Tutorato di Analisi II

1. Considerare l'equazione

$$x(y - 4x^2y^3 - x^3) = 0. \tag{1}$$

(a) Discutere l'applicabilità del teorema del Dini al variare di (x_0, y_0) nell'insieme S delle soluzioni di (1), con l'intesa che x sia la variabile indipendente.

(b) Determinare, là dove appropriato, un'equazione differenziale in forma normale per la funzione implicitamente definita, e individuarne i punti stazionari.

(c) Parametrizzare S a tratti, intersecandolo con il fascio di rette passante per l'origine, e tracciare un grafico approssimativo.

2. Considerare l'equazione

$$(x^2 + y^2 - 1)(y^2 - x) = 0. \tag{2}$$

(a) Individuare tutti i punti (x_0, y_0) nell'insieme delle soluzioni di (2) in cui è applicabile il teorema del Dini, con l'intesa che x sia la variabile indipendente.

(b) Per ciascuna delle coppie (x_0, y_0) trovate in (a), determinare aperti massimali $\omega' \ni x_0$, $\omega'' \ni y_0$ tali che il problema della funzione implicita ammetta una e una sola soluzione $g : \omega' \to \omega''$, e calcolarla.

3. $\boxed{\text{Svolto}}$ (*Trisettrice di Maclaurin.*) Considerare l'equazione

$$2x(x^2 + y^2) = \alpha(3x^2 - y^2), \tag{3}$$

ove $\alpha > 0$ è fissato.

(a) Verificare l'applicabilità del teorema del Dini al variare di (x_0, y_0) nell'insieme T delle soluzioni di (3), con l'intesa che x sia la variabile indipendente.

(b) Studiare i punti stazionari della funzione g il cui grafico è l'intersezione tra T e il primo quadrante (assi esclusi). Detto poi (x_1, x_2) il dominio di definizione di g, dimostrare che la derivata destra $g'_+(x_1)$ esiste finita e non dipende da α.

4. Dimostrare che esiste un intorno I di $t_0 = 0 \in \mathbb{R}$ nel quale è definita una e una sola soluzione del problema di Cauchy bilatero

$$\begin{cases} e^{x''(t)-1} + (1 + x^2(t))x''(t) = x'(t) + 2, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \end{cases}$$

e calcolare lo sviluppo di Maclaurin di ordine 3 della soluzione.

5. (a) Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$(x^2 + y^2)(1 + z^2) = 4.$$

Dimostrare che Σ è una superficie regolare di classe C^∞ e fornire l'equazione cartesiana del piano tangente a Σ nel punto $(1, 1, 1)$.

(b) Detto $\Sigma' \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z = x$, dimostrare che l'intersezione $\Gamma := \Sigma \cap \Sigma'$ è una curva regolare di classe C^∞. Costruire due parametrizzazioni distinte di Γ in un intorno di $(1, 1, 1)$, e fornire in entrambi i casi l'equazione parametrica del piano *normale* a Γ in $(1, 1, 1)$.