ANALISI FUNZIONALE

Prova scritta del 20 gennaio 2015

Svolgere **una sola** domanda di teoria e **non più di 3** esercizi. Rispondere in modo soddisfacente alla domanda di teoria e svolgere in modo completo 2 esercizi è sufficiente per ottenere il massimo dei voti.

Esercizio 1. Sia data la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definita da

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{2} & \text{se } r \geq 0, \\ 0 & \text{se } r < 0. \end{cases}$$

(a) Determinare la funzione convessa coniugata $\varphi^* : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$.

(b) Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato. Si definisca $\Phi : L^2(I) \to [0, +\infty]$ come

$$\Phi(u) := \int_I \varphi(u(x)) \, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Dimostrare che Φ è convessa, s.c.i. e propria.

(c) Identificando $L^2(I)$ al suo duale tramite Riesz-Fréchet, determinare $\Phi^* : L^2(I) \to (-\infty, +\infty]$.

(d) Si consideri ora $\Phi : L^4(I) \to [0, +\infty]$ definita sempre dalla formula (1). Identificando il duale di $L^4(I)$ con $L^{4/3}(I)$ tramite Riesz, determinare $\Phi^* : L^{4/3}(I) \to (-\infty, +\infty]$. In particolare, specificare in dettaglio qual è il dominio $D(\Phi^*)$.

Esercizio 2. Sia dato lo spazio di Hilbert $H = L^2(0, 1)$ munito degli usuali prodotto scalare e norma. Sia $f : (0, 1) \to [0, +\infty)$ una funzione misurabile e non negativa. Alla funzione f si associ un operatore lineare non limitato definito dalla formula

$$A : D(A) \to H, \qquad (Au)(x) = f(x)u(x), \tag{2}$$

dove il dominio di A, $D(A) \subset H$, è definito da

$$D(A) = \{u \in H : fu \in H\}. \tag{3}$$

(a) Dimostrare che A è chiuso e di dominio denso.

(b) Determinare il dominio $D(A^*)$ e l'espressione analitica dell'operatore aggiunto $A^* : D(A^*) \to H$.

(c) Determinare la classe delle funzioni f che inducono un operatore A limitato.

Esercizio 3. Per ogni $p \in [1, \infty]$, si definisca il seguente sottospazio di ℓ^p:

$$s^p := \Big\{ a = (a_k) \in \ell^p : \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ esiste finita} \Big\}. \tag{4}$$

(a) Determinare, per ogni $p \in [1, \infty]$, la chiusura di s^p in ℓ^p.

(b) Si definisca ora il funzionale lineare $S : s^2 \to \mathbb{R}$ dato da $S(a) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Dire se S è un funzionale limitato rispetto alla norma di ℓ^2.

(c) Si ponga ora su s^2 la norma

$$\|a\|_{s^2} := \|a\|_{\ell^2} + \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right|. \tag{5}$$

Dimostrare che s^2 *non* è completo rispetto alla norma definita in (5).

Esercizio 4. Si ponga

$$K := \big\{ a = (a_j) \in \ell^2 : \ (a_j) \text{ è non crescente} \big\}. \tag{6}$$

(a) Dimostrare che K è un convesso chiuso non vuoto di ℓ^2.

$(b1)$ Sia detta $\varphi = I_K : \ell^2 \to [0, +\infty]$ la funzione indicatrice di K. Inoltre si denoti con H l'insieme degli elementi $b = (b_j) \in \ell^2$ tali che $\sum_{j=1}^{k} b_j \leq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dimostrare che $\varphi^*(b) = +\infty$ per ogni $b \notin H$.

$(b2)$ Dimostrare che $\varphi^*(b) = 0$ per ogni $b \in H$ e dedurre che $\varphi^* = I_H$ (Suggerimento: dimostrare che se $b \in H$ e $a \in K$ allora si ha che $\sum_{j=1}^{k} a_j b_j \leq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$).

Esercizio 5. Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ con $f, f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Sia $I = (0,1)$. Per ogni $u \in L^1(I)$ si definisca la funzione $T(u) \in L^1(I)$ come $T(u)(x) := f(u(x))$. La mappa $T : u \mapsto T(u)$ così definita può essere vista come un operatore (non lineare) tra vari spazi funzionali.

(a) Si dimostri che T è Lipschitz da $L^p(I)$ a $L^p(I)$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

(b) Dire per quali coppie di esponenti $p, r \in [1, \infty]$ si ha che T è **continuo** da $L^p(I)$ a $L^r(I)$.

(c) Dimostrare che T è continuo da $W^{1,p}(I)$ a $W^{1,p}(I)$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

(d) Sia B un sottoinsieme limitato di $H^1(I)$. Dimostrare che T è Lipschitz da B a $H^1(I)$.

Domanda I. Conseguenze del Teorema di Banach-Steinhaus.

Domanda II. Esempi di spazi di Banach separabili e non separabili.

Domanda III. Concetto di derivata debole e proprietà fondamentali dello spazio di Sobolev $W^{1,p}(I)$.