Tutorato di Analisi Matematica 2
Lezione 6

3 Maggio 2024

Esercizio 1. Mostrare che, nei casi sotto riportati, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione derivabile $y = \varphi(x)$ in un intorno di x_0 tale che $\varphi(x_0) = y_0$. Calcolare poi $\varphi'(x_0)$.

- $f(x,y) = x + 2y + x\sin(y), \quad (x_0, y_0) = (0,0).$
- $f(x,y) = xe^y + y + 2, \quad (x_0, y_0) = (0,-2).$
- $f(x,y) = xy + \log(xy) - 1, \quad (x_0, y_0) = (1,1).$
- $f(x,y) = y^5 + \log(\frac{x+y}{2}), \quad (x_0, y_0) = (1,1).$

Esercizio 2. Sia S_1 la superficie di equazione

$$\cos(x) + \sin(y) + \tan(z) = 1,$$

sia S_2 la superficie di equazione

$$\sin(x) + \tan(y) + \cos(z) = 1,$$

sia V l'intersezione di S_1 e S_2, e sia $P = (2\pi, 0, 0)$.

- Determinare le equazioni dei piani tangenti in P ad S_1 e S_2.
- Dimostrare che in un intorno del punto P l'insieme V coincide con il sostegno di una curva semplice di classe C^∞.
- Determinare la retta tangente a V nel punto P.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^∞ con matrice jacobiana invertibile in ogni punto. Determinare quali delle seguenti conclusioni sono corrette.

- La funzione è iniettiva.
- La funzione è suriettiva.
- L'immagine è un aperto.
- La funzione manda aperti in aperti.
- La funzione manda chiusi in chiusi.

Esercizio 4. Verificare che l'equazione

$$y \log\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 - x = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno d $(1, 1)$. Calcolare

$$\lim_{x \to 1} \frac{\varphi(x) - 1}{(x-1)^2}.$$

Analogamente verificare che l'equazione

$$x^2 + x(y^2 - 1) + y(y^2 + 1) = 0$$

definisce implicitamente un'equazione $y = \varphi(x)$, e calcolare

$$\lim_{x \to 1} \frac{\varphi(x) + x - 1}{(x-1)^2}.$$

Esercizio 5. Verificare che l'equazione

$$x^2 + y - e^{x^2 - y} = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ su tutto $\mathbb{R}$. Studiare il grafico di φ. Determinare poi i suoi eventuali punti stazionari e la loro natura.

Esercizio 6. Consideriamo la funzione

$$f(x, y, z) = e^{x^2 - z} - \cos(2y + z^2) + \sin^2(xyz).$$

- Dimostrare che in un intorno dell'origine il luogo di zeri di $f(x, y, z)$ è il grafico di una funzione $\varphi(x, y)$ di classe C^∞.
- Calcolare lim inf e lim sup per $(x, y) \to (0, 0)$ della funzione

$$\frac{\varphi(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 7. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = xy + \arctan(x^{2015}) + \sin(y^{2016}).$$

- Dimostrare che per x abbastanza piccolo si ha che $f(x, x) > 0$ e $f(x, -x) < 0$.
- Dimostrare che $f_y(x, y) > 0$ in ogni triangolo del tipo

$$T_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \varepsilon, -x \leq y \leq x\}$$

  con ε sufficientemente piccolo.
- Dimostrare che il luogo di zeri di $f(x, y)$, in un intorno dell'origine, è l'unione del grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ e del grafico di una funzione $x = \psi(y)$, con φ e ψ continue.

Esercizio 8. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = (\cosh(x) - \cos(y) + y, \sinh(x) - \sin(y)).$$

- Dimostrare che per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo esiste un'unica curva $\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(0) = (0,0)$, e
$$f(\gamma(t)) = (te^{2t}, t + \arctan(t) \ \ \forall t \in (-\delta, \delta).$$
- calcolare $\gamma'(0)$.

Esercizio 9. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f \in C^2(\Omega)$ tale che l'hessiana $Hf(x)$ sia non singolare per ogni $x \in \Omega$. Applicando il teorema della funzione inversa alla funzione grad$f$ dimostrare che i punti stazionari di f sono isolati, cioè ogni punto stazionario di f ha un intorno che non contiene altri punti isolati.

Esercizio 10. Siano Γ_1, Γ_2 due superfici di $\mathbb{R}^3$ tali che la loro intersezione sia costituita dal solo punto x_0, ossia
$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{x_0\}.$$
Supponiamo che in un intorno di x_0 la superficie Γ_1 sia descritta dagli zeri di una certa funzione f_1 definita almeno in un intorno U di x_0 e a valori in $\mathbb{R}$ (supponiamo f_1 di classe C^∞ per semplicità). Ossia, supponiamo che esista un intorno U di x_0 tale che f_1 è ben definita su U, e
$$\Gamma_1 \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}.$$
Analogamente supponiamo che Γ_2 sia descritta dagli zeri di una funzione f_2 (nello stesso senso specificato sopra).
Mostrare che $v_1 \coloneqq \mathrm{grad} f_1(x_0)$ e $v_2 \coloneqq \mathrm{grad} f_2(x_0)$ sono vettori linearmente dipendenti.

Esercizio 11. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una mappa di classe C^1. Dimostrare che:

- se $N > M$, e se in x_0 il differenziale di f è suriettivo, allora esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}^N$ di x_0, e una mappa $F : f(U) \to \mathbb{R}^M$ tale che, a meno di permutare le coordinate $x_1, \dots, x_N$, risulta
$$F\big(f(x_1, \dots, x_N\big) = (x_1, \dots, x_M).$$
- Se $N < M$ e se in x_0 il differenziale di f è iniettivo allora esistono aperti U, V di $\mathbb{R}^N$ e un diffeomorfismo $F : U \to V$ tali che $x_0 \in V$ e, a meno di permutare le componenti di f, risulta
$$\pi_N\Big(f\big(F(x_1, \dots, x_N)\big)\Big) = (x_1, \dots, x_N), \ \ \text{ossia } \pi_N \circ f \circ F = Id,$$
dove π_N è la mappa di proiezione sulle prime N coordinate.

Esercizio 12. Consideriamo il sistema
$$\begin{cases} n^2 \int_x^y e^{t^2} \, \mathrm{d}t + n \sin(xy + 1) = 1 \\ ne^x + e^{\sin(y)} = n. \end{cases}$$

- Dimostrare che, per n abbastanza grande, il problema ammette un'unica soluzione (x_n, y_n).
- Determinare quale segno hanno x_n e y_n definitivamente.
- Calcolare il limite della successione y_n/x_n.