Tutorato di Analisi Matematica 2

Foglio 10 – 31/05/2024

Esercizio 1. Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y - 2\sqrt{y} = 0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Si determini la soluzione locale del problema di Cauchy per $y_0 > 0$ e si verifichi che è prolungabile univocamente a tutto l'asse reale. Si traccino i grafici qualitativi delle soluzioni del problema di Cauchy e si commenti infine riguardo all'unicità della soluzione per $y_0 = 0$.

Esercizio 2. Dopo aver determinato l'insieme di definizione E della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{|y-3|}\,\log(1+x),$$

si stabilisca in quali punti di E la funzione f ammette le derivate parziali e in quali punti di E è differenziabile.

Esercizio 3. Si verifichi che l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \log y + e^{x+y} = 0\}$$

è l'unione del grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ e del grafico di una funzione $x = \psi(y)$. Si studi poi qualitativamente i grafici di tali funzioni e si disegni E.
($\star$) **Bonus:** Dimostrare che $\lim_{x \to 0^+} \varphi'(x) = 0$.

Esercizio 4. Siano

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^4(x^4 - 1) = 0\} \quad \text{e} \quad f(x, y) = y - x^2.$$

Si determinino gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti di f su S.

Esercizio 5. Siano date le forme differenziali

$$\omega_0(x, y) = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}, \quad \omega_1(x, y) = \omega_0(x+1, y), \quad \omega_2(x, y) = \omega_0(x-1, y), \quad \omega_3(x, y) = \omega_0(x, y-1).$$

Sia poi $\omega = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3$, dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

(i) Siano r_1 una qualsiasi semiretta uscente da $(-1, 0)$, r_2 una semiretta uscente da $(1, 0)$ ed r_3 una semiretta uscente da $(0, 1)$, e si supponga che le tre semirette non si intersechino. Verificare che ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{r_1, r_2, r_3\}$.

(ii) Sia T il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Verificare che ω è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus T$ se e solo se $a + b + c = 0$.

Esercizio 6. Siano dati

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, 0, x^2 + y^2 + z^2 - 1) \quad \text{e} \quad \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ z \le 0\}.$$

Si calcoli il flusso di F uscente da Σ (si prenda la normale esterna $\boldsymbol{n}$ a Σ in modo che $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_3 < 0$).

($\star$) **Esercizio 7.** Si determini l'insieme di definizione E della funzione

$$f(x, y) = \int_1^{x^2 y} \frac{e^{-t}}{t+2}\,dt.$$

Si calcolino poi punti stazionari, punti estremanti, estremo superiore ed estremo inferiore di f.