ANALISI FUNZIONALE

Prova scritta del 21 gennaio 2016

Svolgere **una sola** domanda di teoria e **non più di 3** esercizi. Rispondere in modo soddisfacente alla domanda di teoria e svolgere in modo completo 2 esercizi è sufficiente per ottenere il massimo dei voti.

Esercizio 1. (a) Si consideri l'operatore lineare non limitato $A : D(A) \to L^2(0,1)$ definito da

$$L^2(0,1) \supset D(A) := H^1(0,1), \qquad (Au)(x) := xu'(x), \tag{1}$$

ove si intende che u' denota la derivata debole di u. Dimostrare che A è densamente definito. Dire se A è chiuso. Determinare l'aggiunto $A^* : D(A^*) \to L^2(0,1)$ e specificare in particolare $D(A^*)$.

(b) Dimostrare che, se $v \in L^2(0,1)$ e se $z(x) := v(x)/x$ ha derivata debole in $L^2(0,1)$, allora v e z stanno entrambe in $H^1(0,1)$.

(c) Si consideri ora l'operatore lineare non limitato $B : D(B) \to L^2(0,1)$ definito da

$$L^2(0,1) \supset D(B) := \{u \in H^1(0,1) : x^{-1}u'(x) \in L^2(0,1)\}, \qquad (Bu)(x) := \frac{u'(x)}{x}. \tag{2}$$

Dimostrare che B è densamente definito. Dire se B è chiuso. Determinare l'aggiunto $B^* : D(B^*) \to L^2(0,1)$ e specificare in particolare $D(B^*)$.

Esercizio 2. (a) Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme limitato e non vuoto di ℓ^p, ove $p \in [1,\infty)$. Dire se le seguenti proprietà sono equivalenti e, in caso contrario, dire quali implicazioni sussistono e quali no:

1. $\mathcal{F}$ è relativamente compatto (rispetto alla topologia forte).
2. Esiste $b = (b_k) \in \ell^p$ tale che $|a_k| \le |b_k|$ per ogni $a = (a_k) \in \mathcal{F}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$.
3. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^p \le \varepsilon \quad \forall\, a = (a_k) \in \mathcal{F}.$$

(b) Fornire una caratterizzazione dei sottoinsiemi relativamente compatti di c_0 (rispetto alla norma "naturale" $\|\cdot\|_\infty$).

Esercizio 3. Si consideri, al variare di $p \in [1,\infty)$, lo spazio

$$Z^p := \{u \in C^0([0,+\infty)) :\ u' \in L^p(0,+\infty)\}, \tag{3}$$

dove u' denota la derivata *debole* di u, definita come di consueto.

(a) Dimostrare che Z^p è completo (e dunque un Banach) rispetto alla norma

$$\|u\|_{Z^p} := |u(0)| + \|u'\|_{L^p(0,+\infty)}. \tag{4}$$

(b) Dire per quali $p \in [1, \infty)$ si ha che $Z^p \subset BC([0, +\infty))$ (si ricorda che quest'ultimo è lo spazio delle funzioni continue e **limitate** su $[0, +\infty)$ dotato dell'usuale norma del sup) e, nei casi affermativi, dimostrare che l'immersione è continua.

(c) Dimostrare che per ogni $p \in [1, \infty)$ si ha che $W^{1,p}(0, +\infty) \subset Z^p$ con immersione continua.

(d) Si consideri ora $W^{1,p}(0, +\infty)$ come sottospazio di Z^p (e sia dunque dotato della norma ereditata da Z^p). Si chiede per quali $p \in [1, \infty)$ $W^{1,p}$ è *chiuso* e per quali p è *denso* in Z^p.

Esercizio 4. Sia $\varphi : L^2(0, 1) \to [0, +\infty]$ definita nel seguente modo:

$$\varphi(u) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 u_x^2 & \text{se } u \in H_0^1(0, 1); \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{5}$$

Nella formula, u_x denota la derivata debole di u.

(a) Dimostrare che φ è convessa, semicontinua inferiormente e propria.

(b) Determinare il sottodifferenziale $\partial\varphi$ (rispetto al prodotto scalare di $L^2(0, 1)$). In particolare, determinare il dominio $D(\partial\varphi) = \{u \in L^2(0, 1) : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$ (**suggerimento:** per determinare $\partial\varphi(u)$, applicare la definizione di sottodifferenziale con la scelta $v = u + th$, $h \in H_0^1(0, 1) = D(\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$).

(c) Rispondere alla domanda precedente nel caso φ sia invece definita da

$$\varphi(u) := \begin{cases} \frac{1}{4} \int_0^1 u_x^4 & \text{se } u \in W_0^{1,4}(0, 1); \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6}$$

Esercizio 5. Sia $I = (a, b)$ un intervallo aperto limitato di $\mathbb{R}$. Diciamo che $C > 0$ è una costante di Poincaré per I se

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq C\|u'\|_{L^2(I)} \quad \forall\, u \in H_0^1(I). \tag{7}$$

(a) Dimostrare che per ogni $C > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|I| = b - a \leq \delta$, allora C è una costante di Poincaré per I.

(b) Dimostrare che $C = 2^{-1/2}$ è una costante di Poincaré per $I = (0, 1)$.

(c) Dimostrare che $C = 2^{-3/2}$ è una costante di Poincaré per $I = (0, 1)$ (ovviamente se si riesce a rispondere a questa domanda non è necessario rispondere alla precedente (b)).

(d) Dimostrare che esistono numeri reali $\alpha < \beta$ tali che per ogni $f, g \in L^2(0,1)$ e per ogni $\lambda \in (\alpha, \beta)$ esiste un'**unica** coppia di funzioni $(u, v) \in H_0^1(0,1)^2$ che risolve in senso debole il sistema

$$\begin{cases} -u'' + v = f, \\ -v'' + \lambda u = g \end{cases} \tag{8}$$

(ove le condizioni di Dirichlet omogenee per u, v sono incorporate nella scelta dello spazio H_0^1).

(e) Mostrare attraverso un esempio che la proprietà precedente (unicità) può non valere per certi valori di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Domanda I. Funzione convessa coniugata e sottodifferenziale.

Domanda II. Proprietà degli spazi riflessivi.

Domanda III. Teorema di Lax-Milgram e applicazioni.