Tutorato di Analisi II

1. $\boxed{\text{Svolto}}$ Calcolare gli integrali

(a) $$\int_T e^{2y-x}\,dx\,dy\,,$$ (b) $$\int_T x^3y^{42}\,dx\,dy\,,$$

(c) $$\int_P xy\,dx\,dy\,,$$ (d) $$\int_P \cos\big(\pi(x+y)\big)\,dx\,dy\,,$$

ove T, P indicano gli insiemi

$$T \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le y \le 1 - 2|x|\},$$
$$P \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |2x+y| \le 1,\; 0 < x - y < 2\}.$$

2. Sia μ_n la misura standard su $\mathbb{R}^n$, e sia $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^n$ il *simplesso standard n-dimensionale*, determinato dalla formula

$$\Delta_n \coloneqq \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; \sum_{j=1}^n x_j \le 1 \;\wedge\; \forall j,\; x_j \ge 0\right\}.$$

(a) Calcolare gli integrali

(1) $$\int_{\Delta_2} xy\,d\mu_2(x,y)\,,$$ (2) $$\int_{\Delta_3} xyz\,d\mu_3(x,y,z)\,.$$

(b) Dimostrare induttivamente l'identità

$$\mu_n(\Delta_n) = \frac{1}{n!}.$$

3. $\boxed{\text{Svolto}}$ Si consideri un solido che occupa la regione $A \subseteq \mathbb{R}^3$, la cui densità di massa è rappresentata da una funzione $\rho : A \to \mathbb{R}$ nonnegativa e integrabile. Il *tensore d'inerzia* del solido è l'operatore lineare I di componenti cartesiane

$$I_{jk} \coloneqq \int_A \big(|x|^2\delta_{jk} - x_jx_k\big)\,\rho(x)\,dx\,, \qquad j,k = 1,2,3,$$

dove δ_{jk} è il simbolo di Kronecker. Determinare le componenti I_{jk} per un solido omogeneo di densità unitaria, sapendo che la regione A che occupa si ottiene intersecando la corona sferica di raggi 1 e 2 con il cono circolare di equazioni $z \ge 0$ e $z^2 \ge x^2 + y^2$.

4. (a) Calcolare la misura $\mu_n(E)$ dell'n-ellissoide

$$E := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{a_j^2} \leq 1 \right\},$$

per certe costanti $a_1, \dots, a_n > 0$ assegnate, in funzione della misura $\mu_n(\mathbb{B}^n)$ dell'n-palla unitaria $\mathbb{B}^n := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Esplicitare il risultato nei casi $n = 2, 3, 4$.

(b) Supponendo $n = 3$, e che l'ellissoide E di semiassi a_1, a_2, a_3 sia occupato da un solido omogeneo di densità $\rho : E \to \mathbb{R} : \rho(x) = 1$, determinare le componenti cartesiane del suo *tensore di quadrupolo*, ovvero

$$Q_{jk} := \int_E \left(3x_j x_k - |x|^2 \delta_{jk} \right) \rho(x)\, dx\,, \qquad j, k = 1, 2, 3.$$

Verificare poi che l'operatore lineare Q abbia traccia nulla, cioè $\operatorname{tr} Q = 0$.

5. Sia $A := [0,1]^2 \setminus \{(1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ data dalla formula

$$f(x, y) := \frac{1}{1 - xy}.$$

(a) $\boxed{\text{Svolto}}$ Calcolare l'integrale di f sul dominio $S_0 := \{(x, y) \in A \ : \ y \leq 1 - x\}$.

(b) Sia $(c_n)_n \subset \mathbb{R}$ la successione definita per ricorrenza come segue:

$$c_0 := \frac{1}{2}; \qquad c_{n+1} := \sqrt{\frac{1 + c_n}{2}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Dimostrare che (c_n) è monotona strettamente crescente, e

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 1.$$

(c) Sia $S_n := \{(x, y) \in A \ : \ y \leq 2c_n - x\}$, dove (c_n) indica la successione studiata in (b). Detto I_0 il valore dell'integrale trovato al punto (a), e posto

$$I_n := \int_{S_n \setminus S_{n-1}} f(x, y)\, dx\, dy\,, \qquad \forall n \geq 1,$$

si dimostri

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \frac{\pi^2}{6}.$$