Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA I

a.a. 2023/2024

Scritto del 20 giugno 2024

---

1. M-F Riportare solo il risultato

Supponiamo che le funzioni scalari $y = y(t)$ e $z = z(t)$ soddisfino entrambe le equazioni differenziali $y' = z + 1$ e $z' = 2z - y + t$ e che sia inoltre $z(1) = 0$ e $y(1) = 3e + 1$. Allora $z(t)$ vale

2. M-F Riportare solo il risultato

Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{P(x,y)}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}y.$$

Determinare **tutti** i polinomi della forma $P(x,y) = ax + by$ tali che $\int_\gamma \omega = -7\pi/2$, dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$.

3. M-F Riportare il risultato e una <u>motivazione sintetica</u>

Si consideri, al variare di $x \in [0,1]$, il triangolo T nel piano xz aventi vertici nei punti $(0,0)$, $(1,0)$, $(x,1)$, e sia A_x la figura ottenuta dalla rotazione di T attorno all'asse z. Si determinino, al variare di x, il volume di A_x e l'area totale della superficie che la delimita.

4. M-F Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

Sia $B = B(0,1)$ il disco unitario aperto di $\mathbb{R}^2$ centrato nell'origine e si consideri la funzione $f : B \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\ln|xy|} & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0. \end{cases}$$

Dire se f in B è: (a) continua, (b) limitata, (c) derivabile parzialmente, (d) differenziabile, (e) di classe C^1.

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Sia X uno spazio metrico. Dare le definizioni di sottoinsieme compatto e di sottoinsieme compatto per successioni di X. Dimostrare che se $K \subset X$ è compatto per successioni, allora K è completo.

T2. (Fisici) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto convesso. Dare la definizione di funzione convessa da Ω a $\mathbb{R}$. Dimostrare che, se f è convessa e di classe C^2, allora la sua matrice Hessiana è, in ogni punto di Ω, semidefinita positiva.

T3. (Fisici) Dare la definizione di insieme connesso. Dimostrare che, in $\mathbb{R}$, se I è connesso, allora I è necessariamente un intervallo (può essere utile richiamare preliminarmente la definizione generale di intervallo).

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M (a) Sia x_0 un punto fissato di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare, utilizzando la disuguaglianza triangolare, che la "funzione distanza" $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = |x - x_0|$, è Lipschitziana. Dire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ f è differenziabile e determinare il differenziale di f dove questo esiste.

Sia ora K un sottoinsieme compatto non vuoto di $\mathbb{R}^2$.

(b) Si supponga che $x_0 \notin K$. Dimostrare che f ha almeno un punto di minimo assoluto su K.

(c) Dimostrare che, se K è convesso, allora, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus K$, f ha un **unico** punto di minimo assoluto su K.

(d) Mostrare con un esempio che, se K non è convesso, allora per qualche $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ f può avere **infiniti** punti di minimo assoluto distinti su K.

(e) Si consideri ora la funzione "distanza da K" definita (su tutto $\mathbb{R}^2$) da

$$\varphi(x) = d(x, K) := \min\{|x - k| : \ k \in K\}.$$

Dimostrare che φ è Lipschitziana. Supponendo, infine, che K sia limitato ma non necessariamente compatto, si definisca φ come sopra, ma sostituendo il minimo con l'estremo inferiore. È ancora vero che φ è Lipschitziana?