetre). *Siano* V , W *e* Z *tre spazi di Banach e* $L \in \mathcal{L}(V;W)$. *Si supponga inoltre che* V *sia riflessivo e immerso in* Z *con immersione compatta. Se esiste una costante* $M > 0$ *tale che*

$$\|v\|_V \leq M(\|Lv\|_W + \|v\|_Z) \quad \textit{per ogni } v \in V \tag{7.17}$$

allora l'immagine $R(L)$ *è chiusa in* W *e il nucleo* $N(L)$ *ha dimensione finita.* □

Dimostrazione. Dimostriamo prima che il nucleo ha dimensione finita perché ciò serve anche per l'altra tesi. Muniamo $N(L)$ della norma indotta da $\|\cdot\|_V$ e consideriamo una successione $\{v_n\}$ limitata in $N(L)$. Allora $\{v_n\}$ è limitata in V , per cui esiste una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ convergente in Z . In particolare tale sottosuccessione è di Cauchy in Z . D'altra parte la (7.17) implica che $\|x_{n_k} - x_{n_i}\|_V \leq M\|x_{n_k} - x_{n_i}\|_Z$ per ogni i e k , così che $\{v_{n_k}\}$ è di Cauchy anche in $N(L)$. Siccome $N(L)$ è completo dato che è chiuso in V come conseguenza della continuità di L , la sottosuccessione costruita converge in $N(L)$. Ciò mostra che vale una delle condizioni equivalenti del Teorema IV.3.4, per cui $N(L)$ ha dimensione finita.

Dimostriamo che L ha immagine chiusa. Siccome il nucleo ha dimensione finita, esso ha un supplementare topologico V_0 (Proposizione 3.14). Siccome $R(L) = L(V_0)$, basta dimostrare che la restrizione L_0 di L a V_0 ha immagine chiusa. A tale scopo, sfruttando il fatto che L_0 è iniettivo, dimostriamo che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\|v\|_Z \leq c\|L_0 v\|_W \quad \text{per ogni } v \in V_0 \,. \tag{7.18}$$

Per assurdo, ciò sia falso. Allora esiste una successione $\{v_n\}$ di elementi di V_0 tali che $\|v_n\|_Z > n\|L_0 v_n\|_W$ per ogni n . Osservato che $v_n \neq 0$, poniamo $u_n = v_n/\|v_n\|_Z$. Allora $\|u_n\|_Z = 1$ e $\|L_0 u_n\|_W < 1/n$ per ogni n . Grazie alla (7.17), deduciamo che $\{u_n\}$ è limitata in V . Siccome V è riflessivo, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ debolmente convergente in V a un certo $u \in V$. Per la compattezza dell'immersione di V in Z e per l'Esercizio 7.18, segue che $\{u_{n_k}\}$ converge a u fortemente in Z . In particolare $\|u\|_Z = 1$ e quindi $u \neq 0$. Osserviamo ora che $L_0 u_{n_k} \rightharpoonup L_0 u$ in W grazie alla Proposizione IV.4.7. Ma $\{L_0 u_{n_k}\}$ converge a 0 fortemente in W , dunque anche debolmente. Per l'unicità del limite debole, deduciamo che $L_0 u = 0$. Abbiamo dunque $u = 0$ e contraddiciamo la deduzione $u \neq 0$ precedente. Ciò mostra che vale la (7.18). Combinando con la (7.17) deduciamo che $\|v\|_V \leq M(1 + c)\|L_0 v\|_W$ per ogni $v \in V_0$. Dunque L_0 ha immagine chiusa per il Teorema 7.2. □

Non riteniamo inutile dedurre dai risultati generali precedenti una conseguenza in un quadro molto più ristretto, come quello degli spazi di Hilbert e, in particolare, delle terne hilbertiane (vedi Definizione IV.5.5). Resta inteso che si seguono le notazioni (IV.5.3). Naturalmente il termine "debole coercività" della prossima definizione significa semplicemente un indebolimento della usuale condizione di coercività e l'aggettivo "debole" non deve far pensare ad altro.

7.24. Definizione. *Siano* (V, H, V^*) *una terna hilbertiana reale e* $a : V \times V \to \mathbb{R}$ *una forma bilineare continua. Diciamo che* a *è debolmente coerciva quando esistono* $\alpha, \lambda > 0$ *tali che*

$$a(v, v) + \lambda|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2 \quad \textit{per ogni } v \in V \,. \ \square \tag{7.19}$$

7.25. Definizione. *Siano* V *uno spazio di Hilbert reale e* $a : V \times V \to \mathbb{R}$ *una forma bilineare continua. La forma* $a^* : V \times V \to \mathbb{R}$ *definita dalla formula*

$$a^*(u, v) = a(v, u) \quad \textit{per } u, v \in V \tag{7.20}$$

è detta aggiunta di a . □

7.26. Teorema. *Siano* (V, H, V^*) *una terna hilbertiana reale e si supponga che l'immersione di* V *in* H *sia compatta. Siano inoltre* $a : V \times V \to \mathbb{R}$ *una forma bilineare continua debolmente coerciva e* $f^* \in V^*$. *Allora esiste* u *verificante*

$$u \in V \quad \textit{e} \quad a(u, v) = \langle f^*, v \rangle \quad \textit{per ogni } v \in V \tag{7.21}$$

se e solo se $\langle f^*, w \rangle = 0$ *per ogni* w *verificante*

$$w \in V \quad \textit{e} \quad a^*(w, v) = 0 \quad \textit{per ogni } v \in V \,. \tag{7.22}$$

Inoltre gli spazi delle soluzioni di (7.21) *con* $f^* = 0$ *e di* (7.22) *hanno dimensione finita.* □

Dimostrazione. Siano $L, L_* \in \mathcal{L}(V; V^*)$ gli operatori associati alle forme a e a^* tramite la Proposizione III.2.8. Abbiamo dunque

$$\langle Lu, v\rangle = a(u,v) \quad \text{e} \quad \langle L_* u, v\rangle = a^*(u,v) \quad \text{per ogni } u, v \in V$$

per cui la condizione di risolubilità affermata nella prima parte dell'enunciato si scrive come

$$R(L) = N(L_*)^\perp. \tag{7.23}$$

Grazie al Teorema 5.5, basta dimostrare i due punti seguenti: i) vale l'uguaglianza $N(L^*)_\perp = N(L_*)^\perp$; ii) l'immagine $R(L)$ è chiusa.

i) Vediamo il legame fra L_* e l'aggiunto $L^* \in \mathcal{L}(V^{**}; V^*)$ di L. Detto $J : V \to V^{**}$ l'isomorfismo canonico di V, per ogni $u, v \in V$ abbiamo

$$\langle L^* Ju, v\rangle = \langle Ju, Lv\rangle = \langle Lv, u\rangle = a(v,u) = a^*(u,v) = \langle L_* u, v\rangle.$$

Dunque $L_* = L^* \circ J$, per cui, per ogni $v \in V$, risulta

$$v \in N(L_*) \quad \text{se e solo se} \quad L_* v = 0 \quad \text{se e solo se} \quad L^* Jv = 0 \quad \text{se e solo se} \quad Jv \in N(L^*).$$

Ciò dimostra che $N(L_*) = J^{-1}\bigl(N(L^*)\bigr)$. Siccome J è suriettivo per il Teorema VI.1.2, deduciamo l'uguaglianza $N(L^*) = J\bigl(N(L_*)\bigr)$. Sia ora $v^* \in V^*$. Allora sono via via equivalenti le condizioni: $v^* \in N(L^*)_\perp$; $\langle v^{**}, v^*\rangle = 0$ per ogni $v^{**} \in N(L^*)$; $\langle Jv, v^*\rangle = 0$ per ogni $v \in N(L_*)$; $\langle v^*, v\rangle = 0$ per ogni $v \in N(L_*)$; $v^* \in N(L_*)^\perp$. Dunque l'uguaglianza $N(L^*)_\perp = N(L_*)^\perp$ è dimostrata.

ii) Dimostriamo che l'immagine $R(L)$ è chiusa. A tal fine cerchiamo di applicare il Teorema 7.22 oppure il Teorema 7.23. Per meglio apprezzare i due teoremi citati, controlliamo che riusciamo ad applicare ciascuno dei due. Iniziamo dal Teorema 7.22. Fissato $\lambda > 0$ come nella condizione (7.19), introduciamo la forma bilineare continua $a_\lambda : V \times V \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$a_\lambda(u,v) = a(u,v) + \lambda\langle u, v\rangle \quad \text{per } u, v \in V$$

e osserviamo che l'operatore ad essa associato è $L + \lambda i$ ove $i : V \to V^*$ è l'immersione (frutto delle identificazioni fatte nella costruzione della terna hilbertiana). Allora possiamo scrivere $L = I + K$ ove $I = L + \lambda i$ e $K = -\lambda i$. L'operatore I è un isomorfismo per il Teorema di Lax-Milgram in quanto a_λ è anche coerciva. Inoltre K è un operatore compatto per l'Esercizio 7.15, in quanto i si ottiene componendo le due immersioni continue di V in H e di H in V^*, la prima delle quali è compatta. Siamo pertanto nelle ipotesi del Teorema 7.22.

Controlliamo ora che sono verificate anche le ipotesi del Teorema 7.23 con $W = V^*$ e $Z = H$, osservando che l'ipotesi di riflessività è garantita dal Teorema VI.1.2. Rimane pertanto da provare una stima a priori di tipo (7.17). Supponiamo $u \in V$. Posto $f^* = Lu$, abbiamo $f^* \in V^*$ e la (7.21). Allora

$$\alpha\|u\|^2 \le a(u,u) + \lambda|u|^2 = \langle f^*, u\rangle + \lambda|u|^2 \le \|f^*\|_* \, \|u\| + \lambda|u|^2 \le (\alpha/2)\|u\|^2 + (1/(2\alpha))\|f^*\|_*^2 + \lambda|u|^2.$$

Deduciamo che $(\alpha/2)\|u\|^2 \le (1/(2\alpha))\|f^*\|_*^2 + \lambda|u|^2$, vale a dire

$$\|u\|^2 \le (1/\alpha^2)\|f^*\|_*^2 + (2\lambda/\alpha)|u|^2 \quad \text{da cui} \quad \|u\| \le M(\|Lu\|_* + |u|)$$

per una certa costante $M > 0$. Dunque vale la (7.17) appunto con le scelte fatte, cioè $W = V^*$ e $Z = H$.

Ciò conclude la doppia dimostrazione della (7.23), cioè della prima parte dell'enunciato. Ma ciascuno dei due teoremi applicati assicura anche che hanno dimensione finita i due nuclei $N(L)$ e $N(L_*)$, il che coincide con l'ultima parte del teorema. Infatti, la dimensione finita del primo è nella tesi; d'altra parte, siccome le due forme a e a^* verificano le stesse ipotesi, la stessa conclusione vale con lo scambio di a e a^*, il che scambia gli operatori L e L_*, e otteniamo l'altra tesi. □

7.27. Osservazione. Più precisamente vale l'uguaglianza $\dim N(L) = \dim N(L_*)$, che tuttavia non dimostriamo. In particolare $N(L) = \{0\}$ se e solo se $N(L_*) = \{0\}$ e deduciamo la conseguenza notevole seguente: *il problema* (7.21) *ha, per ogni* $f^* \in V^*$ *, una e una sola soluzione se e solo se esso ha, con* $f^* = 0$ *, solo la soluzione nulla.*

7.28. Osservazione. La decomposizione di L in accordo con le ipotesi del Teorema 7.22 utilizzata nella dimostrazione precedente non è l'unica possibile e nelle applicazioni può essere opportuno considerare decomposizioni diverse, per cui conviene cercare condizioni che, quando l'immersione di V in H è compatta, assicurino la compattezza di un operatore $K \in \mathcal{L}(V; V^*)$. Ne mettiamo in evidenza due: *i)* K ha un prolungamento $\widetilde{K} \in \mathcal{L}(H; V^*)$; *ii)* K si fattorizza come $j \circ K_0$, ove j è l'immersione di H in V^* e $K_0 \in \mathcal{L}(V; H)$. Nel primo caso vediamo K come la composizione $K = \widetilde{K} \circ \iota$ ove $\iota : V \to H$ è l'immersione e deduciamo che K è compatto per l'Esercizio 7.15. Nel secondo, la compattezza segue ancora dall'esercizio appena citato se dimostriamo che

$$\textit{anche l'immersione di } H \textit{ in } V^* \textit{ è compatta.} \tag{7.24}$$

Dimostriamo tale proprietà sfruttando ancora una volta la riflessività degli spazi di Hilbert. Per l'Esercizio 7.19 basta verificare l'analoga della (7.16) con $v = 0$: se $v_n \rightharpoonup 0$ in H allora $v_n \to 0$ in V^* . Sia $\mathcal{R} : V \to V^*$ l'isomorfismo di Riesz. Se $u \in V$ e $\mathcal{R}u \in H$ abbiamo

$$\|u\|^2 = \langle \mathcal{R}u, u \rangle = (\mathcal{R}u, u) \le |\mathcal{R}u|\,|u|.$$

Applicando ciò a $u = \mathcal{R}^{-1}v_n$ otteniamo

$$\|v_n\|_*^2 = \|\mathcal{R}^{-1}v_n\|^2 \le |v_n|\,|\mathcal{R}^{-1}v_n|$$

e, siccome $\{v_n\}$ è limitata in H in quanto debolmente convergente in H (Corollario 2.4 al Teorema di Banach-Steinhaus), per concludere basta dimostrare che $\mathcal{R}^{-1}v_n \to 0$ in H . Applichiamo la Proposizione IV.4.7 all'immersione continua di H in V^* e all'operatore $\mathcal{R}^{-1} \in \mathcal{L}(V^*; V)$: da $v_n \rightharpoonup 0$ in H deduciamo successivamente $v_n \rightharpoonup 0$ in V^* e $\mathcal{R}^{-1}v_n \rightharpoonup 0$ in V . Siccome l'immersione di V in H è compatta, concludiamo che $\mathcal{R}^{-1}v_n \to 0$ in H usando l'Esercizio 7.18. □

Diamo subito due applicazioni del Teorema 7.26 a due semplici problemi differenziali. Nel prossimo paragrafo trattiamo con un certo dettaglio un problema differenziale usando le varie impostazioni possibili e non solo il Teorema 7.26.

7.29. Esempio (seguito dell'Esempio 7.6). Riprendiamo il problema di Neumann (7.8), trattato nell'Esempio 7.6, del quale seguiamo ipotesi e notazioni. Riscriviamolo nella forma

$$u \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad a(u,v) = \langle F, v \rangle \quad \text{per ogni } v \in H^1(\Omega) \quad \text{ove} \quad a(u,v) = \int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v \, dx. \tag{7.25}$$

La terna hilbertiana (V, H, V^*) è costruita con $V = H^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$ e, siccome Ω è limitato e regolare, l'immersione di V in H è compatta per il Teorema IV.3.20 di Rellich-Kondrachov. Verifichiamo la coercività debole, cioè una disuguaglianza del tipo (7.19). Grazie alla (7.12), abbiamo addirittura per ogni $\lambda > 0$

$$a(v,v) + \lambda |v|^2 \ge \alpha \|\nabla v\|_2^2 + \lambda \|v\|_2^2 \ge \min\{\alpha, \lambda\} \|v\|^2 \quad \text{per ogni } v \in V .$$

Siccome $(A(x)\xi) \cdot \eta = (A(x)^T \eta) \cdot \xi$ per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ e q.o. in Ω , la (7.22) diventa la condizione

$$w \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega (A^T \nabla w) \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in V .$$

Questa è certamente verificata se w è costante. Viceversa, se w ne è una soluzione, scegliendo $v = w$ e usando l'uniforme ellitticità, deduciamo $\nabla w = 0$ q.o. in Ω , cioè che w è costante, dato che Ω è connesso. Lo spazio delle soluzioni w del problema aggiunto (7.22), dunque, è generato dalla funzione $w = 1$ e la condizione necessaria e sufficiente perché il problema (7.25) abbia soluzioni è $\langle F, 1 \rangle = 0$. Se poi tale condizione è soddisfatta, la soluzione è determinata a meno dell'aggiunta di una soluzione del problema omogeneo, cioè di una costante (sempre grazie all'ellitticità).

7.30. Applicazione. Consideriamo ora un problema in una dimensione, ma relativo a un'equazione del secondo ordine in cui compaiono anche termini di ordine inferiore. Prendiamo $\Omega = (0, \ell)$ ove ℓ è un parametro reale positivo. Prendiamo inoltre i coefficienti costanti e scegliamoli in modo la situazione che si crea non sia banale e che, nello stesso tempo, i calcoli necessari tornino comodi. Una possibile scelta che realizza entrambe le aspettative è data dal problema variazionale seguente

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega (u'v' + 2u'v - 2uv)\, dx = \langle f^*, v \rangle \quad \text{per ogni } \ v \in H_0^1(\Omega)$$

ove $f^* \in H_0^1(\Omega)^*$ è assegnato. Ricordato che l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ è compatta per il Teorema IV.3.20 di Rellich-Kondrachov, il problema rientra nel Teorema 7.26 con le scelte

$$V = H_0^1(\Omega)\,, \quad H = L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad a(u, v) = \int_\Omega (u'v' + 2u'v - 2uv)\, dx$$

e il problema aggiunto (7.22) diventa

$$w \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega (w'v' + 2wv' - 2wv)\, dx = 0 \quad \text{per ogni } \ v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Saremo poi particolarmente interessati al caso in cui $f^* \in H$ (nel senso dell'identificazione di H a un sottospazio di V^* nella costruzione della terna hilbertiana), cioè nel caso in cui f^* sia costruito a partire da $f \in L^2(\Omega)$ con la formula

$$\langle f^*, v \rangle = \int_\Omega f v\, dx \quad \text{per } \ v \in V\,.$$

In tal caso, siccome $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $H_0^1(\Omega)$ per definizione di $H_0^1(\Omega)$, il problema dato si scrive in termini espliciti come problema per un'equazione del secondo ordine. Scriviamo tale problema insieme all'esplicitazione del corrispondente problema aggiunto:

$$u \in V \quad \text{e} \quad -u'' + 2u' - 2u = f \tag{7.26}$$

$$w \in V \quad \text{e} \quad -(w' + 2w)' - 2w = 0 \tag{7.27}$$

ove le equazioni valgono in Ω e sono intese nel senso delle distribuzioni. Prima di proseguire conviene enunciare due fatti che, tuttavia, non dimostriamo:

i) le distribuzioni che risolvono un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti con secondo membro continuo sono tutte e sole le funzioni di classe C^2 che risolvono l'equazione in senso classico, e ciò vale, in particolare, per la (7.27);

ii) lo spazio $H^1(0, \ell)$ è immerso in $C^0[0, \ell]$ con immersione continua e V coincide con il sottospazio delle funzioni $v \in H^1(0, \ell)$ tali che $v(0) = v(\ell) = 0$.

Dunque: *i*) le soluzioni del problema (7.27) possono essere calcolate per via elementare; *ii*) le due condizioni $u \in V$ e $w \in V$ significano che u e w (hanno una certa regolarità e) si annullano negli estremi 0 ed ℓ (condizioni di Dirichlet omogenee). Ma veniamo alla risoluzione di (7.27). Siccome le radici caratteristiche sono $-1 \pm i$, si trova $w(x) = ce^{-x} \sin x$ ove $c \in \mathbb{R}$ va ricercato in modo che $w(\ell) = 0$. Allora si danno due casi: *i*) ℓ non è multiplo di π; *ii*) ℓ è multiplo di π. Nel primo si ha necessariamente $c = 0$ così che l'unica soluzione del problema aggiunto è $w = 0$ e la (7.21) ha soluzione per ogni $f^* \in V^*$. In particolare il problema (7.26) ha soluzione per ogni $f \in L^2(0, \ell)$. Si noti inoltre che tale soluzione è unica in quanto il problema omogeneo associato (cioè con $f = 0$) ha solo la soluzione nulla. Nel secondo caso, invece, lo spazio delle soluzioni del problema aggiunto (7.27) ha dimensione 1, un generatore essendo dato dalla formula $w_0(x) = e^{-x} \sin x$. Allora l'equazione la (7.21) ha soluzione se e solo se $\langle f^*, w_0 \rangle = 0$. In particolare il problema (7.26) ha soluzione se e solo se

$$\int_0^\ell f(x)\, e^{-x} \sin x\, dx = 0.$$

Si noti inoltre che la soluzione non è unica: infatti il corrispondente problema omogeneo ha soluzioni non banali, precisamente tutte e sole le funzioni multiple della funzione u_0 data dalla formula $u_0(x) = e^x \sin x$. Notiamo infine che le conclusioni ottenute concordano con l'Osservazione 7.27.

7.31. Osservazione. Nell'esempio precedente ℓ è un numero finito, ovviamente. D'altra parte ci si può chiedere se sia possibile ripetere tutto quanto nel caso in cui $(0,\ell)$ sia sostituito da un intervallo illimitato, ad esempio $\Omega = \mathbb{R}$. In tal caso il Teorema di Rellich-Kondrachov non è applicabile. Di conseguenza non è applicabile nemmeno il Teorema 7.26. Ora vediamo che, di fatto, la situazione che si viene a creare contrasta con l'enunciato del Teorema 7.26 (necessariamente per la mancata compattezza dell'inclusione di V in H dato che le altre ipotesi sono soddisfatte) e a tale scopo basterà addirittura considerare un'equazione più semplice. Prendiamo

$$\Omega = \mathbb{R}, \quad V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad a(u,v) = \int_\Omega u'v'\,dx \quad \text{e} \quad \langle f^*, v\rangle = \int_\Omega fv\,dx$$

ove $f \in L^2(\Omega)$. In tal caso la condizione $u \in V$ comporta un certo annullamento di u all'infinito (sul quale non indaghiamo oltre). L'analoga della (7.26) diventa $-u'' = f$ e, se supponiamo f anche continua, le sue soluzioni sono tutte e sole le soluzioni classiche. Dunque, se $f \geq 0$, tutte le soluzioni sono concave. Ma l'unica funzione $u \in H^1(\mathbb{R})$ concava è la funzione nulla. Quindi, se f è continua, non negativa e non identicamente nulla, il problema non ha soluzioni. D'altra parte il problema aggiunto ha solo la soluzione nulla. Dunque la (5.4) è falsa in questo caso. Siccome la (5.5) deve comunque valere, deduciamo che l'immagine $R(L)$ è densa e non chiusa. In particolare ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ non negativa e non identicamente nulla è limite di una successione $\{f_n\}$ di dati che rendono il problema risolubile. Tocchiamo con mano questo fatto costruendo un esempio.

7.32. Esempio. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che: $u(x) = 0$ se $x \leq 0$, $u(x) = 1/2 - x$ se $x \geq 1$ e $u''(x) < 0$ se $x \in (0,1)$. Prendiamo $f = -u''$, così che f è addirittura di classe C^∞. Inoltre, per costruzione, f è strettamente positiva in $(0,1)$ e nulla altrove. In particolare si ha $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ma il problema con dato f non ha soluzioni in $H^1(\mathbb{R})$. Costruiamo una successione $\{f_n\}$ convergente a f in $L^2(\mathbb{R})$ di dati che, al contrario, rendono risolubile il problema. Fissiamo $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\zeta(x) = 1$ se $x \leq 0$ e $\zeta(x) = 0$ se $x \geq 1$ e poniamo

$$u_n(x) = u(x)\,\zeta(x/n) \quad \text{e} \quad f_n(x) = -u_n''(x) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Allora $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, da cui anche $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. In particolare $u_n \in H^1(\mathbb{R})$ e $f_n \in L^2(\mathbb{R})$. Inoltre $-u_n'' = f_n$ per costruzione. Dunque, in corrispondenza al dato f_n, il problema è risolubile in quanto u_n ne è soluzione. Mostriamo che $\{f_n\}$ converge a f in $L^2(\mathbb{R})$. Abbiamo

$$f(x) - f_n(x) = -u''(x) + u_n''(x) = u''(x)(\zeta(x/n) - 1) + \frac{2}{n}\,u'(x)\,\zeta'(x/n) + \frac{1}{n^2}\,u(x)\,\zeta''(x/n).$$

Applicando il Teorema di Lebesgue della convergenza dominata, deduciamo immediatamente

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^1 |f(x) - f_n(x)|^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|^2\,dx = 0.$$

D'altra parte, essendo $u(x) = 1/2 - x$ per $x > 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} |f(x) - f_n(x)|^2\,dx &= \int_1^{+\infty} \Bigl(\frac{2}{n}\,\zeta'(x/n) + \frac{x - 1/2}{n^2}\,\zeta''(x/n)\Bigr)^2 dx \\ &= \int_{1/n}^{+\infty} \Bigl(\frac{2}{n}\,\zeta'(y) + \frac{y - 1/(2n)}{n}\,\zeta''(y)\Bigr)^2 n\,dy \leq \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \Bigl(2|\zeta'(y)| + (y+1)|\zeta''(y)|\Bigr)^2 dy = \frac{c}{n} \end{aligned}$$

e concludiamo.

Va da sé che, al contrario, la successione $\{u_n\}$ si comporta molto male. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{n\to\infty} x/n = 0$ da cui $\lim_{n\to\infty} \zeta(x/n) = \zeta(0) = 1$, così che $\{u_n\}$ converge a u puntualmente. Allora, per come è fatta u, vediamo che $\{u_n\}$ non converge in alcuna delle topologie di spazio normato ragionevolmente connesse con il problema.

8. Un problema di tipo ellittico

In questo paragrafo applichiamo i risultati precedenti allo studio del problema di Dirichlet omogeneo (cioè con dato al bordo nullo) per un'equazione del secondo ordine di tipo ellittico, per semplicità in ambito reale. La scelta del quadro funzionale fa intervenire sia gli spazi di Sobolev sia equazioni alle derivate parziali, sulla cui teoria si è detto abbastanza poco. Occorrerà pertanto che il lettore faccia qualche atto di fede e accetti alcune affermazioni date senza dimostrazione. Il problema che intendiamo studiare è il seguente

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{su } \Gamma \tag{8.1}$$

ove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$ limitato e “regolare” (senza precisazioni ulteriori), Γ è il bordo $\partial\Omega$ di Ω, $A = (a_{ij})$ è una matrice $d\times d$ di funzioni $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$ e $b = (b_i)$ e c sono funzioni definite in Ω a valori in $\mathbb{R}^d$ e in $\mathbb{R}$ rispettivamente. Supporremo poi verificata l'ipotesi di ellitticità (IV.1.15), che richiamiamo tra breve per comodità del lettore.

La seconda delle (8.1) è detta *condizione di Dirichlet* ed è una, la più semplice, delle condizioni al bordo che si possono affiancare a un'equazione di tipo ellittico del secondo ordine, per la quale si deve assegnare una condizione in ogni punto del bordo se si vuole sperare di ottenere un problema ben posto, come già abbiamo osservato nell'Esempio 1.25.

A livello introduttivo consideriamo il caso monodimensionale e nella situazione più semplice possibile: $\Omega = (0,\ell)$, con $\ell \in (0,+\infty)$, $A = 1$, $b = 0$ e $c = 0$. Le (8.1) diventano

$$-u'' = f \quad \text{e} \quad u(0) = u(\ell) = 0. \tag{8.2}$$

Premettiamo la dimostrazione di una disuguaglianza per funzioni di classe C^1:

$$\|v\|_\infty \le \|v'\|_1 \quad \text{se vale una delle condizioni} \quad v(0) = 0 \quad \text{oppure} \quad \int_0^\ell v(x)\,dx = 0.$$

Nel primo caso, infatti, basta scrivere $v(x) = \int_0^x v'(t)\,dt$, prendere il modulo e maggiorare. Nel secondo scriviamo $v(x) = v(y) + \int_y^x v'(t)\,dt$. Integrando in $(0,\ell)$ rispetto a y otteniamo

$$\ell v(x) = \int_0^\ell \Bigl(\int_y^x v'(t)\,dt\Bigr)\,dy \quad \text{da cui} \quad \ell|v(x)| \le \int_0^\ell \Bigl(\int_0^\ell |v'(t)|\,dt\Bigr)\,dy = \ell\|v'\|_1$$

e concludiamo. Sia ora u di classe C^2 con $u(0) = u(\ell) = 0$. Allora abbiamo sia $\int_0^\ell u'(x)\,dx = 0$ sia $u(0) = 0$. Segue che

$$\|u'\|_\infty \le \|u''\|_1 \quad \text{e} \quad \|u\|_\infty \le \|u'\|_1 \le \ell\|u'\|_\infty \le \ell\|u''\|_1\,.$$

D'altra parte la disuguaglianza di Hölder fornisce $\|v\|_p \le \ell^{1/p}\|v\|_\infty$ e $\|v\|_1 \le \ell^{1/p'}\|v\|_p$. Combinando deduciamo facilmente una disuguaglianza del tipo

$$\|u\|_{2,p} \le M\|u''\|_p = M\|-u''\|_p \tag{8.3}$$

ove p è arbitrario in $[1,+\infty]$ e M dipende solo da p e da ℓ.

Con questo calcolo elementare abbiamo solo voluto mettere in evidenza come, grazie alle condizioni di Dirichlet, l'intera norma in $W^{2,p}$ di u possa essere stimata in funzione della norma in L^p della sola funzione $-u''$. Nel caso multidimensionale le cose non sono così semplici, nemmeno quando i coefficienti sono costanti. Infatti, già nel caso più elementare in cui il primo membro della (8.1) sia $-\Delta u$ (il laplaciano cambiato di segno, corrispondente al fatto che A è la matrice identità e all'assenza di termini di ordine inferiore) l'operatore è *una certa combinazione di derivate* *seconde* mentre la norma in $W^{2,p}$ contiene *tutte le derivate seconde* (oltre a quelle di ordine < 2). Occorre inoltre supporre $1 < p < +\infty$, cioè evitare i casi estremi $p = 1$ e $p = +\infty$.

Fissiamo le ipotesi. Imponiamo ai coefficienti la regolarità che rende di classe C^1 anche i coefficienti dell'equazione (1.13). In tal modo, da un lato, risultano corretti contemporaneamente tutti i casi che incontreremo e, dall'altro, vale senz'altro l'interpretazione classica dei problemi dato e aggiunto (che introdurremo) nel caso di soluzioni di classe C^2 . Tuttavia tale regolarità è sovrabbondante e può essere indebolita di volta in volta (anche di molto, come vedremo esplicitamente in un punto della trattazione). Nella (8.1) A è una matrice $d \times d$ di funzioni $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$, b è un vettore con componenti $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$ e $c \in C^1(\overline{\Omega})$. Supponiamo che A sia uniformemente ellittica:

$$(A(x)\xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ e ogni } x \in \Omega \tag{8.4}$$

per qualche costante $\alpha > 0$. Notiamo esplicitamente che la (8.4) rimane (banalmente) inalterata se la matrice A è sostituita dalla sua trasposta A^T . Questa osservazione sarà utile nel seguito.

Lo scopo finale è quello di dare condizioni per la risolubilità del problema ai limiti (8.1). La via passa per la costruzione di certi operatori definiti in certi domini, e la scelta non è obbligata, nemmeno quando sia stato sostanzialmente fissato il quadro funzionale. Ad esempio, anche se si è deciso di operare nell'ambito degli spazi di Sobolev, rimane una certa arbitrarietà nella scelta del dominio e scelte diverse portano a diversi operatori. In ogni caso dovremo vedere se gli operatori ottenuti hanno o meno immagine chiusa e questa verifica può passare per il fatto che essi siano chiusi o meno. Il controllo di queste proprietà e l'identificazioni degli operatori coinvolti si basano su stime a priori e risultati di regolarità che valgono per domini Ω regolari nelle ipotesi fatte sui coefficienti e sull'ipotesi su p, che ribadiamo e accompagnamo a una notazione semplificativa:

$$p \in (1, +\infty) \quad \text{e} \quad q = p'.$$

Su alcuni di questi punti, tuttavia, torneremo in un'osservazione successiva. Separiamo la trattazione in vari spezzoni che presentiamo nella forma di esempi.

8.1. Esempio. Supponiamo dapprima $b = 0$ e $c = 0$ e definiamo $D(L)$ e L mediante

$$D(L) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad Lv = -\operatorname{div}(A\nabla v) \quad \text{per } v \in D(L)\,. \tag{8.5}$$

Intendiamo vedere L contemporaneamente nei due aspetti

$$L \text{ è lineare e continuo da } W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \text{ in } L^p(\Omega) \tag{8.6}$$

$$L \text{ è lineare non limitato da } L^p(\Omega) \text{ in } L^p(\Omega). \tag{8.7}$$

Naturalmente, nel primo caso, $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ è munito della norma indotta da $W^{2,p}(\Omega)$. Tuttavia serve un commento. Ricordiamo che, per definizione, $W_0^{1,p}(\Omega)$ è la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ (vedi (II.3.6)) e osserviamo che $D(L)$ non è $W_0^{2,p}(\Omega)$. Per esempio, se $v \in C^2(\overline{\Omega})$, si ha senz'altro $v \in W^{2,p}(\Omega)$, ma risulta $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $v = 0$ su Γ . Al contrario (sempre per $v \in C^2(\overline{\Omega})$) v appartiene a $W_0^{2,p}(\Omega)$ se e solo se $v = 0$ e $\nabla v = 0$ su Γ . Dunque l'appartenenza di v al dominio $D(L)$ dell'operatore L comporta una certa regolarità di v e l'annullamento al bordo della sola v in un senso generalizzato. Lo scopo principale è vedere che l'immagine $R(L)$ è chiusa in $L^p(\Omega)$. Si possono dimostrare i fatti seguenti:

$$i)\ \ W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \text{ è un sottospazio chiuso di } W^{2,p}(\Omega) \tag{8.8}$$

$$ii)\ \ \|v\|_{2,p} \leq M \|Lv\|_p \quad \text{per ogni } v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \tag{8.9}$$

per una certa costante $M > 0$. Si noti che la (8.9) generalizza la (8.3), ma la sua dimostrazione, difficile e complessa, non può trovare spazio in questa sede. Al contrario la (8.8) si controlla facilmente, come ora mostriamo. Applichiamo il Teorema I.6.1 con $V = W^{2,p}(\Omega)$, $W = W_0^{1,p}(\Omega)$ e, ad esempio, $\mathcal{Z} = W^{1,p}(\Omega)$ nella costruzione dello spazio intersezione e il Teorema II.1.6. Deduciamo che $D(L)$ è completo se munito della norma intersezione (I.6.4). Ma questa è equivalente alla norma in $W^{2,p}(\Omega)$. Dunque l'intersezione è chiusa in $W^{2,p}(\Omega)$. La (8.9) ci consente di dedurre che

$$\text{l'operatore } L \text{ è iniettivo e la sua immagine } R(L) \text{ è chiusa in } L^p(\Omega)\,. \tag{8.10}$$

Diamo due dimostrazioni di ciò, considerando ciascuno dei due quadri (8.6) e (8.7). Nel primo caso vediamo che la (8.9) fornisce la (7.4) con $V = W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W = L^p(\Omega)$. Inoltre L è chiuso in quanto è lineare e continuo su un intero spazio di Banach. Dunque si applica il Corollario 7.3 e si conclude. Mettiamoci invece nell'ottica (8.7). Allora L è un operatore non limitato chiuso da $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$. Siamo infatti nelle condizioni della Proposizione 6.12 con $V = W = L^p(\Omega)$ se come norma $\|\cdot\|_{D(L)}$ prendiamo appunto quella indotta da $W^{2,p}(\Omega)$ su $W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e la (6.5) segue banalmente dalla (8.9). Siamo dunque nelle ipotesi del Corollario 7.3 dato che anche la (7.4), che diventa $\|u\|_p \le M\|Lu\|_p$, segue banalmente dalla (8.9). Quindi ancora concludiamo. Ricapitolando, qualunque sia l'interpretazione di L scelta fra (8.6) e (8.7), vale la (8.10). Stabilito ciò e ricordato il Teorema 5.5, siamo nelle condizioni di applicare la (5.4): l'equazione $Lu = f$ ha soluzioni se e solo se $f \in N(L^*)_\perp$.

Ora la scelta del quadro funzionale fornisce diverse nozioni di aggiunto ma non di ortogonalità in quanto il codominio $W = L^p(\Omega)$ è lo stesso nei due casi. Ora mostriamo che anche il nucleo $N(L^*)$, come ci si aspetta, è lo stesso nelle due interpretazioni sebbene i due aggiunti siano diversi. Partiamo dall'impostazione (8.7), che sembra condurre a una situazione più abbordabile. Infatti, effettuata l'identificazione $L^q(\Omega) = (L^p(\Omega))^*$ tramite l'isomorfismo di Riesz, abbiamo che l'aggiunto L^* è un operatore (non limitato) da $W^* = L^q(\Omega)$ in $V^* = L^q(\Omega)$ che opera come segue. Sia $w^* \in L^q(\Omega)$. Allora $w^* \in D(L^*)$ se e solo se esiste $v^* \in L^q(\Omega)$, necessariamente unico, tale che

$$\int_\Omega v^* v\,dx = \int_\Omega w^*(-\operatorname{div}(A\nabla v))\,dx \quad \text{per ogni } v \in W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega) \tag{8.11}$$

e in tali condizioni $L^*w^* = v^*$. Detto ciò, il significato di L^* rimane oscuro. Tuttavia noi siamo interessati solo al nucleo e dire che $w^* \in N(L^*)$ equivale a dire che la scelta $v^* = 0$ verifica la condizione richiesta, cioè che

$$\int_\Omega w^*(-\operatorname{div}(A\nabla v))\,dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{8.12}$$

Vediamo ora che accade se adottiamo invece l'impostazione (8.6): come preannunciato, dovremmo arrivare alla stessa conclusione. Ben consapevoli che abusiamo della notazione se denotiamo ancora con L^* l'aggiunto di L in quanto, come osservato sopra, l'aggiunto è un operatore diverso dal precedente, abbiamo ora che L^* è lineare e continuo da $W^* = L^q(\Omega)$ in V^*, duale dello spazio $W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, e, se $w^* \in L^q(\Omega)$, l'elemento $v^* = L^*w^*$ è l'unico $v^* \in V^*$, cioè l'unico funzionale lineare e continuo su $W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, che verifica

$$\langle v^*, v\rangle = \int_\Omega w^*(-\operatorname{div}(A\nabla v))\,dx \quad \text{per ogni } v \in W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{8.13}$$

Ma anche in questo caso siamo interessati solo al nucleo e la condizione $w^* \in N(L^*)$, cioè $v^* = 0$ nella (8.13), equivale ancora alla (8.12). Siamo pertanto arrivati effettivamente alla stessa conclusione, vale a dire, $N(L^*)$ è lo stesso sottospazio di $L^q(\Omega)$ nelle due interpretazioni di L. Ora però dobbiamo proprio trovare il nucleo. A questo proposito e in vista degli esempi successivi diamo una serie di risultati. Il primo riguarda le tre condizioni seguenti, nelle quali $z \in W^{2,r}(\Omega)$ e $g \in L^r(\Omega)$ per un certo $r \in (1, +\infty)$:

$$\begin{aligned}
&i)\ \ z \in W_0^{1,r}(\Omega) \quad \text{e} \quad -\operatorname{div}(A\nabla z) = g \\
&ii)\ \ z \in W_0^{1,r}(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega (A\nabla z)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega gv\,dx \quad \text{per ogni } v \in W_0^{1,r'}(\Omega) \\
&iii)\ \ \int_\Omega z(-\operatorname{div}(A^T\nabla v))\,dx = \int_\Omega gv\,dx \quad \text{per ogni } v \in W^{2,r'}(\Omega)\cap W_0^{1,r'}(\Omega).
\end{aligned}$$

Ebbene, abbiamo che

$$\textit{se } r \in (1,+\infty)\,,\ z \in W^{2,r}(\Omega) \ \textit{e}\ g \in L^r(\Omega)\,,\ \textit{le } i)\,,\ ii)\ \textit{e}\ iii)\ \textit{sono equivalenti.} \tag{8.14}$$

Useremo questa equivalenza con una delle scelte $r = p$ e $r = q$ ed eventualmente con le matrici A e A^T scambiate fra loro. Notiamo che nella $iii)$ non è imposta su z alcuna condizione di annullamento al bordo in forma esplicita: tale condizione, infatti, è nascosta nell'equazione, come vedremo nell'osservazione successiva, nella quale daremo un'idea dell'equivalenza fra le condizioni $i)$, $ii)$ e $iii)$. Il secondo è un risultato di regolarità:

$$w^*, v^* \in L^q(\Omega) \ \text{ e la (8.11) implicano } \ w^* \in W^{2,q}(\Omega)\,. \tag{8.15}$$

Grazie alla (8.14) abbiamo pertanto

$$D(L^*) = W^{2,q}(\Omega) \cap W^{1,q}_0(\Omega) \quad \text{e} \quad L^*w^* = -\operatorname{div}(A^T\nabla w^*) \quad \text{per ogni } \ w^* \in D(L^*)\,.$$

Dunque L^* è del tutto simile a L: si scambia p con q e si prende A^T anziché A. In particolare vale l'analoga della (8.9), cioè $\|w^*\|_{2,q} \le M'\|L^*w^*\|_q$ per una certa costante M', e deduciamo che L^* è iniettivo. Concludiamo che L è anche suriettivo. In termini più espliciti

$$\begin{gathered}\textit{per ogni } f \in L^p(\Omega) \textit{ esiste una e una sola } u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \\ \textit{verificante la prima delle } (8.1) \textit{ con } b = 0 \textit{ e } c = 0\end{gathered} \tag{8.16}$$

e la (8.9) afferma che l'operatore $L^{-1} : L^p(\Omega) \to W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ è continuo. Tutto ciò se $p \in (1,+\infty)$ e Ω è limitato e regolare. Nel corso del paragrafo commenteremo queste ipotesi.

8.2. Osservazione. Lungi dal pretendere di dimostrare la (8.14), diamo almeno l'idea. Supponendo $z \in C^2(\overline{\Omega})$, consideriamo le "versioni classiche" delle condizioni di cui in (8.14)

$$i)\ \ z|_\Gamma = 0 \quad \text{e} \quad -\operatorname{div}(A\nabla z) = g \tag{8.17}$$

$$ii)\ \ z|_\Gamma = 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega (A\nabla z)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega gv\,dx \quad \text{per ogni } v \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ nulla su } \Gamma \tag{8.18}$$

$$iii)\ \ \int_\Omega z(-\operatorname{div}(A^T\nabla v))\,dx = \int_\Omega gv\,dx \quad \text{per ogni } v \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ nulla su } \Gamma \tag{8.19}$$

e vediamo i legami fra queste. Lo strumento chiave è la formula di integrazione per parti (I.5.35). Supponendo anche $v \in C^2(\overline{\Omega})$ e osservando che z, v, $A\nabla z$, $A^T\nabla v$ sono tutte funzioni, scalari o vettoriali, di classe C^1 in quanto gli elementi a_{ij} di A sono funzioni di classe C^1, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega(-\operatorname{div}(A\nabla z))\,v\,dx &= \int_\Omega (A\nabla z)\cdot\nabla v\,dx - \int_\Gamma (A\nabla z)\cdot\mathbf{n}\,v\,dS \\ &= \int_\Omega (A^T\nabla v)\cdot\nabla z\,dx - \int_\Gamma (A\nabla z)\cdot\mathbf{n}\,v\,dS \\ &= \int_\Omega z(-\operatorname{div}(A^T\nabla v)\,dx + \int_\Gamma (A^T\nabla v)\cdot\mathbf{n}\,z\,dS - \int_\Gamma (A\nabla z)\cdot\mathbf{n}\,v\,dS.\end{aligned}$$

Deduciamo in particolare che

$$\begin{gathered}\int_\Omega(-\operatorname{div}(A\nabla z))\,v\,dx = \int_\Omega (A\nabla z)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega z(-\operatorname{div}(A^T\nabla v)\,dx + \int_\Gamma (A^T\nabla v)\cdot\mathbf{n}\,z\,dS \\ \text{per ogni } v \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ nulla su } \Gamma.\end{gathered} \tag{8.20}$$

Allora l'equivalenza fra le (8.17) e (8.18) è immediata. Infatti la condizione di annullamento al bordo è la stessa; inoltre, grazie alla prima uguaglianza di (8.20), l'equazione di (8.17) implica l'identità di (8.18); infine, sempre per la prima di (8.20), l'uguaglianza degli integrali di (8.18), già limitatamente alle sole $v \in C_c^\infty(\Omega)$, implica l'equazione di (8.17) per il Lemma I.5.53.

Veniamo all'equivalenza fra le (8.18) e (8.19). La prima delle due condizioni implica la seconda, grazie alla seconda delle uguaglianze (8.20). Viceversa vediamo come mai la (8.19) debba implicare la (8.18). Se vale la (8.19), prendendo v generica in $C_c^\infty(\Omega)$, deduciamo, grazie all'uguaglianza fra il primo e l'ultimo membro della (8.20), l'equazione differenziale della (8.17), dunque, per quanto appena detto a proposito della prima equivalenza, anche l'uguaglianza degli integrali di (8.18) per tutte le $v \in C^2(\overline{\Omega})$ nulle al bordo. Rimane da vedere che la (8.19) implica anche la condizione al bordo $z|_\Gamma = 0$, e di questo punto non diamo una giustificazione completa. Il punto della situazione cui siamo arrivati è il seguente: per ogni $v \in C^2(\overline{\Omega})$ nulla su Γ valgono le due uguaglianze

$$\int_\Omega (A\nabla z) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega gv \, dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega z(-\operatorname{div}(A^T \nabla v)) \, dx = \int_\Omega gv \, dx.$$

Allora, confrontando con l'uguaglianza fra il secondo e il terzo membro della (8.20), deduciamo che

$$\int_\Gamma (A^T \nabla v) \cdot \mathbf{n} \, z \, dS = 0 \quad \text{per ogni } v \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ nulla su } \Gamma . \tag{8.21}$$

Grazie all'uniforme ellitticità (8.4), la funzione $\gamma : \Gamma \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $\gamma = (A^T \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ è regolare e verifica $\gamma \geq \alpha$, per cui anche $1/\gamma$ è regolare. D'altra parte $\nabla v = (\nabla v \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ su Γ se $v = 0$ su Γ, dato che il gradiente di una funzione è ortogonale ai suoi insiemi di livello. Si intuisce allora che, per ogni $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ abbastanza regolare, esiste $v \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che $v = 0$ e $\nabla v \cdot \mathbf{n} = \varphi/\gamma$ su Γ. Ma tale v verifica $(A^T \nabla v) \cdot \mathbf{n} = (A^T (\nabla v \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = (\nabla v \cdot \mathbf{n})((A^T \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) = (\varphi/\gamma)\gamma = \varphi$. Pertanto la (8.21) deve implicare

$$\int_\Gamma z \, \varphi \, dS = 0 \quad \text{per ogni } \varphi : \Gamma \to \mathbb{R} \text{ regolare}$$

e da ciò deve seguire che $z = 0$ su Γ, nella filosofia del Lemma I.5.53. La dimostrazione rigorosa e completa della (8.14) consiste nel precisare meglio l'ultima costruzione e nel rifare il tutto nell'ambito degli spazi di Sobolev anziché nel quadro C^2.

8.3. Esempio. Modifichiamo l'esempio precedente ambientandoci in spazi di Hölder (Esempio I.5.46) anziché di Sobolev. Prendiamo $V = W = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\alpha \in (0,1)$ e come $D(L)$ il sottospazio di $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ costituito dalle funzioni che si annullano al bordo. Ancora l'operatore L che si ottiene con la seconda delle (8.5) e con il nuovo dominio è chiuso e, soprattutto, ha immagine chiusa. L'analoga della (8.9) è la disuguaglianza

$$\|v\|_{2,\alpha} \leq M \|Lv\|_{0,\alpha} \quad \text{per ogni } v \in D(L) \tag{8.22}$$

ove la coppia di indici k, α denota ora la norma nello spazio $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Stime di questo tipo sono dette *stime di Schauder* e a partire da queste si possono dimostrare risultati di esistenza e unicità analoghi alla (8.16) nel nuovo quadro funzionale. Precisamente: per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ esiste una e una sola $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ nulla al bordo che verifica la prima delle (8.1) con $b = 0$ e $c = 0$.

Cogliamo l'occasione per segnalare che gli spazi $C^0(\overline{\Omega})$ e $C^2(\overline{\Omega})$ non funzionano in sostituzione di $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e di $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ (a meno di non essere nel caso "banale" monodimensionale), da cui l'importanza degli spazi $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\alpha \in (0,1)$ e l'inadeguatezza degli spazi $C^{k,1}(\overline{\Omega})$ e $C^k(\overline{\Omega})$.

8.4. Osservazione. Nei dei due esempi precedenti abbiamo supposto $p \in (1, +\infty)$ e $\alpha \in (0,1)$, escludendo cioè i casi estremi $p = 1$, $p = +\infty$ e $\alpha = 1$. Ebbene per ciascuna di tali situazioni esistono controesempi alla conclusione (8.16) già con $L = -\Delta$ e qui ne diamo uno.

Si prendano $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ e la funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ data da $u(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. Allora un calcolo immediato fornisce (oltre alle derivate prime che non scriviamo)

$$D_x^2 u(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad D_y^2 u(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\Delta u(x,y) = \frac{8xy}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad D_x D_y u(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Tutto ciò in senso classico in $\Omega \setminus \{(0,0)\}$, ma non è difficile vedere che tutte le derivate trovate fungono da derivate deboli in Ω (cioè origine compresa). Pertanto $u \in W^{2,p}(\Omega)$ per ogni $p < +\infty$ e, osservato che $u = 0$ su Γ, deduciamo che, per ogni p finito, u è la soluzione data dalla (8.16) in corrispondenza al dato $f = -\Delta u$. Si osservi ora che tale f è limitata mentre la derivata mista di u non lo è. Dunque $u \notin W^{2,\infty}(\Omega)$ anche se $f \in L^\infty(\Omega)$, cioè la (8.16) stessa è falsa se $p = +\infty$.

8.5. Osservazione. Commentiamo ora, con qualche dettaglio, l'ipotesi (vaga) sulla regolarità di Ω. In taluni casi è vera qualche variante della (8.16) anche se Ω non è regolare. Ad esempio, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\Delta u \in L^p(\Omega)$, allora $u \in W^{2,p}(\Omega)$ se Ω è un poligono *convesso* di $\mathbb{R}^2$: la convessità compensa in qualche modo la carenza di regolarità. Tuttavia, se anche la convessità viene a mancare, le cose vanno diversamente, come mostra l'esempio seguente, simile a quello di un poligono, ma più facile da trattare per quanto riguarda il calcolo. Per ogni $\alpha \in (0, 2\pi)$ poniamo

$$\Omega_\alpha^* = (0,1) \times (0,\alpha) \quad \text{e} \quad \Omega_\alpha = \{(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) :\ (\rho,\vartheta) \in \Omega_\alpha^*\}$$

e osserviamo che le funzioni $v : \Omega_\alpha \to \mathbb{R}$ e $v^* : \Omega_\alpha^* \to \mathbb{R}$ possono essere biunivocamente associate fra loro tramite la formula $v^*(\rho,\vartheta) = v(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$ per $(\rho,\vartheta) \in \Omega_\alpha^*$. Consideriamo la funzione $u = u_s - u_r$, ove la parte singolare $u_s : \Omega \to \mathbb{R}$ e la parte regolare $u_r : \Omega \to \mathbb{R}$ verificano le condizioni $u_s^*(\rho,\vartheta) = \rho^\lambda \sin\lambda\vartheta$ e $u_r^*(\rho,\vartheta) = \rho^2 \sin\lambda\vartheta$ per $(\rho,\vartheta) \in \Omega_\alpha^*$. Qui λ è un parametro reale. Chiaramente $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $u^*(1,\,\cdot\,) = 0$ e $u^*(\,\cdot\,,0) = 0$ per ogni $\lambda > 0$. Allora risulta $u = 0$ su tutta la frontiera $\partial\Omega_\alpha$ se e solo se $u^*(\,\cdot\,,\alpha) = 0$. Scegliamo quindi $\lambda = \pi/\alpha$ così che $u|_{\partial\Omega_\alpha} = 0$. Ricordiamo ora che per ogni $v \in C^2(\Omega)$ valgono le due formule

$$(\Delta v)^* = D_\rho^2 v^* + \rho^{-1} D_\rho v^* + \rho^{-2} D_\vartheta^2 v^* \quad \text{e} \quad (|\nabla v|^2)^* = |D_\rho v^*|^2 + |\rho^{-1} D_\vartheta v^*|^2. \tag{8.23}$$

La prima delle (8.23) fornisce $(\Delta u_s)^*(\rho,\vartheta) = 0$ e $(\Delta u_r)^*(\rho,\vartheta) = (4-\lambda^2)\sin\lambda\vartheta$ per $(\rho,\vartheta) \in \Omega_\alpha^*$. Abbiamo pertanto $u \in L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ e $-\Delta u \in L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ per ogni p. Consideriamo ora la parte regolare u_r: si ha $u_r(x) = |x|^2 \sin\lambda\vartheta(x)$ per $x \in \Omega_\alpha$ ove $\vartheta(x) \in (0,\alpha)$ è la seconda coordinata polare di x. Siccome $D_1\vartheta(x) = -x_2/|x|^2$ e $D_2\vartheta(x) = x_1/|x|^2$, basta un po' di pazienza per controllare che $u_r \in W^{2,\infty}(\Omega)$. Al contrario, per la seconda delle (8.23), abbiamo

$$\int_{\Omega_\alpha} |\nabla u_s|^p\,dx = \int_{\Omega_\alpha^*} (|\nabla u_s|^p)^*\,\rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_{\Omega_\alpha^*} |\lambda\rho^{\lambda-1}|^p\,\rho\,d\rho\,d\vartheta = \alpha\lambda^p \int_0^1 \rho^{p(\lambda-1)+1} d\rho$$

e addirittura non è garantita l'appartenenza di u_s a $W^{1,p}(\Omega)$. Precisamente, se $\alpha > \pi$, si ha $\lambda < 1$ per cui, se p è abbastanza grande, risulta $p(\lambda-1)+1 \le -1$ e l'integrale diverge. Si noti che la condizione $\alpha > \pi$ corrisponde proprio al caso in cui Ω_α non è convesso. Concludiamo che, con tali scelte di α e di p, la ricerca di soluzioni (anche classiche) nulle al bordo dell'equazione $-\Delta u = f$ con $f \in L^p(\Omega)$ può condurre a funzioni $u \notin W^{1,p}(\Omega)$, dunque $u \notin W^{2,p}(\Omega)$. In tal caso la situazione è essenzialmente diversa da quella vista nell'Esempio 8.1.

8.6. Esempio. In riferimento all'Esempio 8.1, modifichiamo la scelta del dominio $D(L)$ traendo suggerimento dalla formula (8.20) di integrazione per parti (uguaglianza fra primo e ultimo membro) ma con lo scambio fra A e A^T. Diciamo che una funzione $u \in L^p(\Omega)$ appartiene a $D(L)$ quando esiste $w \in L^p(\Omega)$ che verifica

$$\int_\Omega w\,v\,dx = \int_\Omega u(-\operatorname{div}(A^T\nabla v))\,dx \quad \text{per ogni } v \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)\,. \tag{8.24}$$

Se $u \in D(L)$, la funzione w è unica (per il Lemma I.5.53) e poniamo $Lu = w$. Questa è una versione debole dell'operatore $u \mapsto -\operatorname{div}(A\nabla u)$ che suona analoga alla (I.5.49) (dove c'è Δ senza il segno meno). Notiamo che il dominio $D(L)$ è sufficientemente "grande" da garantire che l'operatore $L : D(L) \subseteq L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ ottenuto sia chiuso, e la dimostrazione di ciò è immediata. Infatti, se $u_n \in D(L)$ per ogni n, $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $w_n = Lu_n \to w$ in $L^p(\Omega)$, allora, per ogni v come in (8.24), risulta

$$\int_\Omega w\,v\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega w_n\,v\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n(-\operatorname{div}(A^T\nabla v))\,dx = \int_\Omega u(-\operatorname{div}(A^T\nabla v))\,dx$$

dato che $v, -\operatorname{div}(A^T\nabla v) \in L^q(\Omega)$. Dunque $u \in D(L)$ e $w = Lu$.

La differenza sostanziale rispetto alla situazione dell'Esempio 8.1 è la seguente: qui non ci siamo posti davvero il problema di come sia fatto il dominio di L e abbiamo preso un sottospazio molto grande in cui riusciamo a dar senso alle cose da scrivere, nulla di più, senza preoccuparci di quale sia l'effettiva regolarità delle funzioni in gioco. Tuttavia, la definizione di $D(L)$ fa sì che gli elementi $u \in D(L)$ verifichino una condizione di annullamento al bordo in qualche senso generalizzato, come suggerisce quanto è stato detto nell'Osservazione 8.2. Se non avessimo ipotesi di regolarità dovremmo lavorare parecchio per continuare il discorso. Al contrario, grazie alle condizioni imposte a Ω e ai coefficienti, siamo nelle condizioni di utilizzare l'implicazione (8.15), applicata con p e q scambiati e con A^T al posto di A, e concludere che $D(L) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Dunque, a posteriori, questo e l'operatore dato dalla (8.5) sono gli stessi e non occorre aggiungere altro.

8.7. Esempio. La costruzione dell'operatore fatta nell'Esempio 8.6 realizza l'idea seguente: si moltiplicano i due membri dell'equazione $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$ per la generica funzione v nulla al bordo, si integra su Ω e si eseguono due integrazioni per parti (uguaglianza fra primo e terzo membro della (8.20)). Al contrario, nell'Esempio 8.1 non si è integrato per parti affatto. C'è una possibilità intermedia: integrare per parti una volta sola (uguaglianza fra primo e secondo membro della (8.20)). Ecco come si può fare. Costruiamo $L : D(L) \subseteq L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ prendendo come $D(L)$ l'insieme delle funzioni u verificanti le condizioni: $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ed esiste $w \in L^p(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega w\,v\,dx = \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx \quad \text{per ogni } v \in W_0^{1,q}(\Omega). \tag{8.25}$$

Anche in questo caso, ben inteso nelle ipotesi di regolarità, abbiamo $D(L) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ così che questo e gli operatori degli Esempi 8.1 e 8.6 sono gli stessi.

8.8. Esempio (seguito di 8.1). Consideriamo ora il caso generale corrispondente al problema (8.1), supponendo cioè b e c generici. Ancora vediamo la (8.1), con la condizione al bordo intesa in un senso generalizzato, come $Lu = f$ con un opportuno operatore L. Ora, sfruttando quanto già sappiamo del caso particolare, cerchiamo di applicare il Teorema 7.22. Definiamo

$$D(L) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad Lv = -\operatorname{div}(A\nabla v) + b\cdot\nabla u + cu \quad \text{per } v \in D(L) \tag{8.26}$$

e decomponiamo L come $L = I + K$ ove $I, K : D(L) \to L^p(\Omega)$ sono definiti dalle formule

$$Iv = -\operatorname{div}(A\nabla v) \quad \text{e} \quad Kv = b\cdot\nabla v + cv \quad \text{per } v \in D(L).$$

Se $D(L)$ è munito della norma indotta da $W^{2,p}(\Omega)$ (di cui è sottospazio chiuso), L è lineare e continuo da $D(L)$ in $L^p(\Omega)$, I è un isomorfismo per la (8.16) e K è compatto come ora mostriamo appoggiandoci al Teorema di Rellich-Kondrachov, che enunciamo in una versione più forte di quella data in IV.3.20 ma da quella deducibile:

l'immersione di $W^{k,p}(\Omega)$ in $W^{k-1,p}(\Omega)$ è compatta per ogni $k \ge 1$ e $p \in [1, +\infty]$. (8.27)

Ciò vale se Ω è limitato e regolare e i casi estremi $p = 1$ e $p = \infty$ sono ammessi. Ma torniamo alla nostra situazione: $p \in (1, +\infty)$. Se $v_n \rightharpoonup 0$ in $D(L)$, allora $v_n \rightharpoonup 0$ in $W^{2,p}(\Omega)$, da cui $v_n \to 0$ in $W^{1,p}(\Omega)$ per la (8.27). D'altra parte si ha facilmente

$$\|Kv_n\|_p \leq \|b\|_\infty \, \|\nabla v_n\|_p + \|c\|_\infty \, \|v_n\|_p \leq (\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)\|v_n\|_{1,p}$$

per cui $Kv_n \to 0$ il $L^p(\Omega)$ e la compattezza segue dall'Esercizio 7.19 (applicabile grazie al Teorema VI.2.11). Allora il Teorema 7.22 assicura che L ha immagine chiusa, oltre che nucleo di dimensione finita. In particolare vale la (5.4). Per caratterizzare l'immagine, tuttavia, conviene procedere come abbiamo fatto nel caso particolare dell'Esempio 8.1, vedere cioè L come operatore non limitato da $V = L^p(\Omega)$ in $W = L^p(\Omega)$ in modo che l'aggiunto L^* sia un operatore (non limitato) da $W^* = L^q(\Omega)$ in $V^* = L^q(\Omega)$. Calcoliamo l'aggiunto come abbiamo fatto nel caso particolare. Sia $w^* \in W^* = L^q(\Omega)$. Allora $w^* \in D(L^*)$ se e solo se esiste $v^* \in L^q(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega v^* v \, dx = \int_\Omega w^* (-\operatorname{div}(A\nabla v) + b \cdot \nabla v + cv) \, dx \quad \text{per ogni } v \in D(L) \,.$$

Ci troviamo in una situazione simile a quella dell'Esempio 8.6 e si può dimostrare che: *i)* $D(L^*) = W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$; *ii)* $L^* w^* = -\operatorname{div}(A^T \nabla w^* + bw^*) + cw^*$ per $w^* \in D(L^*)$. Allora l'equazione $Lu = f$ che ci siamo proposti di studiare con dato $f \in L^p(\Omega)$ ha almeno una soluzione u appartenente a $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se vale la condizione

$$\begin{aligned} &\int_\Omega f w^* \, dx = 0 \quad \text{per ogni } w^* \in L^q(\Omega) \text{ verificante} \\ &-\operatorname{div}(A^T \nabla w^* + bw^*) + cw^* = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad w^* = 0 \quad \text{su } \Gamma \end{aligned} \tag{8.28}$$

ove è inteso che l'equazione sia soddisfatta in forma debole e la condizione di annullamento sia verificata in un opportuno senso generalizzato. Siccome si può dimostrare che il nucleo di L^* ha dimensione finita, l'esistenza delle soluzioni di (8.1) (con la regolarità $W^{2,p}$ richiesta ora) dipende dall'annullamento di un numero finito di integrali che coinvolgono f. Ciò sarà chiaro, anche se in un quadro funzionale diverso, da quanto diremo nell'esempio successivo.

8.9. Esempio (soluzioni variazionali). Riprendiamo l'idea data nell'Esempio 8.7, ma modifichiamo gli spazi in gioco. Poniamo $V = H_0^1(\Omega)$ e introduciamo la forma bilineare $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big((A\nabla u) \cdot \nabla v + (b \cdot \nabla u) \, v + cuv \Big) \, dx \quad \text{per } u, v \in V \,.$$

A questo proposito osserviamo che, perché la definizione abbia senso e valga quanto diciamo di seguito, è sufficiente supporre i coefficienti limitati e la condizione di ellitticità uniforme

$$a_{ij}, \, b_i, \, c \in L^\infty(\Omega) \quad \text{e} \quad (A(x)\xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ e per q.o. } x \in \Omega \,. \tag{8.29}$$

Tuttavia occorre ancora supporre Ω limitato e regolare, in modo che valga la (8.27). Controlliamo che siamo nelle condizioni di applicare direttamente il Teorema 7.26 con $H = L^2(\Omega)$ e di vedere chiaramente quali siano le condizioni di risolubilità. La compattezza dell'immersione di V in H segue dalla (8.27). Dobbiamo poi verificare che la forma a è bilineare continua e debolmente coerciva, e a questo scopo basta richiamare l'Esempio IV.1.25. Il controllo che a sia bilineare e continua è stato fatto in quell'occasione. Ripetendo inoltre, con $\delta = \alpha/2$, lo stesso calcolo fatto nell'esempio citato, otteniamo per ogni $u \in V$

$$a(u, u) + \lambda \|u\|_2^2 = \int_\Omega \Big((A\nabla u) \cdot \nabla u + (b \cdot \nabla u) \, u + (c + \lambda) \, u^2 \Big) \, dx \geq \frac{\alpha}{2} \, \|u\|_{1,2}^2$$

purché $c + \lambda - (2/\alpha)\|b\|_\infty^2 \geq \alpha/2$. Scegliamo dunque $\lambda > 0$ in modo che tale condizione sia soddisfatta e abbiamo la coercività debole. Valgono pertanto le conclusioni del Teorema 7.26 e ciò che rimane da fare è capire il significato dei problemi coinvolti e quello delle condizioni di compatibilità sul dato che assicurano l'esistenza della soluzione. Osserviamo preliminarmente che è equivalente far variare v in tutto V oppure solo in $C_c^\infty(\Omega)$ nella (7.21) in quanto $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $V = H_0^1(\Omega)$ per definizione e, per ogni $u \in V$ fissata, il primo membro definisce un funzionale lineare e continuo su V. Ora l'equazione variazionale (7.21) ha un significato più generale della (8.1), in quanto il dato f^* può essere un elemento di V^*. Tuttavia, se f^* è dato da

$$\langle f^*, v \rangle = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{per } v \in V, \quad \text{con } f \in L^2(\Omega) \tag{8.30}$$

(il che significa $f^* = f \in H$ nel senso delle identificazioni fatte nella terna hilbertiana) allora si ottiene una situazione più concreta. Precisamente la (7.21) equivale al problema

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad -\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{nel senso delle distribuzioni}$$

e la condizione di risolubilità diventa

$$\int_\Omega f w \, dx = 0 \quad \text{per ogni soluzione } w \text{ del problema (7.22).} \tag{8.31}$$

Ma l'equazione (7.22) può essere trattata allo stesso modo in quanto la forma aggiunta è data da

$$a^*(u, v) = \int_\Omega ((A^T \nabla u + bu) \cdot \nabla v + cuv) \, dx \quad \text{per } u, v \in V.$$

Dunque la (7.22) significa

$$w \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad -\operatorname{div}(A^T \nabla w + bw) + cw = 0 \quad \text{nel senso delle distribuzioni.} \tag{8.32}$$

Notiamo che, grazie al Teorema 7.26, lo spazio dato dalle (8.32) ha dimensione finita, per cui la (8.31) equivale a un numero finito di condizioni indipendenti. Osserviamo che quanto detto nella Sezione 7.30 altro non è che la discussione concreta, in una situazione elementare, delle condizioni di risolubilità appena trovate.

Capitolo 8
Spazi localmente convessi

Dopo gli spazi normati, gli spazi localmente convessi costituiscono la classe più importante di spazi vettoriali topologici. In questo capitolo presentiamo le linee essenziali da seguire nella loro costruzione effettiva nei casi concreti e solo qualche risultato di carattere generale. Esempi importanti di spazi localmente convessi si ottengono considerando le topologie deboli. A queste dedichiamo un paragrafo apposito, nel quale presentiamo anche qualche risultato di compattezza.

1. Topologia generata da una famiglia di seminorme

Il concetto di seminorma è stato dato nella Definizione I.2.1 ed è chiaro che una seminorma p è una norma se e solo se p si annulla solo nell'origine. Siano ora V uno spazio vettoriale e p una seminorma in V e immaginiamo di estendere a questo caso l'usuale definizione di palla: $B_r(x_0) = \{x \in V : \ p(x - x_0) < r\}$. Allora potremmo considerare la topologia (che effettivamente esiste ed è unica) nella quale, per ogni $x_0 \in V$, l'insieme $\mathcal{B}(x_0) = \{B_r(x_0) : \ r > 0\}$ è una base di intorni di x_0. Ma se p non è una norma, tale topologia non è separata. Infatti, se $x_0 \neq 0$ e $p(x_0) = 0$, ogni intorno di 0 contiene x_0. La cosa conveniente non è considerare una singola seminorma ma una famiglia di seminorme. In tal caso il termine "palla" va aggiornato, così come la notazione corrispondente, in modo da evidenziare la sua dipendenza dalla seminorma considerata.

1.1. Definizione. *Siano V uno spazio vettoriale e p una seminorma in V. La semipalla e la semipalla chiusa di centro $x_0 \in V$ e raggio $r > 0$ associate a p sono gli insiemi*

$$B_r^p(x_0) = \{x \in V : \ p(x - x_0) < r\} \quad e \quad \overline{B}_r^p(x_0) = \{x \in V : \ p(x - x_0) \leq r\} \tag{1.1}$$

rispettivamente. □

L'aggettivo "chiusa", che per ora è un semplice aggettivo dato che V è solo uno spazio vettoriale, acquisterà l'usuale significato quando in V verrà introdotta la topologia appropriata, precisamente quella della definizione data di seguito. Resta inteso che ogni famiglia di seminorme che consideriamo di volta in volta non è vuota, anche se ciò non viene detto esplicitamente.

1.2. Definizione. *Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{F}$ una famiglia di seminorme in V. La topologia indotta da $\mathcal{F}$ su V è quella nella quale, per ogni $x_0 \in V$, una base di intorni di x_0 è la famiglia $\mathcal{B}(x_0)$ definita da*

$$\mathcal{B}(x_0) = \left\{ \bigcap_{p \in \mathcal{F}'} B_r^p(x_0) : \quad \mathcal{F}' \text{ è un sottoinsieme finito di } \mathcal{F} \text{ e } r > 0 \right\}. \tag{1.2}$$

Tale base sarà chiamata base standard associata alla famiglia $\mathcal{F}$. □

Sarebbe doveroso controllare che, effettivamente, la condizione imposta nella definizione individua una e una sola topologia. Tuttavia omettiamo la verifica per brevità.

1.3. *Esercizio.* Si controlli che sostituendo $B_r^p(x_0)$ con $\overline{B}_r^p(x_0)$ nella (1.2) si ottiene la stessa topologia. Lo stesso avviene se il raggio r viene lasciato dipendere dalla seminorma $p \in \mathcal{F}'$.

1.4. *Esercizio.* Si dimostri che, per ogni $p \in \mathcal{F}$, $x_0 \in V$ e $r > 0$, la semipalla $B_r^p(x_0)$ è un aperto e la semipalla chiusa $\overline{B}_r^p(x_0)$ è la chiusura di $B_r^p(x_0)$ nella topologia indotta da $\mathcal{F}$.

1.5. Osservazione. Supponiamo che la famiglia $\mathcal{F}$ di seminorme goda della proprietà seguente: per ogni $p_1, p_2 \in \mathcal{F}$, appartiene a $\mathcal{F}$ anche la seminorma p definita dalla formula $p(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\}$ per $x \in V$. Allora si vede chiaramente che, per ogni $x_0 \in V$ e $r > 0$, ogni intersezione finita di semipalle di centro x_0 e raggio r associate a seminorme di $\mathcal{F}$ è essa stessa una singola semipalla di centro x_0 e raggio r associata a una seminorma di $\mathcal{F}$. Ne consegue che la base standard (1.2) associata a $\mathcal{F}$ si riscrive nella forma più semplice

$$\mathcal{B}(x_0) = \{B_r^p(x_0) : \ p \in \mathcal{F} \ \text{ e } \ r > 0\}.$$

Notiamo che, data una qualunque famiglia $\mathcal{F}_0$ di seminorme, si può sempre costruire una famiglia $\mathcal{F}$ di seminorme che gode della proprietà detta e tale che $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_0$ inducano la stessa topologia. □

Anche se altri autori non se ne curano più di tanto, noi pretendiamo la separazione per la topologia indotta dalla famiglia data. Ebbene, si verifica subito che vale il risultato seguente:

1.6. Proposizione. *La topologia generata dalla famiglia $\mathcal{F}$ è di Hausdorff se e solo se*

$$\textit{per ogni } x \neq 0 \textit{ esiste } p \in \mathcal{F} \textit{ tale che } p(x) > 0 \tag{1.3}$$

o, equivalentemente, l'unico punto di V in cui ogni $p \in \mathcal{F}$ si annulla è l'origine. □

1.7. Definizione. *Diciamo che la famiglia $\mathcal{F}$ di seminorme è separata quando vale la* (1.3). □

1.8. Esercizio. Considerare in $\mathbb{K}^n$ la famiglia di seminorme $\mathcal{F} = \{|\cdot|_i : \ i = 1, \ldots, n\}$ definita dalla formula $|x|_i = |x_i|$ se $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Dimostrare che $\mathcal{F}$ genera la topologia euclidea. Dimostrare più in generale che, se $\mathcal{F}$ è una famiglia separata e finita di seminorme in uno spazio vettoriale V, allora vi è una norma in V che induce la topologia generata da $\mathcal{F}$.

1.9. Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale, $\mathcal{F}$ una famiglia separata di seminorme in V e $\mathcal{T}$ la topologia indotta da $\mathcal{F}$ su V. Allora $(V, \mathcal{T})$ è uno spazio vettoriale topologico.* □

Dimostrazione. La separazione di Hausdorff è garantita dalla (1.3). Verifichiamo che l'operazione di somma è continua. Siano $x_0, y_0 \in V$ e I un intorno di $x_0 + y_0$. Dobbiamo costruire un intorno J di (x_0, y_0) nel prodotto $V \times V$ tale che, per ogni $(x, y) \in J$, si abbia $x + y \in I$. Possiamo supporre che I sia l'intersezione delle semipalle $B_\varepsilon^p(x_0 + y_0)$, ove $\varepsilon > 0$ è fissato e p varia in una fissata famiglia finita $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Siccome $p((x+y) - (x_0 + y_0)) \leq p(x - x_0) + p(y - y_0)$ per ogni x, y e per ogni seminorma p, è chiaro che possiamo prendere

$$J = \Bigl(\bigcap_{p \in \mathcal{F}'} B_{\varepsilon/2}^p(x_0) \Bigr) \times \Bigl(\bigcap_{p \in \mathcal{F}'} B_{\varepsilon/2}^p(y_0) \Bigr)$$

che effettivamente è un intorno di (x_0, y_0) nella topologia prodotto. Verifichiamo che l'operazione di prodotto fra scalari e vettori è continua. Siano $x_0 \in V$ e $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ e sia I un intorno di $\lambda_0 x_0$. Dobbiamo trovare un intorno J di (λ_0, x_0) in $\mathbb{K} \times V$ tale che $\lambda x \in I$ per ogni $(\lambda, x) \in J$. Ancora possiamo supporre che I sia l'intersezione delle semipalle, questa volta del tipo $B_\varepsilon^p(\lambda_0 x_0)$, ove $\varepsilon > 0$ è fissato e p varia in una fissata famiglia finita $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in V$, ogni seminorma p verifica

$$p(\lambda x - \lambda_0 x_0) \leq |\lambda| p(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| p(x_0) \leq (|\lambda_0| + |\lambda - \lambda_0|) p(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| p(x_0).$$

Dunque possiamo prendere

$$J = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times \bigcap_{p \in \mathcal{F}'} B_\delta^p(x_0)$$

ove $\delta \in (0, 1)$ è scelto in modo che $(|\lambda_0| + 1)\delta + \delta p(x_0) < \varepsilon$. □

Ora che sappiamo di trattare con spazi vettoriali topologici, ricordando le Proposizioni I.4.9 e I.4.10, possiamo stabilire i risultati seguenti di continuità. Dimostriamo solo il primo, dato che per il secondo il ragionamento è simile.

1.10. Proposizione. *Siano V e W due spazi vettoriali e $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due famiglie separate di seminorme in V e in W rispettivamente. Allora un operatore lineare $L \in \mathrm{Hom}(V;W)$ è continuo rispetto alle corrispondenti topologie se e solo se vale la condizione: per ogni $q \in \mathcal{G}$ esistono una famiglia finita $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ e una costante $M \geq 0$ tali che*

$$q(Lx) \leq M \max_{p \in \mathcal{F}'} p(x) \quad \text{per ogni } x \in V \,. \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Valga la (1.4). Dimostriamo che L è continuo in 0. Fissiamo un intorno I di 0 in W e cerchiamo un intorno J di 0 in V tale che $Lx \in I$ per ogni $x \in J$. Come I possiamo prendere l'intersezione delle semipalle chiuse $\overline{B}_\varepsilon^q(0)$, ove $\varepsilon > 0$ è fissato e q varia in una fissata famiglia finita $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$. Denotiamo con q_k, $k = 1, \ldots, n$, le seminorme di $\mathcal{G}'$ e applichiamo la (1.4) a ciascuna delle q_k: troviamo una famiglia finita $\{p_{kj}\}_{j=1,\ldots,m_k}$ e una costante M_k che rendono vera l'analoga della (1.4). Possiamo allora prendere

$$J = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m_k} \overline{B}_\delta^{p_{kj}}(0) \quad \text{ove } \delta > 0 \text{ è tale che } M_k \delta \leq \varepsilon \text{ per } k = 1, \ldots, n \,.$$

Viceversa, supponiamo L continuo in 0 e sia $q \in \mathcal{G}$. Allora $\overline{B}_1^q(0)$ è un intorno dell'origine di W. Esiste dunque un intorno J dell'origine di V tale che $q(Lx) \leq 1$ per ogni $x \in J$. Siano $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ una famiglia finita e $\delta > 0$ tali che l'intersezione $\bigcap_{p \in \mathcal{F}'} \overline{B}_\delta^p(0)$ sia inclusa in J. Sia ora $x \in V$ e si ponga $M(x) = \max_{p \in \mathcal{F}'} p(x)$. Si supponga dapprima $M(x) > 0$ e si ponga $y = (\delta / M(x))x$. Allora $p(y) \leq \delta$ per ogni $p \in \mathcal{F}'$, cioè $y \in J$, da cui $q(Ly) \leq 1$. Segue allora $q(Lx) \leq (1/\delta)M(x)$, cioè la (1.4) con $M = 1/\delta$ relativamente ai punti x presi in considerazione. Sia ora $M(x) = 0$. Allora $\lambda x \in J$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ da cui $q(L(\lambda x)) \leq 1$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$. Segue che $q(Lx) = 0$ e la disuguaglianza richiesta vale banalmente. □

1.11. Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{F}$ una famiglia separata di seminorme in V. Allora una seminorma q in V è continua rispetto alla topologia indotta da $\mathcal{F}$ se e solo se vale la condizione: esistono una famiglia finita $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ e una costante $M \geq 0$ tali che*

$$q(x) \leq M \max_{p \in \mathcal{F}'} p(x) \quad \text{per ogni } x \in V \,. \tag{1.5}$$

1.12. *Esercizio.* Dimostrare la proposizione precedente.

1.13. Osservazione. In relazione al risultato precedente, denotiamo con $\mathcal{T}$ la topologia generata da $\mathcal{F}$. Allora ogni seminorma $p \in \mathcal{F}$ è continua rispetto a $\mathcal{T}$. Sia ora $\mathcal{T}'$ una topologia che rende V spazio vettoriale topologico e continue tutte le seminorme di $\mathcal{F}$. Allora, per ogni $p \in \mathcal{F}$ e ogni $x_0 \in V$, è continua anche la funzione $x \mapsto p(x - x_0)$ da V in $\mathbb{R}$. Ne segue che, per ogni $r > 0$, la semipalla $B_r^p(x_0)$ è un aperto di $\mathcal{T}'$. La stessa cosa vale allora per tutte le intersezioni finite di insiemi di questo tipo. Concludiamo che ogni intorno di x_0 nella topologia $\mathcal{T}$ è anche un intorno di x_0 nella topologia $\mathcal{T}'$, cioè che: *la topologia indotta da $\mathcal{F}$ è la meno fine fra quelle che: i) rendono V spazio vettoriale topologico; ii) rendono continue tutte le seminorme di $\mathcal{F}$.* Segnaliamo che, più spesso, la topologia indotta da $\mathcal{F}$ viene introdotta proprio per mezzo della proprietà ora segnalata. In tal caso gli intorni, gli aperti, eccetera vengono costruiti a posteriori. □

Dalla Proposizione 1.10 segue banalmente anche il risultato successivo.

1.14. Corollario. *Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due famiglie separate di seminorme in V. Allora queste generano la stessa topologia se e solo se valgono le condizioni: i) per ogni $q \in \mathcal{G}$ esistono una famiglia finita $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ e una costante $M \geq 0$ tali che $q(x) \leq M \max_{p \in \mathcal{F}'} p(x)$ per ogni $x \in V$; ii) per ogni $p \in \mathcal{F}$ esistono una famiglia finita $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ e una costante $M \geq 0$ tali che $p(x) \leq M \max_{q \in \mathcal{G}'} q(x)$ per ogni $x \in V$.* □

1.15. *Esercizio.* Sia $\mathcal{T}$ la topologia generata da una famiglia di seminorme. Dimostrare che la topologia generata dalla famiglia delle seminorme continue nella topologia $\mathcal{T}$ è ancora $\mathcal{T}$. □

Consideriamo ora la convergenza di una successione: anche in questo caso vogliamo tradurre la definizione di limite in una condizione che fa intervenire solo le seminorme che generano la topologia.

1.16. Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{F}$ una famiglia separata di seminorme in V. Allora una successione $\{x_n\}$ di elementi di V converge all'elemento $x \in V$ nella topologia generata da $\mathcal{F}$ se e solo se vale la condizione*

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n - x) = 0 \quad \textit{per ogni } p \in \mathcal{F}. \;\square \tag{1.6}$$

Dimostrazione. La convergenza $x_n \to x$ equivale a: per ogni intorno I dell'origine di V esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $x_n - x \in I$ per ogni $n \geq m$. Inoltre non è restrittivo limitarsi a considerare gli intorni I della forma $I = \bigcap_{p\in\mathcal{F}'} \overline{B}^p_\varepsilon(0)$ ove $\varepsilon > 0$ e la famiglia finita $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ sono arbitrari. Allora la convergenza in questione equivale alla condizione: per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni famiglia finita $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $p(x_n - x) \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq m$ e ogni $p \in \mathcal{F}'$. Ciò, a sua volta, equivale e dire che, per ogni $\varepsilon > 0$ e $p \in \mathcal{F}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $p(x_n - x) \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq m$. Ma quest'ultima frase è la definizione di (1.6). $\square$

2. Spazi localmente convessi

Come abbiamo anticipato all'inizio del capitolo, gli spazi localmente convessi costituiscono la classe più importante di spazi vettoriali topologici e tutti gli spazi normati e molti degli spazi funzionali di interesse nelle applicazioni dell'Analisi Funzionale sono localmente convessi. D'altra parte, parlare di spazi localmente convessi significa semplicemente rovesciare la medaglia: essi, infatti, sono tutti e soli gli spazi vettoriali topologici la cui topologia è indotta da una famiglia di seminorme.

Il punto centrale di questo paragrafo è la dimostrazione di tale affermazione. A complemento, daremo un risultato di metrizzabilità. Naturalmente, però, iniziamo dalla definizione.

2.1. Definizione. *Uno spazio localmente convesso è uno spazio vettoriale topologico ogni punto del quale ha una base di intorni convessi.* $\square$

2.2. Osservazione. Siccome in ogni spazio vettoriale topologico le traslazioni sono omeomorfismi che trasformano convessi in convessi, richiedere che ogni punto abbia una base di intorni convessi equivale a richiedere che l'origine abbia una base di intorni convessi. Il lemma successivo, propedeutico al risultato principale, afferma che l'origine ha anche una base più speciale di intorni. A tale proposito ricordiamo che la nozione di insieme equilibrato è stata data nella Definizione V.9.3.

2.3. Lemma. *Sia V uno spazio localmente convesso. Allora l'origine ha una base di intorni aperti convessi ed equilibrati.* $\square$

Dimostrazione. Basta provare che ogni intorno dell'origine contiene un intorno dell'origine che è aperto convesso ed equilibrato. Fissato dunque un intorno I dell'origine, dimostriamo che: $i)$ esiste un intorno E dell'origine incluso in I che è anche aperto ed equilibrato; $ii)$ esiste un intorno C dell'origine incluso in I che è anche aperto, convesso ed equilibrato. Dato che V è localmente convesso, I contiene un intorno convesso dell'origine. Inoltre, siccome l'interno di un convesso è pure convesso per l'Esercizio I.4.6, l'interno dell'intorno convesso trovato è un intorno aperto e convesso incluso in I. Per non introdurre troppe notazioni, supponiamo che I stesso sia convesso e aperto. Dimostriamo il punto $i)$ costruendo E. Sfruttiamo la continuità in $(0,0) \in \mathbb{K} \times V$ dell'applicazione $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ da $\mathbb{K} \times V$ in V. Esistono allora $\delta > 0$ e un intorno J dell'origine di V tali che, se $|\lambda| \leq \delta$ e $x \in J$, risulti $\lambda x \in I$. Possiamo supporre che J sia anche aperto. Definiamo allora E come segue

$$E = \{\lambda x : \; |\lambda| \leq \delta, \; x \in J\} = \bigcup_{|\lambda|\leq\delta} \lambda J = \bigcup_{0<|\lambda|\leq\delta} \lambda J$$

con le notazioni dell'Osservazione I.4.3. Siccome J è aperto e V è uno spazio vettoriale topologico, anche λJ è aperto se $\lambda \neq 0$. Segue che E è aperto. Dimostriamo che E è anche equilibrato. Siano $y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $|\alpha| \leq 1$. Allora esistono $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in J$ tali che $|\lambda| \leq \delta$ e $y = \lambda x$. Segue $\alpha y = (\alpha\lambda)x$ e $|\alpha\lambda| \leq \delta$. Dunque $\alpha y \in E$. Passando al punto $ii)$, poniamo semplicemente $C = \operatorname{co} E$, con la notazione (I.4.1) e ricordiamo che C è il più piccolo convesso che contiene E. Segue che C contiene l'origine ed è incluso in I dato che I è convesso. Inoltre C è anche aperto grazie all'Esercizio I.4.7. Dimostriamo infine che C è equilibrato. Siano infatti $x \in C$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $|\alpha| \leq 1$. Allora $x = \sum_i \vartheta_i x_i$, la somma essendo finita, con certi $x_i \in E$ e $\vartheta_i \geq 0$ tali che $\sum_i \vartheta_i = 1$. Abbiamo allora $\alpha x = \sum_i \vartheta_i (\alpha x_i)$. Ma $\alpha x_i \in E$ perché E è equilibrato e quindi $\alpha x \in C$. $\square$

2.4. Teorema. *Uno spazio vettoriale topologico V è localmente convesso se e solo se la sua topologia è generata da una famiglia di seminorme.* $\square$

Dimostrazione. Supponiamo che la topologia di V sia generata da una famiglia $\mathcal{F}$ di seminorme. Per ogni $p \in \mathcal{F}$ e $r > 0$ la semipalla $B_r^p(0)$ è un convesso, come subito si verifica. La stessa proprietà vale allora per ogni intersezione finita. Dunque la base standard di intorni dell'origine associata alla famiglia $\mathcal{F}$ è costituita da intorni convessi, per cui V è localmente convesso.

Supponiamo ora V localmente convesso e sia $\mathcal{T}$ la sua topologia. Per il lemma, esiste una base $\mathcal{B}_0$ di intorni dell'origine costituita da aperti convessi equilibrati. Poniamo $\mathcal{F} = \{\mathrm{mink}_C : \ C \in \mathcal{B}_0\}$, la famiglia dei funzionali di Minkowski degli elementi di $\mathcal{B}_0$, e sia $\mathcal{T}'$ la topologia generata da $\mathcal{F}$. Dimostriamo che $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. A tale scopo, siccome V è vettoriale topologico, basta provare che: $i)$ ogni elemento $C \in \mathcal{B}_0$ è un intorno dell'origine nella topologia $\mathcal{T}'$; $ii)$ ogni elemento della base standard associata a $\mathcal{F}$ è un intorno dell'origine nella topologia $\mathcal{T}$. Il punto $i)$ è immediato: grazie alla Proposizione V.9.8, per ogni $C \in \mathcal{B}_0$, si ha $C = B_1^{\mathrm{mink}_C}(0)$, per cui C stesso è un elemento della base standard associata a $\mathcal{F}$, dunque un intorno dell'origine nella topologia $\mathcal{T}'$. Ma anche il punto $ii)$ è facile. Sia infatti I un elemento della base standard associata a $\mathcal{F}$. Siccome $B_r^p(0) = rB_1^p(0)$ per ogni seminorma p e ogni $r > 0$, vediamo che I è intersezione finita di insiemi del tipo $rB_1^{\mathrm{mink}_{C_i}}(0)$, con $C_i \in \mathcal{B}_0$. Osserviamo che $B_1^{\mathrm{mink}_{C_i}}(0) = C_i$ dato che i C_i sono aperti convessi equilibrati. Ma siccome $\mathcal{T}$ rende V vettoriale topologico e tali C_i sono intorni dell'origine, la stessa cosa vale per rC_i e per le intersezioni finite. Dunque I è un intorno dell'origine nella topologia $\mathcal{T}$. $\square$

2.5. *Esercizio.* Si riprenda la seconda parte della dimostrazione nel caso banale in cui V è normato e $\mathcal{B}_0 = \{B_r(0) : \ r > 0\}$. Si costruisca la famiglia di seminorme e si tocchi con mano che questa genera la topologia originaria. $\square$

La teoria degli spazi localmente convessi (e più in generale degli spazi vettoriali topologici) è molto ricca, ma in questa sede non possiamo dire molto di più di quanto abbiamo già detto. Tuttavia, vogliamo almeno accennare alla nozione di insieme limitato (dopo di che una funzione, in particolare una successione, a valori in uno spazio vettoriale topologico sarà limitata quando è limitata la sua immagine) e proporre una serie di esercizi guidati. Siano V uno spazio vettoriale topologico e $B \subseteq V$. Allora si definisce:

$$B \text{ è limitato se e solo se per ogni intorno } I \text{ di } 0 \text{ esiste } \varepsilon > 0 \text{ tale che } \varepsilon B \subseteq I. \tag{2.1}$$

In modo equivalente: *per ogni intorno I di 0 esiste $c > 0$ tale che $cI \supseteq B$*. Si noti che la (2.1) dipende solo dalla topologia e che, nel caso in cui questa sia indotta da una metrica d, la limitatezza di B potrebbe non coincidere con la limitatezza di $d|_{B \times B}$. Infatti, se d_0 è una metrica che induce la topologia data, la formula $d(x,y) = \tanh d_0(x,y)$ definisce una metrica che induce la stessa topologia e, con questa metrica, avremmo $d|_{B \times B}$ limitata qualunque sia il sottoinsieme B.

2.6. *Esercizio.* Si dimostri che il concetto di limitatezza non cambia se nella (2.1) lasciamo variare I solo in una base fissata di intorni dell'origine e che la (2.1) coincide con l'abituale nozione di limitatezza nel caso degli spazi normati.

2.7. *Esercizio.* Si dimostri che, se B è limitato e I è un intorno di 0, allora esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $cB \subseteq I$ per ogni $c \in \mathbb{K}$ verificante $|c| \leq \varepsilon_0$, in particolare $\varepsilon B \subseteq I$ per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Si usi la continuità in $(0,0)$ di $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ da $\mathbb{K} \times V$ in V.

2.8. *Esercizio.* Si dimostri che, se B è limitato e $v_0 \in V$, anche $v_0 + B$ è limitato. Si usino la continuità in $(0,0)$ dell'applicazione $(\lambda, v) \mapsto \lambda v_0 + v$ da $\mathbb{K} \times V$ in V e l'Esercizio 2.7.

2.9. *Esercizio.* Si dimostri che ogni successione infinitesima è limitata. Si consiglia di usare la continuità in $(0,0)$ dell'applicazione $(\lambda,v)\mapsto\lambda v$ da $\mathbb{K}\times V$ in V. Si deduca che ogni successione convergente è limitata.

2.10. *Esercizio.* Siano V e W due spazi vettoriali topologici e $L:V\to W$ lineare e continuo. Si dimostri che, se B è un limitato di V, allora $L(B)$ è un limitato di W. □

Segnaliamo che l'implicazione data nell'ultimo esercizio non può essere invertita nel quadro generale degli spazi vettoriali topologici. Gli esercizi successivi sono relativi al caso più ristretto degli spazi localmente convessi e all'interessante problema della normabilità in tale ambito.

2.11. *Esercizio.* Sia V uno spazio localmente convesso e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di seminorme che ne genera la topologia. Si dimostri che un sottoinsieme $B\subseteq V$ è limitato se e solo se ogni $p\in\mathcal{F}$ si mantiene limitata su B.

2.12. *Esercizio.* Siano V uno spazio localmente convesso e sia I un intorno limitato di 0. Si dimostri che esiste un intorno J di 0 che è aperto convesso equilibrato assorbente e limitato.

2.13. *Esercizio.* Sia V uno spazio localmente convesso. Si dimostri che V è normabile, cioè che esiste una norma che ne genera la topologia, se e solo se l'origine ha un intorno limitato. Si consiglia di rivedere la dimostrazione del Teorema 2.4.

2.14. *Esercizio.* Si deduca che uno spazio localmente convesso V è normabile se e solo se V contiene almeno un aperto non vuoto e limitato. Questa affermazione è una versione ridotta del Criterio di Kolmogorov di normabilità: *uno spazio vettoriale topologico è normabile se e solo se contiene almeno un aperto non vuoto limitato e convesso.* □

Passiamo ora a questioni di metrizzabilità. Sebbene valga un risultato più generale (si veda l'osservazione successiva), noi ci limitiamo a dimostrare il seguente

2.15. Teorema. *Sia V uno spazio localmente convesso. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: $i)$ V è metrizzabile; $ii)$ V è a basi numerabili di intorni; $iii)$ ogni famiglia di seminorme che genera la topologia di V contiene una famiglia al più numerabile che genera la stessa topologia; $iv)$ esiste una famiglia $\mathcal{F}$ di seminorme al più numerabile che genera la topologia di V.* □

Dimostrazione. Ovviamente $i)$ implica $ii)$ e $iii)$ implica $iv)$. Dimostriamo ora che $ii)$ implica $iii)$. Fissiamo una famiglia $\mathcal{F}$ di seminorme che genera la topologia di V e consideriamo, accanto alla base standard $\mathcal{B}$ indotta da $\mathcal{F}$, una base $\mathcal{B}'$ al più numerabile di intorni dell'origine, che esiste per ipotesi. Sia $I'\in\mathcal{B}'$. Siccome I' è un intorno dell'origine nella topologia indotta da $\mathcal{F}$, esiste $I\in\mathcal{B}$ incluso in I'. Ma tale I si ottiene come intersezione di semipalle del tipo $B_r^{p_j}(0)$, $j=1,\dots,m$ in numero finito, il che individua un numero finito di seminorme p_j, $j=1,\dots,m$, di $\mathcal{F}$. Se per ogni $I'\in\mathcal{B}'$ consideriamo tali seminorme, la famiglia di seminorme che complessivamente si estrae da $\mathcal{F}$ è al più numerabile e induce la topologia originaria. Infatti, da un lato, la base standard $\mathcal{B}''$ associata è estratta da $\mathcal{B}$ e, d'altra parte, ogni elemento di $\mathcal{B}$, contenendo un elemento di $\mathcal{B}'$, contiene anche un elemento di $\mathcal{B}''$. Dimostriamo infine che $iv)$ implica $i)$. Fissiamo la famiglia $\mathcal{F}$ separata e al più numerabile di seminorme che induce la topologia di V. Pur di ripetere una stessa seminorma infinite volte se necessario, possiamo supporre che $\mathcal{F}$ sia l'immagine di una successione $\{p_n\}$ di seminorme. Per costruire una metrica che induce la stessa topologia, scegliamo una funzione $\varphi:[0,+\infty)\to[0,1)$ biiettiva, (strettamente) crescente, limitata e subadditiva, ad esempio $\varphi=\tanh$. Notiamo infatti che, se $\varphi(0)=0$, la subadditività di φ è garantita dalla concavità. Infatti si ha per ogni $r,s>0$

$$\varphi(r+s)\le\varphi(r)+\varphi(s)\quad\text{se e solo se}\quad\frac{\varphi(r+s)-\varphi(r)}{s}\le\frac{\varphi(s)-\varphi(0)}{s}$$

e la seconda disuguaglianza vale appunto se φ è concava. Definiamo allora d mediante

$$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\varphi(p_n(x-y))\quad\text{per } x,y\in V. \tag{2.2}$$

Che d sia ben definita ed effettivamente una metrica discende facilmente dalle proprietà di φ e dal fatto che la famiglia di seminorme è separata. Un dettaglio solo per la disuguaglianza triangolare:

$$d(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi(p_n(x-z)) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi(p_n(x-y)+p_n(y-z))$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi(p_n(x-y)) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varphi(p_n(y-z)) = d(x,y)+d(y,z).$$

Dimostriamo che d induce la topologia originaria. Per chiarezza denotiamo quest'ultima con $\mathcal{T}$ e con $\mathcal{T}_d$ la topologia indotta da d. Dobbiamo dimostrare che l'applicazione identica di V è continua sia da $(V,\mathcal{T})$ in $(V,\mathcal{T}_d)$ sia da $(V,\mathcal{T}_d)$ in $(V,\mathcal{T})$. Siccome in entrambe le topologie gli intorni del generico punto si ottengono traslando gli intorni dell'origine, basta controllare dette continuità nell'origine. Per dimostrare la prima fissiamo $\varepsilon > 0$ e costruiamo un intorno J dell'origine nella topologia $\mathcal{T}$ incluso nella palla $B_{2\varepsilon}(0)$ associata alla metrica d. Fissiamo prima m tale che $\sum_{n>m} 2^{-n} \le \varepsilon$ e poi $\delta > 0$ tale che $\varphi(\delta) < \varepsilon/m$. L'intorno cercato è allora $J = \bigcap_{n=1}^m B_\delta^{p_n}(0)$. Infatti, se $x \in J$, si ha

$$d(x,0) \le \varepsilon + \sum_{n=1}^{m} \varphi(p_n(x)) \le \varepsilon + m\varphi(\delta) < 2\varepsilon.$$

Viceversa, fissato un intorno I dell'origine nella topologia $\mathcal{T}$, dobbiamo costruire una palla $B_\delta(0)$ inclusa in I. Possiamo senz'altro supporre che I appartenga alla base standard, cioè abbia la forma $\bigcap_{i=1}^k B_\varepsilon^{p_{n_i}}(0)$ per certi indici n_i e per un certo $\varepsilon > 0$. Denotiamo con m il massimo di tali indici e osserviamo che $\varphi^{-1} : [0,1) \to [0,+\infty)$ è ben definita e continua. Possiamo allora scegliere $\delta > 0$ tale che $2^m\delta < 1$ e valga l'implicazione: da $r \ge 0$ e $\varphi(r) < 2^m\delta$ segue $r < \varepsilon$. Mostriamo che $B_\delta(0) \subseteq I$. Se $n \le m$ e $d(x,0) < \delta$ si ha

$$\varphi(p_n(x)) \le 2^m \cdot 2^{-n}\varphi(p_n(x)) \le 2^m d(x,0) < 2^m\delta \quad \text{da cui} \quad p_n(x) < \varepsilon.$$

In particolare ciò vale per $n = n_i$, $i = 1,\dots,k$, per cui $x \in I$. □

2.16. Osservazione. In realtà vale un risultato più profondo, che non dimostriamo: *uno spazio vettoriale topologico è metrizzabile se e solo se l'origine ha una base numerabile di intorni* (il che equivale al fatto che tale proprietà valga per ogni punto). □

Nel caso di uno spazio localmente convesso metrizzabile si pone naturalmente il problema della completezza e l'uso della metrica (2.2) non è agevole. Ora, per quanto riguarda la convergenza delle successioni, possiamo utilizzare indifferentemente la metrica (2.2), una metrica che induce la stessa topologia, gli intorni, oppure le seminorme, queste scelte nella famiglia ritenuta di volta in volta la più conveniente (si ricordi la Proposizione 1.16). Una situazione analoga vale per la condizione di Cauchy, pur di avere una precauzione. Diamo in proposito l'esempio seguente.

2.17. Esempio. Nel caso di un generico spazio topologico metrizzabile, due metriche che ne generano la topologia possono comportarsi in modo diverso per quanto riguarda la completezza. Si consideri ad esempio l'intervallo $S = (-1,1)$ munito della topologia euclidea. Una metrica che genera tale topologia è naturalmente quella euclidea (ristretta a $S \times S$), che denotiamo con d_E. D'altra parte S è omeomorfo alla retta euclidea. Scelto allora un omeomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to S$ (ad esempio $\varphi = \tanh$), si può considerare la metrica d_φ che rende S isometrico alla retta munita della metrica euclidea. Dunque (S, d_φ) è completo, mentre (S, d_E) non lo è in quanto non chiuso nella retta euclidea. Questa osservazione non deve sconcertare più di tanto: semplicemente avviene che una successione di elementi di S convergente a uno dei punti ± 1 in senso euclideo è di Cauchy rispetto alla metrica d_E, mentre non lo è rispetto alla metrica d_φ. □

Per evitare questa circostanza spiacevole occorre limitare la classe delle metriche che inducono la topologia data in modo che le successioni di Cauchy siano le stesse per tutte le metriche della classe considerata. In generale possiamo dire che, se si parte da uno spazio vettoriale, due metriche d e d', *entrambe invarianti per traslazioni*, che inducono la stessa topologia hanno le stesse successioni di Cauchy. Infatti, in tal caso, la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto alla metrica d se e solo per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice m tale che $d(x_n - x_k, 0) \le \varepsilon$ non appena $n, k \ge m$ e risulta chiaro che tale condizione equivale all'analoga relativa alla metrica d'. Dunque, nel caso di uno spazio vettoriale topologico metrizzabile, conviene *considerare solo le metriche invarianti per traslazioni* ed escludere tutte le altre, anche se generano la stessa topologia, e nel caso localmente convesso la (2.2) è solo una di quelle ammesse (se φ ha le proprietà richieste). Vale il risultato seguente:

2.18. Proposizione. *Siano V uno spazio localmente convesso metrizzabile, $\{p_n\}$ e $\mathcal{G}$ una successione e una famiglia di seminorme che ne generano la topologia, d una metrica invariante per traslazioni che genera la topologia e $\{x_k\}$ una successione di elementi di V. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

i) $\{x_k\}$ *è di Cauchy rispetto alla metrica* d;
ii) *per ogni intorno* I *dell'origine esiste* m *tale che* $x_k - x_j \in I$ *per ogni* $k, j \ge m$;
iii) *per ogni* n *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* m *tale che* $p_n(x_k - x_j) \le \varepsilon$ *per ogni* $k, j \ge m$;
iv) *per ogni* $q \in \mathcal{G}$ *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* m *tale che* $q(x_k - x_j) \le \varepsilon$ *per ogni* $k, j \ge m$. □

2.19. *Esercizio.* Dimostrare il risultato appena enunciato. Si vedano le considerazioni precedenti e le dimostrazioni del Teorema 2.15 e della Proposizione 1.10, nonché la Proposizione 1.11 che dovrebbe essere già stata dimostrata dal lettore per esercizio.

2.20. Definizione. *Sia V uno spazio localmente convesso metrizzabile. Una successione $\{x_k\}$ di elementi di V è di Cauchy quando verifica una delle condizioni della Proposizione 2.18. Lo spazio V è detto di Fréchet quando tutte le sue successioni di Cauchy convergono.* □

Segnaliamo che, parlando di spazi di Fréchet, molti autori si riferiscono a situazioni più generali: alcuni indeboliscono la separazione di Hausdorff e altri prescindono dalla locale convessità, rimpiazzandola parzialmente, o da entrambe le cose. Tuttavia molti degli spazi funzionali che intervengono nelle applicazioni sono spazi di Fréchet in tutte le accezioni del termine e noi ne presenteremo una carrellata nell'ultimo paragrafo. D'altra parte molti spazi astratti sono localmente convessi ma non metrizzabili. Fra questi quelli ottenuti munendo gli spazi normati di dimensioni infinita delle topologie deboli o i loro duali muniti delle topologie deboli*, topologie alle quali dedichiamo il paragrafo successivo. Tuttavia non dimostreremo che tali topologie non sono metrizzabili. Ancora nell'ultimo paragrafo presenteremo invece esempi di spazi localmente convessi la cui non metrizzabilità è abbastanza facile da dimostrare.

3. Le topologie debole e debole*

Nei capitoli scorsi si è parlato spesso di convergenze debole e debole*. Queste sono indotte dalle rispettive topologie debole e debole* che ora introduciamo. Per contrasto, chiameremo *forti* le topologie indotte dalle norme. Siccome, in alcune applicazioni, sarà necessario utilizzare risultati che dipendono dalle forme geometriche del Teorema di Hahn-Banach e queste sono state trattate solo nel caso reale, in tutto il paragrafo supporremo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.1. Definizione. *Sia V uno spazio normato. La topologia debole di V è la topologia generata dalla famiglia $\mathcal{F}^*$ di seminorme definita come segue*

$$\mathcal{F}^* = \{p_f : \ f \in V^*\} \quad \text{ove} \quad p_f(x) = |\langle f, x\rangle| \quad \text{per } x \in V \text{ e } f \in V^* . \tag{3.1}$$

La topologia debole di V^* è la topologia generata dalla famiglia $\mathcal{F}_*$ di seminorme definita come segue*

$$\mathcal{F}_* = \{q_x : \ x \in V\} \quad \text{ove} \quad q_x(f) = |\langle f, x\rangle| \quad \text{per } f \in V^* \text{ e } x \in V . \ \square \tag{3.2}$$

3.2. Osservazione. Le topologie introdotte sono separate in quanto tali sono le famiglie di seminorme che le generano. Il fatto è banale per la topologia debole* di V^*, dato che, se $f \in V^*$ non è il funzionale nullo, allora esiste un punto $x \in V$ in cui esso non si annulla. L'analoga affermazione per la topologia debole di V, invece, dipende dal Teorema di Hahn-Banach, precisamente dal Corollario V.2.10. Infatti, se $x \in V \setminus \{0\}$ e f è data dal corollario citato, la seminorma p_f definita in (3.1) non si annulla in x. Notiamo infine che queste topologie inducono proprio le convergenze che abbiamo chiamato debole e debole* grazie alla Proposizione 1.16. □

Sebbene molto si possa dire su tali topologie, noi ci limitiamo a qualche osservazione e a due risultati di compattezza. La prima cosa da notare è data dalla proposizione seguente:

3.3. Proposizione. *Sia V uno spazio normato. Allora*

i) la topologia debole di V è meno fine della topologia forte;
ii) se V ha dimensione finita le due topologie coincidono;
iii) se V ha dimensione infinita le due topologie sono diverse.

Più precisamente, nel caso iii), ogni intorno dell'origine nella topologia debole contiene un sottospazio di dimensione infinita. In particolare la topologia debole non è indotta da alcuna norma. □

Dimostrazione. Sistematicamente basta considerare intorni dell'origine, eventualmente scelti in una base. Il punto *i)* equivale a: ogni intorno della base standard della topologia debole è anche un intorno nella topologia forte. Ma ciò è immediato dato che i funzionali che intervengono sono continui.

Tenendo conto del primo punto, il punto *ii)* equivale a: se V ha dimensione finita, una palla $B_r(0)$ rispetto a una norma in V è anche un intorno nella topologia debole. Siano B una base di V e B^* la sua base duale (vedi III.(3.1)). Se $x \in V$ sia $(x_1, \ldots, x_n)$ il vettore delle coordinate di x rispetto alla base B e si ponga $\|x\| = \max_i |x_i|$. Allora $\|\cdot\|$ è una norma e l'intorno $B_r(0)$ rispetto a tale norma coincide con l'intorno debole dell'origine dato dall'intersezione $\bigcap_{i=1}^n B_r^{e^i}(0)$.

Supponiamo ora V di dimensione infinita. Per dimostrare tutta la parte restante dell'enunciato, basta verificare che ogni intorno I dell'origine della base standard della topologia debole contiene un sottospazio di dimensione infinita. Un tale intorno I ha la forma

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} B_\varepsilon^{f_i}(0) = \{x \in V : \ |\langle f_i, x\rangle| < \varepsilon \quad \text{per } \ i = 1, \ldots, n\}$$

per certi $f_i \in V^*$ e $\varepsilon > 0$. Sia $f \in \operatorname{Hom}(V; \mathbb{K}^n)$ dato da $f(x) = (\langle f_1, x\rangle, \ldots, \langle f_n, x\rangle)$ e siano $N(f)$ e $R(f)$ il suo nucleo e la sua immagine. Siccome $\dim V = \dim N(f) + \dim R(f)$ per la (VII.3.4) e $\dim R(f) \le n$, si ha $\dim N(f) = +\infty$. D'altra parte $N(f) \subset I$, chiaramente. □

3.4. Corollario. *Sia V uno spazio normato di dimensione infinita. Allora la chiusura debole della frontiera ∂A di un qualunque aperto limitato A di V include A.* □

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che ogni $x \in A$ è di accumulazione per ∂A nella topologia debole. Siano dunque $x \in A$ e J un intorno debole di x. Allora $J = x + J_0$ per un opportuno intorno debole J_0 di 0. Sia V_0 un sottospazio di dimensione positiva incluso in J_0 (ne esiste uno addirittura di dimensione infinita per la Proposizione 3.3). Fissato $v_0 \in V_0$ tale che $\|v_0\| = 1$, consideriamo gli insiemi

$$I = \{t \in \mathbb{R} : \ x + tv_0 \in A\} \quad \text{e} \quad E = \{t \in \mathbb{R} : \ x + tv_0 \notin \overline{A}\}. \tag{3.3}$$

Allora I ed E sono aperti disgiunti di $\mathbb{R}$. Essi sono non vuoti, il primo in quanto $0 \in I$, il secondo in quanto $\mathbb{R} \setminus E \subseteq (-r, r)$ se $r > 0$ è tale che $\overline{A} \subset B_r(x)$. Essendo $\mathbb{R}$ connesso, il complementare di $I \cup E$ contiene almeno un punto t_0. Dunque $x + t_0 v_0 \in J \cap \partial A$. □

3.5. Esercizio. Siano V uno spazio normato di dimensione infinita e $C \subset V$ un aperto convesso e limitato. Dimostrare che la chiusura debole di ∂C è la chiusura forte $\overline{C}$ di C.

3.6. Esercizio. Sia V uno spazio normato. Dimostrare che sono equivalenti le condizioni seguenti: *i)* per ogni aperto limitato $A \subset V$ la chiusura debole di ∂A include A; *ii)* esiste un aperto limitato $A \subset V$ tale che la chiusura debole di ∂A includa A; *iii)* la chiusura debole della sfera $\partial B_1(0)$ è la palla chiusa $\overline{B}_1(0)$; *iv)* V ha dimensione infinita. □

Mettiamo in guardia il lettore: l'enunciato del Corollario 3.4 non deve autorizzare a dedurre che la chiusura debole sequenziale di ∂A includa A, cioè che ogni punto di A sia limite debole di una successione di elementi di ∂A. Infatti la topologia debole in dimensione infinita non è metrizzabile e quindi la versione sequenziale dell'enunciato in questione ha un significato in generale diverso. Ad esempio la chiusura debole sequenziale in ℓ^1 di un insieme qualunque coincide con la sua chiusura forte (vedi (IV.4.3)). A complemento presentiamo un risultato e qualche commento.

3.7. Proposizione. *Sia V uno spazio normato. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: $i)$ per ogni aperto limitato $A \subset V$ la chiusura debole sequenziale della frontiera ∂A include A; $ii)$ esiste una successione $\{e_n\}$ di vettori unitari di V convergente debolmente a 0.* $\square$

Dimostrazione. Se vale la condizione $i)$, per dimostrare la $ii)$ basta scegliere $A = B_1(0)$. Viceversa valga la $ii)$ e sia $x \in A$: costruiamo $x_n \in \partial A$ tali che $x_n \rightharpoonup x$ sfruttando la successione $\{e_n\}$ data dall'ipotesi. Procedendo come nella dimostrazione del Corollario 3.4, per ogni n fissato introduciamo gli insiemi I ed E dati dalle (3.3) nelle quali si legga $v_0 = e_n$. Come in quel caso $\mathbb{R} \setminus E \subseteq (-r, r)$ se $r > 0$ è tale che $\partial A \subseteq B_r(x)$, per cui ancora I ed E sono aperti disgiunti e non vuoti e ogni $t \in \mathbb{R}$ tale che $x + te_n \in \partial A$ verifica $|t| \le r$. Scelto pertanto t_n nel complementare di $I \cup E$, si ha $x_n = x + t_n e_n \in \partial A$ e $|t_n| \le r$ così che la successione $\{t_n\}$ è limitata. Segue allora che $t_n e_n \rightharpoonup 0$, cioè che $x_n \rightharpoonup x$. $\square$

3.8. Osservazione. La condizione $ii)$ della Proposizione 3.7 è soddisfatta se V è uno spazio di Hilbert (Proposizione IV.4.4). Mostriamo che essa è soddisfatta anche nei due casi seguenti: $i)$ $V = L^p(\Omega)$ con $p \in (1, +\infty)$ se Ω è un generico spazio di misura σ-finito che rende $L^p(\Omega)$ di dimensione infinita; $ii)$ $V = L^1(\Omega)$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^d$ (la situazione generale non potendo essere trattata dato che essa comprenderebbe il caso $V = \ell^1$ già escluso). $i)$ Siccome stiamo supponendo che $L^p(\Omega)$ abbia dimensione infinita, esiste una successione $\{\omega_n\}$ di sottoinsiemi misurabili di Ω fra loro disgiunti e tutti di misura positiva e finita (si riveda la dimostrazione del Teorema I.5.36). Poniamo $e_n = \mu(\omega_n)^{-1/p}\chi_n$ ove χ_n è la funzione caratteristica di ω_n. Per concludere, posto $q = p'$, basta trovare un sottoinsieme W denso in $L^q(\Omega)$ tale che $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega e_n w \, d\mu = 0$ per ogni $w \in W$ (Esercizio IV.4.12). Poniamo

$$W = \bigcup_{m=1}^{\infty} W_m \quad \text{ove} \quad W_m = \{ w \in L^q(\Omega) : \; w = 0 \text{ q.o. in } \omega_k \text{ per ogni } k > m \}$$

e dimostriamo che W è denso in $L^q(\Omega)$ osservando che $q < +\infty$ in quanto $p > 1$. Data $w \in L^q(\Omega)$ definiamo la successione $\{w_m\}$ come segue:

$$w_m = w \quad \text{in } \Omega \setminus \bigcup_{k>m} \omega_k \quad \text{e} \quad w_m = 0 \quad \text{in } \bigcup_{k>m} \omega_k .$$

Allora $w_m \in W_m \subseteq W$ per ogni m. Inoltre

$$\|w_m - w\|_q^q = \sum_{k>m} \int_{\omega_k} |w|^q \, d\mu \quad \text{da cui} \quad w_m \to w \quad \text{in } L^q(\Omega) .$$

Dunque W è denso in $L^q(\Omega)$. Sia ora $w \in W$ ad arbitrio. Scelto m tale che $w \in W_m$ abbiamo $\int_\Omega e_n w \, d\mu = 0$ per ogni $n > m$ per cui concludiamo banalmente che $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega e_n w \, d\mu = 0$. Consideriamo ora il caso $ii)$ dello spazio $L^1(\Omega)$ ove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$. Prendiamo un punto qualunque $x_0 \in \Omega$ e scegliamo $\delta > 0$ in modo che $x_0 + [0, \delta\pi]^d \subset \Omega$. Tuttavia, per semplicità, supponiamo $x_0 = 0$ e $\delta = 1$, il caso generale trattandosi per traslazione e riscalamento a partire dal caso particolare. Introduciamo la successione $\{u_n\}$ data dalle formule $u_n(x) = \sin nx_1$ se $x \in [0, \pi]^d$ e $u_n(x) = 0$ altrimenti. Allora $\|u_n\|_1$ non dipende da n e possiamo scegliere $c > 0$ tale che, posto $e_n = cu_n$, risulti $\|e_n\|_1 = 1$ per ogni n. Osserviamo ora che le funzioni u_n sono mutuamente ortogonali in $L^2(\Omega)$ e che anche $\|u_n\|_2$ non dipende da n. Grazie alla Proposizione IV.4.4, deduciamo che $e_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(\Omega)$. Siccome $e_n = 0$ in $\Omega \setminus [0, \pi]^d$, concludiamo immediatamente che $e_n \rightharpoonup 0$ in $L^1(\Omega)$. $\square$

Per la topologia debole* valgono proprietà analoghe a quelle della Proposizione 3.3. Esse seguono anche dal risultato che diamo di seguito.

3.9. Proposizione. *Sia V uno spazio normato. Allora*

i) la topologia debole di V^* è meno fine della topologia debole;*
ii) se V è riflessivo, le topologie debole e debole di V^* coincidono.* □

Dimostrazione. Per $F \in V^{**}$ si consideri la seminorma p_F in V^* data da

$$p_F(f) = |\langle F, f \rangle|, \quad f \in V^*,$$

e si noti che la topologia debole di V^* è generata dalla famiglia costituita dalle seminorme p_F al variare di F in tutto V^{**}, mentre la topologia debole* è generata dall'analoga famiglia ottenuta facendo variare F solo in $J(V)$. Allora ogni intorno della base standard della topologia debole* è anche un intorno nella topologia debole. Ciò prova $i)$. Se poi V è riflessivo, si ha $J(V) = V^{**}$ e le due famiglie coincidono. Dunque coincidono anche le basi standard e le relative topologie. Ciò prova $ii)$ e conclude la dimostrazione. □

In realtà il punto $ii)$ può essere precisato meglio: le due topologie coincidono *se e solo se* V è riflessivo. Tuttavia non dimostriamo tale affermazione.

3.10. Proposizione. *Siano V uno spazio normato e $J : V \to J(V) \subseteq V^{**}$ il suo isomorfismo canonico. Allora*

i) J è un omeomorfismo di V munito della topologia debole su $J(V)$ munito della topologia indotta dalla topologia debole di V^{**};*
ii) se V è riflessivo, J è un omeomorfismo di V munito della topologia debole su V^{**} munito della topologia debole.* □

Dimostrazione. Per $f \in V^*$ si considerino le seminorme p_f in V e q_f in V^{**} date dalle formule

$$p_f(x) = |\langle f, x \rangle|, \quad x \in V, \quad \text{e} \quad q_f(F) = |\langle F, f \rangle|, \quad F \in V^{**},$$

e le rispettive semipalle

$$B_r^{p_f}(0) = \{x \in V : \ p_f(x) < r\} \quad \text{e} \quad B_r^{q_f}(0) = \{F \in V^{**} : \ q_f(F) < r\}.$$

La topologia debole di V e la topologia debole* di V^{**} sono generate dalle famiglie ottenute prendendo tutte le seminorme p_f e, rispettivamente, tutte le seminorme q_f, ove f varia in V^* in entrambi i casi. Dunque gli intorni delle due basi standard sono arbitrarie intersezioni finite di semipalle dell'uno o dell'altro tipo, rispettivamente. Ora, per definizione di J, si ha $q_f(Jx) = p_f(x)$ per ogni $x \in V$ e $f \in V^*$, per cui $J(B_r^{p_f}(0)) = J(V) \cap B_r^{q_f}(0)$. Passando alle intersezioni finite, vediamo allora che J trasforma gli elementi della base standard della topologia debole di V negli elementi della base standard di $J(V)$ relativa alla topologia indotta su $J(V)$ dalla topologia debole* di V^*. Ciò prova $i)$. Se poi V è riflessivo si ha $J(V) = V^{**}$ e quanto affermato in $ii)$ coincide con $i)$ e la dimostrazione è conclusa. □

Dimostriamo l'analoga della Proposizione 3.3 per la topologia debole* del duale.

3.11. Proposizione. *Sia V uno spazio normato. Allora*

i) la topologia debole di V^* è meno fine della topologia forte;*
ii) se V ha dimensione finita le due topologie coincidono;
iii) se V ha dimensione infinita le due topologie sono diverse.

Più precisamente, nel caso $iii)$, ogni intorno dell'origine nella topologia debole contiene un sottospazio di V^* di dimensione infinita. In particolare la topologia debole* non è indotta da alcuna norma.* □

Dimostrazione. Per dimostrare il punto $i)$ basta combinare i due punti $i)$ delle Proposizioni 3.9 e 3.3, quest'ultima applicata a V^*. Vediamo $ii)$. Se V ha dimensione finita, allora V è riflessivo. Dunque la topologia debole* di V^* coincide con la topologia debole. Ma quest'ultima coincide con la topologia forte dato che anche V^* ha dimensione finita.

Per concludere basta dimostrare che, se V ha dimensione infinita, ogni intorno dell'origine nella topologia debole* contiene un sottospazio di V^* di dimensione infinita. Ma un tale intorno è anche un intorno nella topologia debole per il punto $i)$ della Proposizione 3.9, per cui la tesi segue dalla Proposizione 3.3 applicata a V^*, che pure ha dimensione infinita. $\square$

3.12. Osservazione. Più precisamente si può dimostrare che, *se V ha dimensione infinita, nessuna delle topologie deboli che stiamo considerando è metrizzabile*. $\square$

Gli enunciati che seguono sono significativi. Abbiamo scelto la forma dell'esercizio dato che le dimostrazioni sono, da un lato, estremamente semplici e, d'altro canto, utili al lettore per la comprensione dei concetti.

3.13. *Esercizio.* Dimostrare che un funzionale $f \in \mathrm{Hom}(V;\mathbb{K})$ è continuo rispetto alla topologia debole di V se e solo se appartiene a V^*.

3.14. *Esercizio.* Dimostrare che la topologia debole di V è la meno fine fra le topologie in V rispetto alle quali ogni elemento $f \in V^*$ resta continuo.

3.15. *Esercizio.* Dimostrare che la topologia debole* di V^* è la meno fine fra le topologie rispetto alle quali, per ogni $x \in V$, risulta continuo il funzionale $f \mapsto \langle f, x\rangle$, $f \in V^*$.

3.16. Osservazione. Segnaliamo che, molto spesso, le topologie debole e debole* vengono definite proprio attraverso le proprietà oggetto degli ultimi due esercizi.

3.17. *Esercizio.* Siano V uno spazio normato, $B \subseteq V$ e $B^* \subseteq V^*$. Riprendendo la nozione di limitatezza data dalla (2.1) e gli esercizi relativi, dimostrare che: $i)$ B è limitato nella topologia forte di V se e solo se lo è nella topologia debole; $ii)$ se V è di Banach, allora B^* è limitato nella topologia forte di V^* se e solo se lo è nella topologia debole*.

3.18. *Esercizio.* Siano V e W due spazi normati e $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Si dimostri che L è continuo anche rispetto alle corrispondenti topologie deboli. Si deduca che, se V e W sono due spazi normati e V è immerso in W con continuità, allora l'immersione è continua anche rispetto alle due topologie deboli corrispondenti. $\square$

L'ultima affermazione dell'esercizio precedente ci consente di presentare qualche applicazione significativa del Corollario V.7.6.

3.19. Esempio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, k un intero non negativo e $p \in (1,+\infty)$. Se $\{v_n\}$ è una successione limitata in $W^{k,p}(\Omega)$ che converge debolmente in $L^p(\Omega)$ a una funzione $w \in L^p(\Omega)$, allora $w \in W^{k,p}(\Omega)$ e $v_n \rightharpoonup w$ in $W^{k,p}(\Omega)$. Infatti si ha l'ovvia immersione continua di $W^{k,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$. Nell'applicazione del Corollario V.7.6 prendiamo allora $V = W^{k,p}(\Omega)$, che è riflessivo per il Teorema VI.2.11, e come $\mathcal{W}$ prendiamo lo spazio vettoriale topologico ottenuto munendo $L^p(\Omega)$ della topologia debole. Allora l'immersione è continua, dunque continua per successioni, anche rispetto alle topologie deboli.

Ad esempio possiamo rivedere l'Osservazione I.5.71 da un diverso punto di vista: Ω è il disco di $\mathbb{R}^2$ avente centro nell'origine e raggio $r = 1/2$ e la funzione u è data dalla formula $u(x) = |\ln|x||^\alpha$, ove $\alpha \in (0,1/2)$. Consideriamo la successione $\{u_n\}$ di funzioni definite dalla formula $u_n(x) = \min\{u(x), n\}$. Allora $u_n \to u$ in $L^2(\Omega)$ per il Teorema di Lebesgue. D'altra parte non è difficile vedere, ripercorrendo i calcoli fatti nell'osservazione citata, che $\{u_n\}$ è limitata in $H^1(\Omega)$. Segue allora che $u \in H^1(\Omega)$ e che $u_n \rightharpoonup u$ in tale spazio.

3.20. Osservazione. Se ben si guarda la situazione generale dell'Esempio 3.19, si vede che la convergenza debole in $L^p(\Omega)$ è servita solo a individuare il candidato limite debole in $W^{k,p}(\Omega)$. Ad esempio, nel caso in cui Ω è limitato, dunque di misura finita, sarebbe stata sufficiente la convergenza debole in $L^1(\Omega)$. Ma in situazioni di questo genere la scelta "più naturale" è lo spazio $\mathcal{W} = \mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni su Ω (si veda l'Osservazione I.5.66). Infatti esso è uno spazio vettoriale topologico nel quale $L^p(\Omega)$ è immerso con continuità anche rispetto alla topologia debole di $L^p(\Omega)$. Tuttavia non possiamo andare oltre queste parole.

Riprendiamo invece l'inizio dell'osservazione: un modo per individuare un possibile candidato è ipotizzare una convergenza q.o. Supponiamo dunque $\{u_n\}$ limitata in $W^{k,p}(\Omega)$ e convergente q.o. a una funzione misurabile w. Ancora è vero, sempre nell'ipotesi $p \in (1, +\infty)$, che $w \in W^{k,p}(\Omega)$ e che $u_n \rightharpoonup w$ in $W^{k,p}(\Omega)$, come ora dimostriamo. Innanzi tutto la successione data ha una sottosuccessione convergente debolmente in $W^{k,p}(\Omega)$ a una certa funzione $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Questa stessa sottosuccessione, però, converge a w q.o. Per la Proposizione IV.4.19, deduciamo che $u = w$. In particolare $w \in W^{k,p}(\Omega)$. Per dimostrare che tutta la successione converge debolmente a w basta applicare la Proposizione A.1.9 e rifare il ragionamento appena fatto a partire dalla generica sottosuccessione.

3.21. *Esercizio.* Mostrare che il caso $p = 1$ va effettivamente escluso nelle considerazioni precedenti, almeno nel caso $\Omega = (-1, 1)$, seguendo la traccia seguente. *i)* La successione data dalla formula $u_n(x) = \tanh nx$ è limitata in $W^{1,1}(\Omega)$ e converge q.o. a sign, la funzione segno; *ii)* quest'ultima non appartiene a $W^{1,1}(\Omega)$; *iii)* $u_n \rightharpoonup \operatorname{sign}$ in $L^1(\Omega)$; *iv)* concludere che $\{u_n\}$ non può convergere debolmente in $W^{1,1}(\Omega)$ a nessun elemento di $W^{1,1}(\Omega)$. $\square$

La continuità degli elementi di V^* rispetto alla topologia debole ha conseguenze importanti in Analisi Convessa. Abbiamo infatti il risultato seguente:

3.22. Proposizione. *Sia V uno spazio normato. Siano inoltre C un convesso chiuso di V e $f : V \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa s.c.i. Allora: i) C è chiuso anche nella topologia debole; ii) f è s.c.i. anche rispetto alla topologia debole.* $\square$

Dimostrazione. Per dimostrare *i)*, basta applicare il Corollario V.9.13. Passiamo a *ii)*. La semicontinuità da provare coincide con il fatto che $\operatorname{epi} f$ sia chiuso nella topologia debole grazie al Teorema V.10.10 e lo stesso teorema assicura che $\operatorname{epi} f$ è chiuso rispetto alla topologia forte dato che f è s.c.i. Siccome f è convessa, $\operatorname{epi} f$ è un sottoinsieme convesso di $V \times \mathbb{R}$. Per concludere, basta allora applicare il punto *i)* al convesso $\operatorname{epi} f$. $\square$

Passiamo ai risultati di compattezza annunciati. Questi non sono deducibili dai risultati di compattezza sequenziale dimostrati precedentemente dato che, se non siamo nel caso banale della dimensione finita, le topologie debole di V e debole* di V^* non sono mai metrizzabili.

3.23. Teorema (di Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Sia V uno spazio normato. Allora la palla unitaria chiusa B^* di V^* è compatta rispetto alla topologia debole*.* $\square$

Dimostrazione. Rappresentiamo B^* in una forma conveniente. Gli elementi $f \in B^*$ sono tutti e soli i funzionali $f : V \to \mathbb{K}$ che verificano le due condizioni: *i)* $|f(x)| \le \|x\|$ per ogni $x \in V$; *ii)* $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ per ogni $x, y \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Denotiamo per comodità con $\mathbb{P}$ l'insieme dei funzionali $f : V \to \mathbb{K}$ verificanti *i)* e, per $x \in V$, poniamo $I_x = \{\lambda \in \mathbb{K} : \ |\lambda| \le \|x\|\}$, cioè l'intervallo $[-\|x\|, \|x\|]$ se $K = \mathbb{R}$ e il disco di centro 0 e raggio $\|x\|$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Osserviamo ora che $\mathbb{K}$ è l'unione degli insiemi I_x ottenuta al variare di $x \in V$. Dunque gli elementi di $\mathbb{P}$ sono esattamente le funzioni di scelta associate alla famiglia $\{I_x : \ x \in V\}$, cioè gli elementi del prodotto cartesiano $\prod_{x \in V} I_x$. Quindi $\mathbb{P} = \prod_{x \in V} I_x$ e di conseguenza

$$B^* = \{f \in \mathbb{P} : \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ per ogni } x, y \in V \text{ e } \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}.$$

Ma se muniamo $\mathbb{P}$ della topologia prodotto delle topologie euclidee degli insiemi I_x, siccome ciascuno degli I_x è compatto, anche $\mathbb{P}$ è compatto per il Teorema A.1.23 di Tychonoff. D'altra parte, ogni chiuso di un compatto è esso stesso compatto rispetto alla topologia indotta. Pertanto, per dimostrare il teorema, basta controllare quanto segue: *a)* la topologia prodotto di $\mathbb{P}$ e la topologia debole* di V^* inducono su B^* la stessa topologia; *b)* il sottoinsieme B^* è chiuso in $\mathbb{P}$ rispetto alla topologia prodotto. Per controllare *a)*, basta, fissato ad arbitrio un elemento $f \in B^*$, confrontare le intersezioni con B^* degli elementi di una base di intorni di f nella topologia prodotto con le intersezioni con B^* degli elementi della base standard associata alla famiglia di seminorme (3.2). Una base di intorni di f nel prodotto topologico $\mathbb{P}$ si ottiene prendendo tutti i possibili prodotti cartesiani $\prod_{x \in V} A_x$ sotto le due condizioni: *i)* $A_x = \{y \in I_x : \ |y - f(x)| < r_x\}$ con un certo $r_x > 0$ per un numero finito di valori di x ; *ii)* $A_x = I_x$ per tutti gli x restanti. Dunque l'intersezione fra B^* e il generico intorno della base considerata del prodotto si scrive come $\{g \in B^* : \ |g(x_i) - f(x_i)| < r_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ ove n, i punti $x_1, \ldots, x_n \in V$ e i numeri reali $r_1, \ldots, r_n > 0$ sono fissati. Ma questo differisce dall'intersezione fra B^* e il generico intorno della base standard associata alla famiglia di seminorme (3.2) solo per il fatto che in quel caso i raggi r_i sono tutti uguali, per cui le due famiglie sono basi di intorni della stessa topologia. Per verificare il punto *b)*, supponiamo che $f \in \mathbb{P}$ appartenga alla chiusura di B^* nel prodotto topologico $\mathbb{P}$. Fissiamo $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\varepsilon > 0$ e consideriamo l'insieme $I = \{g \in \mathbb{P} : |g(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ per } z = x, y, \alpha x + \beta y\}$. Siccome I è un intorno di f nella topologia prodotto, esso contiene un elemento $g \in B^*$. Abbiamo pertanto

$$
\begin{aligned}
&|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)| = |f(\alpha x + \beta y) - g(\alpha x + \beta y) + \alpha g(x) + \beta g(y) - \alpha f(x) - \beta f(y)| \\
&\leq |f(\alpha x + \beta y) - g(\alpha x + \beta y)| + |\alpha| \, |g(x) - f(x)| + |\beta| \, |g(y) - f(y)| < (1 + |\alpha| + |\beta|) \, \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Dall'arbitrarietà di ε segue $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Dunque $f \in B^*$ e B^* è chiuso. □

3.24. Osservazione. Ci si può chiedere se ci sia un legame abbastanza stretto fra il teorema precedente e il Teorema V.6.6 di compattezza debole* sequenziale. Tale legame effettivamente c'è e il motivo è il seguente: se V è separabile e B^* è, come sopra, la palla unitaria chiusa di V^*, allora *la topologia indotta su B^* dalla topologia debole* è metrizzabile* (mentre l'intero spazio V^* non lo è, se non nel caso banale della dimensione finita). D'altra parte B^*, che è compatta rispetto alla topologia debole* per il teorema precedente, è chiusa anche rispetto a tale topologia, in quanto ogni compatto è chiuso se la topologia ambiente è di Hausdorff. In particolare, se V è separabile, B^* è compatta se e solo se è sequenzialmente compatta. Cogliamo l'occasione per segnalare un'altra conseguenza della metrizzabilità enunciata sopra: *se V è separabile, una funzione $f : B^* \to Y$ a valori in uno spazio topologico Y è continua rispetto alla topologia indotta su B^* dalla topologia debole* di V^* se e solo se essa è continua per successioni*. Tenendo conto del Lemma 3.10 abbiamo allora: *se V è riflessivo e separabile, una funzione $f : B \to Y$ dalla palla unitaria chiusa B di V in uno spazio topologico Y è continua rispetto alla topologia indotta su B dalla topologia debole di V se e solo se essa è continua per successioni*. □

Il risultato successivo riguarda la compattezza della palla unitaria chiusa dello spazio di partenza e stabilisce uno stretto legame fra tale compattezza e la riflessività dello spazio ambiente. Tuttavia non dimostreremo completamente il teorema. Lasceremo infatti senza giustificazione il lemma (di Goldstein). Una sua dimostrazione si fonda sulla possibilità di estendere le forme geometriche del Teorema di Hahn-Banach agli spazi localmente convessi.

3.25. Lemma. *Siano V uno spazio normato, B la palla chiusa unitaria di V e B^{**} la palla chiusa unitaria di V^{**}. Allora l'immagine $J(B)$ tramite l'iniezione canonica $J : V \to V^{**}$ è densa in B^{**} rispetto alla topologia debole*.* □

3.26. Teorema (di Kakutani). *Sia V uno spazio di Banach. Allora la palla unitaria chiusa B di V è compatta rispetto alla topologia debole se e solo se V è riflessivo.* □

Dimostrazione. Seguiamo le notazioni del Lemma 3.25. Supponiamo V riflessivo. La Proposizione 3.10 implica che $J|_B$ è un omeomorfismo di B su B^{**} quando i due insiemi sono muniti delle topologie indotte dalla topologia debole di V e, rispettivamente, dalla topologia debole* di V^{**}. Siccome B^{**} è compatta rispetto a quest'ultima per il Teorema 3.23 applicato a V^*, segue che B è compatta nella topologia debole.

Supponiamo ora B compatta nella topologia debole. Allora, sempre per la Proposizione 3.10, $J(B)$ è compatta rispetto alla topologia indotta dalla topologia debole* di V^{**}. Ma tale topologia è separata, per cui $J(B)$ è un chiuso e, di conseguenza, coincide con la sua chiusura, cioè con B^{**} grazie al Lemma 3.25. Dunque $J(B) = B^{**}$. Sia ora $F \in V^{**}$ non nullo. Allora $F/\|F\|_{**} \in B^{**}$. Quindi $F/\|F\|_{**} \in J(B)$, cioè esiste $x \in B$ tale che $F/\|F\|_{**} = Jx$. Segue $F = \|F\|_{**} \, Jx = J(\|F\|_{**} \, x)$ e dunque $F \in J(V)$. Ciò mostra che $J : V \to V^{**}$ è suriettivo e che V è riflessivo. □

3.27. Osservazione. Un importante risultato, noto come Teorema di Eberlein-Šmulian, afferma che la palla unitaria chiusa B di uno spazio di Banach V è debolmente compatta se e solo se essa è debolmente compatta per successioni. Siccome la topologia debole è metrizzabile solo in dimensione finita, questo risultato estende una proprietà degli spazi metrizzabili alle topologie deboli non metrizzabili degli spazi di Banach. Si noti che, tenendo conto del Teorema di Kakutani, deduciamo il Teorema V.7.3, che abbiamo appunto attribuito a Eberlein-Šmulian. Riassumendo abbiamo l'equivalenza delle tre condizioni: *i*) riflessività di V, *ii*) compattezza debole di B, *iii*) compattezza debole sequenziale di B. $\square$

Il Teorema di Kakutani ci consente anche di dare una dimostrazione alternativa del Teorema V.11.10 di esistenza del minimo, che rienunciamo per la comodità del lettore. Ricordiamo che una funzione è coerciva quando vale la (V.11.4).

3.28. Teorema. *Siano V uno spazio di Banach riflessivo e $f : V \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, propria, s.c.i. e coerciva. Allora f ha minimo.* $\square$

Dimostrazione. Siccome f è propria possiamo fissare $x_0 \in D(f)$. Usando la coercività troviamo $R > 0$ tale che $f(x) > f(x_0)$ per $\|x\| > R$. Dunque f ha minimo se e solo se ha minimo la sua restrizione alla palla chiusa $\overline{B}_R(0)$ che chiamiamo B_R per semplicità. Proviamo allora che tale restrizione effettivamente ha minimo. Siccome V munito della topologia debole è uno spazio vettoriale topologico, B_R e la palla unitaria chiusa B, munite della topologie indotte dalla topologia debole di V, sono omeomorfe. Ma B è compatta per il Teorema di Kakutani, per cui anche B_R è compatta. Ma la funzione f, che è convessa per ipotesi, è s.c.i. anche rispetto alla topologia debole grazie alla Proposizione 3.22. Quindi la restrizione di f a B_R è una funzione s.c.i. rispetto a una topologia nella quale il suo dominio è compatto. Grazie al Teorema V.10.14, essa ha minimo. $\square$

4. Esempi di spazi funzionali localmente convessi

Dedichiamo questo paragrafo alla presentazione di un certo numero di spazi funzionali dotati di topologie localmente convesse non indotte da norme. La carrellata iniziale riguarda spazi di Fréchet. Nella seconda parte del paragrafo diamo qualche esempio di spazio localmente convesso non metrizzabile. Conviene iniziare con una definizione preliminare.

4.1. Definizione. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Un aperto $\omega \subseteq \Omega$ è ben contenuto in Ω quando $\overline{\omega}$ è un compatto incluso in Ω. Una successione $\{\Omega_m\}$ di aperti inclusi in Ω invade Ω quando cresce e l'unione degli Ω_n è Ω.* $\square$

La successione $\{B_n(0)\}$ è costituita da aperti ben contenuti in $\mathbb{R}^d$ e invade $\mathbb{R}^d$. Se $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, una successione di aperti ben contenuti in Ω che invade Ω può essere costruita come segue:

$$\Omega_m = \{x \in \Omega : \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 1/m \ \text{ e } \ |x| < m\}. \tag{4.1}$$

Notiamo una volta per tutte che, se una successione $\{\Omega_n\}$ di aperti invade Ω, allora

$$\text{per ogni compatto } K \subset \Omega \text{ esiste } m \text{ tale che } K \subseteq \Omega_m . \ \square \tag{4.2}$$

Infatti, fissato il compatto K, essendo $K \subset \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, possiamo scegliere indici $n_1, \dots, n_q$ in numero finito tali che l'unione degli Ω_n con $n = n_1, \dots, n_q$ ancora includa K. Allora, siccome $\{\Omega_n\}$ cresce, l'aperto Ω_m dato da $m = \max\{n_1, \dots, n_q\}$ include K.

4.2. *Esercizio.* Sia Ω un aperto qualunque di $\mathbb{R}^d$. Si dia una strategia per la costruzione di una successione di aperti *regolari* ben contenuti in Ω che invade Ω.

4.3. Esempio. Consideriamo lo spazio $C^0(\Omega)$ delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{K}$ continue, ove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$. Introduciamo quella che è considerata la topologia naturale di $C^0(\Omega)$ mediante la famiglia di seminorme

$$\mathcal{F} = \{|\cdot|_{\infty,K} : \ K \subset \Omega \ \text{compatto}\} \quad \text{ove} \quad |v|_{\infty,K} = \sup_{x \in K} |v(x)|. \tag{4.3}$$

Si noti che la convergenza indotta $v_n \to v$ significa

$$v_n \to v \quad \textit{uniformemente su ogni compatto } K \subset \Omega\,. \tag{4.4}$$

Essa è detta anche *convergenza localmente uniforme* in quanto una formulazione equivalente è: *ogni punto di* Ω *ha un intorno in cui* $\{v_n\}$ *converge a* v *uniformemente*. Infatti, se vale la (4.4), fissato $x \in \Omega$, basta prendere un intorno compatto di x per avere la convergenza uniforme in tale intorno. Viceversa, supponendo che ogni punto abbia un intorno in cui $\{v_n\}$ converge a v uniformemente, fissato il compatto $K \subset \Omega$, applicata l'ipotesi a ogni punto di K ed estratta una famiglia finita di intorni che ancora ricopre K in ciascuno dei quali c'è convergenza uniforme, si deduce che $\{v_n\}$ converge a v uniformemente in K.

Dimostriamo che $C^0(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet. Innanzi tutto la famiglia $\mathcal{F}$ è ovviamente separata, per cui otteniamo uno spazio localmente convesso. Vediamo che esso è metrizzabile. Grazie al Teorema 2.15, basta costruire una famiglia $\mathcal{F}'$ numerabile di seminorme che induce la stessa topologia. Fissiamo una successione che $\{\Omega_m\}$ di aperti ben contenuti in Ω che invade Ω, poniamo $K_m = \overline{\Omega}_m$ e consideriamo la famiglia numerabile $\mathcal{F}' = \{|\cdot|_{\infty,K_m} :\ m \geq 1\}$. Dimostriamo che la topologia $\mathcal{T}$ generata da $\mathcal{F}$ coincide con la topologia $\mathcal{T}'$ generata da $\mathcal{F}'$ controllando la condizione data dal Corollario 1.14. Ogni seminorma di $\mathcal{F}'$ è anche una seminorma di $\mathcal{F}$. D'altra parte, fissata ad arbitrio una seminorma di $\mathcal{F}$, cioè la seminorma $|\cdot|_{\infty,K}$ corrispondente a un certo compatto K, se m è dato dalla (4.2), abbiamo $|v|_{\infty,K} \leq |v|_{\infty,K_m}$ per ogni $v \in C^0(\Omega)$. Dunque le due famiglie generano la stessa topologia.

Dimostriamo infine la completezza. Se $\{v_n\}$ è una successione di Cauchy, allora, per ogni compatto $K \subset \Omega$, la successione $\{v_n|_K\}$ delle restrizioni a K è di Cauchy nello spazio $C(K)$ (vedi l'Esempio I.5.4 e il Corollario II.2.2), dunque convergente uniformemente in K a una certa funzione u_K. Ma siccome la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale e l'unione di tali compatti è tutto Ω per la (4.2), la successione data converge puntualmente in Ω a una funzione $u : \Omega \to \mathbb{K}$ della quale ciascuna delle u_K è necessariamente una restrizione. Siccome tutte le u_K sono continue, anche u è continua. Infine, per ogni compatto $K \subset \Omega$, abbiamo $\lim_{n\to\infty} |v_n - u|_{\infty,K} = 0$, cioè $v_n \to u$ nel senso della topologia considerata.

4.4. Osservazione. Anziché i compatti K_n avremmo potuto prendere gli aperti Ω_n definendo le seminorme $|\cdot|_{\infty,\Omega_n}$ corrispondenti. Nella completezza ci saremmo appoggiati all'Esempio I.5.5 anziché all'Esempio I.5.4. Nella sostanza nulla sarebbe cambiato dato che $|v|_{\infty,\Omega_n} = |v|_{\infty,K_n}$ per ogni $v \in C^0(\Omega)$ e per ogni n, ma avremmo fatto riferimento sempre ad aperti (con chiusura compatta) anziché a compatti.

4.5. *Esercizio.* Dimostrare che se l'aperto Ω è limitato $C^0(\overline{\Omega})$ è incluso in $C^0(\Omega)$ con immersione continua. Di fatto tutti gli spazi di funzioni continue o regolari che introdurremo nel corso del paragrafo sono inclusi in $C^0(\Omega)$ con immersione continua (il lettore verifichi).

4.6. *Esercizio.* Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ e si consideri lo spazio $C_c^0(\Omega)$ delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{K}$ continue a supporto compatto (vedi Definizione I.5.49). Osservato che $C_c^0(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale sia di $C^0(\Omega)$ sia di $C^0(\overline{\Omega})$, si dimostri che esso è denso nel primo spazio ma non nel secondo. Per dimostrare la densità si consiglia di utilizzare la successione $\{\zeta_m\}$ costruita (ad esempio) con la formula $\zeta_m(x) = (1 - 2m\,\mathrm{dist}(x,\Omega_m))^+$ a partire dalla successione (4.1).

4.7. Esempio. Consideriamo lo spazio $C^k(\Omega)$ delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{K}$ di classe C^k, ove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$. La famiglia di seminorme è ora data da

$$\mathcal{F} = \{|\cdot|_{\alpha,\infty,\Omega'} :\ \Omega' \text{ ben contenuto in } \Omega \text{ e } |\alpha| \leq k\} \quad \text{ove} \quad |v|_{\alpha,\infty,\Omega'} = |D^\alpha v|_{\infty,\Omega'} \tag{4.5}$$

con notazione analoga alla (4.3) e dunque induce la convergenza localmente uniforme delle funzioni e delle loro derivate fino all'ordine k. Anche $C^k(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet, come ora vediamo, anche se in modo più succinto.

Come nel caso precedente e tenendo conto dell'Osservazione 4.4, se si sostitisce la famiglia dei compatti inclusi in Ω con una successione di aperti ben contenuti che invade Ω, si ottiene una famiglia numerabile di seminorme che induce la stessa topologia. Per quanto riguarda la completezza, si procede come sopra, appoggiandosi ora al Teorema II.2.7. Infatti una successione è di Cauchy (o convergente) nello spazio che stiamo esaminando se e solo se essa è di Cauchy (risp. convergente) in $C^k(\overline{\Omega}')$ per ogni aperto Ω' ben contenuto in Ω.

4.8. *Esercizio.* Verificare le immersioni continue $C^k(\Omega) \subseteq C^m(\Omega)$ per $0 \le m \le k$ e, nel caso Ω limitato, anche l'immersione continua $C^k(\overline{\Omega}) \subseteq C^k(\Omega)$.

4.9. Esempio. Consideriamo ora lo spazio $C^\infty(\Omega)$ delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{K}$ di classe C^∞, ove Ω è un aperto qualunque di $\mathbb{R}^d$. Esso è (vedi la (I.5.21)) l'intersezione di tutti gli spazi considerati nell'Esempio 4.7. La famiglia di seminorme da considerare è

$$\mathcal{F} = \{ |\cdot|_{\alpha,\infty,\Omega'} : \ \Omega' \text{ ben contenuto in } \Omega \text{ e } \alpha \text{ qualunque} \}$$

la quale induce la convergenza localmente uniforme delle funzioni e di tutte le loro derivate. Anche questo è uno spazio di Fréchet, come si vede facilmente. Infatti, se $\{v_n\}$ è una successione di Cauchy, essa è anche una successione di Cauchy in $C^k(\Omega)$ per ogni k e quindi converge a una funzione $v \in C^\infty(\Omega)$ localmente uniformemente con le derivate di tutti gli ordini.

4.10. *Esercizio.* Verificare le immersioni continue $C^\infty(\Omega) \subseteq C^k(\Omega)$ per ogni k e dimostrare che la topologia in $C^\infty(\Omega)$ è la meno fine fra quelle che rendono continue tutte le immersioni dette.

4.11. Esempio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $\alpha \in (0,1]$. Si consideri lo spazio $C^{0,\alpha}(\Omega)$ delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{K}$ la cui restrizione a ogni aperto ω ben contenuto in Ω è hölderiana di esponente α, cioè verifica la disuguaglianza $|v(x) - v(y)| \le L|x-y|^\alpha$ per ogni $x, y \in \omega$, ove L è una costante che può dipendere da ω oltre che da v, in contrasto con quanto avviene per le funzioni hölderiane in Ω considerate nell'Esempio I.5.46. La famiglia di seminorme che prendiamo in considerazione è data da

$$\mathcal{F} = \{ |\cdot|_{k,\alpha,\omega} : \ \omega \text{ ben contenuto in } \Omega \} \quad \text{ove} \quad |v|_{k,\alpha,\omega} \text{ è la norma in } C^{k,\alpha}(\overline{\omega}) \text{ di } v|_\omega .$$

Anche $C^{0,\alpha}(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet, come ormai il lettore può controllare da solo.

4.12. Esempio. Con le notazioni dell'esempio precedente, si introduce in modo naturale anche lo spazio $C^{k,\alpha}(\Omega)$ delle funzioni di classe C^k con derivate di ordine k in $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Questo è uno spazio localmente convesso di Fréchet con la famiglia di seminorme ottenuta aggiungendo a quelle dello spazio $C^k(\Omega)$ le seminorme in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ delle derivate di ordine k.

4.13. Osservazione. La topologia di nessuno degli spazi considerati finora in questo paragrafo può essere indotta da una norma. Infatti, in ciascuno dei casi considerati, ogni volta che si fissa un intorno I dell'origine, che dunque fa intervenire solo un numero finito di seminorme e quindi, in definitiva, un certo compatto $K \subset \Omega$, si consente agli elementi di I di avere un comportamento completamente arbitrario fuori di K. In particolare il sottospazio costituito dalle funzioni che si annullano in $\Omega \setminus K$ è incluso in I e tale sottospazio ha addirittura dimensione infinita.

4.14. Esempio. Consideriamo infine lo spazio $C^\infty(\overline{\Omega})$ delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{K}$ di classe C^∞ che sono uniformemente continue con le loro derivate di tutti gli ordini, ove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ (vedi la (I.5.21)). Esso è, dunque, l'intersezione di tutti gli spazi di Banach $C^k(\overline{\Omega})$ (vedi l'Esempio I.5.38). Muniamo tale spazio della famiglia di seminorme

$$\mathcal{F} = \{ |\cdot|_{\alpha,\infty} : \ \alpha \text{ multi-indice qualunque} \} \quad \text{ove} \quad |v|_{\alpha,\infty} = |D^\alpha v|_\infty = \sup\nolimits_\Omega |D^\alpha v|. \tag{4.6}$$

La convergenza indotta è la convergenza uniforme in Ω delle funzioni e delle loro derivate di tutti gli ordini. In questo caso la famiglia $\mathcal{F}$ è già numerabile e lo spazio localmente convesso ottenuto è dunque metrizzabile. Ancora siamo di fronte a uno spazio di Fréchet. Infatti, se $\{v_n\}$ è una successione di Cauchy, essa è anche una successione di Cauchy in $C^k(\overline{\Omega})$ per ogni k e quindi converge a una funzione $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ uniformemente con le derivate di tutti gli ordini.

4.15. *Esercizio.* Verificare le immersioni continue $C^\infty(\overline{\Omega}) \subseteq C^k(\overline{\Omega})$ per ogni k e dimostrare che la topologia in $C^\infty(\overline{\Omega})$ è la meno fine fra quelle che rendono continue tutte le immersioni dette.

4.16. Osservazione. Nemmeno la topologia di $C^\infty(\overline{\Omega})$ è indotta da una norma, ma il discorso dell'Osservazione 4.13 non funziona in questo caso. Infatti una famiglia di seminorme che genera la stessa topologia è data da

$$\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{k,\infty} :\ k = 0, 1, \ldots\} \quad \text{ove} \quad \|\cdot\|_{k,\infty} \text{ è la norma in } C^k(\overline{\Omega}) .$$

Ora nessun intorno dell'origine della base standard associata a $\mathcal{F}$ può contenere un sottospazio di dimensione positiva in quanto ciascuna delle seminorme di $\mathcal{F}$ è in realtà una norma. Occorre allora procedere diversamente. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista una norma $\|\cdot\|$ che induce la topologia. Applicando due volte il Corollario 1.14, vediamo, da un lato, che esistono una costante $M \geq 0$ e un intero $k \geq 0$ tali che $\|v\| \leq M\|v\|_{k,\infty}$ per ogni $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e, d'altro canto, che per ogni multi-indice α esiste una costante M_α tale che $\|D^\alpha v\|_\infty \leq M_\alpha \|v\|$ per ogni $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Combinando otteniamo

$$\|D^\alpha v\|_\infty \leq M M_\alpha \|v\|_{k,\infty} \quad \text{per ogni } v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

e ora mostriamo che ciò non è possibile. Si definiscano infatti le funzioni $v_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mediante la formula $v_n(x) = n^{-k} \sin n x_1$ ove x_1 è la prima coordinata di x. Allora $\|D^\alpha v_n\|_\infty \leq 1$ per ogni α verificante $|\alpha| \leq k$, per cui la norma $\|v_n\|_{k,\infty}$ si mantiene limitata. Se invece prendiamo $\alpha = (k+1, 0, \ldots, 0)$ abbiamo $\|D^\alpha v_n\|_\infty = n$ e la disuguaglianza trovata viene contraddetta.

4.17. Osservazione. Un altro modo di vedere che la topologia di $C^\infty(\overline{\Omega})$ non è indotta da alcuna norma si basa sul Teorema IV.3.13 di Ascoli (si vedano le osservazioni fatte in proposito) e vale se Ω è regolare. Dimostriamo infatti che *ogni limitato di* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *è relativamente compatto*, il che è incompatibile con il fatto che $C^\infty(\overline{\Omega})$ sia uno spazio normato, dato che è di dimensione infinita (Teorema IV.3.4). Sia $\mathcal{B}$ un insieme limitato di $C^\infty(\overline{\Omega})$ (si vedano la (2.1) e gli esercizi collegati). Allora tutte le seminorme (4.6) si mantengono limitate su $\mathcal{B}$. Segue che, per ogni multi-indice α, l'insieme $D^\alpha \mathcal{B} = \{D^\alpha v : v \in \mathcal{B}\}$ è limitato in $C^0(\overline{\Omega})$. In particolare, per ogni α, sono limitati in $C^0(\overline{\Omega})$ sia l'insieme $D^\alpha \mathcal{B}$ sia quello costituito dalle derivate prime dei suoi elementi. Deduciamo che $D^\alpha \mathcal{B}$ è anche equicontinuo. Per il Teorema di Ascoli esso è quindi relativamente compatto in $C^0(\overline{\Omega})$. Dunque, per ogni successione $\{v_n\}$ di elementi di $\mathcal{B}$ e per ogni α, dalla successione $\{D^\alpha v_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente uniformemente. Ciò premesso, sia $\{v_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{B}$. Numerati tutti i multi-indici in modo da produrne una successione, con il procedimento diagonale di Cantor si arriva a costruire una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ convergente uniformemente e tale che $\{D^\alpha v_{n_k}\}$ (dunque con gli stessi indici n_k della successione $\{v_{n_k}\}$) converga uniformemente per ogni multi-indice α. Concludiamo che $\{v_{n_k}\}$ converge nella topologia di $C^\infty(\overline{\Omega})$.

4.18. *Esercizio.* Adattare il discorso appena fatto per mostrare che la stessa cosa vale per $C^\infty(\Omega)$: *ogni suo sottoinsieme limitato è relativamente compatto*. Si prenda una successione $\{\Omega_m\}$ di aperti regolari ben contenuti in Ω che invade Ω (Esercizio 4.2) in modo che sia numerabile l'insieme delle coppie (Ω_m, α) da considerare nell'applicazione del metodo diagonale di Cantor.

4.19. *Esercizio.* Sia $\mathcal{B}$ un limitato di $C^0(\Omega)$. Si dimostri che $\mathcal{B}$ è relativamente compatto se e solo se ogni $x_0 \in \Omega$ ha un intorno $I \subseteq \Omega$ tale che sia equicontinuo l'insieme delle restrizioni a I degli elementi di $\mathcal{B}$. Si dimostri che ogni limitato di $C^1(\Omega)$ è relativamente compatto in $C^0(\Omega)$.

4.20. *Esercizio.* Sia

$$V = \{v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} \text{ continue tali che } v(x) = o(|x|^{-\lambda}) \text{ per } |x| \to +\infty \text{ per ogni } \lambda > 0\}.$$

Si dimostri che la famiglia di seminorme

$$\mathcal{F} = \{|\cdot|_\lambda :\ \lambda > 0\} \quad \text{ove} \quad |v|_\lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^\lambda)|v(x)|$$

rende V spazio di Fréchet immerso con continuità in $C^0(\mathbb{R}^d)$.

4.21. Esempio (spazio di L. Schwartz). Si consideri l'analogo spazio

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ v \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \;\; D^\alpha v(x) = o(|x|^{-\lambda}) \;\text{ per }\; |x| \to +\infty \;\text{ per ogni }\; \alpha \;\text{ e ogni }\; \lambda > 0 \}$$

con la famiglia di seminorme

$$\mathcal{F} = \{ |\cdot|_{\alpha,\lambda} : \;\; \alpha \;\text{ multi-indice qualunque, }\; \lambda > 0 \} \quad \text{ove} \quad |v|_{\alpha,\lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^\lambda) |D^\alpha v(x)|.$$

Allora $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ è uno spazio di Fréchet immerso con continuità in $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Lo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ è importante nella teoria delle trasformate di Fourier e nella teoria delle distribuzioni.

4.22. *Esercizio.* Si dimostri quanto è affermato nell'esempio precedente.

4.23. *Esercizio.* Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Per $L > 0$ e $s > 0$ si denoti con $\mathcal{G}^s_L(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $v \in C^\infty(\Omega)$ verificanti la condizione seguente: per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$|D^\alpha v(x)| \leq M L^{|\alpha|} (\alpha!)^s \quad \text{per ogni } \; x \in K \; \text{ e ogni multi-indice } \; \alpha \tag{4.7}$$

ove $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!$ per $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. Si verifichi che $\mathcal{G}^s_L(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $C^\infty(\Omega)$. Si verifichi inoltre che, per ogni compatto $K \subset \Omega$, la formula

$$|v|_{K,s,L} = \sup_\alpha \left(L^{-|\alpha|} (\alpha!)^{-s} \sup_K |D^\alpha v| \right) \quad \text{per } \; v \in \mathcal{G}^s_L(\Omega) \tag{4.8}$$

(l'estremo superiore essendo calcolato al variare dei multi-indici di ogni ordine) definisce una seminorma in $\mathcal{G}^s_L(\Omega)$ (il cui valore coincide con la minima delle costanti $M \geq 0$ che rendono vera la (4.7)). Si dimostri infine che $\mathcal{G}^s_L(\Omega)$ diventa uno spazio di Fréchet rispetto alla famiglia costituita dalle seminorme (4.8) al variare del compatto $K \subset \Omega$.

4.24. Osservazione. Di particolare interesse nelle applicazioni alle equazioni alle derivate parziali sono i cosiddetti *spazi del tipo di Gevrey di ordine* s, i quali hanno una struttura "naturale" di spazi localmente convessi che, tuttavia, non è semplice da descrivere in termini di esplicite seminorme, per cui soprassediamo. Due di questi sono gli spazi $\mathcal{G}^s(\Omega)$ e $\mathcal{D}^s(\Omega)$ che ora definiamo e che, di solito, sono presi in considerazione solo per $s > 1$. Lo spazio $\mathcal{G}^s(\Omega)$ è l'unione degli spazi $\mathcal{G}^s_L(\Omega)$ al variare di $L > 0$ e $\mathcal{D}^s(\Omega)$ è il sottospazio delle funzioni $v \in \mathcal{G}^s(\Omega)$ a supporto compatto. Tuttavia si può pensare di accettare le definizioni precedenti per ogni $s > 0$. Se così ci si comporta, si dimostra che le funzioni appartenenti a $\mathcal{G}^1(\Omega)$ sono tutte e sole le *funzioni analitiche in* Ω, cioè le funzioni $v \in C^\infty(\Omega)$ che godono della proprietà seguente: ogni punto $x_0 \in \Omega$ ha un intorno $I \subseteq \Omega$ tale che la serie di Taylor di v di centro x_0 converge a $v(x)$ per ogni $x \in I$. Ne segue che, se $s \in (0,1)$, gli elementi di $\mathcal{G}^s(\Omega)$ verificano una sorta di super-analiticità e che $\mathcal{D}^s(\Omega)$ è significativo solo per $s > 1$. Infatti, per $s \leq 1$, lo spazio $\mathcal{D}^s(\Omega)$ si riduce alla funzione nulla. Se invece $s > 1$, lo spazio $\mathcal{G}^s(\Omega)$ contiene funzioni non analitiche e il valore del parametro s diventa una sorta di misura della non-analiticità.

Segnaliamo che, se $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e se denotiamo con (x,t) la variabile in Ω, appartiene allo spazio $\mathcal{G}^2(\Omega)$ la cosiddetta *soluzione fondamentale dell'operatore del calore* $\partial/\partial t - \Delta$ (ove Δ è il laplaciano in $\mathbb{R}^n$) data dalla formula

$$E(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \, e^{-|x|^2/(4t)} \quad \text{se } \; t > 0 \quad \text{e} \quad E(x,t) = 0 \quad \text{se } \; t \leq 0\,. \tag{4.9}$$

Questa consente di costruire, per una vasta classe di dati iniziali $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \; \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \quad \text{e} \quad u(\,\cdot\,, 0) = u_0 \quad \text{in } \; \mathbb{R}^n \tag{4.10}$$

mediante la formula

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,t) \, u_0(y) \, dy \quad \text{per } \; (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$$

nonché, tramite una formula più complessa, la soluzione dell'analogo problema relativo all'equazione non omogenea, cioè con secondo membro generico anziché nullo nella prima delle (4.10).

4.25. *Esercizio.* Si controlli che ogni $v \in \mathcal{G}^1(\Omega)$ è analitica se Ω è un intervallo di $\mathbb{R}$. Si consiglia di usare la formula di Taylor con il resto di Lagrange.

4.26. Esempio. Sia Ω il disco unitario aperto del piano complesso e si denoti con $\mathcal{H}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfe. Si definiscano in $\mathcal{H}(\Omega)$ le seminome

$$|v|_{n,r} = \sup_{|z|\le r} |v^{(n)}(z)| \quad \text{per } v \in \mathcal{H}(\Omega)\,,\ r \in (0,1) \text{ e } n = 0,1,,\ldots$$

e si considerino le due famiglie

$$\mathcal{F}_0 = \{|\cdot|_{0,r} :\ 0 < r < 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{F} = \{|\cdot|_{n,r} :\ 0 < r < 1,\ n = 0,1,\ldots\}.$$

Si dimostri che queste generano in $\mathcal{H}(\Omega)$ la stessa topologia e rendono $\mathcal{H}(\Omega)$ spazio di Fréchet. Si tenga conto delle formule di Cauchy

$$v^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{v(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{per } |z| \le r < R < 1 \text{ e } n = 0,1,\ldots$$

ove C_R è la circonferenza di centro 0 e raggio R percorsa in senso antiorario. □

Dopo questa carrellata di spazi la cui definizione è legata alla continuità o alla differenziabilità, vediamo spazi localmente convessi legati agli spazi L^p.

4.27. Esempio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1,+\infty]$. Con $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ si denota lo spazio delle (classi di) funzioni $v : \Omega \to \mathbb{K}$ misurabili tali che $v|_K \in L^p(K)$ per ogni compatto $K \subset \Omega$. Una condizione equivalente è la seguente: la funzione misurabile v appartiene a $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ quando ogni punto di Ω ha un intorno I (misurabile) tale che $v|_I \in L^p(I)$. La famiglia di seminorme

$$\mathcal{F} = \{|\cdot|_{p,K} :\ K \subset \Omega \text{ compatto}\}$$

rende $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ spazio di Fréchet e la dimostrazione di questo fatto è perfettamente analoga a quella svolta nel caso dello spazio $C^0(\overline{\Omega})$. Le disuguaglianze

$$|v|_{p,K} \le \|v\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{e} \quad |v|_{p,K} \le |\Omega|^{(1/p)-(1/q)}\, |v|_{q,K} \quad \text{se } 1 \le p \le q \le +\infty$$

(ove $|\Omega|$ è la misura di lebesgue di Ω) mostrano che le immersioni $L^p(\Omega) \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e, se $p \le q$, $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ sono continue. In particolare tutti gli spazi $L^p(\Omega)$ e $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ sono immersi con continuità in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, che è il più grande spazio funzionale di uso corrente.

4.28. *Esercizio.* Dimostrare che la topologia di $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ non è indotta da alcuna norma.

4.29. *Esercizio.* Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $p \in [1,+\infty]$. Si ponga $V = \bigcap_{1\le p<+\infty} L^p(\Omega)$ e si dimostri che la famiglia di seminorme (di fatto norme)

$$\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_p :\ p \in [1,+\infty)\} \quad \text{ove} \quad \|\cdot\|_p \text{ è la norma in } L^p(\Omega)$$

rende V spazio di Fréchet. Attenzione: non si è fatta l'ipotesi che Ω abbia misura finita. Dimostrare poi che, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$, la topologia non è indotta da alcuna norma.

4.30. Esempio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, k un intero non negativo e $p \in [1,+\infty)$. Poniamo

$$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) = \{v \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) :\ v|_{\Omega'} \in W^{k,p}(\Omega') \text{ per ogni aperto } \Omega' \text{ ben contenuto in } \Omega\}.$$

Esso è uno spazio di Fréchet rispetto alla topologia generata dalla famiglia di seminorme

$$\mathcal{F} = \{|\cdot|_{k,p,\Omega'} :\ \Omega' \text{ aperto ben contenuto in } \Omega\} \quad \text{ove} \quad |v|_{k,p,\Omega'} = \|v|_{\Omega'}\|_{W^{k,p}(\Omega')}.$$

come si verifica ragionando come abbiamo fatto nel caso dello spazio $C^k(\Omega)$. Notiamo che l'analoga definizione con $p = +\infty$ si potrebbe anche dare. Ma otterremmo, per $k \ge 1$, esattamente lo spazio $C^{k-1,1}(\Omega)$, caso particolare di quelli dell'Esempio 4.11. Infatti, anziché considerare tutti gli aperti Ω' ben contenuti in Ω, potremmo limitarci, senza alterare la topologia, a quelli che verificano anche quelle condizioni di regolarità cui si è accennato (senza precisare...) nell'Osservazione I.5.70 in modo da garantire l'identità $W^{k,\infty}(\Omega') = C^{k-1,1}(\overline{\Omega}')$.

4.31. *Esercizio.* Dimostrare che $W^{m,q}_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ se $m \geq k$ e $p \leq q$ con immersioni continue e che la topologia di $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ non è indotta da alcuna norma.

4.32. *Esercizio.* Sia $\mathbb{K}^\infty = \prod_{n=1}^\infty \mathbb{K}$ lo spazio di tutte le successioni di elementi di $\mathbb{K}$ munito della topologia prodotto delle topologie euclidee. Si dimostri che $\mathbb{K}^\infty$ è uno spazio di Fréchet costruendo una famiglia di seminorme che induce tale topologia.

4.33. *Esercizio.* Sia $V = \bigcap_{1 \leq p < +\infty} L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e si consideri la famiglia $\mathcal{F} = \{|\cdot|_m :\ m = 1, 2, \ldots\}$ di seminorme, ove $|\cdot|_m$ è la norma in $L^m(-m, m)$. Si dimostri che $\mathcal{F}$ rende V spazio di Fréchet.

4.34. *Esercizio.* Siano $\{p_m\}$ una successione di numeri reali $p_m \geq 1$ e V lo spazio delle (classi di) funzioni $v : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ misurabili tali che $v|_{(m-1,m)} \in L^{p_m}(m-1, m)$ per ogni $m \geq 1$ e si consideri la famiglia di seminorme $\mathcal{F} = \{|\cdot|_m :\ m = 1, 2, \ldots\}$ ove $|\cdot|_m$ è la norma in $L^{p_m}(m-1, m)$. Si dimostri che $\mathcal{F}$ rende V spazio di Fréchet. □

Gli esempi successivi riguardano situazioni non metrizzabili. Come è già stato osservato, non sono metrizzabili la topologia debole e la topologia debole* del duale quando lo spazio di partenza ha dimensione infinita. Tuttavia la dimostrazione di questi fatti, piuttosto complessa, non è stata data. Qui diamo qualche esempio nel quale la non metrizzabilità si verifica senza difficoltà eccessive.

4.35. Esempio. Sia V lo spazio delle successioni reali che hanno solo un numero finito di elementi non nulli. Precisamente una successione reale $x = \{x_k\}$ appartiene a V se e solo se esiste m tale che $x_k = 0$ per ogni $k \geq m$. Per ogni successione reale non negativa $s = \{s_k\}$ consideriamo la seminorma (ben definita) su V

$$|x|_s = \sup_k s_k |x_k| = \max_k s_k |x_k| \quad \text{per } x = \{x_k\} \in V .$$

Consideriamo poi la famiglia $\mathcal{F}$ ottenuta prendendo tali seminorme al variare di s fra tutte le successioni reali non negative. Siccome $\mathcal{F}$ è ovviamente separata, otteniamo uno spazio localmente convesso. Dimostriamo che esso non è metrizzabile verificando che non vale la condizione *iii*) del Teorema 2.15. Controlliamo, più precisamente, che ogni famiglia $\mathcal{F}'$ al più numerabile di seminorme estratta da $\mathcal{F}$ induce una nozione di convergenza diversa (dunque una diversa topologia) da quella indotta dall'intera famiglia $\mathcal{F}$. Pur di ripetere infinite volte la stessa successione se occorre, ci riconduciamo al caso in cui $\mathcal{F}' = \{|\cdot|_{s^{(n)}} :\ n = 1, 2, \ldots\}$ per certe successioni reali $s^{(n)} = \{s^{(n)}_k\}$. Definiamo le successioni reali $\sigma = \{\sigma_k\}$ e $x^{(n)} = \{x^{(n)}_k\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) come segue

$$\sigma_k = \max\{1, s^{(1)}_k, \ldots, s^{(k)}_k\} \quad \text{e} \quad x^{(n)}_k = \frac{\delta_{nk}}{n\sigma_n} \quad \text{per } k = 1, 2, \ldots$$

ove δ_{nk} è il simbolo di Kronecker. Allora $x^{(n)} \in V$ e ora verifichiamo che la successione $\{x^{(n)}\}$ è infinitesima nella topologia indotta da $\mathcal{F}'$ e non in quella indotta da $\mathcal{F}$. La prima verifica consiste nel controllare che valutando tutte le seminorme di $\mathcal{F}'$ su $\{x^{(n)}\}$ si ottengono successioni reali infinitesime. Fissiamo dunque m. Osservato che $m \leq n$ implica $s^{(m)}_n \leq \sigma_n$, deduciamo che

$$|x^{(n)}|_{s^{(m)}} = \sup_k s^{(m)}_k |x^{(n)}_k| = s^{(m)}_n |x^{(n)}_n| = \frac{s^{(m)}_n}{n\sigma_n} \leq 1/n \quad \text{per ogni } n \geq m$$

per cui la successione in questione è infinitesima. Per controllare l'affermazione restante consideriamo la successione non negativa $s = \{k\sigma_k\}$ e la seminorma associata. Abbiamo

$$|x^{(n)}|_s = \sup_k k\sigma_k |x^{(n)}_k| = n\sigma_n |x^{(n)}_n| = 1 \quad \text{per ogni } n$$

per cui $\{x^{(n)}\}$ non è infinitesima nella topologia indotta da $\mathcal{F}$. □

Gli esempi successivi riguardano situazioni analoghe, ma un po' più complesse, che si ottengono prendendo spazi di funzioni definite in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e a supporto compatto. Ci limitiamo al caso di spazi di funzioni continue oppure di tipo L^p, tutti reali.

4.36. Esempio. Sia $V = C^0_c(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $v \in C^0(\Omega)$ a supporto compatto. Per ogni $\psi \in C^0(\Omega)$ non negativa consideriamo la seminorma (ben definita) su V definita dalla formula

$$|v|_\psi = \sup_\Omega \psi |v| \quad \text{per } v \in V$$

e introduciamo la famiglia $\mathcal{F}$ ottenuta prendendo tutte le seminorme $|\cdot|_\psi$ al variare di ψ fra le funzioni continue non negative. Otteniamo uno spazio localmente convesso e ora dimostriamo che esso non è metrizzabile verificando, anche in questo caso, che non vale la condizione *iii*) del Teorema 2.15. Controlliamo che ogni famiglia $\mathcal{F}'$ al più numerabile di seminorme estratta da $\mathcal{F}$ induce una nozione di convergenza diversa da quella indotta dall'intera famiglia $\mathcal{F}$. Possiamo supporre $\mathcal{F}' = \{|\cdot|_{\psi_n} :\ n = 1, 2, \ldots\}$ per certe $\psi_n \in C^0(\Omega)$ non negative. Posto

$$\varphi_n(x) = \max\{1, \psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)\} \quad \text{per } x \in \Omega \text{ e } n = 1, 2, \ldots \tag{4.11}$$

otteniamo funzioni continue ≥ 1. Fissiamo una successione $\{B_n\}$ di palle chiuse fra loro disgiunte, incluse in Ω e tali che ogni compatto di Ω ne intersechi solo un numero finito. Diamo un cenno su una possibile costruzione di una tale successione nel caso $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ (altrimenti la costruzione è banale). Fissata una successione $\{x_n\}$ di punti distinti di Ω convergente a un punto $x_0 \in \partial\Omega$, prendiamo $B_n = \overline{B}_{r_n}(x_n)$ ove la successione infinitesima $\{r_n\}$ dei raggi è costruita, ad esempio, per ricorrenza come segue. Posto $\delta_1 = |x_1 - x_0|$, avremo $|x_n - x_0| < \delta_1/2$ per n abbastanza grande, dunque $|x_n - x_1| < \delta_1/2$ solo per un numero finito di indici, per cui esiste $r_1 \in (0,1)$ tale che $B_1 = \overline{B}_{r_1}(x_1) \subset \Omega$ e $x_n \notin B_1$ per ogni $n > 1$. Per costruire $r_2 \in (0, 1/2)$ si ragiona allo stesso modo sugli indici $n > 1$ e sull'aperto $\Omega \setminus B_1$: la corrispondente palla chiusa B_2, in quanto inclusa in $\Omega \setminus B_1$, è disgiunta da B_1. Analogamente si continua considerando gli indici $n > 2$ e l'aperto $\Omega \setminus (B_1 \cup B_2)$, eccetera. Sia ora $K \subset \Omega$ un compatto. Siccome x_n tende a $x_0 \in \partial\Omega$, r_n tende a 0 e K ha distanza positiva da $\partial\Omega$, è chiaro che K interseca solo un numero finito di palle B_n. Proseguiamo. Fissata una funzione $\zeta \in C^0(\mathbb{R}^d)$ verificante $0 < \zeta(x) \leq \zeta(0) = 1$ per $|x| < 1$ e $\zeta(x) = 0$ per $|x| \geq 1$, costruiamo le funzioni $\zeta_n, v_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo per $x \in \Omega$

$$\zeta_n(x) = \zeta\Big(\frac{x - x_n}{r_n}\Big) \quad \text{e} \quad v_n(x) = \frac{\zeta_n(x)}{nM_n} \quad \text{ove} \quad M_n = \sup_{B_n} \varphi_n .$$

Allora $v_n \in V$ e ora verifichiamo che $\{v_n\}$ è infinitesima nella topologia indotta da $\mathcal{F}'$ ma non in quella indotta da $\mathcal{F}$. Per ogni m, n verificanti $m \leq n$ si ha $\psi_m \leq \varphi_n$. Per ogni m fissato e per ogni $n \geq m$ abbiamo allora

$$|v_n|_{\psi_m} = \sup_{B_n} \psi_m \frac{\zeta_n}{nM_n} \leq \sup \frac{\varphi_n}{nM_n} \leq 1/n$$

e la convergenza di $|v_n|_{\psi_m}$ a 0 per $n \to \infty$ segue. Ricordando che le palle chiuse B_k sono a due a due disgiunte, definiamo $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\psi(x) = kM_k\zeta_k(x) \quad \text{se } x \in B_k\,,\ k = 1, 2, \ldots \quad \text{e} \quad \psi(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \in \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^\infty B_k\,.$$

Allora $\psi \in C^0(\Omega)$ e $\psi \geq 0$, per cui $|\cdot|_\psi \in \mathcal{F}$, e per ogni n

$$|v_n|_\psi = \sup_\Omega \psi |v_n| = \sup_{B_n} \psi |v_n| = \sup_{B_n} nM_n\zeta_n \frac{\zeta_n}{nM_n} = \zeta_n^2(x_n) = 1.$$

Dunque $\{v_n\}$ non è infinitesima nella topologia indotta da $\mathcal{F}$.

4.37. Esempio. Siano $p \in [1,+\infty]$ e $v \in L^p(\Omega)$. Diciamo che v è a supporto compatto quando esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $v = 0$ q.o. in $\Omega \setminus K$. Sia allora $V = L^p_c(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $v \in L^p(\Omega)$ a supporto compatto. Posto $q = p'$ per comodità, per ogni $\psi \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ non negativa consideriamo la seminorma (ben definita) su V definita dalla formula

$$|v|_\psi = \int_\Omega \psi |v| \, dx \quad \text{per } v \in V$$

e introduciamo la famiglia $\mathcal{F}$ ottenuta prendendo tutte le seminorme $|\cdot|_\psi$ al variare di ψ fra le funzioni di $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ non negative. Anche in questo caso troviamo uno spazio localmente convesso non metrizzabile. Analogamente a quanto fatto nell'esempio precedente, fissiamo una successione $\{\psi_n\}$ di elementi di $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, consideriamo la famiglia $\mathcal{F}' = \{|\cdot|_{\psi_n} : \ n = 1, 2, \ldots\}$ e costruiamo una successione $\{v_n\}$ infinitesima nella topologia indotta da $\mathcal{F}'$ e non in quella indotta da $\mathcal{F}$. Ancora consideriamo le funzioni φ_n date dalla (4.11) (ove x varia ora q.o. in Ω), osservando che $\varphi_n \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, e la successione $\{B_n\}$ dell'esempio precedente. Denotata con χ_n la funzione caratteristica di B_n e osservato che $\varphi_n \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per cui $\varphi_n|_{B_n} \in L^1(B_n)$, poniamo

$$v_n = \frac{1}{nM_n} \chi_n \quad \text{ove} \quad M_n = \int_{B_n} \varphi_n \, dx.$$

Allora, per ogni m fissato e per ogni $n \geq m$ abbiamo

$$|v_n|_{\psi_m} = \int_\Omega \psi_m |v_n| \, dx = \frac{1}{nM_n} \int_{B_n} \psi_m \, dx \leq \frac{1}{nM_n} \int_{B_n} \varphi_n \, dx = 1/n$$

per cui $|v_n|_{\psi_m}$ tende a 0 per $n \to \infty$. Definita ora ψ mediante

$$\psi(x) = k\varphi_k(x) \quad \text{se } x \in B_k \,, \ k = 1, 2, \ldots \quad \text{e} \quad \psi(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \in \Omega \setminus \bigcup_{k=1}^\infty B_k$$

abbiamo $\psi \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\psi \geq 0$ e per ogni n

$$|v_n|_\psi = \int_\Omega \psi |v_n| \, dx = \frac{1}{nM_n} \int_{B_n} \psi \, dx = \frac{1}{nM_n} \int_{B_n} n\varphi_n \, dx = 1$$

così che $\{|v_n|_\psi\}$ non è infinitesima. □

A questo punto non possiamo non dire che gli spazi $L^p_c(\Omega)$ e $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ sono strettamente connessi nel passaggio al duale. Naturalmente, se V è uno spazio localmente convesso reale, il suo duale V^* è, come nel caso degli spazi normati, lo spazio dei funzionali $f : V \to \mathbb{R}$ lineari e continui, ma, per semplificare, non introduciamo una topologia in V^*. Dimostriamo il risultato seguente, nel quale resta inteso che gli spazi $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $L^p_c(\Omega)$ hanno le strutture localmente convesse introdotte negli Esempi 4.27 e 4.37 rispettivamente, dei quali si seguono le notazioni.

4.38. Proposizione. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $p \in [1,+\infty)$ e $q = p'$. Allora, per ogni $u \in L^q_c(\Omega)$, il funzionale f definito su $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ dalla formula*

$$f(v) = \int_\Omega uv \, dx \tag{4.12}$$

appartiene a $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)^*$ e l'operatore da $L^q_c(\Omega)$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)^*$ che a ogni $u \in L^q_c(\Omega)$ associa il corrispondente $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)^*$ è un isomorfismo algebrico. Dualmente, per ogni $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, il funzionale f definito su $L^p_c(\Omega)$ dalla (4.12) appartiene a $L^p_c(\Omega)^*$ e l'operatore da $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ in $L^p_c(\Omega)^*$ che a ogni $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ associa il corrispondente $f \in L^p_c(\Omega)^*$ è un isomorfismo algebrico. □

Dimostrazione. Osserviamo che, se $u \in L^q_c(\Omega)$ e $v \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ oppure $u \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$ e $v \in L^p_c(\Omega)$, l'integrale (4.12) ha senso in quanto esso è, di fatto, calcolato su di un certo compatto K (scelto in funzione di u o di v nei due casi in modo che $u = 0$ o $v = 0$ in $\Omega \setminus K$) e, in ciascuno dei due casi, $u|_K \in L^q(K)$ e $v|_K \in L^p(K)$. Inoltre, sempre nei due casi, il funzionale f così definito è lineare. Verifichiamo che f è anche continuo. Se K è il compatto di cui sopra (dipendente da u o da v rispettivamente) abbiamo infatti

$$|f(v)| \leq \|u\|_{L^q(K)} \|v\|_{L^p(K)} = \|u\|_{L^q(K)} |v|_{p,K} \quad \text{e} \quad |f(v)| \leq \int_\Omega |u|\,|v|\,dx = |v|_{|u|}$$

per ogni $v \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ e per ogni $v \in L^p_c(\Omega)$ rispettivamente. Infine, sempre nei due casi, $f = 0$ implica che l'integrale di uv sia nullo almeno per ogni $v \in C^\infty_c(\Omega)$, per cui $u = 0$ q.o. in Ω. Dunque i due operatori dell'enunciato, ovviamente lineari, sono anche iniettivi. Usando l'ipotesi $p < +\infty$, dimostriamo che essi sono anche suriettivi, ora distinguendo i due casi.

Sia $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)^*$: dobbiamo costuire $u \in L^q_c(\Omega)$ in modo che la (4.12) valga per ogni $v \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. La restrizione di f a $L^p(\Omega)$ è lineare e continua su $L^p(\Omega)$ in quanto $L^p(\Omega)$ è immerso in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ con continuità. Per il Teorema III.3.4 di Riesz esiste dunque $u \in L^q(\Omega)$ tale che la (4.12) valga per ogni $v \in L^p(\Omega)$. Dimostriamo che $u \in L^q_c(\Omega)$, cioè che u è a supporto compatto. Supponiamo per assurdo che ciò sia falso e introduciamo la successione $\{\Omega_m\}$ data dalla (4.1) ($\Omega_m = B_m(0)$ se $\Omega = \mathbb{R}^d$). Allora l'insieme ω dei punti $x \in \Omega \setminus \Omega_1$ verificanti $u(x) \neq 0$ ha misura positiva. Siccome ω è l'unione (numerabile) degli insiemi $\omega \cap \Omega_m$ con $m \geq 2$, almeno uno di questi ha misura positiva: fissiamo tale insieme. Ma questo è l'unione (numerabile) dei suoi sottoinsiemi descritti dalle disuguaglianze $|u(x)| \geq 1/k$, uno dei quali, pertanto, ha misura positiva. Abbiamo dunque trovato due interi positivi m_1 e k_1 tali che l'insieme

$$\omega_1 = \{x \in \Omega_{m_1} \setminus \Omega_1 : \ |u(x)| \geq 1/k_1\}$$

abbia misura positiva. Sia μ_1 la sua misura. Siccome stiamo supponendo che u non sia a supporto compatto, ha misura positiva anche l'insieme dei punti $x \in \Omega \setminus \Omega_{m_1}$ tali che $u(x) \neq 0$. Procedendo analogamente, costruiamo due interi $m_2 > m_1$ e $k_2 > 0$ tali che l'insieme

$$\omega_2 = \{x \in \Omega_{m_2} \setminus \Omega_{m_1} : \ |u(x)| \geq 1/k_2\}$$

abbia misura positiva. Sia μ_2 la sua misura. Si proseguirebbe considerando l'insieme dei punti $x \in \Omega \setminus \Omega_{m_2}$ tali che $u(x) \neq 0$. Per induzione, veniamo a costruire una successione $\{\omega_n\}$ di sottoinsiemi misurabili di Ω e una successione di interi positivi $\{k_m\}$ (nonché una successione $\{m_n\}$ solo ausiliaria) tali che

gli insiemi $\{\omega_n\}$ sono a due a due disgiunti e hanno chiusura compatta in Ω
la misura μ_n di ω_n è positiva e $|u| \geq 1/k_n$ in ω_n.

A questo punto definiamo $z, z_n : \Omega \to \mathbb{R}$ come segue

$$z(x) = \frac{k_i}{\mu_i} \operatorname{sign} u(x) \quad \text{se } x \in \omega_i \quad \text{per } i = 1, 2 \ldots \quad \text{e} \quad z(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^\infty \omega_i$$

$$z_n(x) = \frac{k_i}{\mu_i} \operatorname{sign} u(x) \quad \text{se } x \in \omega_i \quad \text{per } i = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad z_n(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n \omega_i$$

con la convenzione $\operatorname{sign} 0 = 0$. Allora $z \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, $z_n \in L^p(\Omega)$ e $z_n \to z$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. D'altra parte

$$f(z_n) = \int_\Omega u z_n\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} u z_n\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} |u| \frac{k_i}{\mu_i}\,dx \geq \sum_{i=1}^n \int_{\omega_i} \frac{dx}{\mu_i} = n$$

per cui la successione $\{f(z_n)\}$ diverge e f non è continuo, contro l'ipotesi. Concludiamo che $u \in L^q_c(\Omega)$. Sia ora $v \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ ad arbitrio. Detta χ_n la funzione caratteristica di Ω_n, si ha subito $v\chi_n \in L^p(\Omega)$ e

$v\chi_n \to v$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Usando la continuità di f su $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e il Teorema di Lebesgue della convergenza dominata ($|uv| \in L^1(\Omega)$), deduciamo che

$$f(v) = \lim_{n\to\infty} f(v\chi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u\, v\chi_n \, dx = \int_\Omega uv\, dx.$$

Dunque vale la (4.12) per ogni $v \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Sia ora $f \in L^p_c(\Omega)^*$: dobbiamo costruire $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che la (4.12) valga per ogni $v \in L^p_c(\Omega)$. Introdotta ancora la successione $\{\Omega_m\}$ come sopra, consideriamo, per ogni m fissato, il funzionale f_m che a ogni $v \in L^p(\Omega_m)$ associa $f(\widetilde{v})$, ove $\widetilde{v} : \Omega \to \mathbb{R}$ è la funzione definita da $\widetilde{v} = v$ in Ω_m e $\widetilde{v} = 0$ in $\Omega \setminus \Omega_m$, funzione che effettivamente appartiene a $L^p_c(\Omega)$. Allora f_m è lineare. Inoltre, essendo $f \in L^p_c(\Omega)^*$, esistono una costante M e funzioni $\psi_1, \dots, \psi_n \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tali che per ogni $v \in L^p(\Omega_m)$ si abbia

$$|f_m(v)| = |f(\widetilde{v})| \le M \sum_{i=1}^n |\widetilde{v}|_{\psi_i} = M \sum_{i=1}^n \int_\Omega \psi_i |\widetilde{v}|\, dx = M \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_m} \psi_i |v|\, dx \le M \sum_{i=1}^n \|\psi_i\|_{L^q(\Omega_m)} \|v\|_{L^p(\Omega_m)}.$$

Dunque $f_m \in L^p(\Omega_m)^*$. Per il Teorema III.3.4 di Riesz esiste una e una sola $u_m \in L^q(\Omega_m)$ tale che

$$f_m(v) = \int_{\Omega_m} u_m v\, dx \quad \text{per ogni } v \in L^p(\Omega_m).$$

Osservato che la restrizione di u_{m+1} a Ω_m ha le stesse proprietà di u_m, deduciamo che tale restrizione è u_m. Dunque esiste $u : \Omega \to \mathbb{R}$ le cui restrizioni agli Ω_m coincidono ordinatamente con le u_m ora costruite. Segue $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Sia ora $v \in L^p_c(\Omega)$ ad arbitrio. Scelto m tale che $v = 0$ in $\Omega \setminus \Omega_m$, abbiamo

$$f(v) = f(\widetilde{v|_{\Omega_m}}) = f_m(v|_{\Omega_m}) = \int_{\Omega_m} u_m\, v|_{\Omega_m}\, dx = \int_\Omega uv\, dx.$$

Dunque vale la (4.12) per ogni $v \in L^p_c(\Omega)$. □

4.39. Osservazione. Al contrario di quanto avviene nel caso degli spazi normati, per i quali la topologia di V^* indotta dalla norma duale è in qualche modo naturale e quindi privilegiata, se V è solo localmente convesso, vi sono più topologie su V^* ugualmente degne di considerazione. Qui introduciamo le topologie nei duali degli spazi $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $L^p_c(\Omega)$ degli Esempi 4.27 e 4.37 che rendono omeomorfismi gli isomorfismi algebrici della Proposizione 4.38. Resta inteso che gli spazi $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $L^q_c(\Omega)$ sono muniti delle topologie degli stessi esempi con q al posto di p. Sia $L : L^q_c(\Omega) \to L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)^*$ il primo dei due isomorfismi della proposizione citata e mostriamo che L e L^{-1} sono operatori continui se il duale $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)^*$ di $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è munito della topologia generata dalla famiglia di seminorme definita come segue

$$|f|_{*,\varphi} = |\langle f, \varphi \rangle| \quad \text{per } f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)^*, \quad \text{al variare di } \varphi \text{ in } L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Si tratta dunque di una topologia di tipo debole*. Per la Proposizione 1.10, condizioni sufficienti per la continuità di L e di L^{-1} sono rispettivamente le seguenti:

$$\text{per ogni } \varphi \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ esiste } \psi \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ tale che } \quad |Lu|_{*,\varphi} \le |u|_\psi \quad \text{per ogni } u \in L^q_c(\Omega)$$
$$\text{per ogni } \psi \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ esiste } \varphi \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ tale che } \quad |L^{-1}f|_\psi \le |f|_{*,\varphi} \quad \text{per ogni } f \in L^p_c(\Omega)^*.$$

Dimostriamo che queste sono soddisfatte. Data $\varphi \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, si ha $|\varphi| \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e per ogni $u \in L^q_c(\Omega)$

$$|Lu|_{*,\varphi} = |\langle Lu, \varphi \rangle| = \left| \int_\Omega u\varphi\, dx \right| \le \int_\Omega |u|\, |\varphi|\, dx = |u|_{|\varphi|}$$

per cui possiamo prendere $\psi = |\varphi|$. Sia ora $\psi \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Per ogni $f \in L^p_c(\Omega)^*$, posto $u = L^{-1}f$ per semplificare e con la convenzione $\operatorname{sign} 0 = 0$, abbiamo $u \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$, $\psi \operatorname{sign} u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ e

$$|L^{-1}f|_\psi = |u|_\psi = \int_\Omega \psi\, |u|\, dx = \int_\Omega (\psi \operatorname{sign} u)\, u\, dx = \langle f, \psi \operatorname{sign} u\rangle = |\langle f, \psi \operatorname{sign} u\rangle|$$

per cui possiamo prendere $\varphi = \psi \operatorname{sign} u$. Sia ora $L : L^q_{\text{loc}}(\Omega) \to L^p_c(\Omega)^*$ il secondo isomorfismo della Proposizione 4.38 e mostriamo che L e L^{-1} sono operatori continui se il duale $L^p_c(\Omega)^*$ di $L^p_c(\Omega)$ è munito della topologia generata dalla famiglia di seminorme definita come segue

$$|f|_{*,K} = \sup\{|\langle f, v\rangle| :\ v \in L^p_c(\Omega),\ \|v\|_p \le 1,\ v = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\} \quad \text{per } f \in L^p_c(\Omega)^*$$
al variare del compatto $K \subset \Omega$.

La verifica è semplice. Infatti, se $f \in L^p_c(\Omega)^*$ e $u \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$ sono associati tramite la (4.12), cioè sono tali che $f = Lu$ o in modo equivalente $u = L^{-1}f$, per ogni compatto $K \subset \Omega$ abbiamo

$$|f|_{*,K} = \sup\left\{\left|\int_K uv\, dx\right| :\ v \in L^p(K),\ \|v\|_p \le 1\right\} = \|u|_K\|_q = |u|_{q,K}$$

così che L e L^{-1} stabiliscono addirittura una corrispondenza biiettiva fra le seminorme delle due famiglie.

4.40. Osservazione. Siccome $L^p_c(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $L^p(\Omega)$, avremmo potuto considerare la topologia indotta su $L^p_c(\Omega)$ da $L^p(\Omega)$. Avremmo trovato uno spazio normato, che denotiamo con V_p , ben diverso dallo spazio dell'Esempio 4.37 che non è nemmeno metrizzabile. Il suo duale V_p^* sarebbe stato isomorfo a $L^q(\Omega)$, l'isomorfismo essendo ancora dato dalla formula (4.12), che ora farebbe corrispondere $f \in V_p^*$ e $u \in L^q(\Omega)$. Infatti $L^p_c(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$, per cui gli elementi di V_p^* sono tutte e sole le restrizioni a V_p degli elementi di $L^p(\Omega)^*$ e il Teorema di Riesz permette di concludere. Per chiarire ulteriormente possiamo aggiungere quanto segue. Sia $u \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$ e si definisca il funzionale $f \in \operatorname{Hom}(L^p_c(\Omega); \mathbb{R})$ mediante la (4.12). Allora f è continuo rispetto alla topologia dell'Esempio 4.37 senza altre ipotesi su u , mentre f è continuo anche rispetto alla topologia che $L^p(\Omega)$ induce su $L^p_c(\Omega)$ se e solo se $u \in L^q(\Omega)$.

Appendice

Questa appendice contiene qualche richiamo che torna comodo nelle citazioni fatte nei vari capitoli, senza alcuna pretesa di completezza, e le soluzioni di alcuni degli esercizi proposti.

1. Spazi topologici e metrici

La definizione formale di spazio topologico può essere data in vari modi. Infatti la topologia è nota quando sono note le famiglie degli intorni dei vari punti, la famiglia degli aperti, la famiglia dei chiusi, la famiglia delle funzioni continue a valori in un altro spazio topologico fissato, eccetera, e la scelta di come formalizzare la definizione dipende dai gusti e da ciò che maggiormante si vuole sottolineare. In discorsi di Topologia Generale si usa più spesso considerare la famiglia degli aperti. Al contrario, in Analisi Funzionale è in generale più comodo trattare con gli intorni, anzi con basi di intorni. Iniziamo allora il paragrafo dando tre definizioni e un cenno sulla loro equivalenza.

1.1. Definizione. *Uno spazio topologico è una coppia* $(S,\mathcal{I})$ *ove* S *è un insieme non vuoto e* $\mathcal{I} : S \to 2^{2^S}$ *è un'applicazione verificante, per ogni* $x \in S$ *, le proprietà seguenti:*

$$\begin{array}{rl} i) & \mathcal{I}(x) \neq \emptyset \quad \textit{e} \quad x \in I \quad \textit{per ogni } I \in \mathcal{I}(x) \\ ii) & \textit{da} \quad J \in \mathcal{I}(x) \quad \textit{e} \quad J \subseteq I \subseteq S \quad \textit{segue} \quad I \in \mathcal{I}(x) \\ iii) & \textit{da} \quad I, J \in \mathcal{I}(x) \quad \textit{segue} \quad I \cap J \in \mathcal{I}(x) \\ iv) & \textit{per ogni } I \in \mathcal{I}(x) \textit{ esiste } J \in \mathcal{I}(x) \textit{ tale che } J \subseteq I \textit{ e } J \in \mathcal{I}(y) \textit{ per ogni } y \in J. \end{array}$$

Se $x \in S$ *, gli elementi di* $\mathcal{I}(x)$ *si chiamano intorni di* x *.* □

1.2. Definizione. *Uno spazio topologico è una coppia* $(S,\mathcal{A})$ *ove* S *è un insieme non vuoto e* $\mathcal{A}$ *è un sottoinsieme di* 2^S *verificante le proprietà seguenti:*

$$\begin{array}{rl} i) & \emptyset \in \mathcal{A} \quad \textit{e} \quad S \in \mathcal{A} \\ ii) & \textit{da} \quad A_1, A_2 \in \mathcal{A} \quad \textit{segue} \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \\ iii) & \textit{da} \quad A_\lambda \in \mathcal{A} \quad \textit{per ogni } \lambda \in \Lambda \quad \textit{segue} \quad \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathcal{A}. \end{array}$$

ove Λ *è un qualunque insieme di indici. Gli elementi di* $\mathcal{A}$ *si chiamano aperti.* □

1.3. Definizione. *Uno spazio topologico è una coppia* $(S,\mathcal{C})$ *ove* S *è un insieme non vuoto e* $\mathcal{C}$ *è un sottoinsieme di* 2^S *verificante le proprietà seguenti:*

$$\begin{array}{rl} i) & \emptyset \in \mathcal{C} \quad \textit{e} \quad S \in \mathcal{C} \\ ii) & \textit{da} \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C} \quad \textit{segue} \quad C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C} \\ iii) & \textit{da} \quad C_\lambda \in \mathcal{C} \quad \textit{per ogni } \Lambda \quad \textit{segue} \quad \displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \in \mathcal{C}. \end{array}$$

ove Λ *è un qualunque insieme di indici. Gli elementi di* $\mathcal{C}$ *si chiamano chiusi.* □

Le tre definizioni sono equivalenti nel senso che ora precisiamo. Assegnato lo spazio topologico $(S,\mathcal{I})$ nel senso della Definizione 1.1, si ottiene uno spazio topologico nel senso della Definizione 1.2 definendo $\mathcal{A}$ come segue

$$A \in \mathcal{A} \quad \text{se e solo se} \quad A \in 2^S \quad \text{e} \quad \text{per ogni } x \in A \quad A \in \mathcal{I}(x) \tag{1.1}$$

cioè dicendo che A *è un aperto se e solo se esso è un intorno di ogni suo punto*. Viceversa, assegnato lo spazio topologico $(S, \mathcal{A})$ nel senso della Definizione 1.2, si ottiene uno spazio topologico nel senso della Definizione 1.1 definendo l'applicazione $\mathcal{I}$ come segue

$$\begin{aligned}&\text{per ogni } x \in S, \text{ un sottoinsieme } I \text{ di } S \text{ appartiene a } \mathcal{I}(x) \text{ se e solo se}\\ &\text{esiste } A \in \mathcal{A} \text{ tale che } x \in A \text{ e } I \supseteq A\end{aligned} \tag{1.2}$$

cioè dicendo che *gli intorni del generico* $x \in S$ *sono i soprainsiemi degli aperti che contengono* x. Accade poi che, se $(S, \mathcal{I})$ è uno spazio topologico nel senso della Definizione 1.1, se si costruisce lo spazio tipologico $(S, \mathcal{A})$ nel senso della Definizione 1.2 usando la procedura (1.1) e se a $(S, \mathcal{A})$ si applica la procedura (1.2), lo spazio topologico nel senso della Definizione 1.1 che si ottiene coincide con quello di partenza. Un'affermazione analoga vale poi quando si scambiano i ruoli delle due definizioni e delle due procedure. L'equivalenza delle Definizioni 1.2 e 1.3 si ottiene come segue

$$\text{data } \mathcal{A} \text{ si pone } \mathcal{C} = \{C \subseteq S : S \setminus C \in \mathcal{A}\}; \tag{1.3}$$

$$\text{data } \mathcal{C} \text{ si pone } \mathcal{A} = \{A \subseteq S : S \setminus A \in \mathcal{C}\}. \tag{1.4}$$

dicendo cioè che *gli aperti e i chiusi sono i complementari gli uni degli altri*.

Per quanto riguarda i modi di dire spesso si scrivono semplicemente frasi del tipo *sia* S *uno spazio topologico*, senza evidenziare la topologia nella notazione. Se poi si vuole proprio sottolineare una topologia particolare, si può dire più precisamente *sia* $(S, \mathcal{T})$ *uno spazio topologico*, ove $\mathcal{T}$ "è la topologia", senza necessariamente precisare che $\mathcal{T}$ sia, ad esempio, la famiglia $\mathcal{A}$ degli aperti oppure la funzione $\mathcal{I}$ che assegna le famiglie degli intorni dei vari punti. Così almeno ci siamo comportati noi nei capitoli precedenti.

1.4. Definizione. *Siano* $(S, \mathcal{T})$ *uno spazio topologico e* $x_0 \in S$. *Una base di intorni di* x_0 *è una famiglia* $\mathcal{B}_0 \subseteq 2^S$ *che verifica le due proprietà seguenti: i) ogni* $B \in \mathcal{B}_0$ *è un intorno di* x_0; *ii) ogni intorno di* x_0 *contiene almeno un elemento di* $\mathcal{B}_0$. □

1.5. Proposizione. *Siano* S *un insieme non vuoto e* $\mathcal{B} : S \to 2^{2^S}$. *Perché esista una topologia su* S *nella quale, per ogni* $x \in S$, *la famiglia* $\mathcal{B}(x)$ *sia una base di intorni di* x *è necessario e sufficiente che, per ogni* $x \in S$, *valgano le condizioni seguenti:*

i) $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ *e* $x \in B$ *per ogni* $B \in \mathcal{B}(x)$
ii) per ogni $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x)$ *esiste* $B \in \mathcal{B}(x)$ *tale che* $B \subseteq B_1 \cap B_2$
iii) per ogni $B \in \mathcal{B}(x)$ *esiste* $J \subseteq B$ *tale che, per ogni* $y \in J$, *esista* $B' \in \mathcal{B}(y)$ *tale che* $B' \subseteq J$.

Inoltre, se tali condizioni sono soddisfatte, la topologia è unica ed è individuata dalla condizione: per ogni $x \in S$ *e* $I \subseteq S$, I *è un intorno di* x *se e solo se esiste* $B \in \mathcal{B}(x)$ *tale che* $B \subseteq I$. □

1.6. Definizione. *Uno spazio topologico è a basi numerabili di intorni quando ogni suo punto ha una base di intorni al più numerabile.* □

1.7. Definizione. *Uno spazio topologico* S *è di Hausdorff quando, per ogni coppia di punti distinti* $x, y \in S$, *esistono un intorno di* x *e un intorno di* y *fra loro disgiunti.* □

1.8. Definizione. *Sia* S *uno spazio topologico. Una successione* $\{x_n\}$ *di elementi di* S *converge all'elemento* $x \in S$ *quando, per ogni intorno* I *di* x, *esiste un indice* m *tale che* $x_n \in I$ *per ogni* $n \geq m$. □

La convergenza può essere espressa in modo equivalente lasciando I arbitrario in una base fissata di intorni di x. Se S è di Hausdorff vale l'unicità del limite. Segnaliamo la condizione (necessaria e) sufficiente per la convergenza nel risultato dato di seguito.

1.9. Proposizione. *Siano* S *uno spazio topologico,* $\{x_n\}$ *una successione di elementi di* S *e* $x \in S$. *Se da ogni sottosuccessione estratta da* $\{x_n\}$ *si può ulteriormente estrarre una sottosuccessione convergente a* x, *allora la successione data converge a* x. □

1.10. Definizione. *Siano* $(S,\mathcal{I})$ *e* $(S',\mathcal{I}')$ *due spazi topologici nel senso della Definizione 1.1,* $f : S \to S'$ *e* $x_0 \in S$ *. La funzione* f *è continua in* x_0 *quando, per ogni* $I \in \mathcal{I}'(f(x_0))$ *, esiste* $J \in \mathcal{I}(x_0)$ *tale che* $f(J) \subseteq I$ *ed è continua per successioni (o sequenzialmente continua) in* x_0 *quando* $\{f(x_n)\}$ *converge a* $f(x_0)$ *in* S' *ogni volta che* $\{x_n\}$ *converge a* x_0 *in* S *. La funzione* f *è continua quando è continua in ogni punto di* S *ed è continua per successioni quando è continua per successioni in ogni punto di* S *.* □

La continuità in x_0 si può riscrivere in modo formalmente identico interpretando $\mathcal{I}(x_0)$ e $\mathcal{I}'(f(x_0))$ come basi di intorni dei due punti nei due spazi.

1.11. Teorema. *Siano* S *e* S' *due spazi topologici e* $f : S \to S'$ *. Allora la funzione* f *è continua se e solo se, per ogni sottoinsieme* A' *aperto (chiuso) di* S' *, l'insieme* $f^{-1}(A')$ *è un aperto (risp. chiuso) di* S *.* □

1.12. Proposizione. *Siano* S *e* S' *due spazi topologici,* $f : S \to S'$ *e* $x_0 \in S$ *. Se* f *è continua in* x_0 *, allora* f *è continua per successioni in* x_0 *. Se* x_0 *ha una base numerabile di intorni, allora* f *è continua in* x_0 *se e solo se essa è continua per successioni in* x_0 *.* □

Segnaliamo un altro risultato che fa intervenire le basi numerabili di intorni.

1.13. Proposizione. *Siano* S *uno spazio topologico e* $C \subseteq S$ *. Se* C *è chiuso, vale la condizione seguente: i) se* $\{x_n\}$ *è una successione di elementi* C *,* x *è un punto di* S *e* $\{x_n\}$ *converge a* x *, allora* $x \in C$ *. Se lo spazio topologico* S *è a basi numerabili di intorni, tale condizione è anche sufficiente perché* C *sia chiuso.* □

1.14. Definizione. *Siano* S *un insieme non vuoto e* $\mathcal{T}$ *e* $\mathcal{T}'$ *due topologie su* S *. Diciamo che* $\mathcal{T}$ *è meno fine di* $\mathcal{T}'$ *(oppure che* $\mathcal{T}'$ *è più fine di* $\mathcal{T}$ *) quando l'applicazione identica di* S *è continua da* $(S,\mathcal{T}')$ *in* $(S,\mathcal{T})$ *.* □

La condizione espressa nella definizione può essere riformulata in vari modi equivalenti: *i*) ogni aperto in $\mathcal{T}$ è aperto in $\mathcal{T}'$; *i*) ogni chiuso in $\mathcal{T}$ è chiuso in $\mathcal{T}'$; *iii*) per ogni $x \in S$, ogni intorno di x in $\mathcal{T}$ è un intorno di x in $\mathcal{T}'$; *iv*) per ogni $x \in S$, se $\mathcal{B}_x$ è una base di intorni di x in $\mathcal{T}$, ogni elemento di $\mathcal{B}_x$ è un intorno di x in $\mathcal{T}'$; *v*) per ogni $x \in S$, se $\mathcal{B}_x$ e $\mathcal{B}'_x$ sono due basi di intorni di x in $\mathcal{T}$ e in $\mathcal{T}'$ rispettivamente, ogni elemento di $\mathcal{B}_x$ contiene un elemento di $\mathcal{B}'_x$. Infine, se entrambe le topologie sono a basi numerabili di intorni, una ulteriore condizione equivalente è data da: *vi*) da $x_n \to x$ in $\mathcal{T}'$ segue $x_n \to x$ in $\mathcal{T}$.

1.15. Definizione. *Sia* S *un insieme non vuoto. Una metrica in* S *è una funzione* $d : S^2 \to \mathbb{R}$ *che, per ogni* $x, y, z \in S$ *, verifica le condizioni: i)* $d(x,y) \ge 0$ *; ii)* $d(x,y) = 0$ *se e solo se* $x = y$ *; iii)* $d(x,y) = d(y,x)$ *; iv)* $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ *. Uno spazio metrico è una coppia* (S,d) *ove* S *è un insieme non vuoto e* d *è una metrica in* S *. Se* (S,d) *è uno spazio metrico,* $x \in S$ *e* $r > 0$ *, l'insieme* $B_r(x) = \{y \in S : \ d(x,y) < r\}$ *si chiama palla di centro* x *e raggio* r *. La topologia indotta in* S *dalla metrica* d *è quella tale che, per ogni* $x \in S$ *, la famiglia* $\mathcal{B}_x = \{B_r(x) : \ r > 0\}$ *è una base di intorni di* x *. Uno spazio topologico è metrizzabile quando esiste una metrica che ne induce la topologia.* □

Ricordiamo che più metriche possono indurre la stessa topologia e che ogni spazio metrizzabile è a basi numerabili di intorni, ma non viceversa. Ricordiamo inoltre che, se S è uno spazio topologico (metrico) e S' è un suo sottoinsieme non vuoto, S' ha una struttura naturale di spazio topologico (risp. metrico), detta *indotta* da quella dello spazio di partenza. □

Se X e Y sono due sottoinsiemi non vuoti di uno spazio metrico (S,d) e se $x_0 \in S$, le distanze di X da Y e di x_0 da Y sono definite dalle formule

$$\operatorname{dist}(X,Y) = \inf\{d(x,y) : \ x \in X, \ y \in Y\} \quad \text{e} \quad \operatorname{dist}(x_0,Y) = \operatorname{dist}(\{x_0\},Y). \tag{1.5}$$

La funzione $x \mapsto \operatorname{dist}(x,Y)$, $x \in S$, è continua da S in $\mathbb{R}$. Precisamente

$$|\operatorname{dist}(x_1,Y) - \operatorname{dist}(x_2,Y)| \le d(x_1,x_2) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in S .$$

Ricordiamo che una famiglia *ricopre un insieme* S oppure è un *ricoprimento di* S quando l'unione dei suoi elementi include S .

1.16. Definizione. *Uno spazio topologico* $(S, \mathcal{A})$ *nel senso della Definizione 1.2 è compatto quando, per ogni famiglia* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ *che ricopre* S, *esiste una famiglia finita* $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ *che ancora ricopre* S. *Un sottoinsieme di* S *è compatto quando esso è uno spazio topologico compatto rispetto alla topologia indotta. Lo spazio* S *è compatto per successioni o sequenzialmente compatto quando ogni successione di elementi di* S *ha una sottosuccessione convergente a un elemento di* S. □

1.17. Proposizione. *Uno spazio topologico* S *è compatto se e solo se, per ogni famiglia* $\mathcal{F}$ *di chiusi di* S, *vale l'implicazione seguente: se ogni famiglia finita* $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ *ha intersezione non vuota, allora anche* $\mathcal{F}$ *ha intersezione non vuota.* □

1.18. Definizione. *Un sottoinsieme* S_0 *di uno spazio topologico* S *è relativamente compatto quando la sua chiusura è compatta ed è relativamente compatto per successioni quando la sua chiusura è compatta per successioni.* □

1.19. Teorema. *Sia* S *uno spazio topologico. Se* S *è compatto, ogni suo sottoinsieme chiuso è compatto. Se* S *è di Hausdorff, ogni suo sottoinsieme compatto è anche chiuso.* □

Uno spazio topologico compatto può non essere sequenzialmente compatto e uno spazio topologico sequenzialmente compatto può non essere compatto. Tuttavia

1.20. Teorema. *Se uno spazio topologico* S *è metrizzabile, allora esso è compatto se e solo se è compatto per successioni e un suo sottoinsieme* S_0 *è relativamente compatto se e solo se esso è relativamente compatto per successioni. Inoltre, se* d *è una metrica che induce la topologia di* S, *se* S *è compatto, allora, per ogni* $\delta > 0$, *esistono punti* $x_1, \ldots, x_p \in S$ *in numero finito tali che l'unione delle palle* $B_\delta(x_i)$, $i = 1, \ldots, p$, *sia tutto* S. □

L'ultima proprietà si esprime dicendo che lo spazio metrico (S, d) è *totalmente limitato* e, più precisamente, si ha che S è compatto se e solo se (S, d) è completo e totalmente limitato.

1.21. Proposizione. *Sia* (S, d) *uno spazio metrico. Se* C *e* K *sono un chiuso e un compatto di* S *disgiunti, allora la loro distanza* $\operatorname{dist}(C, K)$ *è strettamente positiva, cioè esiste* $\delta > 0$ *tale che* $d(x, y) \geq \delta$ *per ogni* $x \in C$ *e* $y \in K$. □

Ricordiamo che, se $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ è una famiglia di insiemi, il prodotto cartesiano $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ della famiglia data è l'insieme $\mathbb{P}$ delle funzioni $x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ tali che $x(\lambda) \in A_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Per $x \in \mathbb{P}$ e $\lambda \in \Lambda$ usiamo indifferentemente la notazione $x(\lambda)$ oppure x_λ.

1.22. Definizione. *Sia* $\{(S_\lambda, \mathcal{T}_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ *una famiglia non vuota di spazi topologici. La topologia prodotto delle topologie date è l'unica topologia nel prodotto cartesiano* $\mathbb{P} = \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ *nella quale, per ogni* $x \in \mathbb{P}$, *è una base di intorni la famiglia* $\mathcal{B}_x$ *dei sottoinsiemi di* $\mathbb{P}$ *definita dalla condizione seguente:*

> *un sottoinsieme* $B \subseteq \mathbb{P}$ *appartiene a* $\mathcal{B}_x$ *se e solo se esso può essere rappresentato nella forma* $B = \prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ *ove, per ogni* $\lambda \in \Lambda$, I_λ *è un intorno di* x_λ *in* $\mathcal{T}_\lambda$ *e* $I_\lambda \neq S_\lambda$ *al più per un numero finito di elementi* $\lambda \in \Lambda$. □

Si verifica poi che si ottiene la stessa topologia se si impone agli intorni I_λ di x_λ di appartenere ad una base fissata di intorni di x_λ nella topologia $\mathcal{T}_\lambda$.

Così, ad esempio, se $\Lambda = \{1, 2\}$, una base di intorni di $x = (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2$ è data da tutti i prodotti $I_1 \times I_2$ ove I_j varia in una base di intorni di x_j per $j = 1, 2$.

1.23. Teorema (di Tychonoff). *Il prodotto topologico di una famiglia non vuota di spazi topologici compatti è uno spazio topologico compatto.* □

Richiamiamo ancora qualche proprietà degli spazi metrici.

1.24. Definizione. *Sia* (S, d) *uno spazio metrico. Una successione* $\{x_n\}$ *di elementi di* S *è detta di Cauchy quando per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un indice* m *tali che per ogni* $n, k \geq m$ *risulti* $d(x_n, x_k) \leq \varepsilon$. *Lo spazio metrico è completo quando ogni sua successione di Cauchy converge.* □

1.25. Teorema. *Siano (S,d) uno spazio metrico e S_0 un suo sottoinsieme. Se S_0 è completo rispetto alla metrica indotta allora esso è un sottoinsieme chiuso. Se (S,d) è completo e S_0 è chiuso, allora S_0 è completo rispetto alla metrica indotta.* □

1.26. Definizione. *Siano (S,d) e (S',d') due spazi metrici e A un sottoinsieme di S. Una funzione $f: A \to S'$ è uniformemente continua quando per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in A$ valga l'implicazione: da $d(x,y) \le \delta$ segue $d'(f(x), f(y)) \le \varepsilon$.* □

1.27. Proposizione. *Siano (S,d) e (S',d') due spazi metrici, $A \subseteq S$ e $f: A \to S'$. Se f è uniformemente continua e (S',d') è completo, allora esiste una e una sola $F: \overline{A} \to S'$ continua che prolunga f, ove $\overline{A}$ è la chiusura di A, cioè il minimo chiuso che include A.* □

1.28. Definizione. *Siano (S,d) uno spazo metrico e $f: S \to S$. Si dice che f è una contrazione (stretta) quando esiste $\alpha < 1$ tale che $d(f(x), f(y)) \le \alpha\, d(x,y)$ per ogni $x, y \in S$ e si dice che un punto $x \in S$ è un punto fisso di f quando $f(x) = x$.* □

1.29. Teorema (delle contrazioni, di Banach). *Siano (S,d) uno spazo metrico completo e $f: S \to S$ una contrazione. Allora f ha uno e un solo punto fisso.* □

1.30. Osservazione. Si arriva alla stessa conclusione se si suppone che, anziché f, sia una contrazione almeno una delle iterate di f, ove per iterata di f si intende un elemento della successione $\{f^n\}$ definita per induzione dalle condizioni $f^1 = f$ e $f^{n+1} = f^n \circ f$ per ogni $n \ge 1$.

2. Misure e integrali

In questo paragrafo riassumiamo le definizioni e i risultati principali della teoria astratta della misura e dell'integrazione. Citiamo inoltre alcuni risultati complementari cui facciamo riferimento nei capitoli precedenti.

2.1. Definizione. *Sia Ω un insieme non vuoto. Una σ-algebra di sottoinsiemi di Ω è una famiglia $\mathcal{M} \subseteq 2^\Omega$ verificante le proprietà seguenti: $i)$ $\emptyset \in \mathcal{M}$; $ii)$ da $A \in \mathcal{M}$ segue $\Omega \setminus A \in \mathcal{M}$; $iii)$ se $\{A_n\}$ è una successione di elementi di $\mathcal{M}$, allora $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}$.* □

2.2. Definizione. *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di un insieme non vuoto Ω. La minima σ-algebra $\sigma(\mathcal{F})$ di sottoinsiemi di Ω che include $\mathcal{F}$ è detta σ-algebra generata da $\mathcal{F}$.* □

Naturalmente la condizione di minimalità della definizione precedente è intesa rispetto alla relazione di inclusione fra sottoinsiemi di 2^Ω. Si dimostra che la σ-algebra generata da $\mathcal{F}$ effettivamente esiste ed è unica. Nel caso in cui Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$, la σ-algebra generata dalla famiglia degli aperti si chiama *algebra di Borel di* Ω. Essa è comunemente denotata con $\mathcal{B}(\Omega)$ e i suoi elementi sono detti *insiemi di Borel*. Si dimostra che $\mathcal{B}(\Omega)$ è generata anche: $i)$ dalla famiglia dei compatti $K \subseteq \Omega$; $ii)$ dalla famiglia dei chiusi $C \subseteq \Omega$; $iii)$ dalla famiglia dei rettangoli $R \subseteq \Omega$; $iv)$ dalla famiglia dei rettangoli aperti $R \subseteq \Omega$; $v)$ dalla famiglia dei rettangoli compatti $R \subseteq \Omega$. Potremmo inoltre proseguire. Naturalmente per rettangolo di $\mathbb{R}^d$ si intende il prodotto cartesiano di d intervalli limitati, eventualmente degeneri.

2.3. Definizione. *Sia Ω un insieme non vuoto. Un semianello di sottoinsiemi di Ω è una famiglia $\mathcal{S} \subseteq 2^\Omega$ verificante le condizioni seguenti: $i)$ $\emptyset \in \mathcal{S}$; $ii)$ da $A, B \in \mathcal{S}$ segue $A \cap B \in \mathcal{S}$; $iii)$ da $A, B \in \mathcal{S}$ segue che esistono $S_1, \ldots, S_n$ elementi di $\mathcal{S}$ in numero finito e a due a due disgiunti tali che $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n S_k$.* □

2.4. Definizione. *Sia Ω un insieme non vuoto. Un'applicazione $\mu: \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ è detta misura in Ω quando: $i)$ $\mathcal{S}$ è un semianello di sottoinsiemi di Ω; $ii)$ μ è σ-additiva, cioè, per ogni $A \in \mathcal{S}$ e per ogni successione $\{A_n\}$ di elementi di $\mathcal{S}$ a due a due disgiunti tale che $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, risulta*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n). \; \square \tag{2.1}$$

2.5. Definizione. *Uno spazio di misura è una terna* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *ove: i)* Ω *è un insieme non vuoto; ii)* $\mathcal{M}$ *è una* σ*-algebra di sottoinsiemi di* Ω*; iii)* μ *è una misura in* Ω *avente* $\mathcal{M}$ *come dominio; iv) per ogni coppia di sottoinsiemi* $A, B \subseteq \Omega$ *vale l'implicazione: se* $A \subseteq B$ *,* $B \in \mathcal{M}$ *e* $\mu(B) = 0$ *allora* $A \in \mathcal{M}$ *. Gli elementi di* $\mathcal{M}$ *si chiamano sottoinsiemi misurabili di* Ω *.* □

2.6. Osservazione. Spesso già nella definizione di misura si richiede che il dominio di μ sia una σ-algebra. Noi abbiamo invece richiesto sono che esso sia un semianello. Inoltre, nella Definizione 2.5, abbiamo imposto la condizione *iv)* detta di *completezza della misura*. Talora questa non viene richiesta. Ma ciò fa poca differenza, grazie al risultato enunciato di seguito.

2.7. Teorema. *Siano* Ω *un insieme non vuoto e* μ_0 *una misura in* Ω *avente come dominio un semianello* $\mathcal{S} \subseteq 2^\Omega$ *. Allora esiste una e una sola misura* μ_σ *definita sulla* σ*-algebra* $\sigma(\mathcal{S})$ *che prolunga* μ_0 *. Sia inoltre* $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{M}_0 \cup \sigma(\mathcal{S}))$ *ove* $\mathcal{M}_0$ *è la famiglia costituita dai sottoinsiemi* $A \subseteq \Omega$ *aventi la proprietà seguente: esiste* $B \in \sigma(\mathcal{S})$ *tale che* $B \supseteq A$ *e* $\mu_\sigma(B) = 0$ *. Allora esiste una e una sola misura* $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ *che prolunga* μ_σ *e che rende* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura nel senso della Definizione 2.5.*

2.8. Osservazione. Dunque, a partire da un semianello $\mathcal{S}$ e da una misura definita solo in $\mathcal{S}$, è sempre possibile costruire uno spazio di misura nel senso della Definizione 2.5. Aggiungiamo che gli insiemi misurabili dello spazio $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ fornito dal teorema sono caratterizzati dalla proprietà seguente: un sottosinsieme $A \subseteq \Omega$ appartiene a $\mathcal{M}$ se e solo se esistono $B \in \sigma(\mathcal{S})$ e $A_0 \in \mathcal{M}_0$ tali che $A = B \cup A_0$. Inoltre, in tali condizioni, si ha $\mu(A) = \mu_\sigma(B)$.

2.9. Osservazione. Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $\Omega' \in \mathcal{M}$. Allora resta definito in modo canonico lo spazio di misura $(\Omega', \mathcal{M}', \mu')$ come segue: $\mathcal{M}'$ è costituito dagli elementi di $\mathcal{M}$ che sono inclusi in Ω' e μ' è la restrizione di μ a $\mathcal{M}'$. Effettivamente ciò che si ottiene è uno spazio di misura. Resta inteso che, quando si considera un sottoinsieme misurabile, si pensa di costruire su questo lo spazio di misura come detto sopra. Ciò, in particolare, consente di parlare di funzioni misurabili o integrabili (vedi i richiami tra breve) anche su sottoinsiemi misurabili.

2.10. Osservazione. Una possibile definizione della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^d$ si ottiene come segue: si applica il Teorema 2.7 a partire dal semianello $\mathcal{R}$ dei rettangoli di $\mathbb{R}^d$ e dalla misura $\mu_0 : \mathcal{R} \to [0, +\infty)$ definita per via elementare. Denotato con $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}^d)$ lo spazio di misura ottenuto, diciamo che un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^d$ è misurabile secondo Lebesgue quando $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. In tali condizioni $\mathcal{L}^d(A)$ è la sua misura di Lebesgue. Notiamo che $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ e che, per l'ultima parte dell'Osservazione 2.8, un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^d$ è misurabile secondo Lebesgue se e solo se esistono un insieme di Borel $B \subseteq A$ tale che $A \setminus B$ è incluso in un insieme di Borel di misura nulla. Se poi Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$ (o più in generale un sottoinsieme misurabile secondo Lebesgue), si costruisce lo spazio di misura su Ω come detto nell'Osservazione 2.9.

2.11. Proposizione. *Siano* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura e* $\{A_n\}$ *una successione di insiemi misurabili. Allora valgono le proprietà seguenti di monotonia di* μ

$$i)\ \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \textit{se } A_n \subseteq A_{n+1} \textit{ per ogni } n \quad \textit{e} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,;$$

$$ii)\ \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \textit{se } A_n \supseteq A_{n+1} \textit{ per ogni } n, \quad \mu(A_1) < +\infty \quad \textit{e} \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\,. \ \square$$

2.12. Definizione. *Si dice che lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *è finito quando la misura di* Ω *è finita e che esso è* σ*-finito quando esiste una successione* $\{\Omega_n\}$ *di insiemi misurabili di misura finita tale che* $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$ *.* □

2.13. Osservazione. Se Ω è un insieme con vuoto, possiamo considerare lo spazio di misura $(\Omega, 2^\Omega, \#)$ ove $\#(A)$ è il numero di elementi di A se A è finito e $\#(A) = +\infty$ se A è infinito. Effettivamente si ottiene uno spazio di misura e $\#$ è detta *misura che conta*. Lo spazio è σ-finito se e solo se Ω è al più numerabile.

2.14. Osservazione. Un'ipotesi che garantisce che lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ fornito dal Teorema 2.7 a partire da una misura definita solo su un semianello S sia σ-finito è la seguente:

$$\textit{esiste una successione } \{S_n\} \textit{ di elementi di } \mathcal{S} \textit{ di misura finita tale che } \Omega = \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\,. \tag{2.2}$$

Tale ipotesi è verificata, ad esempio, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$ con la misura usuale definita per via elementare sul semianello dei rettangoli compatti di $\mathbb{R}^d$ inclusi in Ω.

2.15. Osservazione. In riferimento allo spazio di misura fornito dal Teorema 2.7 a partire da una misura definita solo su un semianello S, per sottoinsiemi A inclusi in un elemento $S \in \mathcal{S}$ di misura finita vale la caratterizzazione seguente: A è misurabile se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono elementi $S^1, \dots, S^m \in \mathcal{S}$ in numero finito tali che, detta R la loro unione, valgano le due disuguaglianze $\mu(A \setminus R) \leq \varepsilon$ e $\mu(R \setminus A) \leq \varepsilon$. In particolare, se è soddisfatta la (2.2), tale caratterizzazione vale per i sottoinsiemi di ciascuno degli insiemi S_n. □

Per semplicità, d'ora in avanti supponiamo che *ogni spazio di misura considerato sia* σ*-finito*. Se poi lo spazio è ottenuto mediante il Teorema 2.7 a partire da una misura definita solo su un semianello $\mathcal{S}$, *resta inteso che vale la condizione* (2.2).

2.16. Definizione. *Sia* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura* σ*-finito. Una funzione* $f : \Omega \to \mathbb{K}$ *è misurabile quando* $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ *per ogni aperto* A *di* $\mathbb{K}$. □

Si possono dare definizioni alternative equivalenti, e una è la seguente: si richiede $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ per ogni A di una fissata famiglia $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{K}}$ tale che $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{K})$. Altre vengono date tra breve. Conviene introdurre i concetti di funzione semplice, che prendiamo sempre misurabile per comodità, e di funzione a scala rispetto a un semianello. Chiaramente una funzione a scala rispetto a un semianello $\mathcal{S}$ è semplice rispetto allo spazio di misura fornito dal Teorema 2.7. In generale, tuttavia, la nozione di funzione semplice è più generale di quella di funzione a scala. Ricordiamo che, se Ω è un insieme non vuoto e $A \subseteq \Omega$, la funzione caratteristica di A è la funzione $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$\chi_A(x) = 1 \quad \text{se } x \in A \quad \text{e} \quad \chi_A(x) = 0 \quad \text{se } x \notin A\,. \tag{2.3}$$

2.17. Definizione. *Sia* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura* σ*-finito. Una funzione* $f : \Omega \to \mathbb{K}$ *è semplice quando è possibile presentare* f *come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita a due a due disgiunti. Se* μ *è una misura in* Ω *definita sul semianello* $\mathcal{S} \subseteq 2^{\Omega}$*, una funzione* $f : \Omega \to \mathbb{K}$ *è a scala rispetto ad* $\mathcal{S}$ *quando è possibile presentare* f *come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di elementi di* $\mathcal{S}$ *di misura finita a due a due disgiunti.* □

2.18. Osservazione. Nel caso di un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ con la misura di Lebesgue, le funzioni a scala per antonomasia sono quelle relative al semianello dei rettangoli compatti inclusi in Ω.

Riuniamo in un'unica definizione (anche se imperfetta dal punto di vista del rigore) vari concetti precisi, come quelli di uguaglianza q.o. e di convergenza q.o.

2.19. Definizione. *Sia* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura. Si dice che una proprietà* P *dipendente dal generico punto* $x \in \Omega$ *vale* μ*-quasi ovunque, e scriveremo* P *q.o. oppure* $P(x)$ *per q.o.* x*, quando l'insieme dei punti* $x \in \Omega$ *tali che* $P(x)$ *è falsa è misurabile e ha misura nulla.* □

In un contesto di Analisi funzionale è opportuno non distinguere due funzioni misurabili che assumono lo stesso valore in q.o. punto, cioè conviene considerare il quoziente rispetto alla relazione di equivalenza data dall'uguaglianza q.o.

2.20. Definizione. *Sia* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio. Se* $u, v : \Omega \to \mathbb{K}$ *sono due funzioni misurabili, diciamo che esse sono equivalenti quando* $u(x) = v(x)$ *per q.o.* $x \in \Omega$*. Le classi di equivalenza si chiamano classi di funzioni misurabili.* □

2.21. Osservazione. Ma si parla anche, semplicemente, di nuovo di *funzioni misurabili* così che il termine "funzione misurabile" viene ad avere due significati: quello originario e quello nuovo, dato dalla classe di equivalenza. Ciò nonostante, di solito, non si originano fraintedimenti. Osserviamo inoltre che molte nozioni sono compatibili con la relazione di equivalenza considerata. Fra queste, ad esempio, quelle di somma e di integrale (richiamato tra breve): se u_1 è equivalente a v_1 e u_2 è equivalente a v_2, allora $u_1 + u_2$ è equivalente a $v_1 + v_2$ e, se u_1 è in aggiunta integrabile, anche v_1 lo è e gli integrali di u_1 e di v_1 coincidono. Possiamo allora trasferire al quoziente tali nozioni. In particolare l'insieme delle (classi di) funzioni misurabili diventa uno spazio vettoriale. Una nozione che invece è in generale incompatibile con la relazione di equivalenza è il valore in un punto x_0 fissato: se l'insieme $\{x_0\}$ ha misura nulla, e ciò avviene nei casi più comuni di spazi di misura, due funzioni misurabili equivalenti possono assumere in x_0 due valori diversi. Per la nuova nozione di funzione misurabile, dunque, *non ha senso* considerare il suo valore in un punto fissato, a meno che il punto in questione non costituisca un insieme di misura positiva, come, ad esempio, nel caso della misura che conta. Segnaliamo infine che, pur di parlare di "insiemi a meno di insiemi di misura nulla" (il che corrisponde a un quoziente nella famiglia dei sottoinsiemi), ha senso considerare, ad esempio, l'insieme di positività di una funzione reale misurabile, intesa come classe di equivalenza. Se infatti u è equivalente a v, allora gli insiemi $A = \{x \in \Omega : \ u(x) > 0\}$ e $B = \{x \in \Omega : \ v(x) > 0\}$ verificano $\mu((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = 0$. □

Ora richiamiamo una possibile definizione di integrale, definizione che, effettivamente, può essere data in svariati modi. Se $f : \Omega \to \mathbb{K}$ è una funzione semplice, poniamo

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) \tag{2.4}$$

se $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$ in accordo con la definizione. Si controlla che il numero reale o complesso dato dal secondo membro della (2.4) non dipende dalla decomposizione scelta. Le stesse osservazioni valgono per funzioni a scala rispetto a un semianello fissato.

2.22. Definizione. *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito. Diciamo che una funzione misurabile $f : \Omega \to [0, +\infty)$ è integrabile quando è finito l'estremo superiore*

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu = \sup\Bigl\{ \int_\Omega s(x)\,d\mu : \ \ s \text{ è reale semplice e } s(x) \le f(x) \text{ q.o.} \Bigr\}$$

che chiamiamo integrale di f. Se $f : \Omega \to \mathbb{K}$ è misurabile, diciamo che f è integrabile quando sono integrabili nel senso appena detto le quattro funzioni $(\operatorname{Re} f)^\pm$ e $(\operatorname{Im} f)^\pm$, ove i simboli $(\,\cdot\,)^\pm$ denotano le parti positive e negative. In tali condizioni poniamo

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu = \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^+(x)\,d\mu - \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^-(x)\,d\mu + i \int_\Omega (\operatorname{Im} f)^+(x)\,d\mu - i \int_\Omega (\operatorname{Im} f)^-(x)\,d\mu. \ \square$$

2.23. Osservazione. Questa è solo una delle possibili definizioni. Ne diamo altre equivalenti e riprendiamo anche il concetto di funzione misurabile. Stiamo parlando di funzioni $f : \Omega \to \mathbb{K}$ ove $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura σ-finito. In termini di funzioni semplici abbiamo: *i)* f è misurabile se e solo se esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni semplici convergente a f q.o; *ii)* f è integrabile se e solo se esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni semplici convergente a f q.o e verificante la condizione di Cauchy seguente:

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } n_0 \text{ tale che } \quad \int_\Omega |f_n(x) - f_m(x)|\,d\mu \le \varepsilon \quad \text{per ogni } m, n \ge n_0 . \tag{2.5}$$

Se poi lo spazio di misura è ottenuto a partire da una misura definita su di un semianello $\mathcal{S}$ verificante la (2.2), in termini di funzioni a scala abbiamo: *i)* f è misurabile se e solo se esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni a scala rispetto a $\mathcal{S}$ convergente a f q.o; *ii)* f è integrabile se e solo se esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni a scala rispetto a $\mathcal{S}$ convergente a f q.o e verificante la condizione di Cauchy (2.5). In queste impostazioni il valore dell'integrale di f è definito come il limite della successione degli integrali delle funzioni approssimanti (semplici o a scala), limite che effettivamente esiste e non dipende dalla successione considerata.

2.24. Osservazione. Nel caso reale può essere conveniente accettare anche il valore $+\infty$ fra quelli che f può assumere. Se $f : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ diciamo che essa è misurabile quando l'insieme $\Omega_\infty = \{x \in \Omega : f(x) = +\infty\}$ è misurabile e $f|_{\Omega \setminus \Omega_\infty}$ è misurabile in $\Omega \setminus \Omega_\infty$ nel senso già noto. Se f è misurabile e f^- è integrabile, definiamo l'integrale di f come segue: $i)$ esso ha il valore consueto se $\mu(\Omega_\infty) = 0$ e f^+ è integrabile nel senso precedente; $ii)$ l'integrale di f è $+\infty$ quando si verifica una delle due circostanze: $\mu(\Omega_\infty) > 0$ oppure $\mu(\Omega_\infty) = 0$ ma f^+ non è integrabile. Notiamo che, se f^- non è integrabile, rinunciamo, per semplicità, a definire l'integrale di f. Resta inteso che si tiene conto di tale estensione in alcuni dei risultati successivi, ad esempio nel Teorema di Beppo Levi, quando può non essere vero che le funzioni in questione assumono solo valori finiti. □

Ora, tralasciando la linearità dell'integrale e l'integrabilità sui sottoinsiemi, richiamiamo in modo molto succinto alcuni dei risultati più importanti della teoria.

2.25. Teorema. *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $f : \Omega \to \mathbb{K}$ una funzione misurabile. Allora sono equivalenti le condizioni: $i)$ f è integrabile; $ii)$ $|f|$ è integrabile; $iii)$ esiste $\varphi : \Omega \to [0, +\infty)$ integrabile tale che $|f| \le \varphi$ q.o.* □

2.26. Teorema. *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ misurabili. Se $\{f_n\}$ converge q.o. a una funzione f, allora anche f è misurabile.* □

2.27. Teorema (di Severini-Egorov). *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di musura finito e $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili convergente q.o. alla funzione f. Allora $\{f_n\}$ converge a f quasi uniformemente nel senso seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \le \varepsilon$ e $\{f_n\}$ converge a f uniformemente in Ω_ε.* □

2.28. Teorema (di Lebesgue, della convergenza dominata). *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ integrabili. Se $\{f_n\}$ converge q.o. a una funzione f e se esiste una funzione $\varphi : \Omega \to [0, +\infty)$ integrabile tale che $|f(x)| \le \varphi(x)$ q.o. per ogni n, allora*

$$f \text{ è integrabile,} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu = 0 \quad e \quad \int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu. \ \square \tag{2.6}$$

2.29. Teorema (di Beppo Levi, della convergenza monotona). *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabili tale che, per q.o. $x \in \Omega$, la successione $\{f_n(x)\}$ sia non decrescente. Definito $f(x) \in (f_1(x), +\infty]$ per q.o. $x \in \Omega$ mediante la formula $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, si ha*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu. \tag{2.7}$$

In particolare f è integrabile se e solo se è limitata la successione degli integrali delle f_n. □

2.30. Teorema (Lemma di Fatou). *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : \Omega \to [0, +\infty)$ integrabili. Si ponga $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ per $x \in \Omega$. Allora f è misurabile e risulta*

$$\int_\Omega f \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu. \tag{2.8}$$

In particolare f è integrabile non appena sia limitata la successione degli integrali delle f_n. □

2.31. Teorema. *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito, $f : \Omega \to \mathbb{K}$ una funzione integrabile. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: $i)$ $f(x) = 0$ q.o.; $ii)$ $\int_\Omega |f| \, d\mu = 0$. Se poi lo spazio è quello dato dal Teorema 2.7 a partire da una misura definita sul semianello $\mathcal{S}$, è equivalente alle precedenti anche la condizione: $iii)$ $\int_S f \, d\mu = 0$ per ogni $S \in \mathcal{S}$.* □

2.32. Corollario. *Siano Ω è un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $f : \Omega \to \mathbb{K}$ una funzione misurabile in Ω integrabile in ogni compatto $K \subset \Omega$. Se $\int_R f\,dx = 0$ per ogni rettangolo compatto $R \subset \Omega$, allora $f(x) = 0$ q.o.* □

2.33. Teorema. *Siano $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $f : \Omega \to [0, +\infty)$ una funzione integrabile. Per $A \in \mathcal{M}$ si ponga $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$. Allora $(\Omega, \mathcal{M}, \nu)$ è uno spazio di misura. Inoltre la misura ν è assolutamente continua rispetto a μ, cioè vale la condizione seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\nu(A) \le \varepsilon$ per ogni $A \in \mathcal{M}$ verificante $\mu(A) \le \delta$.* □

2.34. Osservazione. In particolare ν verifica la condizione di σ-additività e le due condizioni di continuità della Proposizione 2.11. Notiamo inoltre che tali condizioni si ottengono anche senza supporre f reale non negativa. Infatti, se $f : \Omega \to \mathbb{K}$ è integrabile, allora sono nelle condizioni del teorema le quattro funzioni $(\operatorname{Re} f)^{\pm}$ e $(\operatorname{Im} f)^{\pm}$. Semplicemente, con tale maggior generalità, non possiamo dire che ν è una misura perché non è reale non negativa.

2.35. Definizione. *Siano $(\Omega', \mathcal{M}', \mu')$, $(\Omega'', \mathcal{M}'', \mu'')$ e $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ tre spazi di misura. Diciamo che il terzo è il prodotto dei primi due quando esso si ottiene dal Teorema 2.7 a partire dalla terna $(\Omega, \mathcal{S}, \mu_0)$ ove $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, $\mathcal{S} = \{A' \times A'' : A' \in \mathcal{M}',\ A'' \in \mathcal{M}''\}$ e $\mu_0 : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ è definita da $\mu_0(A' \times A'') = \mu'(A')\,\mu''(A'')$ per $A' \in \mathcal{M}'$ e $A'' \in \mathcal{M}''$.* □

Si dimostra che, a partire da spazi σ-finiti, si ottiene uno spazio σ-finito. Il risultato successivo concentra in sé due teoremi, uno di Fubini, l'altro di Tonelli.

2.36. Teorema (di Fubini-Tonelli). *Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ il prodotto dei due spazi di misura σ-finiti $(\Omega', \mathcal{M}', \mu')$ e $(\Omega'', \mathcal{M}'', \mu'')$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{K}$ una funzione misurabile. Allora sono equivalenti le due condizioni seguenti: i) f integrabile in Ω rispetto alla misura μ; ii) per μ'-q.o. $x' \in \Omega'$, la funzione $x'' \mapsto f(x', x'')$, $x'' \in \Omega''$, è integrabile in Ω'' rispetto alla misura μ'' e la funzione G definita μ'-q.o. in Ω' dalla formula $G(x') = \int_{\Omega''} |f(x', x'')|\,d\mu''$ è integrabile in Ω' rispetto alla misura μ'. Se tali condizioni sono soddisfatte, è integrabile in Ω' rispetto alla misura μ' anche la funzione $F : \Omega' \to \mathbb{R}$ definita μ'-q.o. in Ω' dalla formula $F(x') = \int_{\Omega''} f(x', x'')\,d\mu''$ e risulta*

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu = \int_{\Omega'} F(x')\,d\mu'. \;\square \tag{2.9}$$

2.37. Teorema (di derivazione sotto l'integrale). *Siano $\mathcal{O}$ un aperto di $\mathbb{R}^n$, $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura σ-finito e $f : \mathcal{O} \times \Omega \to \mathbb{K}$ una funzione verificante le condizioni seguenti: i) per ogni $x \in \mathcal{O}$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è integrabile in Ω; ii) per μ-q.o. $y \in \Omega$ la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è di classe C^1 in $\mathcal{O}$; iii) esiste una funzione $\varphi : \Omega \to [0, +\infty)$ integrabile tale che $|D_i f(x, y)| \le g(y)$ per ogni $x \in \mathcal{O}$, μ-q.o. $y \in \Omega$ e $i = 1, \ldots, n$, ove D_i denota la derivazione rispetto a x_i. Allora la funzione $x \mapsto \int_\Omega f(x, y)\,d\mu(y)$ è di classe C^1 in $\mathcal{O}$ e si ha*

$$D_i \int_\Omega f(x, y)\,d\mu(y) = \int_\Omega D_i f(x, y)\,d\mu(y) \tag{2.10}$$

per ogni $x \in \mathcal{O}$ e $i = 1, \ldots, n$. □

3. Il Lemma di Zorn

Richiamiamo alcune definizioni preliminari.

3.1. Definizione. *Un insieme (parzialmente) ordinato è una coppia $(X, \preceq)$ ove X è un insieme non vuoto e $\preceq$ è una relazione d'ordine in X, cioè una relazione in X riflessiva, antisimmetrica e transitiva, vale a dire verificante per ogni $x, y, z \in X$ le condizioni: i) $x \preceq x$; ii) da $x \preceq y$ e $y \preceq x$ segue $x = y$; iii) da $x \preceq y$ e $y \preceq z$ segue $x \preceq z$.* □

Nel caso generale, dati due elementi $x, y \in X$, le affermazioni $x \preceq y$ e $y \preceq x$ possono essere entrambe false (cioè, come si usa dire, x e y possono non essere confrontabili) e un caso tipico è quello in cui $X = 2^Y$, ove Y ha almeno due elementi, e $\preceq$ significa $\subseteq$.

3.2. Definizione. *Sia $(X, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato. Un sottoinsieme non vuoto C di X è detto catena quando per ogni $x, y \in C$ risulta $x \preceq y$ o $y \preceq x$. L'insieme parzialmente ordinato $(X, \preceq)$ è detto induttivo quando, per ogni catena C di X, esiste $m \in X$ tale che $x \preceq m$ per ogni $x \in C$. Un elemento $m \in X$ è detto massimale quando, per ogni $x \in X$, da $m \preceq x$ segue $m = x$.* □

Se $S \subseteq X$ e l'elemento $m \in X$ verifica $x \preceq m$ per ogni $x \in S$, si dice che m è un *maggiorante* del sottoinsieme S. Un elemento massimale m di X non è necessariamente un maggiorante di X: esso verifica $x \preceq m$ solo per gli $x \in X$ con i quali esso è confrontabile.

3.3. Teorema (Lemma di Zorn). *Ogni insieme parzialmente ordinato induttivo ha almeno un elemento massimale.* □

3.4. Osservazione. Il Lemma di Zorn è controverso, in quanto esso è equivalente al cosiddetto *Assioma della scelta*. Diamo qui due possibili versioni di tale assioma. Una è la seguente:

> *Se X è un insieme non vuoto, esiste $f : 2^X \setminus \{\emptyset\} \to X$ tale che $f(S) \in S$ per ogni $S \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$.*

La funzione f, dunque, seleziona in ogni $S \subseteq X$ non vuoto un elemento. L'altra versione riguarda una famiglia di insiemi che può non esaurire la famiglia dei sottoinsiemi non vuoti di un insieme assegnato e suona come segue:

> *Sia $\{A_i :\ i \in \mathcal{I}\}$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti e sia $A = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ l'unione degli insiemi della famiglia. Allora esiste $f : \mathcal{I} \to A$ tale che $f(i) \in A_i$ per ogni $i \in \mathcal{I}$.*

Anche in questo caso, la funzione f seleziona un punto in ciascuno degli A_i. Una tale funzione è detta *funzione di scelta* relativa alla famiglia data. Ricordato che, secondo una possibile definizione, il prodotto cartesiano degli insiemi della famiglia data è esattamente l'insieme delle funzioni di scelta, la seconda versione dell'Assioma della scelta si può rienunciare come segue: *il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti non è vuoto*.

Il fatto che l'Assioma della scelta non sia accettato con leggerezza deriva dal fatto che esso implica enunciati che possono lasciare sconcertati, e il più famoso è il *Paradosso di Banach-Tarski*, che può essere espresso così:

> *è possibile decomporre una palla di $\mathbb{R}^3$ in un numero finito di parti e poi ricomporre le parti in modo da formare due palle identiche alla prima.*

In termini precisi, esistono una partizione $\{S_1, \ldots, S_n\}$ della palla $B_1(0)$ di $\mathbb{R}^3$ in un numero finito n di sottoinsiemi e altrettante isometrie dirette $f_1, \ldots, f_n$ tali che la famiglia $\{f_1(S_1), \ldots, f_n(S_n)\}$ costituisca una partizione dell'unione di due palle ancora di raggio 1 e fra loro disgiunte.

L'aspetto paradossale di questa affermazione poggia in realtà su di un pregiudizio. Siamo inclini a pensare, infatti, che esista una misura additiva, invariante per isometrie, definita su tutta la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$. Ora il paradosso assicura che questa misura non esiste, e la validità di questa affermazione dipende dal fatto che si accetti l'Assioma della scelta.

4. Soluzioni di alcuni esercizi

In questo paragrafo diamo una possibile traccia delle soluzioni di numerosi degli esercizi proposti nei vari capitoli, ma non di tutti. Infatti alcuni di essi, particolarmente semplici o simili ad altri già risolti, non sono presi in considerazione. Nei casi effettivamente trattati diamo più spesso soluzioni dettagliate. Talora, invece, ci limitiamo a un'indicazione.

Le soluzioni sono raggruppate in capitoli e ciascuna di esse inizia semplicemente con il numero dell'esercizio al quale essa si riferisce. La notazione usata per le citazioni è coerente con quella precedente: se essa inizia con un numero romano, questo indica il capitolo e le citazioni senza numeri romani si riferiscono al capitolo in corso.

Capitolo I

3.5. Da $|\|x\|-\|y\||\le\|x-y\|$ segue che la norma è lipschitziana.

3.6. Si ha

$$|(x_n,y_n)-(x,y)|\le|(x_n-x,y_n)|+|(x,y_n-y)|\le\|x_n-x\|\|y_n\|+\|x\|\|y_n-y\|$$

e la tesi segue dato che $\|y_n\|$ tende a $\|y\|$ per l'Esercizio 3.5.

3.15. Si ha $\|x\|=\|x\cdot 1\|=|x|\|1\|$, cioè $\|x\|=c|x|$ con $c=\|1\|>0$. Viceversa, è ovvio che una formula di quel tipo definisce una norma.

4.6. Sia A l'interno di C e siano $x,y\in A$ e $\vartheta\in(0,1)$: dobbiamo dimostrare che il punto $z=\vartheta x+(1-\vartheta)y$ appartiene ad A. Siano I' e I'' intorni di 0 tali che $x+I'\subseteq C$ e $y+I''\subseteq C$ e sia $I=I'\cap I''$. Allora $x+I\subseteq C$ e $y+I\subseteq C$ e ora verifichiamo che $z+I\subseteq C$. Se $v\in I$ si ha infatti $z+v=\vartheta(x+v)+(1-\vartheta)(y+v)\in C$.

Per la seconda parte dell'esercizio conviene osservare che, in generale, grazie alle proprietà di spazio vettoriale topologico, vale quanto segue: *i*) per ogni intero positivo n l'applicazione di $\mathbb{K}^n\times V^n$ in V che a $(c_1,\dots,c_n,v_1,\dots,v_n)$ associa $\sum_{i=1}^n c_iv_i$ è continua; *ii*) in particolare, per ogni $(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{K}^n$ fissato, l'applicazione di V^n in V che a $(v_1,\dots,v_n)$ associa $\sum_{i=1}^n c_iv_i$ è continua.

Detto ciò, torniamo all'esercizio. Sia B la chiusura di C e siano $x,y\in A$ e $\vartheta\in(0,1)$: dobbiamo dimostrare che il punto $z=\vartheta x+(1-\vartheta)y$ appartiene a B. Sia I un intorno di 0: dimostriamo che $z+I$ interseca C applicando la proprietà generale di continuità appena vista considerando il punto $(0,0)\in V^2$ e i due valori $c_1=\vartheta$ e $c_2=1-\vartheta$. Siano dunque J_1 e J_2 due intorni di 0 tali che $\vartheta u+(1-\vartheta)v\in I$ per ogni $u\in J_1$ e $v\in J_2$. Siccome $x,y\in B$, troviamo due punti $x',y'\in C$ verificanti $x'\in x+J_1$ e $y'\in y+J_2$. Sia $z'=\vartheta x'+(1-\vartheta)y'$ e dimostriamo che $z'\in C\cap(z+I)$. Si ha $z'\in C$ dato che C è convesso. D'altra parte $z'-z=\vartheta(x'-x)+(1-\vartheta)(y'-y)$. Dunque $z'-z\in I$ dato che $x'-x\in J_1$ e $y'-y\in J_2$.

4.7. Sia $x\in\operatorname{co}A$: dobbiamo trovare un intorno I di 0 tale che $x+I\subseteq\operatorname{co}A$. Siano $\vartheta_i\ge 0$ e $x_i\in A$, $i=1,\dots,n$, tali che $\sum_{i=1}^n\vartheta_i=1$ e $\sum_{i=1}^n\vartheta_ix_i=x$. Siccome A è aperto, per $i=1,\dots,n$ esistono intorni I_i di 0 tali che $x_i+I_i\subseteq A$. Sia I la loro intersezione e controlliamo che $x+I\subseteq\operatorname{co}A$. Se $v\in I$ si ha infatti $x+v=\sum_{i=1}^n\vartheta_i(x_i+v)\in\operatorname{co}A$.

5.9. Verifichiamo solo che è un minimo il secondo membro della (5.5). Per definizione di estremo inferiore esiste una successione reale $\{M_n\}$ convergente a $\|v\|_\infty$ e tale che, per ogni n, risulti $|v(x)|\le M_n$ q.o. Siano quindi A_n insiemi di misura nulla tali che $|v(x)|\le M_n$ per ogni $x\notin A_n$ e sia A la loro unione. Allora, per ogni $x\notin A$, si ha $|v(x)|\le M_n$ per ogni n da cui anche $|v(x)|\le\|v\|_\infty$. Ma anche A ha misura nulla, per cui $|v(x)|\le\|v\|_\infty$ q.o.

5.20. Ragioniamo per induzione su n: dobbiamo dimostrare che, per ogni $n\ge 2$, vale quanto espresso nell'enunciato qualunque siano gli esponenti e le funzioni in gioco. Iniziamo da $n=2$. Se uno degli esponenti è infinito la tesi è ovvia. Consideriamo il caso opposto e osserviamo che, posto $q_i=p_i/q$ per $i=1,2$, risulta $q_i\in[1,+\infty)$ e $(1/q_1)+(1/q_2)=1$. Siano ora $v_i\in L^{p_i}(\Omega)$ e poniamo $w_i=|v_i|^q$. Allora $w_i\in L^{q_i}(\Omega)$ e possiamo applicare la disuguaglianza di Hölder. Deduciamo che $w_1w_2\in L^1(\Omega)$ e che $\|w_1w_2\|_1\le\|w_1\|_{q_1}\|w_2\|_{q_2}$. Ma ciò coincide con la tesi.

Supponiamo ora $n\ge 2$ e che l'enunciato sia vero: fissati ad arbitrio $p_1,\dots,p_{n+1},q\in[1,+\infty]$ tali che $\sum_{i=1}^{n+1}(1/p_i)=1/q$ e $v_i\in L^{p_i}(\Omega)$, dobbiamo dimostrare che il prodotto $v=v_1\cdot\ldots\cdot v_{n+1}$ appartiene a $L^q(\Omega)$ e che la sua norma è stimata come deve essere. Osserviamo che la formula $1/r=\sum_{i=1}^r(1/p_i)$ definisce $r\in[1,+\infty]$ e che risulta $(1/r)+(1/p_{n+1})=1/q$. Allora, per l'ipotesi di induzione, la funzione $w=v_1\cdot\ldots\cdot v_n$ appartiene a $L^r(\Omega)$ e si ha $\|w\|_r\le\prod_{i=1}^n\|v_i\|_{p_i}$. Per concludere basta allora applicare la parte già dimostrata relativa al caso di due fattori alle due funzioni w e v_{n+1} e ai tre esponenti r, p_{n+1} e q.

5.21. Posto $p_*=p/\vartheta$, $r_*=r/(1-\vartheta)$, $v_1=|v|^\vartheta$ e $v_2=|v|^{1-\vartheta}$, basta osservare che $|v|=v_1v_2$ e applicare l'Esercizio 5.20 a v_1 e v_2 e agli esponenti p_*, r_* e q.

5.22. Basta osservare che la formula $1/r = (1/p) - (1/q)$ definisce $r \in [1, +\infty]$ e applicare l'Esercizio 5.20 alle funzioni $v \in L^q(\Omega)$ e $1 \in L^r(\Omega)$.

5.26. Usare la (5.14).

5.31. Consideriamo dapprima il caso $p = 1$. Data $x = \{x_n\} \in \ell^q$, supponiamo senz'altro $x \neq 0$ e poniamo $M = \|x\|_q$ e $y_n = x_n/M$ per $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione $y = \{y_n\}$ verifica $y \in \ell^q$ e $|y_n| \leq 1$ per ogni n. Segue che $|y_n| \leq |y_n|^q$ da cui $\|y\|_1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^q = 1$. Ciò significa $x \in \ell^1$ e $\|x\|_1 \leq \|x\|_q$. Questa disuguaglianza è poi banale se $x = 0$. Nel caso generale, grazie a quanto appena visto e alla disuguaglianza di interpolazione, se $x \in \ell^q$ si ha $x \in \ell^p$ e $\|x\|_p \leq \|x\|_1^{\vartheta} \|x\|_q^{1-\vartheta} \leq \|x\|_q^{\vartheta} \|x\|_q^{1-\vartheta} = \|x\|_q$ ove $\vartheta \in (0,1)$ è il valore corretto. Ciò implica la continuità nell'origine dell'immersione, che è lineare, dunque la sua continuità.

5.34. Sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di (c) convergente a y in ℓ^∞. Denotiamo con x_{nk} e con y_k i k-esimi elementi di x_n e di y e poniamo $\lambda_n = \lim_{k\to\infty} x_{nk}$. Dimostriamo che $\{\lambda_n\}$ è una successione di Cauchy. Sia $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Sia in corrispondenza n^* tale che $\|x_n - x_m\|_\infty \leq \varepsilon$ per ogni $m, n \geq n^*$. Dico che $|\lambda_n - \lambda_m| \leq 3\varepsilon$ per tali m e n. Fissiamo infatti $m, n \geq n^*$. Scelto k tale che $|\lambda_i - x_{ik}| \leq \varepsilon$ per $i = m$ e $i = n$, abbiamo

$$|\lambda_n - \lambda_m| \leq |\lambda_n - x_{nk}| + |x_{nk} - x_{mk}| + |x_{mk} - \lambda_m| \leq |\lambda_n - x_{nk}| + \|x_n - x_m\|_\infty + |x_{mk} - \lambda_m| \leq 3\varepsilon.$$

Dunque $\{\lambda_n\}$ è una successione convergente. Detto λ il suo limite dimostriamo che $\{y_k\}$ converge a λ. Osserviamo che, per ogni n e k, si ha

$$|y_k - \lambda| \leq |y_k - x_{nk}| + |x_{nk} - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda| \leq \|y - x_n\|_\infty + |x_{nk} - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda|.$$

Dato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, fissiamo n tale che $\|y - x_n\|_\infty \leq \varepsilon$ e $|\lambda_n - \lambda| \leq \varepsilon$ e scegliamo k^* tale che $|x_{nk} - x_n| \leq \varepsilon$ per ogni $k \geq k^*$. Abbiamo allora $|y_k - \lambda| \leq 3\varepsilon$ per ogni $k \geq k^*$. Ciò dimostra che $y \in (c)$. Dunque (c) è chiuso. La verifica che anche (c_0) è chiuso è dello stesso tipo e più semplice.

5.61. Verifichiamo che la funzione data appartiene a $W^p_{\mathrm{div}}(\Omega)$. Se $v \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla v \, dx\, dy = \int_\Omega \partial_x(\varphi(y) v(x,y))\, dx\, dy + \int_\Omega \partial_y(\psi(x) v(x,y))\, dx\, dy$$

e ciascuno dei due integrali è nullo. Vediamo il primo:

$$\int_\Omega \partial_x(\varphi(y) v(x,y))\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_0^1 \partial_x(\varphi(y) v(x,y))\, dx = \int_0^1 [\varphi(y) v(x,y)]_{x=0}^{x=1} dy = 0$$

in quanto $v(0,y) = v(1,y) = 0$ per ogni $y \in [0,1]$.

5.63. Verifichiamo che w ha u' come derivata debole. Per ogni $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ si ha infatti

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} w v' \, dx &= -\int_{-\infty}^0 v'(x) \int_x^0 u'(t)\, dt\, dx + \int_0^{+\infty} v'(x) \int_0^x u'(t)\, dt\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^0 u'(t) \int_{-\infty}^t v'(x)\, dx\, dt + \int_0^{+\infty} u'(t) \int_t^{+\infty} v'(x)\, dx\, dt \\
&= -\int_{-\infty}^0 u'(t) v(t)\, dt - \int_0^{+\infty} u'(t) v(t)\, dt = -\int_{\mathbb{R}} u' v\, dt.
\end{aligned}$$

Deduciamo $(u - w)' = u' - v' = 0$ da cui $u - w$ costante per la (5.52).

Capitolo II

1.7. Sia $v \in V$: dimostriamo che $v \in W$. Sia $\{v_n\}$ una successione di elementi di V_0 convergente a v in V. In particolare $\{v_n\}$ è una successione di Cauchy in V_0. Siccome l'immersione di V_0 in W è continua, esiste M tale che $\|z\|_W \le M\|z\|_V$ per ogni $z \in V_0$. Segue che $\{v_n\}$ è di Cauchy anche in W. Siccome W è completo, $\{v_n\}$ converge in W a un certo elemento $w \in W$. Siccome le immersioni di V e di W in $\mathcal{Z}$ sono continue, le successione $\{v_n\}$ converge in $\mathcal{Z}$ sia a v sia a w. Per l'unicità del limite in $\mathcal{Z}$ concludiamo che $v = w \in W$. Siccome $\|v_n\|_W \le M\|v_n\|_V$ per ogni n, deduciamo inoltre che $\|v\|_W \le M\|v\|_V$. Per l'arbitrarietà di $v \in V$, tutto ciò assicura sia che $V \subseteq W$ sia la continuità dell'immersione di V in W.

2.3. Lo spazio già noto è $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e l'isomorfismo è dato da $v \mapsto \varphi v$.

2.12. Usiamo le notazioni dell'esempio citato. Se $p = 2$ la formula

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u \, \overline{D^\alpha v} \, dx + \sum_{|\alpha| = k} \int_{\Omega \times \Omega} (r_\sigma D^\alpha u)(x, y) \, \overline{(r_\sigma D^\alpha v)(x, y)} \, \frac{dx\, dy}{|x - y|^d}$$

definisce un prodotto scalare che induce la norma voluta, per cui $W^{s,2}(\Omega)$ è prehilbertiano. Per quanto riguarda la completezza per ogni p, ordiniamo in qualche modo i multi-indici di ordine $\le k$, e sia N il loro numero, e quelli di ordine k, e sia N_0 il loro numero. A ogni $v \in W^{s,p}(\Omega)$ associamo la coppia $(\{D^\alpha v\}_{|\alpha| \le k}, \{r_\sigma D^\alpha v\}_{|\alpha| = k})$, che appartiene a $W = L^p(\Omega)^N \times L^p(\Omega \times \Omega, \mu)^{N_0}$, ove l'ultimo simbolo denota lo spazio costruito nell'esempio citato: otteniamo un isomorfismo (isometrico se W è munito della norma ad hoc) di $W^{s,p}(\Omega)$ su un sottospazio W_0 dello spazio completo W. La completezza voluta segue allora se dimostriamo che W_0 è chiuso. Si ha precisamente

$$W_0 = \{(\{v_\alpha\}_{|\alpha| \le k}, \{\rho_\alpha\}_{|\alpha| = k}) \in W : \ v_\alpha = D^\alpha v_0 \text{ per } |\alpha| \le k \,, \ \rho_\alpha = r_\sigma D^\alpha v \text{ per } |\alpha| = k \}.$$

Se ora $w_n = (\{v_{\alpha,n}\}_{|\alpha| \le k}, \{\rho_{\alpha,n}\}_{|\alpha| = k}) \in W_0$ per ogni n e $w_n \to w = (\{v_\alpha\}_{|\alpha| \le k}, \{\rho_\alpha\}_{|\alpha| = k})$ in W, allora $v_{\alpha,n} \to v_\alpha$ in $L^p(\Omega)$ per $|\alpha| \le k$ e $\rho_{\alpha,n} \to \rho_\alpha$ in $L^p(\Omega \times \Omega, \mu)$ per $|\alpha| = k$. Per la completezza di $W^{k,p}(\Omega)$ abbiamo $v_0 \in W^{k,p}(\Omega)$ e $v_\alpha = D^\alpha v_0$ per $|\alpha| \le k$. Sia ora α tale che $|\alpha| = k$: per concludere basterà dimostrare che $\rho_\alpha = r_\sigma D^\alpha v_0$. Ma tutto si riduce a controllare il fatto seguente: se $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $r_\sigma u_n \to \rho$ in $L^p(\Omega \times \Omega, \mu)$, allora $\rho = r_\sigma u$ q.o. in $\Omega \times \Omega$, ove "q.o." è inteso indifferentemente rispetto alla misura μ o a quella di Lebesgue. Per verificare ciò estraiamo, con due estrazioni successive, una sottosuccessione verificante $u_{n_k} \to u$ q.o. in Ω e $r_\sigma u_{n_k} \to \rho$ q.o. in $\Omega \times \Omega$. Ma la prima delle due convergenze implica $r_\sigma u_{n_k} \to r_\sigma u$ q.o. in $\Omega \times \Omega$ per cui concludiamo che $\rho = r_\sigma u$ q.o. in $\Omega \times \Omega$.

2.13. Ci limitiamo alla completezza del primo spazio. L'applicazione di $W^p_{\mathrm{div}}(\Omega)$ nello spazio $W = L^p(\Omega)^d \times L^p(\Omega)$ definita da $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{u})$, ove naturalmente $\operatorname{div} \mathbf{u}$ è la divergenza debole di $\mathbf{u}$, è un isomorfismo isometrico di $W^p_{\mathrm{div}}(\Omega)$ sul sottospazio W_0 di W costituito dalle coppie $(\mathbf{u}, w) \in W$ verificanti la I.(5.50). Ma la dimostrazione del fatto che W_0 è chiuso in W è immediata: nella I.(5.50), infatti, si passa al limite senza problemi con convergenze di tipo L^p.

3.17. Dimostriamo la continuità dell'inclusione di V_0 in W. Se $p = 1$ basta usare la formula fondamentale del calcolo

$$v(x) = v(y) + \int_y^x v'(t) \, dt \quad \text{da cui} \quad |v(x)| \le |v(y)| + \int_{\mathbb{R}} |v'(t)| \, dt$$

e integrando rispetto a y su un intervallo limitato, ad esempio su $(0,1)$, si deduce

$$|v(x)| \le \int_0^1 |v(y)| \, dy + \int_{\mathbb{R}} |v'(t)| \, dt \quad \text{da cui} \quad \|v\|_\infty \le \|v\|_1 + \|v'\|_1 \,.$$

Se $p \in (1, +\infty)$ usiamo la stessa procedura ma con $|v|^p$ anziché con v. In ambito reale abbiamo

$$|v(x)|^p = |v(y)|^p + p \int_y^x |v(t)|^{p-1} (\operatorname{sign} v(t)) \, v'(t) \, dt \le |v(y)|^p + p \int_{\mathbb{R}} |v(t)|^{p-1} \, |v'(t)| \, dt$$

con la convenzione $0^{p-1}\operatorname{sign} 0 = 0$. Per funzioni complesse si arriva alla stessa disuguaglianza finale, ma con una diversa formula per la derivata di $|v|^p$, derivata il cui modulo è comunque maggiorato da $p\,|v|^{p-1}|v'|$: infatti occorre sostituire $p\,|v|^{p-1}(\operatorname{sign} v)v'$ con $p\,|v|^{p-2}\operatorname{Re}(\overline{v}v')$. Osservato che $|v|^{p-1} \in L^{p'}(\mathbb{R})$, usiamo le disuguaglianze di Hölder e di Young. Otteniamo

$$|v(x)|^p \le |v(y)|^p + p\,\||v|^{p-1}\|_{p'}\|v'\|_p = |v(y)|^p + p\,\|v\|_p^{p/p'}\|v'\|_p \le |v(y)|^p + \frac{p}{p'}\,\|v\|_p^p + \|v'\|_p^p .$$

Integrando rispetto a y su un intervallo limitato ancora si ottiene la disuguaglianza voluta. Per quanto riguarda la formula fondamentale del calcolo, basta scriverla con approssimanti regolari e poi passare al limite.

3.18. Usando anche la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$|v(y) - v(x)| = \left| \int_y^x v'(t)\,dt \right| \le |y-x|^{1/p'}\|v'\|_p .$$

Dunque v è hölderiana di esponente $\alpha = 1/p'$ e la sua costante di Hölder risulta $\le \|v'\|_p$.

3.20. Osserviamo che $|G(r)| \le |G(0)| + L|r|$ e $|G'(r)| \le L$ per ogni $r \in \mathbb{R}$, ove L è la costante di Lipschitz di G. Segue che $G(u) \in L^p(\Omega)$ (si noti: anche nel caso in cui Ω non è limitato se $G(0) = 0$) e che $G'(u)D_iu \in L^p(\Omega)$. Siano ora $u_n \in C^{1,p}(\Omega)$ convergenti a u in $W^{1,p}(\Omega)$. Possiamo supporre $u_n \to u$ e $D_iu_n \to D_iu$ anche q.o. Sia $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora per ogni n risulta

$$\int_\Omega G'(u_n)\,D_iu_n\,v\,dx = \int_\Omega D_iG(u_n)\,v\,dx = -\int_\Omega G(u_n)\,D_iv\,dx$$

e deduciamo che

$$\int_\Omega G'(u)\,D_iu\,v\,dx = -\int_\Omega G(u)\,D_iv\,dx$$

calcolando i limiti del primo e dell'ultimo membro. Posto $q = p'$ per semplificare la notazione, per quanto riguarda il primo abbiamo

$$\int_\Omega |G'(u_n)\,D_iu_n\,v - G'(u)\,D_iu\,v|\,dx \le L\int_\Omega |D_iu_n - D_iu|\,|v|\,dx + \int_\Omega |G'(u_n) - G'(u)|\,|D_iu\,v|\,dx$$

e passiamo facilmente al limite in quanto $D_iu_n \to D_iu$ in $L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $G'(u_n) \to G(u)$ q.o., $|G'(u_n) - G'(u)| \le 2L$, $D_iu\,v \in L^1(\Omega)$. Analogamente, e più facilmente, si tratta l'altro limite.

3.22. Si ha subito $uv \in L^r(\Omega)$ e $vD_iu + uD_iv \in L^r(\Omega)$ per la disuguaglianza di Hölder. Siano ora $u_n \in C^{1,p}(\Omega)$ e $v_n \in C^{1,q}(\Omega)$ convergenti a u e a v in $W^{1,p}(\Omega)$ e $W^{1,q}(\Omega)$ rispettivamente. Allora per ogni n e per $i = 1,\dots,d$ vale la formula di Leibniz, da cui

$$-\int_\Omega u_nv_nD_i\varphi\,dx = \int_\Omega D_i(u_nv_n)\,\varphi\,dx = \int_\Omega (v_nD_iu_n\,\varphi + u_nD_iv_n\,\varphi)\,dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Ma ciascuno dei prodotti al primo e all'ultimo membro converge in $L^1(\Omega)$ grazie alle convergenze dell'ipotesi e al fatto che φ e $D_i\varphi$ appartengono a $L^{r'}(\Omega)$ in quanto limitate e a supporto compatto. Pertanto possiamo passare al limite e ottenere

$$-\int_\Omega uvD_i\varphi\,dx = \int_\Omega (vD_iu + uD_iv)\varphi\,dx \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

il che dice che $vD_iu + uD_iv$ è la derivata debole di uv per $i = 1,\dots,d$.

Capitolo III

1.8. Se $f = 0$ tutte le condizioni sono vere, dunque equivalenti. Sia $f \neq 0$. La $iv)$ implica le altre tre. Vediamo che ciascuna di queste implica la continuità. Fissato y_0 tale che $f(y_0) \neq 0$, cercando x_0 del tipo $x_0 = \lambda y_0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, troviamo x_0 tale che $f(x_0) = \alpha$. Allora le condizioni $x \in S_\alpha$, $x \in I_\alpha$ e $x \in S'_\alpha$ equivalgono rispettivamente all'appartenenza di $x - x_0$ agli insiemi S_0, I_0 e S'_0. Siccome V è vettoriale topologico, vediamo che, ad esempio, S_α è chiuso se e solo se S_0 lo è. Dunque ci siamo ricondotti al caso $\alpha = 0$. Ma allora l'implicazione $ii) \implies iv)$ è già nota (Proposizione 1.7) e le altre due si dimostrano in modo analogo.

1.22. Il primo punto è immediato. Sia S la somma della serie: verifichiamo che $S(I - A) = I$. Se $v \in V$ si ha per ogni n

$$\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right)(I - A)v = \sum_{k=0}^{n} A^k v - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} v = v - A^{n+1} v.$$

Ma il primo membro converge a $S(I - A)v$ in V per $n \to \infty$ e il secondo converge a v dato che $\|A^{n+1}v\| \le \|A\|^{n+1}\|v\|$ e $\|A\| < 1$. Analogamente si vede che $(I - A)S = I$. Dunque $I - A$ è un isomorfismo algebrico e S è il suo inverso. Infine entrambi gli operatori $I - A$ e S sono continui.

1.24. Siccome $e^{-|\lambda|} \le e^{-\lambda x} \le e^{|\lambda|}$ per ogni $x \in [0, 1]$, la norma $\|\cdot\|_\lambda$ equivale alla norma del massimo. Per $u \in V$, si definisca Au mediante la formula

$$(Au)(x) = \int_0^x k(x, y)\, u(y)\, dy, \quad x \in [0, 1].$$

Allora $Au \in V$. Resta così definito l'operatore $A : V \to V$, che risulta lineare, e la (1.5) si scrive come $(I - A)u = f$. Per concludere, basta mostrare che A è anche continuo e trovare λ che rende < 1 la norma di A, la norma in $\mathcal{L}(V; V)$ essendo quella indotta dalla norma $\|\cdot\|_\lambda$ di V. Usiamo dunque sistematicamente la norma $\|\cdot\|_\lambda$, ora con $\lambda > 0$. Per $u \in V$ e $x \in [0, 1]$ si ha

$$|(Au)(x)| \le \int_0^x |k(x, y)| e^{\lambda y} e^{-\lambda y} |u(y)|\, dy \le M\|u\|_\lambda \int_0^x e^{\lambda y}\, dy = M\|u\|_\lambda \frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda}$$

ove abbiamo posto $M = \sup_T |k|$. Deduciamo che

$$|e^{-\lambda x}(Au)(x)| = M\|u\|_\lambda \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} \le \frac{M}{\lambda}\|u\|_\lambda \quad \text{da cui} \quad \|Au\|_\lambda \le \frac{M}{\lambda}\|u\|_\lambda .$$

Ciò mostra che A è limitato e che $\|A\| \le M/\lambda$. Basta dunque scegliere $\lambda > M$ per concludere.

3.5. Posto $V = L^p_w(\Omega)$, $q = p'$ e $Z = L^q_w(\Omega)$, scriviamo le due formule

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega zvw\, d\mu \quad \text{per ogni } v \in V \quad \text{e} \quad \langle f, v\rangle = \int_\Omega uv\, d\mu \quad \text{per ogni } v \in V .$$

La prima stabilisce un isomorfismo isometrico $f \leftrightarrow z$ fra V^* e Z e il problema posto consiste nel vedere in quale spazio X del tipo $L^q_{w^*}(\Omega)$ lasciar variare u in modo che la corrispondenza fra $f \in V^*$ e $u \in X$ stabilita dalla seconda formula sia un isomorfismo isometrico fra V^* e X. Dato quanto abbiamo detto riguardo alla prima formula, la scelta obbligata è la seguente

$$X = \{zw : \ z \in Z\} \quad \text{e} \quad \|u\|_X = \|z\|_{q,w} \quad \text{se } z \in Z \text{ e } u = zw$$

e il problema si sposta nella caratterizzazione di X e di $\|\cdot\|_X$. Per $u = zw$ con $z \in Z$ si ha

$$\|z\|^q_{q,w} = \int_\Omega |z|^q w\, d\mu = \int_\Omega |u|^q w^{1-q}\, d\mu = \int_\Omega |u|^q w^*\, d\mu = \|u\|^q_{q,w^*}$$

dato che $w^* = w^{-q/p} = w^{1-q}$. Dunque funziona $X = L^q_{w^*}(\Omega)$ con la norma standard.

3.6. Se $1 \le p \le +\infty$ e $u \in \mathbb{R}^n$ la formula $\langle f, v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ definisce $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ e dalla definizione di base duale segue che f è il funzionale le cui componenti f_i nella base duale considerata coincidono con le componenti u_i di u nella base canonica. D'altra parte, visto $\mathbb{R}^n$ come lo spazio $L^p(\Omega)$ ottenuto prendendo la misura che conta sull'insieme $\Omega = \{1, \dots, n\}$, la somma scritta sopra coincide con l'integrale di uv . Dal Teorema di Riesz segue allora la tesi se $p < +\infty$. Tuttavia, se $p = +\infty$, l'operatore di Riesz continua ad essere isometrico (dunque anche suriettivo dato che gli spazi in questione hanno dimensione n). Sebbene il risultato di isometria sia vero per spazi di misura largamente arbitrari, vediamo ciò nella situazione elementare presente. Con le notazioni usate sopra, ora con $p = \infty$, si ha subito $\|f\|_* \le \|u\|_1$ e dobbiamo vedere che vale l'uguaglianza. Supponendo senz'altro $u \ne 0$ definiamo v mediante $v_i = \operatorname{sign} u_i$ con la convenzione $\operatorname{sign} 0 = 0$. Allora $\|v\|_\infty = 1$ e $\langle f, v\rangle = \|u\|_1$. Dunque $\|f\|_* \ge \|u\|_1$.

3.8. Se $w^* \in W^*$ consideriamo $w^* \circ L$: questo è un elemento di V^* . Allora possiamo definire $L^* : W^* \to V^*$ mediante $L^* w^* = w^* \circ L$. Otteniamo un'operatore lineare. Esso è un isomorfismo algebrico in quanto, per $v^* \in V^*$ e $w^* \in W^*$, l'uguaglianza $v^* = w^* \circ L$ equivale a $w^* = v^* \circ L^{-1}$. Dunque ogni elemento di V^* ha una e una sola controimmagine tramite L^* e $(L^*)^{-1} v^* = v^* \circ L^{-1}$ per ogni $v^* \in V^*$. Per ogni $w^* \in W^*$ e $v^* \in V^*$ abbiamo inoltre

$$\|L^* w^*\|_{V^*} = \|w^* \circ L\|_{W^*} \le \|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} \|w^*\|_{W^*} \quad \text{e} \quad \|(L^*)^{-1} v^*\|_{W^*} = \ldots \le \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(W;V)} \|v^*\|_{V^*}$$

per cui L^* è un isomorfismo anche topologico. Supponiamo ora L anche isometrico. Allora

$$\|w^* \circ L\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V = 1} |\langle w^*, Lv\rangle| = \sup_{\|w\|_W = 1} |\langle w^*, w\rangle| = \|w^*\|_{W^*} \quad \text{per ogni } w^* \in W^*$$

per cui anche L^* è isometrico. Segnaliamo che l'operatore L^* si chiama aggiunto di L .

3.9. Grazie all'Esercizio 3.8, possiamo evitare di distinguere lo spazio dato e la sua immagine nel completamento e siamo ricondotti a dimostrare quanto segue: se V è uno spazio di Banach e V_0 è un suo sottospazio denso, allora i due duali V^* e V_0^* sono isomorfi. Di fatto, la completezza di V non serve. Costruiamo $L : V^* \to V_0^*$ come segue: se $v^* \in V^*$, denotiamo con Lv^* la restrizione di v^* a V_0 , che effettivamente è un elemento di V_0^* . Allora L è ben definito e lineare. Inoltre esso è isometrico dato che, per la densità, risulta

$$\|v^*|_{V_0}\|_{V_0^*} = \sup_{0 \ne v \in V_0} \frac{|\langle v^*, v\rangle|}{\|v\|} = \sup_{0 \ne v \in V} \frac{|\langle v^*, v\rangle|}{\|v\|} = \|v^*\|_{V^*} .$$

Infine L è anche suriettivo in quanto ogni $v_0^* \in V_0^*$ è la restrizione a V_0 di un elemento di V^* . Infatti ogni $v_0^* \in V_0^*$ è uniformemente continuo e quindi si prolunga per continuità alla chiusura del dominio, cioè a V , e il prolungamento è automaticamente lineare.

3.11. Con notazioni naturali si ha $|f(x)| \le \|f_i\|_{*i} \|x_i\|_i \le \max_i \|f_i\|_{*i} \|x\|$ ove si è scelta in V la norma $\|x\| = \sum_i \|x_i\|_i$ (e ciò suggerisce di scegliere in V_* $\|(f_1, \dots, f_n)\| = \max_i \|f_i\|_{*i}$). Dunque f , che è lineare, è anche continuo. Inoltre l'applicazione $L : V_* \to V^*$ che alla n -upla degli f_i associa f , che è lineare, è anche continua dato che la disuguaglianza precedente implica $\|f\|_* \le \max_i \|f_i\|_{*i} = \|(f_1, \dots, f_n)\|$. Dato ora $f \in V^*$ costruiamo $(f_1, \dots, f_n) \in V_*$ in modo da mostrare che L è pure suriettivo. Se $x_i \in V_i$ denotiamo con x^i la n -upla avente x_i all' i -esimo posto e 0 negli altri e poniamo $f_i(x_i) = \langle f, x^i\rangle$. Se vede senza difficoltà che $f_i \in V_i^*$ e che la (3.10) con secondo membro costruito con questi elementi f_i ricostruisce il funzionale f di partenza, cioè che $L(f_1, \dots, f_n) = f$. Essendo poi $|\langle f_i, x_i\rangle| \le \|f\|_* \|x^i\| = \|f\|_* \|x_i\|_i$ deduciamo che $\|f_i\|_{*i} \le \|f\|_*$ da cui anche $\|(f_1, \dots, f_n)\| \le \|f\|_*$. Tenendo allora conto della disuguaglianza opposta già dimostrata concludiamo che L è addirittura isometrico, in particolare iniettivo.

Capitolo IV

1.8. Denotiamo con Pw la proiezione dei due casi. *i*) Si ha $Pw = \min\{w, \psi\}$. *ii*) Si ha $Pw = \min\{\max\{w, \varphi\}, \psi\}$. Se φ e ψ non appartengono ad H i convessi corrispondenti possono essere vuoti.

1.16. Per vedere che H_p è chiuso basta usare l'Osservazione I.5.24. Per vedere che la formula data fornisce la proiezione basta osservare che $u \in H_p$ e usare la (1.1).

1.18. Detto V_0 il sottospazio considerato, la proiezione di w su V_0 è la funzione u definita dalle formule $u = w$ (q.o.) in $\Omega \setminus \omega$ e $u = w - c$ in ω, ove c è la media di w in ω. Infatti $u \in V_0$ perché $\int_\omega (w-c)\, d\mu = 0$ e per ogni $v \in V_0$ si ha $(w - u, v) = \int_\omega cv\, d\mu = 0$.

1.20. Per $x \in H$ si ha $\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^2 x, x) = (Px, x) \le \|Px\|\,\|x\|$ da cui $\|Px\| \le \|x\|$. In particolare P è continuo. Verifichiamo che l'immagine $R(P)$ è chiusa. Se $Px_n \to v$, allora $Px_n = P^2 x_n \to Px$ dato che P è continuo. Segue $v = Px \in R(P)$. Sia ora $x \in H$: allora $Px \in R(P)$ banalmente. Se poi $y \in R(P)$, cioè $y = Pz$ con un certo $z \in H$, allora $(x - Px, y) = (x, Pz) - (Px, Pz) = (Px - P^2 x, z) = 0$. Dunque Px è la proiezione di x su $R(P)$. Il resto dell'esercizio è una facile verifica.

2.4. Per il Lemma 2.3 basta provare che $S^\perp = (\overline{\operatorname{span} S})^\perp$. Da $S \subseteq \overline{\operatorname{span} S}$ segue $S^\perp \supseteq (\overline{\operatorname{span} S})^\perp$. Siano ora $u \in S^\perp$ e $v \in \overline{\operatorname{span} S}$: dobbiamo provare che $(u, v) = 0$. Sia dapprima $v = \sum_i \lambda_i v_i$ una combinazione lineare finita di elementi di S: allora $(u, v) = \sum_i \overline{\lambda_i}(u, v_i) = 0$. Dunque $(u, v) = 0$ per ogni $v \in \operatorname{span} S$. Infine, se $v \in \overline{\operatorname{span} S}$, scelti $v_n \in \operatorname{span} S$ tali che $v_n \to v$, si ha $(u, v) = \lim (u, v_n) = \lim 0 = 0$.

3.17. La prima tesi è immediata: $v_n \in C^0(\overline{\Omega})$, $\|v_n\|_\infty = 1$ e $v_n' \equiv 0$ per ogni n. Per la seconda basta osservare che $\{v_n\}$ converge puntualmente alla funzione nulla. Segue che $\{v_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti in $C^0(\overline{\Omega})$.

3.22. Ci limitiamo alle (3.8). Si ha

$$\|v_n\|_p^p = \int_{B_r(x_n)} |\zeta((x - x_n)/r)|^p\, dx = r^d \int_{B_1(0)} |\zeta(y)|^p\, dy = r^d M^p$$

$$\|\nabla v_n\|_p^p = \int_{B_r(x_n)} |r^{-1} \nabla \zeta((x - x_n)/r)|^p\, dx = r^{d-p} \int_{B_1(0)} |\nabla \zeta(y)|^p\, dy = r^{d-p} M_1^p$$

$$\|v_n - v_m\|_p^p = \int_{B_r(x_n)} |v_n(x)|^p\, dx + \int_{B_r(x_m)} |v_m(x)|^p\, dx = 2r^d M^p.$$

3.23. Supponiamo $\mathcal{F} \subset C^1(\overline{\Omega})$ limitato e sia M tale che $\|\nabla v\|_\infty \le M$ per ogni $v \in \mathcal{F}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia $\delta > 0$ tale che $\mu(t) \le \varepsilon$ per ogni $t \in (0, \delta]$. Allora, se $x, y \in \Omega$, si ha $d_\Omega(x, y) \le \varepsilon$ e quindi anche $|v(x) - v(y)| \le M\varepsilon$ per ogni $v \in \mathcal{F}$.

3.24. *i*) La (3.7) si ottiene scegliendo $\mu(t) = Lt$ nella (3.9). Per alcuni dei punti successivi dell'esercizio diamo solo le idee, dato che le costruzioni e le verifiche rigorose sarebbero complesse, talora decisamente complesse.

ii) Un esempio di aperto che verifica la (3.9) e non la (3.7) è il seguente: per $\alpha \in (0, 1)$ si ponga $\Omega = \{x \in (-1, 1)^2 : x_2 > |x_1|^\alpha\}$. Siano ora $x \in \Omega$ con $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ e $y = (-x_1, x_2)$. Allora $d_\Omega(x, y) \ge 2|x| \ge 2x_2$ mentre $|x - y| = 2x_1$. Allora, se $x_2 \sim x_1^\alpha$, si ha $d_\Omega(x, y)/|x - y| \sim x_1^{\alpha - 1}$, che non si mantiene limitato vicino all'origine dato che $\alpha < 1$. Ciò, sistemato un po' più rigorosamente, mostra che la (3.7) non vale. Al contrario vale la (3.9) con $\mu(t) = Mt^\alpha$ per M opportuno, come si intuisce (ma la verifica rigorosa è laboriosa).

iii) Per controllare direttamente che la (3.9) è falsa nel caso dell'aperto dell'Esercizio 3.18 basta considerare, per ogni n, il punto $z_n = (1/(n + 1/2), 1/2)$ (che sta nel bel mezzo dell' n-esimo dente del pettine). Allora $\{|z_{n+1} - z_n|\}$ è infinitesima mentre $\{d_\Omega(z_{n+1}, z_n)\}$ non lo è. Verifichiamo che la funzione d_Ω è limitata. Si osservi innanzi tutto che d_Ω verifica la disuguaglianza triangolare.

Allora, se $z_i = (x_i, y_i) \in \Omega$ per $i = 1,2$, basta introdurre i punti ausiliari $z_i' = (x_i, -1/2)$ per vedere che $d_\Omega(z_1, z_2) \le (3/2) + 1 + (3/2) = 4$ (e ovviamente si potrebbe migliorare la stima).

iv) Per costruire un aperto che non verifica la (3.9) e nel quale la distanza geodedica non sia limitata si parta da una curva a spirale S che si avvolge intorno all'origine e che abbia lunghezza infinita: si può prendere come S la curva parametrizzata da $X(t) = (t+1)^{-1}(\cos t, \sin t)$ per $t > 0$. Allora la lunghezza dell'arco immagine di $[s,t]$ ha l'ordine di grandezza $\ln t - \ln s = \ln(t/s)$. Si prenda come Ω un aperto che si avvolge intorno all'origine lungo S, via via assottigliandosi, in modo che le sue "spire" siano separate l'una dall'altra. Allora, se $x, y \in S$, abbiamo $d_\Omega(x,y) \sim \ln(t/s)$ ove t, s sono le controimmagini tramite X dei due punti. Prendiamo in particolare $s > 0$ e $t = s^2$ oppure $t = 2s$. La prima scelta mostra che d_Ω non si mantiene limitata. Con la seconda si ha $d_\Omega(x,y) \sim \ln 2$ mentre $|x-y| \le |x|+|y| \le 2/(t+1)$, così che si può fare in modo che $|x-y|$ tenda a 0 e che contemporaneamente $d_\Omega(x,y)$ resti lontano da 0, da cui l'incompatibilità delle (3.9). Analogamente, sia $S \subset \mathbb{R}^2$ il grafico, di lunghezza infinita, di una funzione φ "serpeggiante" (si pensi a $\varphi(t) = \sin(1/t)$ o anche a $\varphi(t) = t\sin(1/t)$ con $t \in (0,1)$: nel secondo caso il limite destro $\varphi(0^+)$ è finito (vale 0), ma il grafico di φ continua ad avere lunghezza infinita). Allora si può prendere come Ω un aperto che ricopre S, via via assottigliandosi, in modo che le sue "anse" siano separate una dall'altra. In questo caso l'analoga della funzione X precedente è data da $X(t) = (t, \varphi(t))$ e vale un ragionamento analogo: con scelte del tipo $x = X(t)$ e $y = X(s)$ si ottengono come sopra sia la non limitatezza di d_Ω sia l'incompatibilità delle (3.9). Naturalmente, come abbiamo anticipato, le costruzioni precise sono molto complesse. Tuttavia potrebbero essere fatte. Segnaliamo che, sviluppando queste idee in modo rigoroso, si riescono a costruire aperti Ω con le propietà richieste e per i quali esistono sottoinsiemi limitati di $C^1(\overline{\Omega})$ che non sono relativamente compatti in $C^0(\overline{\Omega})$, come avviene nel caso del "pettine" dell'Esempio 3.18.

3.25. Si ha

$$\|v_n\|_p^p = c_n^p \int_{D_n} x_2^p \, dx = \frac{1}{p+1} \, \frac{c_n^p}{2n(2n+1)} \quad \text{e} \quad \|\nabla v_n\|_p^p = c_n^p \int_{D_n} dx = \frac{c_n^p}{2n(2n+1)} \, .$$

Allora la scelta $c_n = n^{2/p}$ fornisce $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_p^p = 1/(4(p+1))$ e $\lim_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_p^p = 1/4$ per cui $\{v_n\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ e non infinitesima in $L^p(\Omega)$. D'altra parte $v_n \to 0$ q.o., per cui la funzione nulla è l'unico candidato limite forte in $L^p(\Omega)$ di ogni sottosuccessione. Deduciamo che non esistono sottosuccessioni convergenti fortemente in $L^p(\Omega)$.

4.10. Supponiamo $v_n \rightharpoonup v$ in $V = C^0(\overline{\Omega})$ e fissiamo $x_0 \in \overline{\Omega}$: dobbiamo dimostrare che $v_n(x_0) \to v(x_0)$. Sia $f : V \to \mathbb{K}$ definita da $f(z) = z(x_0)$. Allora $f \in V^*$ e la tesi diventa $\langle f, v_n \rangle \to \langle f, v \rangle$, che è parte dell'ipotesi.

4.11. Ricordiamo l'Esercizio III.3.11 e la formula $\langle f, x \rangle = \sum_{i=1}^N \langle f_i, x^i \rangle$ nella quale $x = (x^1, \ldots, x^N) \in V$, $f \in V^*$ e $f_i \in V_i^*$: essa stabilisce un isomorfismo fra V^* e il prodotto dei duali V_i^*. Allora $x_n \rightharpoonup x$ in V se e solo se $\sum_{i=1}^N \langle f_i, x_n^i \rangle \to \sum_{i=1}^N \langle f_i, x^i \rangle$ per ogni scelta di $f_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, N$. Ma ciò significa $\langle f_i, x_n^i \rangle \to \langle f_i, x^i \rangle$ per ogni $f_i \in V_i^*$ e per ogni i, cioè che $x_n^i \rightharpoonup x^i$ in V_i per ogni i.

4.12. Fissiamo $f \in V^*$ e $\varepsilon > 0$: dobbiamo dimostrare che esiste m tale che $|\langle f, x_n - x \rangle| \le \varepsilon$ per ogni $n \ge m$. Sia $M \ge \|x_n\|$ per ogni n e si scelga $g \in S^*$ tale che $\|g - f\|_* \le \varepsilon$. Allora $|\langle f, x_n - x \rangle| \le |\langle f - g, x_n - x \rangle| + |\langle g, x_n - x \rangle| \le C\varepsilon + |\langle g, x_n - x \rangle|$ per ogni n, ove abbiamo posto $C = M + \|x\|$. Ma l'ultimo termine è infinitesimo e C è noto a priori.

4.15. Considerando le differenze ci riconduciamo al caso $u_n = u = 0$. Posto $q = p'$, grazie al Teorema di Riesz, dalla convergenza debole $v_n \rightharpoonup v$ in $L^p(\Omega)$ e dalle disuguaglianze $v_n \ge 0$ per ogni n deduciamo $\int_\Omega vz \, d\mu \ge 0$ per ogni $z \in L^q(\Omega)$ non negativa. Dobbiamo dimostrare che ha misura nulla l'insieme ω in cui $v < 0$. Se $p = 1$ prendiamo $z = \chi_\omega$, la funzione caratteristica di ω, e otteniamo $\int_\omega v \ge 0$. Dunque $\mu(\omega) = 0$. Se $p \in (1, +\infty)$, prendiamo $z = |v|^{p-1}\chi_\omega$, osservando che $z \in L^q(\Omega)$ dato che $|z|^q = |v|^p \chi_\omega$. Otteniamo $\int_\omega v|v|^{p-1} \ge 0$, da cui ancora $\mu(\omega) = 0$.

4.16. Fissato (a,b) siano $a',b' \in \mathbb{Z}$ tali che $a' \le a$ e $b' \ge b$. Allora

$$\int_a^b |\widetilde{u}(nx)|^p\,dx \le \int_{a'}^{b'} |\widetilde{u}(nx)|^p\,dx = \frac{1}{n}\int_{na'}^{nb'} |\widetilde{u}(y)|^p\,dy = (b'-a')\int_0^1 |u(y)|^p\,dy$$

per cui la successione considerata, che denotiamo con $\{u_n\}$, è limitata. Ora distinguiamo i casi come suggerito. $i)$ Siccome $p < +\infty$, lo spazio duale è isomorfo a $L^q(a,b)$ ove $q = p'$. Siccome $q < +\infty$, $C^1[a,b]$ è denso in $L^q(a,b)$, per cui basta vedere che $\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n v\,dx = 0$ per ogni $v \in C^1[a,b]$. Le primitive di $\widetilde{u}$ sono continue. Siccome $\lambda = 0$, esse sono anche 1-periodiche, dunque limitate. Fissata una di esse, che denotiamo con w, per $v \in C^1[a,b]$ si ha

$$\int_a^b u_n v\,dx = \int_a^b w'(nx)\,v(x)\,dx = -\frac{1}{n}\int_a^b w(nx)\,v'(x)\,dx + \frac{1}{n}\left[w(nx)\,v(x)\right]_a^b$$

e il modulo dell'ultimo membro è $\le (1/n)(\|v'\|_1 + 2\|v\|_\infty)\|w\|_\infty$. Dunque l'integrale al primo membro è infinitesimo. $ii)$ Poniamo $z = u - \lambda$. Allora z ha media nulla e ricade nel caso precedente. D'altra parte l'analoga $\widetilde{z}$ vale $\widetilde{u} - \lambda$. Per ogni $v \in L^q(a,b)$ abbiamo pertanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \widetilde{u}(nx)\,v(x) - \int_a^b \lambda\,v(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (\widetilde{u}(nx)-\lambda)\,v(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \widetilde{z}(nx)\,v(x)\,dx = 0$$

cioè la tesi. $iii)$ Nel caso $p = 1$ fissiamo $v \in L^\infty(a,b)$ e dimostriamo che l'integrale di $u_n v$ converge all'integrale di λv appoggiandoci al punto precedente. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, siano $z \in L^2(0,1)$ tale che $\|z-u\|_1 \le \varepsilon$ e μ la sua media. Introdotte le corrispondenti z_n, abbiamo

$$\int_a^b (u_n-\lambda)v\,dx = \int_a^b (u_n-z_n)v\,dx + \int_a^b (z_n-\mu)v\,dx + \int_a^b (\mu-\lambda)v\,dx.$$

Prendendo i moduli otteniamo

$$\left|\int_a^b (u_n-\lambda)v\,dx\right| \le \|u_n-z_n\|_1\|v\|_\infty + |\mu-\lambda|\,\|v\|_1 + \left|\int_a^b (z_n-\mu)v\,dx\right|$$

e l'ultimo termine è $\le \varepsilon$ per n abbastanza grande. D'altra parte, con notazioni analoghe a quelle del punto $i)$ e con analoga procedura, abbiamo

$$\int_a^b |u_n-z_n|\,dx \le \int_{a'}^{b'} |\widetilde{u}(nx)-\widetilde{z}(nx)|\,dx \le (b'-a')\int_0^1 |u(y)-z(y)|\,dy \le \varepsilon(b'-a').$$

Infine $|\lambda-\mu| \le \|u-z\|_1 \le \varepsilon$ e si conclude.

4.18. Siano M e t_0 tali che $|f(t)| \le M|t|$ per $|t| \ge t_0$. Siccome f è continua, esiste N tale che $|f(t)| \le N$ per $|t| \le t_0$. Dunque $|f(t)| \le M|t| + N$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Segue che, se $v \in L^p(0,1)$, si ha $|f(v(x))| \le M|v(x)|+N$ q.o. in $(0,1)$, da cui $F(v) \in L^p(0,1)$ (e anche $\|F(v)\|_p^p \le M\|v\|_p^p+N$). Per mostrare che F è un'applicazione continua, supponiamo $v_n \to v$ in $L^p(0,1)$: dobbiamo dimostrare che $F(v_n) \to F(v)$ in $L^p(0,1)$. Grazie alla Proposizione 1.9, basta dimostrare che da ogni sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ si può ulteriormente estrarre una sottosuccessione la cui immagine converge a $F(v)$ in $L^p(0,1)$. A tale scopo, estraiamo da $\{v_{n_k}\}$ una sottosuccessione $\{v_{n_{k_i}}\}$ convergente a v q.o. e verificante $|v_{n_{k_i}}| \le \varphi$ per ogni i e per una certa $\varphi \in L^p(0,1)$. Allora la sottosuccessione immagine converge a $F(v)$ q.o. dato che f è almeno continua. D'altra parte la disuguaglianza vista sopra, se applicata alla sottosuccessione in questione, fornisce $|F(v_{n_{k_i}})| \le M\varphi + N$ e dunque garantisce l'applicabilità del Teorema di Lebesgue, da cui la convergenza in $L^p(0,1)$ desiderata.

Sia ora $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f''(t_0) \neq 0$. Useremo il simbolo t_0 anche per la corrispondente funzione costante. Supponiamo $f''(t_0) > 0$ per fissare le idee, poniamo $\varepsilon = f''(t_0)/4$ e scegliamo $\delta > 0$ tale che $f''(t) \geq 2\varepsilon$ per $|t - t_0| \leq \delta$. Per tali t e con opportuna scelta di τ compreso fra t_0 e t abbiamo allora

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{f''(\tau)}{2}(t - t_0)^2 \geq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \varepsilon(t - t_0)^2.$$

Consideriamo ora la successione $\{v_n\}$ definita da $v_n(x) = t_0 + \delta \sin nx$ per $x \in (0, 1)$. Allora $v_n \rightharpoonup t_0$ in $L^p(0, 1)$ per l'Esercizio IV.4.17. D'altra parte $f(v_n(x)) \geq f(t_0) + f'(t_0) \sin nx + \varepsilon \sin^2 nx$ in quanto $|v_n - t_0| \leq \delta$ e l'ultimo membro della disuguaglianza appena scritta converge a $f(t_0) + \varepsilon/2$ per lo stesso esercizio. Siccome la convergenza debole in L^p conserva le disuguaglianze al limite (Esercizio IV.4.15), il primo membro, cioè $F(v_n)$, non può convergere a $F(t_0)$.

Notiamo che, se $p > 1$, si potranno usare i risultati di compattezza sequenziale presentati successivamente per dimostrare che $\{F(v_n)\}$ ha un sottosuccessione debolmente convergente. Ma per lo stesso motivo il limite debole di tale sottosuccessione non può essere $F(v)$. $\square$

Capitolo V

2.3. Poniamo $W = W^{k,p}(\Omega)$ e $q = p'$ per comodità. Se $u_\alpha \in L^q(\Omega)$ per $|\alpha| \leq k$, il funzionale f dato dalla formula è ben definito e lineare e per ogni $v \in W$ verifica

$$|\langle f, v \rangle| \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|u_\alpha\|_q \|D^\alpha v\|_p \leq M \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_p = M \|v\|_{k,p} \quad \text{ove} \quad M = \max_{|\alpha| \leq k} \|u_\alpha\|_q$$

per cui è anche continuo. Viceversa, supponiamo $f \in W^*$. Detto N il numero delle derivate di ordine $\leq k$, derivate che ordiniamo in qualche modo, sia $L : W \to V = L^p(\Omega)^N$, definito dalla formula $Lv = \{D^\alpha v\}$. Allora L è un isomorfismo isometrico di W su un sottospazio (chiuso) V_0 di V se nel prodotto si usa la norma ovvia e il funzionale $f \circ L^{-1} : V_0 \to \mathbb{K}$ è lineare e continuo. Per il Teorema di Hahn-Banach esso ha un prolungamento F lineare e continuo definito su tutto V. Ma dalla rappresentazione generale del duale di un prodotto e dal Teorema di Riesz deduciamo che esistono funzioni $u_\alpha \in L^q(\Omega)$ per $|\alpha| \leq k$ tali che

$$\langle F, \{v_\alpha\} \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega u_\alpha v_\alpha \, dx \quad \text{per ogni } \{v_\alpha\} \in V.$$

Segue allora la rappresentazione desiderata

$$\langle f, v \rangle = \langle f \circ L^{-1}, Lv \rangle = \langle F, Lv \rangle = \langle F, \{D^\alpha v\} \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega u_\alpha D^\alpha v \, dx \quad \text{per ogni } v \in W.$$

La famiglia $\{u_\alpha\}$ non è unica perché non è unico il prolungamento F di $f \circ L^{-1}$.

3.5. L'unico punto che potrebbe offrire difficoltà è il fatto che la stretta convessità implichi la condizione *ii*). Supposta la stretta convessità, siano x, y e t come in *ii*). Poniamo $z = tx + (1-t)y$ e $m = (x+y)/2$. Se $t = 1/2$ allora $z = m$, da cui $\|z\| < 1$. Sia $t \in (0, 1/2)$. Allora $z = \vartheta m + (1 - \vartheta)y$ per un certo $\vartheta \in (0, 1)$. Siccome la funzione $\|\cdot\|$ è convessa (facile verifica) abbiamo $\|z\| \leq \vartheta \|m\| + (1 - \vartheta)\|y\| < \vartheta + (1 - \vartheta) = 1$ in quanto $\|m\| < 1$ dall'ipotesi e $\|y\| = 1$. Se $t \in (1/2, 1)$ si ragiona analogamente con m e x.

3.6. Basta usare la regola del parallelogrammo: $\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2$. Ora se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $x \neq y$, il secondo membro è < 4 da cui $\|x + y\| < 2$.

3.7. Siano A e B come in *i*). Poniamo $x = \chi_A/\mu(A)$ e $y = \chi_B/\mu(B)$. Allora $x, y \in L^1(\Omega)$, $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ e $\|x + y\|_1 = 2$. Poniamo ora $x = \chi_A$ e $y = \chi_{A \cup B}$ (e qui non serve che le due misure siano finite). Allora $x, y \in L^\infty(\Omega)$, $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ e $\|x+y\|_\infty = 2$. Dimostriamo *ii)*. Se $\dim L^1(\Omega) \le 1$, allora $L^1(\Omega)$ è ridotto a 0 oppure isometricamente isomorfo alla retta reale $\mathbb{R}$ munita della norma $\|x\| = c|x|$ per un qualche $c > 0$ e la stretta convessità vale. Supponiamo ora $L^1(\Omega)$ strettamente convesso. Allora non possono esistere A e B come in *i)* e si deduce che $\mathcal{M} = \{\emptyset, \Omega\}$ e che $\mu(\Omega) < +\infty$ (perché lo spazio è σ-finito). Se $\mu(\Omega) = 0$ allora $L^1(\Omega) = \{0\}$. In caso contrario $1 \in L^1(\Omega)$, ma solo le costanti sono funzioni misurabili e quindi solo le costanti sono integrabili, cioè $\dim L^1(\Omega) = 1$. La dimostrazione di *iii)* è analoga.

6.5. Di fatto la falsità è addirittura la regola e non l'eccezione, dato che la convergenza debole $u_n \rightharpoonup 0$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ è falsa per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con integrale non nullo. Infatti, pur essendo $1 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1 \cdot u_n \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(x + h_n) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \, dy = \text{costante} \neq 0.$$

Nel caso $p = +\infty$, poi, basta prendere $u = 1$.

6.11. Supponiamo $h > 0$ (il caso $h < 0$ è analogo). Allora

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \right| dx &= \int_{-h}^{0} \frac{e^{-(x+h)}}{h} \, dx + \int_0^{+\infty} \frac{|e^{-(x+h)} - e^{-x}|}{h} \, dx \\ &= \frac{1 - e^{-h}}{h} + \frac{1 - e^{-h}}{h} \int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = 2c \quad \text{ove} \quad c = \sup_{t>0} \frac{1 - e^{-t}}{t} \quad (= 1).\end{aligned}$$

Se fosse $u \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, posto $w = u'$, avremmo $w(x) = -e^{-x}$ per q.o. $x > 0$ e $w(x) = 0$ per q.o. $x < 0$ dato che u è regolare in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ma, se w è data da queste formule e $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} wv \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} uv' \, dx = \int_0^{+\infty} (wv + uv') \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(e^{-x} v(x) \right) dx = -v(0)$$

e concludiamo che w non è la derivata debole di u in quanto può essere $v(0) \neq 0$. Assurdo. Segnaliamo che la derivata di u nel senso delle distribuzioni è $w + \delta$, ove δ è la massa di Dirac.

8.4. Per $u, v \in L^p(\Omega)$ si ha subito

$$\begin{aligned}\langle K^* u, v \rangle = \langle u, Kv \rangle &= \int_\Omega \Bigl(u(x) \int_\Omega k(x,y) \, v(y) \, dy \Bigr) dx = \int_{\Omega \times \Omega} k(x,y) \, u(x) \, v(y) \, dx \, dy \\ &= \int_\Omega \Bigl(v(y) \int_\Omega k(x,y) \, u(x) \, dx \Bigr) dy = \langle w, v \rangle \quad \text{ove} \quad w(y) = \int_\Omega k(x,y) \, u(x) \, dx.\end{aligned}$$

Dunque K^* è l'operatore $u \mapsto w$, cioè l'analogo di K ottenuto sostituendo la funzione k con la funzione k^* definita da $k^*(x,y) = k(y,x)$ q.o. in $\Omega \times \Omega$.

8.5. Per $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ e $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ si ha subito

$$\langle (T_h^p)^* u, v \rangle = \langle u, T_h^p v \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \, v(x+h) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-h) \, v(y) \, dy = \langle T_{-h}^q u, v \rangle$$

per cui $(T_h^p)^* = T_{-h}^q$.

8.6. Per $u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ e $v \in L^p(\mathbb{R}^d)$ si ha subito

$$\langle (T_h^p)^* u, v \rangle = \langle u, T_h^p v \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \, v(hx) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(h^{-1}y) \, v(y) \, |\det h^{-1}| \, dy = \langle |\det h^{-1}| \, T_{h^{-1}}^q u, v \rangle$$

per cui $(T_h^p)^* = |\det h^{-1}|\, T_{h^{-1}}^q$.

8.8. Si ha $L^* \in \mathcal{L}(L^q(\omega); L^q(\Omega))$ e, se $w^* \in L^q(\omega)$, $v^* = L^* w^*$ e $v \in L^p(\Omega)$, si deve avere

$$\int_\Omega v^* v \, d\mu = \langle L^* w^*, v\rangle = \langle w^*, Lv\rangle = \int_\omega w^*(v|_\omega)) \, d\mu.$$

Dunque v^* è il prolungamento di w^* nullo in $\Omega \setminus \omega$.

9.4. *i*) Sia $x \in V$. Siccome l'applicazione $\lambda \mapsto \lambda x$ da $\mathbb{K}$ in V è continua in 0 e C è un intorno di 0, esiste $r > 0$ tale che $\lambda x \in C$ per $|\lambda| \le r$. Preso $\lambda = 1/r$ si ha allora $x/\lambda \in C$. *ii*) Sia $x \in C$ (C non è vuoto). Siccome $|0| \le 1$ si ha $0 = 0x \in C$. *iii*) La tesi coincide con la definizione.

10.13. Dimostriamo solo l'ultima affermazione usando la Proposizione 10.8. Siano $x_0 \in S$ e $\lambda < f(x_0)$. Per definizione di estremo superiore troviamo $\alpha \in A$ tale che $f_\alpha(x_0) > \lambda$ e per la proposizione citata troviamo un intorno J di x_0 tale che $f_\alpha(x) \ge \lambda$ per ogni $x \in J$. Per ogni $x \in J$ abbiamo pertanto $f(x) \ge f_\alpha(x) \ge \lambda$. In modo alternativo, si può osservare che $\operatorname{epi} f$ è l'intersezione degli epigrafi di tutte le f_α e applicare il Teorema 10.10: se tutte le f_α sono s.c.i., allora $\operatorname{epi} f_\alpha$ è chiuso per ogni $\alpha \in A$, per cui anche $\operatorname{epi} f$ lo è e f è s.c.i.

11.4. Per le prime due affermazioni basta usare la (11.1): ad esempio, se $x, y \in S_\alpha$ e $t \in (0,1)$, si ha immediatamente $f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) \le t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha$. Per l'ultima, molte funzioni crescenti e non convesse della norma forniscono controesempi, ad esempio $f(x) = \|x\|^{1/2}$, $x \in V$: per ogni α si ha $S_\alpha = \overline{B}_{\alpha^2}(0)$ o $S_\alpha = \{0\}$ o $S_\alpha = \emptyset$ a seconda che α sia positivo, nullo, negativo, ma f non è convessa.

11.12. Se $x, y \in C$ e $x \ne y$, posto $z = (x+y)/2$ risulta $f(z) < (f(x) + f(y)) = m$, assurdo.

11.13. Si ha $D(f) = C$ per cui f è convessa e propria. Vediamo la semicontinuità. Sia $x_0 \in V \setminus C$. Siccome C è chiuso, esiste un intorno I di x_0 disgiunto da C. Dunque $f(x) = +\infty$ per ogni $x \in I$, da cui, banalmente, la semicontinuità in x_0. Siano ora $x_0 \in C$ e $\{x_n\}$ convergente a x_0. Posto $\lambda = \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$, possiamo senz'altro supporre $\lambda < +\infty$ e trovare una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lambda$. Allora $f(x_{n_k}) < +\infty$ per k abbastanza grande. Segue $x_{n_k} \in C$ e $f(x_{n_k}) = f_0(x_{n_k})$ per tali k e quindi $f(x_0) = f_0(x_0) \le \lambda$ non appena f_0 è s.c.i.

12.7. Basta ricordare l'Esempio V.12.6. *i*) Si ha $\partial I_C(x_0) = V$ e $\partial I_C(x) = \emptyset$ se $x \ne x_0$. *ii*) Si ha $\partial I_C(x) = \{0\}$ se x è interno a C e $\partial I_C(x) = \emptyset$ se $x \notin C$; se C ha primo estremo finito $a \in C$, allora $\partial I_C(a) = (-\infty, 0]$; se C ha secondo estremo finito $b \in C$, allora $\partial I_C(b) = [0, +\infty)$. *iii*) Si ha $\partial I_C(x) = C^\perp$ se $x \in C$ e $\partial I_C(x) = \emptyset$ se $x \notin C$. *iv*) In ciascuno dei due casi $\xi \in \partial I_C(x)$ significa che, per ogni $y \in C$, i due vettori ξ e $y - x$ formano un angolo retto oppure ottuso. In particolare $\xi = 0$ se x è interno. Sia ora x sul bordo di C. Nel caso del disco abbiamo $\xi = cx$ con $c \ge 0$. Nel caso del quadrato abbiamo ad esempio $\xi = (c, 0)$ con $c \ge 0$ se $x = (1, y)$ con $y \in (0,1)$ e $\xi = (a, b)$ con $a, b \ge 0$ se $x = (1,1)$.

12.8. Chiaramente, qualunque sia $x \in V$, la scelta $\xi = f$ soddisfa la (12.3). Mostriamo ora che questa è l'unica possibile. Riscrivendo la (12.3) nella forma

$$f(\pm y) - \langle \xi, \pm y\rangle \ge f(x) - \langle \xi, x\rangle \quad \text{per ogni } y \in V$$

vediamo che essa implica che il funzionale $f - \xi$ è nullo, cioè che $f = \xi$. Dunque, per ogni $x \in V$, abbiamo $\partial f(x) = \{f\}$.

Capitolo VI

1.7. Per assurdo l'uniforme convessità sia falsa. Allora esistono $\varepsilon \in (0, 2]$ e due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ di elementi di V che verificano le condizioni $\|x_n\| \le 1$, $\|y_n\| \le 1$, $\|x_n - y_n\| \ge \varepsilon$ e $\|(x_n + y_n)/2\| \ge 1 - 1/n$ per ogni n. Siccome V ha dimensione finita possiamo estrarre (con due estrazioni successive) due sottosuccessioni $\{x_{n_k}\}$ e $\{y_{n_k}\}$ convergenti a certi punti x e y rispettivamente. Abbiamo allora $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$, $\|x - y\| \ge \varepsilon$, da cui $x \ne y$, e $\|(x+y)/2\| \ge 1$, e si vede facilmente che ciò contraddice la stretta convessità.

2.8. Ad esempio V_1 è isomorfo a $V_1 \times \{0\}$, che è un sottospazio chiuso di V.

Capitolo VII

3.12. L'applicazione $L : V_1 \times V_2 \to V$ data dalla formula $L(v_1, v_2) = v_1 + v_2$ è lineare e continua. L'ipotesi assicura che essa è anche iniettiva e suriettiva, dunque un isomorfismo algebrico. Siccome tutti gli spazi coinvolti sono di Banach, anche l'applicazione inversa, grazie al Teorema dell'applicazione aperta, è continua. Ma questa è data da $L^{-1}v = (P_1 v, P_2 v)$. Dunque P_1 e P_2 sono (lineari e) continui.

3.16. Sia $V_\bullet = V/V_0$ e $\pi : V \to V_\bullet$ la proiezione canonica. Sia L la restrizione di π a W_0, che è un operatore lineare: dimostriamo che L è iniettivo e suriettivo (qui serve solo che W_0 sia un supplementare algebrico di V_0). Se $w \in W_0$ e $Lw = 0$, allora $w \in V_0$. Essendo $w \in W_0$ deduciamo $w = 0$. Sia ora $u_\bullet \in V_\bullet$: costruiamo $w \in W_0$ tale che $Lw = u_\bullet$. Sia $u \in u_\bullet$ e sia $u = v + w$ la sua decomposizione con $v \in V_0$ e $w \in W_0$. Allora $Lw = \pi w = \pi u = u_\bullet$. Ciò mostra che L è un isomorfismo algebrico. Siccome L è anche continuo e tutti gli spazi coinvolti sono di Banach, deduciamo che L è un isomorfismo grazie al Teorema dell'applicazione aperta. Viceversa, sia W_0 è un supplementare algebrico di V_0 isomorfo a V/V_0. Siccome il quoziente è completo, anche W_0 lo è. Dunque W_0 è chiuso in V.

3.17. Mostriamo che un qualunque supplementare algebrico W_0 di V_0 è anche supplementare topologico. Il discorso dell'esercizio precedente dimostra che W_0 è algebricamente isomorfo a V/V_0. Siccome quest'ultimo ha dimensione finita, anche W_0 ha dimensione finita. Pertanto W_0 è chiuso.

6.7. L'operatore non è chiuso dato che la condizione $v_n \in D(L)$ per ogni n e le due convergenze uniformi $v_n \to v$ e $v_n' \to w$ non implicano $v \in D(L)$. Si prenda ad esempio $v_n(x) = \int_0^x (t^2 + 1/n)^{1/2}\, dt$ e $v(x) = \int_0^x |t|\, dt$, così che $v_n \in C^\infty[0,1]$. Siccome $(t^2 + 1/n)^{1/2} \to |t|$ uniformemente in $[0,1]$, abbiamo che $v_n \to v$ e $v_n' \to v'$ in $C^0[0,1]$. D'altra parte $v \notin C^2[0,1]$.

6.8. L'operatore è chiuso in quanto la condizione $v_n \in D(L)$ per ogni n e le due convergenze uniformi $v_n \to v$ e $v_n'' \to w$ implicano $v \in D(L)$ e $w = v''$. La dimostrazione si può fondare sulla disuguaglianza

$$\|v'\|_\infty \le M \left(\|v\|_\infty + \|v''\|_\infty\right) \quad \text{per ogni } v \in C^2[0,1]$$

che vale per una certa costante M. Applicato ciò alle differenze $v_n - v_m$, si deduce che le due convergenze dell'ipotesi e la completezza di $C^0[0,1]$ implicano che anche $\{v_n'\}$ converge uniformente e si conclude. Resta da dimostrare la disuguaglianza scritta sopra e un modo è il seguente. Si ha

$$v'(x) = v'(y) + \int_y^x v''(t)\, dt \quad \text{per ogni } x, y \in [0,1] \quad \text{da cui} \quad |v'(x)| \le |v'(y)| + \|v''\|_1 .$$

Prendendo l'estremo superiore rispetto a x e l'integrale rispetto a y di ambo i membri si deduce

$$\|v'\|_\infty \le \|v'\|_1 + \|v''\|_1 \quad \text{da cui} \quad \|v'\|_\infty^2 \le 2\|v'\|_1^2 + 2\|v''\|_1^2 \le 2\|v'\|_2^2 + 2\|v''\|_\infty^2 .$$

D'altra parte si ha anche

$$\|v'\|_2^2 = \int_0^1 (v'(t))^2\, dt = -\int_0^1 v(t)\, v''(t)\, dt + [vv']_0^1 \le \|v\|_\infty \|v''\|_\infty + 2\|v\|_\infty \|v'\|_\infty$$

e la disuguaglianza di Young elementare fornisce per ogni $\varepsilon > 0$

$$\|v'\|_2^2 \le \frac{1}{2}\, \|v\|_\infty^2 + \frac{1}{2}\, \|v''\|_\infty^2 + \frac{1}{\varepsilon}\, \|v\|_\infty^2 + \varepsilon \|v'\|_\infty^2 .$$

Combinando, deduciamo, sempre per ogni $\varepsilon > 0$

$$\|v'\|_\infty^2 \le \|v\|_\infty^2 + \|v''\|_\infty^2 + \frac{2}{\varepsilon}\, \|v\|_\infty^2 + 2\varepsilon \|v'\|_\infty^2 + 2\|v''\|_\infty^2 .$$

Con $\varepsilon = 1/4$ abbiamo $\frac{1}{2}\|v'\|_\infty^2 \le 9\|v\|_\infty^2 + 3\|v''\|_\infty^2$ da cui facilmente la disuguaglianza voluta.

6.9. La condizione di chiusura di L diventa: dalle appartenenze $v_n \in V \cap W$ per ogni n e dalle convergenze $v_n \to v$ in V e $v_n \to w$ in W segue $v \in V \cap W$ e $w = v$. E ciò è vero (l'uguaglianza $v = w$ si vede passando a sottosuccessioni convergenti q.o.). Dunque L è chiuso. Ma L non è continuo. Infatti la continuità di L equivale all'esistenza di una costante M che rende vera la disuguaglianza $\|v\|_2 \le M\|v\|_1$ per ogni $v \in V \cap W$. Ora ciò è falso già nel caso $\Omega = (0,1)$: con $v_n(t) = t^n$ si ha infatti $\|v_n\|_1 = (n+1)^{-1}$ e $\|v_n\|_2 = (2n+1)^{-1/2}$. Se invece consideriamo il caso degli spazi ℓ^p allora L è continuo: se infatti $p < q$, si ha $\ell^p \subseteq \ell^q$ con immersione continua (Esercizio I.5.31) per cui nel nostro caso $D(L) = V$ e $L \in \mathcal{L}(V;W)$.

7.7. *i*) Per la disuguaglianza di Poincaré (IV.1.19) la forma bilineare è anche coerciva su V_Ω, per cui è applicabile il Teorema di Lax-Milgram. *ii*) Sia $v \in H^1(\Omega)$. Allora $v = (v - v_\Omega) + v_\Omega$ e il primo addendo appartiene a V_Ω. Si ha pertanto

$$\int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla(v - v_\Omega)\,dx = \langle F, v - v_\Omega\rangle = \langle F, v - v_\Omega\rangle + v_\Omega\langle f, 1\rangle = \langle F, v\rangle.$$

7.8. Si usi ora la disuguaglianza di Poincaré (IV.1.20). Per il resto il discorso è identico.

7.9. *i*) Grazie alla (7.12), abbiamo per ogni $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega (A\nabla v)\cdot\nabla v\,dx + \varepsilon\int_\Omega v^2\,dx \ge \alpha\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \varepsilon\int_\Omega v^2\,dx \ge \min\{\alpha,\varepsilon\}\|v\|_{1,2}^2$$

per cui si applica il Teorema di Lax-Milgram. *ii*) Basta prendere $v = 1$ nella (7.15). *iii*) Si sceglie $v = u_\varepsilon$ nella (7.15), si usano la (7.12) e la (IV.1.19) ottenendo con una certa costante c

$$\|u_\varepsilon\|_{1,2}^2 \le c\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx \le \frac{c}{\alpha}\int_\Omega (A\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,dx \le \frac{c}{\alpha}\|F\|_*\|u_\varepsilon\|_{1,2}$$

e si conclude. *iv*) Si applica il Teorema IV.5.1 di compattezza debole e si ottiene $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$ per una sottosuccessione opportuna (si parte da una successione infinitesima $\{\varepsilon_n\}$ qualunque e si estrae). Si scrive la (7.15) e si passa al limite senza difficoltà osservando, per quanto riguarda il primo membro, che $A\nabla u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup A\nabla u$ in $L^2(\Omega)^d$ in quanto $\nabla u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \nabla u$ in $L^2(\Omega)^d$ e $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$.

7.15. Supponiamo A compatto e sia $\{v_n\}$ una successione limitata in V. Per la compattezza di A esiste una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ tale che $\{Av_{n_k}\}$ converga in W a un certo w. Allora, dato che B è continuo, $\{BAv_{n_k}\}$ converge a Bw in Z. Supponiamo ora B compatto e sia $\{v_n\}$ una successione limitata in V. Siccome A è limitato, $\{Av_n\}$ è limitata in W. Per la compattezza di B, la successione $\{BAv_n\}$ ha una sottosuccessione convergente in Z.

7.18. Supponiamo $v_n \rightharpoonup v$ in V. Per dimostrare che $Lv_n \to Lv$ è sufficiente controllare che da ogni sottosuccessione estratta da $\{v_n\}$ si può estrarre ulteriormente una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ tale che $Lv_{n_k} \to Lv$. Consideriamo dunque una qualunque sottosuccessione estratta da $\{v_n\}$ e denotiamola ancora con $\{v_n\}$ per non introdurre troppi indici. Siccome L è compatto, si può estrarre la sottosuccessione nelle condizioni volute.

7.19. Sia $\{v_n\}$ una successione limitata di V. Siccome V è riflessivo, possiamo estrarre $v_{n_k} \rightharpoonup v$ in V per un certo $v \in V$. Applicata l'ipotesi alla successione $\{v_{n_k} - v\}$, che converge debolmente a 0, deduciamo che $L(v_{n_k} - v) \to 0$ in W, cioè che $Lv_{n_k} \to Lv$ in W.

7.20. Sia $\{v_n\}$ limitata in V e sia $M \ge \|v_n\|_2$ per ogni n. Allora, per ogni n e per ogni $x \in (a,b)$, abbiamo $|Lv_n(x)| \le M(b-a)^{1/2}$ per cui $\{Lv_n\}$ è limitata in $C^0[a,b]$. D'altra parte abbiamo anche $|Lv_n(x) - Lv_n(y)| \le M|x-y|^{1/2}$ per ogni n e per ogni $x, y \in (a,b)$, per cui concludiamo che $\{Lv_n\}$ è limitata in $C^{0,1/2}[a,b]$. Per l'Esercizio 7.21, esiste una sottosuccessione $\{Lv_{n_k}\}$ convergente uniformemente a una certa $w \in C^0[a,b]$. Allora $Lv_{n_k} \to w$ anche in $L^2(a,b)$.

Capitolo VIII

1.8. Vediamo solo l'ultima affermazione. Se $\mathcal{F} = \{|\cdot|_i\,,\ i = 1,\ldots,n\}$ è una famiglia finita di seminorme in V, la formula $\|v\| = \max_{i=1,\ldots,n}|v|_i$ definisce ancora una seminorma. Se la famiglia $\mathcal{F}$ è separata allora $\|\cdot\|$ è una norma: infatti da $\|v\| = 0$ segue $|v|_i = 0$ per ogni i e dunque $v = 0$. Controlliamo che $\mathcal{F}$ e $\|\cdot\|$ generano la stessa topologia. Denotiamo con $B_r(0)$ e con $B_r^i(0)$ la palla associata alla norma e la semipalla associata alla i-esima seminorma. Dato $r > 0$ ad arbitrio, se $|v|_i < r$ per ogni i, allora $\|v\| < r$. Dunque $\bigcap_{i=1}^n B_r^i(0) \subseteq B_r(0)$ (di fatto vale l'ugliaglianza). Viceversa, dato un sottoinsieme I di $\{1,\ldots,n\}$ e una famiglia $\{r_i\}_{i\in I}$ di numeri positivi, se r è il loro minimo e $\|v\| < r$, allora $|v|_i \le \|v\| < r \le r_i$ per ogni $i \in I$. Dunque $B_r(0) \subseteq \bigcap_{i\in I} B_{r_i}^i(0)$. Pertanto gli intorni dell'origine nelle due topologie sono gli stessi.

2.5. Siccome, per $\lambda > 0$, $x/\lambda \in B_r(0)$ se e solo se $\|x\|/r < \lambda$, si ha subito $\operatorname{mink}_{B_r(0)}(x) = \inf\{\lambda > 0 :\ x/\lambda \in B_r(0)\} = \|x\|/r$. Dunque la famiglia $\mathcal{F}$ in esame è costituita dalle norme $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|/r$ al variare di $r > 0$ ed è chiaro che $\mathcal{F}$ e $\|\cdot\|$ danno la stessa topologia.

2.7. Sia I un intorno di 0. Siano $\alpha_0 > 0$ e J intorno di 0 tali che $\alpha v \in I$ per ogni $v \in J$ e ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ verificante $|\alpha| \le \alpha_0$. Sia $\delta > 0$ tale che $\delta B \subseteq J$. Allora, per ogni $v \in B$ e α come sopra, si ha $\alpha\delta v \in I$. Ma ciò significa $cv \in I$ per ogni $v \in B$ e $c \in \mathbb{K}$ verficante $|c| \le \alpha_0\delta$, per cui si può prendere $\varepsilon_0 = \alpha_0\delta$.

2.8. Sia I un intorno di 0. Allora esistono $\delta_0 > 0$ e un intorno J di 0 tali che $\delta v_0 + v \in I$ per ogni $\delta \in (0,\delta_0)$ e $v \in J$. Sia $\varepsilon_0 > 0$, dato dall'Esercizio 2.7, tale che $\varepsilon B \subseteq J$ per ogni $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0,\delta_0\}$. Allora, per ogni $v \in B$, si ha $\varepsilon v \in J$ e quindi anche $\varepsilon(v_0 + v) = \varepsilon v_0 + \varepsilon v \in I$. Ma ciò significa $\varepsilon(v_0 + B) \subseteq I$.

2.9. Per l'Esercizio 2.8 basta dimostrare la prima parte. Sia $\{v_n\}$ infinitesima e sia I un intorno di 0. Allora esiste m tale che $x_n \in I$ per ogni $n > m$. Siano $\varepsilon_0 > 0$ e J intorno di 0 tali che $\varepsilon v \in I$ per ogni $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ e $v \in J$, così che $\varepsilon v_n \in I$ per ogni $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ e $n > m$. Per $i = 1,\ldots,m$ sia $\varepsilon_i > 0$ tale che $\varepsilon v_i \in I$ per ogni $\varepsilon \in (0,\varepsilon_i)$. Allora basta scegliere $\varepsilon > 0$ verificante $\varepsilon < \varepsilon_i$ per $i = 0,1,\ldots,m$ per avere $\varepsilon v_n \in I$ per ogni n.

2.11. Sia B limitato. Se $p \in \mathcal{F}$ allora $I = B_1^p(0)$ è un intorno di 0 per cui esiste $r > 0$ tale che $B \subseteq rI = B_r^p(0)$, cioè tale che $p(v) < r$ per ogni $v \in B$. Viceversa, ogni $p \in \mathcal{F}$ si mantenga limitata su B e sia I un intorno di 0. Possiamo supporre $I = \cap_{i=1}^m B_r^{p_i}(0)$ per certe $p_i \in \mathcal{F}$ e un certo $r > 0$. Per $i = 1,\ldots,m$ sia $c_i > 0$ tale che $p_i(v) < c_i$ per ogni $v \in B$. Se $c = \max_i c_i$, allora $p_i(v) < c$ per ogni $v \in B$, cioè $v/c \in I$ per ogni $v \in B$, vale a dire $B \subseteq cI$.

2.12. Scelto un intorno convesso $C \subseteq I$, basta prendere un intorno $J \subseteq C$ che è aperto convesso equilibrato e assorbente dato dal Lemma 2.3, dopo di che J è anche limitato.

2.13. Se V è normabile, la palla unitaria nella norma è un intorno di 0 con le caratteristiche volute. Viceversa, sia V localmente convesso e sia C un intorno limitato di 0. Possiamo supporre che C sia anche aperto convesso ed equilibrato grazie all'Esercizio 2.12. Sia $\|\cdot\| = \operatorname{mink}_C$: allora $\|\cdot\|$ è una seminorma e ora dimostriamo che, più precisamente, è una norma che induce la topologia data. Sia quest'ultima generata dalla famiglia separata $\mathcal{F}$ di seminorme e sia $x \in V$ tale che $\|x\| = 0$. Allora esiste una successione $\{\lambda_n\}$ positiva infinitesima tale che $x/\lambda_n \in C$ per ogni n. Fissata $p \in \mathcal{F}$ ad arbitrio, p si mantiene limitata sul limitato C, per cui esiste una costante c tale che $p(x/\lambda_n) \le c$ per ogni n. Segue subito che $p(x) = 0$. Dunque $p(x) = 0$ per ogni $p \in \mathcal{F}$ e $x = 0$, così che $\|\cdot\|$ è una norma. Inoltre, grazie alle proprietà generali dei funzionali di Minkowski, abbiamo che $C = B_1(0)$, la palla unitaria nella norma. Dimostriamo infine che $\|\cdot\|$ induce la topologia data. Che $B_\varepsilon(0) = \varepsilon C$ sia un intorno di 0 è conseguenza immediata dell'ipotesi. Viceversa, sia I un intorno di 0: dobbiamo trovare una palla $B_\varepsilon(0) \subseteq I$. A questo scopo, basta scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon C \subseteq I$: allora $B_\varepsilon(0) = \varepsilon C \subseteq I$.

2.14. Un'implicazione è ovvia. Supponiamo che esista un aperto non vuoto e limitato C. Scelto $v_0 \in C$, il traslato $C - v_0$ è un intorno limitato dell'origine e concludiamo per l'Esercizio 2.13.

3.14. Sia $\mathcal{T}_0$ la topologia debole. L'Esercizio 3.13 assicura che $\mathcal{T}_0$ rende continuo ogni elemento di V^*. Per concludere, dobbiamo mostrare che, se $\mathcal{T}$ è una topologia che rende continuo ogni elemento di V^*, allora $\mathcal{T}$ è più fine di $\mathcal{T}_0$. Siano $x_0 \in V$ e I un intorno di x_0 in $\mathcal{T}_0$: dobbiamo dimostrare che I è un intorno di x_0 in $\mathcal{T}$. Possiamo supporre che I abbia la forma $I = \{x \in V : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < r,\ i = 1, \ldots, n\}$ per un certo $r > 0$ e certi $f_i \in V^*$. Fissiamo ora i. Siccome $\langle f_i, x - x_0\rangle = \langle f_i, x\rangle - \langle f_i, x_0\rangle$ e f_i è continuo rispetto a $\mathcal{T}$, esiste un intorno J_i di x_0 nella topologia $\mathcal{T}$ tale che $|\langle f_i, x - x_0\rangle| < r$ per ogni $x \in J_i$. Posto allora $J = \bigcup_{i=1}^n J_i$, anche J è un intorno di x_0 nella topologia $\mathcal{T}$ e per ogni $x \in J$ si ha $|\langle f_i, x - x_0\rangle| < r$ per ogni i. Ciò mostra che $J \subseteq I$, cioè che $I \supseteq J$ e, dunque, che I è un intorno di x_0 in $\mathcal{T}$.

3.17. Quanto c'è da dimostrare sostanzialmente coincide con il Corollario VII.2.2.

3.18. Siano $\mathcal{F}_V^*$ e $\mathcal{F}_W^*$ le famiglie di seminorme che generano le due topologie deboli in accordo con la Definizione VIII.3.1. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $q \in \mathcal{F}_W^*$, esistono una costante M e $p_i \in \mathcal{F}_V^*$, $i = 1, \ldots, n$, in numero finito tali che $q(Lv) \le M \max_{i=1,\ldots,n} p_i(v)$ per ogni $v \in V$. Si ha $q(w) = |\langle g, w\rangle|$ per ogni $w \in W$ per un certo $g \in W^*$. Si ha allora $q(Lv) = |\langle g, Lv\rangle| = |\langle f, v\rangle|$ per ogni $v \in V$, ove si è posto $f = g \circ L$ e si è osservato che $f \in V^*$. Dunque si può prendere $M = 1$ e l'unica seminorma $p = |\langle f, \cdot\rangle| \in \mathcal{F}_V^*$.

4.2. Si parta da una successione $\{\Omega_m\}$ di aperti ben contenuti che invade Ω e che goda della proprietà seguente: $\overline{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1}$ per ogni m (la (4.1) garantisce ciò). Basta allora saper costruire, per ogni m, un aperto Ω'_m con $\overline{\Omega}_m \subseteq \Omega'_m \subseteq \Omega_{m+1}$ che sia anche regolare, e il problema si è spostato sul seguente: dati un aperto Ω (diverso da $\mathbb{R}^d$ altrimenti il problema non sussiste) e un suo sottoinsieme compatto K, trovare un aperto regolare compreso fra i due. Sia $\delta > 0$ la distanza fra K e il complementare di Ω, che è un chiuso disgiunto da K. Per ogni $x \in K$ si prenda il cubo aperto $C_x = x + (-\eta, \eta)^d$ ove $\eta > 0$ è scelto in modo che il diametro di C_x sia $\le \delta/2$. Dalla famiglia di tutti questi cubi si estragga una famiglia finita $\{C_{x_i} : i = 1, \ldots, p\}$ che ancora ricopra K e si denoti con Ω' la sua unione. Ora Ω' non è regolare, ma la sua irregolarità non è arbitraria come quella di Ω; inoltre vi è un margine di $\delta/2$ sia fra K e il complementare di Ω' sia fra la chiusura di Ω' e il complementare di Ω. Dunque deve essere possibile regolarizzare Ω' in modo che il nuovo aperto verifichi quanto è richiesto. Il primo passo è evitare una spiacevole situazione che potrebbe accadere per qualche coppia di cubi: i due cubi, che sono aperti, sono disgiunti mentre le loro chiusure hanno punti comuni. Per rimediare basta aumentare leggermente il lato di uno dei due senza compromettere l'inclusione $\Omega' \subseteq \Omega$ e generare guai dello stesso tipo altrove; dopo un numero finito di passi si è a posto, cioè le componenti connesse hanno chiusure fra loro disgiunte, quindi distanti per la Proposizione 1.21, e basta regolarizzare ciascuna delle componenti connesse. Supponiamo dunque Ω' già connesso. A questo punto, se $d = 2$, la situazione è chiara: siamo di fronte a un poligono e basta arrotondarlo vicino ai vertici, e ciò si può fare ottenendo un aperto di classe C^∞. Se $d > 2$ la situazione è più complessa: già con $d = 3$ non è detto che la frontiera di Ω' sia localmente un grafico! Questo fatto spiacevole accade ad esempio prendendo l'interno dell'unione dei due cubi chiusi $C_1 = [0, 2]^3$ e $C_2 = (1, 1, 1) + C_1$ e considerando il punto $x_0 = (1, 2, 1)$: non vi è un punto vista dal quale si riesca a vedere, per un certo $r > 0$, tutto l'insieme $B_r(x_0) \cap \partial\Omega'$, cioè non esiste sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel quale $\partial\Omega'$ si rappresenti come grafico vicino a x_0. Tuttavia, se si inclina leggermente qualche faccia dei cubi si rimedia all'inconveniente e ci si riconduce a regolarizzare qualcosa che, almeno localmente, è un grafico. Dunque si intuisce che è possibile regolarizzare Ω' in modo da soddisfare tutte le richieste.

4.6. Data $v \in C^0(\Omega)$, prendiamo $v_m = v\zeta_m$ ove ζ_m è come suggerito, e verifichiamo che $v_m \to v$ in $C^0(\Omega)$. Sia $K \subset \Omega$ un compatto: dobbiamo controllare che $v_m \to v$ uniformemente in K. Sia m_0 tale che $K \subset \Omega_{m_0}$ e sia $m \ge m_0$. Allora $K \subset \Omega_m$ per cui, per ogni $x \in K$, risulta $\zeta_m(x) = 1$ e quindi $v_m(x) = v(x)$. Dunque $v_m = v$ in K per ogni $m \ge m_0$ e la convergenza desiderata è una banalità. Invece la dimostrazione del fatto che $C_c^0(\Omega)$ non è denso in $C^0(\overline{\Omega})$ è immediata: se $v = 1 \in C^0(\overline{\Omega})$ e $\{v_n\}$ è una successione di elementi di $C_c^0(\Omega)$, risulta $\|v - v_n\|_\infty = 1$ per ogni n, per cui $\{v_n\}$ non può convergere uniformenente a v.

4.18. Lo stesso discorso fatto a partire da un limitato $\mathcal{B}$ di $C^\infty(\Omega)$ abbinato alla regolarità degli Ω_m porta a questo: per ogni successione $\{v_n\}$ di elementi di $\mathcal{B}$, ogni m e ogni multi-indice α, la successione $\{D^\alpha v_n|_{\Omega_m}\}$ ha una sottosuccessione convergente uniformemente in Ω_m. Data allora una successione $\{v_n\}$ di elementi di $\mathcal{B}$, il procedimento diagonale produce una sottosuccessione $\{v_{n_k}\}$ tale che, per ogni m e α, converge uniformemente in Ω_m la successione delle derivate $\{D^\alpha v_{n_k}\}$. La funzione candidata ad essere il limite di $\{v_{n_k}\}$ in $C^\infty(\Omega)$ è la funzione v la cui restrizione a ciascuno degli Ω_m è il limite della successione $\{v_{n_k}|_{\Omega_m}\}$. Effettivamente tale v è ben definita e si conclude senza difficoltà.

4.19. Se $A \subseteq \Omega$ poniamo $\mathcal{B}|_A = \{v|_A : v \in \mathcal{B}\}$ per semplificare il linguaggio. Consideriamo la condizione intermedia

$$i) \quad \mathcal{B}|_K \text{ è equicontinuo per ogni compatto } K \subset \Omega$$

e dimostriamo che essa equivale ad entrambe le condizioni menzionate nell'esercizio. Sia $\mathcal{B}$ relativamente compatto in $C^0(\Omega)$: verifichiamo la $i)$. Sia $K \subset \Omega$ un compatto e sia $\{v_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{B}|_K$. Allora esiste una successione $\{u_n\}$ di elementi di $\mathcal{B}$ tale che $v_n = u_n|_K$ per ogni n. Siccome $\mathcal{B}$ è relativamente compatto, questa ha una sottosuccessione convergente in $C^0(\Omega)$. Restringendo a K otteniamo una sottosuccessione di $\{v_n\}$ che converge in $C(K)$. Ciò mostra che $\mathcal{B}|_K$ è relativamente compatto in $C(K)$, dunque equicontinuo per il Teorema di Ascoli. Valga ora la $i)$: dimostriamo che $\mathcal{B}$ è relativamente compatto in $C^0(\Omega)$. Sia dunque $\{v_n\}$ una successione di elementi di $\mathcal{B}$: dobbiamo costruire una sottosuccessione convergente in $C^0(\Omega)$. Fissiamo una successione $\{\Omega_m\}$ di aperti ben contenuti che invade Ω e osserviamo che l'ipotesi implica che $\mathcal{B}|_{\Omega_m}$ è relativamente compatto in $V_m = C^0(\overline{\Omega}_m)$ per ogni m: infatti $\mathcal{B}|_{\Omega_m}$ è anche limitato in V_m come conseguenza della limitatezza di $\mathcal{B}$ e possiamo applicare il Teorema di Ascoli. In particolare da ogni sottosuccessione estratta da $\{v_n\}$ si può ulteriormente estrarre una sottosuccessione convergente uniformemente in Ω_m. Allora con il metodo diagonale di Cantor estraiamo da $\{v_n\}$ una sottosuccessione che converge uniformemente in ciascuno degli Ω_m. Ma ciò significa che la sottosuccessione converge in $C^0(\Omega)$. Quindi $\mathcal{F}$ è relativamente compatto. Abbiamo dunque dimostrato che $\mathcal{B}$ è relativamente compatto se e solo se vale la $i)$.

Valga ora la $i)$ e sia $x_0 \in \Omega$: per soddisfare la condizione dell'enunciato basta, banalmente, prendere un intorno compatto di x_0. Supponiamo infine che ogni $x_0 \in \Omega$ abbia un intorno I tale che $\mathcal{B}|_I$ sia equicontinuo e dimostriamo la $i)$. Siano dunque $K \subset \Omega$ un compatto e $\varepsilon > 0$: dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che $|v(x) - v(y)| \le \varepsilon$ per ogni $v \in \mathcal{B}$ e ogni coppia di punti $x, y \in K$ verificanti $|x - y| \le \delta$. Per ogni $z \in K$ sia $r(z) > 0$ tale che $B_{2r(z)}(z) \subseteq \Omega$ e $\mathcal{B}|_{B_{2r(z)}(z)}$ sia equicontinuo. Considerando il ricoprimento di K costituito dalla palle $B_{r(z)}(z)$, vediamo che esistono punti $z_i \in K$, $i = 1, \ldots, m$, tali che, posto $r_i = r(z_i)$, risulti $K \subset \cup_{i=1}^m B_{r_i}(z_i)$ e $\mathcal{B}|_{B_{2r_i}(z_i)}$ sia equicontinuo per $i = 1, \ldots, m$. Per $i = 1, \ldots, m$ sia $\delta_i > 0$ tale che $|v(x) - v(y)| \le \varepsilon$ per $v \in \mathcal{B}$ e ogni coppia di punti $x, y \in B_{2r_i}(z_i)$ verificanti $|x - y| \le \delta_i$ e sia, finalmente, $\delta > 0$ verificante $\delta < \delta_i$ e $\delta < r_i$ per $i = 1, \ldots, m$. Allora possiamo concludere. Siano $v \in \mathcal{B}$ e $x, y \in K$ tali che $|x - y| \le \delta$. Scelto i tale che $x \in B_{r_i}(z_i)$ si ha $|x_i - y| < r_i + \delta < 2r_i$ per cui $y \in B_{2r_i}(z_i)$. Ma $x \in B_{2r_i}(z_i)$ e $|x - y| \le \delta \le \delta_i$. Dunque $|v(x) - v(y)| \le \varepsilon$.

4.20. Verifichiamo che le seminorme sono ben definite. Fissiamo $v \in V$ e $\lambda > 0$. Allora esiste r, che possiamo supporre ≥ 1, tale che $|v(x)| \le |x|^{-\lambda}$ per $|x| > r$. Segue $|v(x)| \le 1$ e dunque $(1 + |x|^\lambda)|v(x)| \le 2$ per $|x| > r$. D'altra parte $(1 + |x|^\lambda)|v(x)| \le M$ se $|x| \le r$ per una certa costante M. Dunque $|v|_\lambda < +\infty$. La famiglia è ovviamente separata: ogni seminorma è addirittura una norma. Una famiglia equivalente si ottiene lasciando variare λ fra gli interi positivi anziché in tutto $(0, +\infty)$. Infatti, se $\lambda > 0$ e $n \ge \lambda$, si ha $|x|^\lambda |v(x)| \le |x|^n |v(x)|$ per $|x| \ge 1$ e $|x|^\lambda |v(x)| \le |v(x)|$ per $|x| \le 1$, da cui facilmente $|v|_\lambda \le 2|v|_n$. Dunque lo spazio ottenuto è localmente convesso metrizzabile. Dimostriamo la completezza. Sia $\{v_n\}$ di Cauchy. Allora, per ogni $\lambda > 0$, le funzioni v_n^λ definite da $v_n^\lambda(x) = (1 + |x|^\lambda)v_n(x)$ costituiscono una successione di Cauchy nello spazio $C_b^0(\mathbb{R}^d)$ delle funzioni continue e limitate munito dell'usuale norma $\|\cdot\|_\infty$. Dunque tale successione converge uniformemente a una funzione continua limitata v^λ. Siccome la convergenza uniforme implica quella puntuale e vale il legame $(1 + |x|^\mu)v_n^\lambda(x) = (1 + |x|^\lambda)v_n^\mu(x)$ per ogni x, n, λ e μ, tale legame passa al limite e la definizione $v(x) = (1 + |x|^\lambda)^{-1} v^\lambda(x)$ non dipende da λ. A questo punto è chiaro che $v \in V$ e che $\{v_n\}$ converge a v nella topologia considerata. Infine la continuità dell'immersione di V in $C^0(\mathbb{R}^d)$ è immediata. Per ogni $v \in V$, per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^d$ e per ogni $\lambda > 0$ abbiamo infatti $\sup_K |v| \le |v|_\lambda$ (e sarebbero bastati un solo valore di λ e una costante moltiplicativa, entrambi dipendenti da K, anzi meno ancora).

4.23. Controlliamo solo l'ultima affermazione. Poniamo $V = \mathcal{G}^s_L(\omega)$. Innanzi tutto una famiglia numerabile di seminorme che genera la stessa topologia si ottiene rimpiazzando la famiglia dei compatti con una successione di aperti ben contenuti che invade Ω. Dunque V è localmente convesso metrizzabile. Vediamo la completezza. Sia $\{v_n\}$ una successione di Cauchy. Allora, per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^d$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste m tale che $L^{-|\alpha|}(\alpha!)^s \sup_K |D^\alpha v_{n'} - D^\alpha v_{n''}| \le \varepsilon$ per ogni $n', n'' \ge m$ e per ogni multi-indice α. In particolare, ogni volta che fissiamo K e α, vediamo che $D^\alpha v_n$ è di Cauchy in $C^0(K)$. Deduciamo che $\{v_n\}$ è di Cauchy in $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, dunque convergente in tale spazio a una certa funzione v. Mostriamo che $v \in V$. Riapplichiamo la condizione di Cauchy con K qualunque e $\varepsilon = 1$ e conserviamo le notazioni già introdotte. Scegliamo $n' = m$ e $n'' = n$ arbitrario $\ge m$. Facendo tendere n all'infinito otteniamo $L^{-|\alpha|}(\alpha!)^s |D^\alpha v_m(x) - D^\alpha v(x)| \le 1$ per ogni $x \in K$ e ogni multi-indice α. Siccome $v_m \in V$, concludiamo che $L^{-|\alpha|}(\alpha!)^s |D^\alpha v(x)| \le 1 + |v_m|_{K,s,L}$ per ogni $x \in K$ e ogni multi-indice α, quindi che la seminorma $|v|_{K,s,L}$ è finita. Ciò prova che $v \in V$. Per dimostrare la cocvergenza di $\{v_n\}$ a v dobbiamo controllare che tutte le seminorme, calcolate su $v_n - v$, danno successioni infinitesime. Fissiamo dunque il compatto K e $\varepsilon > 0$. Riapplichiamo ancora una volta la condizione di Cauchy, con tali K ed ε, e usiamo le notazioni introdotte all'inizio e la corrispondente disuguaglianza. Scegliamo $n' = n \ge m$ e $n'' \ge m$ arbitrari. Facendo tendere n'' all'infinito otteniamo $L^{-|\alpha|}(\alpha!)^s |D^\alpha v_n(x) - D^\alpha v(x)| \le \varepsilon$ per ogni $x \in K$, ogni multi-indice α e ogni $n \ge m$. Dunque $|v_n - v|_{K,s,L} \le \varepsilon$ per ogni $n \ge m$.

4.25. Supponendo Ω intervallo (aperto), dobbiamo controllare che, se $L > 0$ e $v \in \mathcal{G}^1_L(\Omega)$, allora v è analitica. Sia $x_0 \in \Omega$. Scelto $\delta > 0$ tale che il compatto $K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sia incluso in Ω, per ogni intero positivo α e $x \in K$ scriviamo la formula di Taylor adatta allo scopo. Troviamo ξ compreso fra x_0 e x tale che

$$\left| v(x) - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \right| = \left| \frac{f^{(\alpha)}(\xi)}{\alpha!}\,(x - x_0)^\alpha \right| \le L^\alpha |v|_{K,1,L} |x - x_0|^\alpha = |v|_{K,1,L} (L|x - x_0|)^\alpha.$$

Se, in aggiunta, supponiamo $|x - x_0| < 1/L$, deduciamo che $v(x)$ è la somma della serie di Taylor.

4.29. Una famiglia numerabile di seminorme che genera la stessa topologia si ottiene lasciando variare p solo negli interi positivi. Per controllare tale equivalenza dobbiamo, per ogni $p \in [1, +\infty)$, trovare una costante M e un numero finito di interi positivi p_i, $i = 1, \dots, n$, tali che $\|v\|_p \le M \sum_{i=1}^n \|v\|_{p_i}$ per ogni $v \in V$. Se p è già intero la situazione è banale. In caso contrario, scegliamo $n = 2$ e $p_1 = 1$ e come p_2 prendiamo un intero $m > p$. Allora $1 < p < m$ e possiamo usare la disuguaglianza di interpolazione, valida per un opportuno $\vartheta \in (0,1)$, e la disuguaglianza di Young con gli esponenti ϑ^{-1} e $(1-\vartheta)^{-1}$, che sono coniugati fra loro. Per ogni $v \in V$ abbiamo allora

$$\|v\|_p \le \|v\|_1^\vartheta \|v\|_m^{1-\vartheta} \le \frac{1}{\vartheta}\,\|v\|_1 + \frac{1}{1-\vartheta}\,\|v\|_m \le M\,(\|v\|_1 + \|v\|_m)$$

con ovvia scelta di M. Dunque V è uno spazio localmente convesso metrizzabile. La completezza si dimostra poi facilmente: se $\{v_n\}$ è una successione di Cauchy, allora essa è di Cauchy in ogni $L^p(\Omega)$, dunque convergente in ciascuno di tali spazi. Ma la funzione limite v è la stessa per ogni p, per cui $v \in V$ e $v_n \to v$ in V.

Sia ora Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$: dobbiamo dimostrare che non esiste alcuna norma che induce la topologia di V. Per assurdo una tale norma $\|\cdot\|$ esista. Allora valgono le disuguaglianze

$$\|v\| \le M \sum_{i=1}^m \|v\|_{p_i} \quad \text{e} \quad \|v\|_p \le M_p \|v\| \quad \text{per ogni } v \in V.$$

Precisamente la prima vale per opportune scelte di M, m e $p_1, \ldots, p_m \in [1, +\infty)$; per quanto riguarda la seconda, per ogni $p \in [1, +\infty)$, essa vale con un'opportuna costante M_p. Ma allora, in V, la norma $\| \cdot \|$ è equivalente alla norma indotta dallo spazio dell'intersezione finita di $L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, m$, spazio che denotiamo con W per semplicità. La completezza già dimostrata di V, che necessariamente coincide con la completezza dello spazio normato $(V, \| \cdot \|)$, implica la completezza di V rispetto alla norma indotta da W. Dunque V è un sottospazio chiuso di W, mentre si può facilmente vedere che V è addirittura denso in W, assurdo.

Un altro modo di vedere che le disuguaglianze precedenti portano all'assurdo è il seguente. Siano $x_0 \in \Omega$ e q il massimo dei p_i e consideriamo la successione $\{v_n\} = \{c_n \chi_n\}$ ove χ_n è la funzione caratteristica della palla $B_{1/n}(x_0)$, che possiamo supporre inclusa in Ω, e c_n è un coefficiente positivo da determinare in modo che $v_n \to 0$ in $L^q(\Omega)$ ma non in tutti gli $L^p(\Omega)$ con $p > q$. Detta μ la misura di $B_1(0)$, la misura di $B_{1/n}(x_0)$ vale μn^{-d} per cui, per ogni $p \in [1, +\infty)$, abbiamo $\|v_n\|_p^p = \mu n^{-d} c_n^p$. Scegliamo allora c_n in modo che $\{n^{-d} c_n^p\}$ sia infinitesima se $p = q$ e non lo sia se p è troppo grande. In ogni dimensione $d \geq 1$ ciò si realizza prendendo ad esempio c_n definita dalla formula $n^{-d} c_n^q = n^{-1/2}$, dato che $n^{-d} c_n^p = n^{-d+(p/q)(d-1/2)}$ ha esponente negativo se $p = q$ e positivo se p è abbastanza grande. In tali condizioni $v_n \to 0$ in $L^q(\Omega)$, dunque anche $L^p(\Omega)$ con ogni $p \leq q$, in particolare in $L^{p_i}(\Omega)$ per $i = 1, \ldots, m$. La prima disuguaglianza fornisce allora $\|v_n\| \to 0$. Ma se prendiamo p abbastanza grande vediamo che contraddiciamo la seconda.