Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

Analisi Matematica 2 – Complementi di Analisi Matematica I

a.a. 2023/2024

Scritto del 9 luglio 2024

---

1. M-F Riportare solo il risultato

Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \pi/2, |y| \leq \cos x\}$. Dato il campo vettoriale $F(x, y) = (3xy^2 \sin x, -xy^3 \cos x + x^2 y)$, calcolare il flusso di F uscente da D, $\int_{\partial D} F \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s$, dove $\boldsymbol{n}$ è il versore normale esterno a D.

2. M-F Riportare solo il risultato

Determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy dati dall'equazione differenziale $y' = t(1 - y^2)$ rispettivamente con le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ e $y(0) = 2$.

3. M-F Riportare il risultato e una motivazione sintetica

Si consideri la funzione $f(x, y) = (\sin x \cos y, \cos x \sin y)$. Siano Q il quadrato chiuso $[0, \pi] \times [0, \pi]$ e Q_0 l'interno di Q, ovvero il quadrato aperto $(0, \pi) \times (0, \pi)$.

(a) Dire se f è iniettiva su Q.

(b) Determinare in quali punti $(x, y) \in Q_0$ è applicabile il teorema di invertibilità locale.

(c) Dire se f è iniettiva su Q_0.

(d) Dimostrare che per ogni $P \in f(Q)$ si ha $|P| \leq 1$ (può essere utile studiare la funzione scalare $g(x, y) = |f(x, y)|^2$).

4. M-F Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

(a) Determinare l'area della porzione A di piano descritta dalle relazioni

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \ xy \leq \sqrt{3}/4\right\}.$$

(b) Calcolare $\displaystyle\iint_A x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ e $\displaystyle\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Data l'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea a coefficienti variabili $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$, descrivere l'insieme delle soluzioni e presentare il metodo di variazione delle costanti.

T2. (Fisici) Enunciare il teorema di cambiamento di variabile per integrali multipli (eventualmente limitandosi al caso bi- o tridimensionale). Che cosa si intende per coordinate curvilinee ortogonali?

T3. (Fisici) Dare la definizione di insieme misurabile di $\mathbb{R}^2$. Enunciare inoltre la caratterizzazione degli insiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$, e quella degli insiemi di misura nulla, in termini di ricoprimenti con rettangoli.

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M (a) Enunciare la caratterizzazione degli insiemi di misura nulla di $\mathbb{R}$ in termini di ricoprimenti con intervalli (cioè rettangoli 1-dimensionali).

(b) Fare un esempio di insieme numerabile e limitato di $\mathbb{R}$ che non sia misurabile.

(c) Dimostrare che l'insieme (numerabile) $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ è misurabile e ha misura nulla. Più in generale, dimostrare che se un insieme numerabile e limitato di $\mathbb{R}$ ha un solo punto di accumulazione allora è misurabile e ha misura nulla. Estendere al caso di un insieme numerabile e limitato con un numero finito di punti di accumulazione.

(d) Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ponga $A_m = A + 1/m$ (ovvero gli elementi di A_m sono gli elementi di A traslati a destra di $1/m$). Si ponga quindi $\boldsymbol{A} := \cup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ e si osservi che $\boldsymbol{A}$ è numerabile (perché?). Si dimostri che tutti gli elementi di A sono punti di accumulazione di $\boldsymbol{A}$.

(e) Si dimostri che tutti i punti di accumulazione di $\boldsymbol{A}$ diversi da 0 sono elementi di A. *Suggerimento:* si osservi che ogni elemento di $\boldsymbol{A}$ ha la forma $(1/n) + (1/m)$ per qualche $n, m \in \mathbb{N}$. Se $\lambda \neq 0$ è un punto di accumulazione di $\boldsymbol{A}$ allora si ha $((1/n_k) + (1/m_k)) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ per opportune successioni $\{1/m_k\}$ e $\{1/n_k\}$. Applicando il teorema di Bolzano-Weierstrass...

(f) $\boldsymbol{A}$ è misurabile? Se sì, $\boldsymbol{A}$ ha misura nulla?