Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA I

a.a. 2022/2023

Scritto del 23 luglio 2024

---

1. M-F Riportare solo il risultato

Data la funzione $F(x,y) = 2x^2y - 4x^2 - xy^2 + 4x$ determinare quali punti dell'insieme $Z(F) = \{F = 0\}$ sono singolari (ovvero tali che il teorema di Dini non sia applicabile né rispetto a x né rispetto a y).

2. M-F Riportare solo il risultato

Si consideri la forma differenziale

$$\omega_0(x,y) = \frac{-y\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{x\ \mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

e si definisca la forma $\omega(x,y) := \omega_0(x-1,y-1) + \omega_0(x-1,y-2) + \omega_0(x-2,y+1)$. Determinare il minimo tra i valori dell'integrale di ω lungo tutte le curve γ date dalla somma dell'intervallo $[0,3]\times\{0\}$ percorso in direzione delle x decrescenti e del grafico di una generica funzione $f \in C^1([0,3];\mathbb{R})$ tale che $f(0) = f(3) = 0$, $f(1) \neq 1, 2$ e $f(2) \neq -1$ percorso in direzione delle x crescenti.

3. M-F Riportare il risultato e una <u>motivazione sintetica</u>

Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y^2(1+t)^{\alpha-1}, \\ y(1) = 2^{2-\alpha}\alpha. \end{cases}$$

Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione y del problema. Dire inoltre per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ essa risulta definita (almeno) per ogni $t \in [0,+\infty)$.

4. M-F   Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

Determinare il valore massimo e il valore minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2y + xy^2 + 4xy$ sul quadrato chiuso $[-5, 5] \times [-5, 5]$. Determinare anche la presenza di eventuali punti di estremo relativo di f all'interno del quadrato stesso (ovvero in $(-5, 5) \times (-5, 5)$).

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) *Enunciare* il teorema delle funzioni implicite in dimensione qualunque (ovvero per una funzione F di $N+M$ variabili a valori in $\mathbb{R}^M$), riportando in particolare la formula che esprime la matrice Jacobiana della funzione definita implicitamente.

T2. (Fisici) Esprimere la formula di Taylor del secondo ordine per funzioni di N variabili riportando una traccia della dimostrazione della formula stessa.

T3. (Fisici) Dare la definizione di spazio metrico completo. Discutere la non-completezza dello spazio $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Trovare due sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{Q}$ che siano completi, costituiti da infiniti punti, e tali che A sia limitato e B non sia limitato.

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M (a) Si ricordi che, se I è un intervallo di $\mathbb{R}$, allora $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se per ogni terna di punti $\alpha, \beta, \gamma \in I$ tali che $\alpha < \beta < \gamma$, si ha che

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} \leq \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}.$$

Dimostrare che, dato un intervallo aperto e limitato (a,b), se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è convessa e $\epsilon > 0$ è sufficientemente piccolo affinché $[a+\epsilon, b-\epsilon]$ sia non vuoto, allora f è Lipschitziana su $[a+\epsilon, b-\epsilon]$. *Suggerimento:* si ragioni sui rapporti incrementali di f considerando i punti $a+\epsilon/2$ e $b-\epsilon/2$.

(b) Dato un intervallo chiuso e limitato $I \subset \mathbb{R}$, trovare un esempio di funzione $f : I \to \mathbb{R}$ che sia convessa ma discontinua (e dunque in particolare non Lipschitziana) su I.

(c) Si ricordi il Teorema del limite della derivata ("Sia data f continua in $[x_0, b)$ e derivabile almeno in (x_0, b). Se esiste finito il $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) =: \ell$, allora f è derivabile a destra in x_0 e $f'_+(x_0) = \ell$"). Usando tale proprietà, dimostrare che se f è convessa e derivabile su un intervallo aperto (a,b), allora $f \in C^1(a,b)$.

(d) Dimostrare che se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto convesso e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è convessa e differenziabile in Ω, allora f è di classe C^1 in Ω e Lipschitziana in ogni sottoinsieme K compatto e convesso di Ω.