Tutorato di Analisi Matematica 2

Foglio 9 – 24/05/2024

Esercizio 1. Sia $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2, y^3, z^2)$ e sia Ω la regione

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}.$$

Calcolare il flusso di $\boldsymbol{F}$ attraverso $\partial\Omega$.

Esercizio 2. Si considerino la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0,\ 4 - z = x^2 + y^2\}$$

e il campo vettoriale

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2x, x^2\cos(z), z+1).$$

Si calcoli il valore assoluto del flusso di $\boldsymbol{F}$ attraverso la superficie Σ.

Esercizio 3. Si considerino il campo vettoriale

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z, \cosh(x^2+y^2+z^2))$$

e la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 6,\ z \geq 1\},$$

orientata con la normale uscente $\boldsymbol{n}$ tale che $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_3 > 0$. Si calcoli la circuitazione di $\boldsymbol{F}$ lungo il bordo $\partial\Sigma^+$ orientato positivamente.

Esercizio 4. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (\sin(x^2+z) - 2yz, 2xz + \sin(y^2+z), \sin(x^2+y^2))$$

lungo la circonferenza

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1,\ z = 3\},$$

percorsa in modo che la proiezione sul piano xy giri in senso orario.

Esercizio 5. Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana (astroide) di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta, \\ y = \sin^3\theta, \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

Nota: Si osservi che la stessa curva può anche essere descritta dall'equazione cartesiana

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$