Tutorato di Analisi II

1. $\boxed{\text{Svolto}}$ Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato dalla formula

$$\mathbf{u}(x,y,z) \coloneqq \frac{x^3}{z^2+1}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{y^3}{x^2+1}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{z^3}{y^2+1}\hat{\mathbf{e}}_z, \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

attraverso il bordo della regione cubica $E \coloneqq [-1,1]^3$, dotato dell'orientamento specificato dalla normale esterna a E.

2. Sia $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dato dalla formula

$$\mathbf{v}(x,y,z) \coloneqq yz\,\hat{\mathbf{e}}_x + xz\,\hat{\mathbf{e}}_y + xy\,\hat{\mathbf{e}}_z, \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) $\boxed{\text{Svolto}}$ Dimostrare che, se $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definito per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dalla formula

$$\mathbf{A}(x,y,z) \coloneqq \frac{1}{2}xz^2\,\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{2}y(x^2-z^2)\,\hat{\mathbf{e}}_y,$$

allora vale $\mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{v}$.

(b) $\boxed{\text{Svolto}}$ Sia $\rho > 0$. Calcolare il flusso di $\mathbf{v}$ attraverso la superficie cilindrica

$$\Sigma_\rho \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2=\rho^2,\ z \in [-1,1]\},$$

dotata della normale esterna al cilindro $\{x^2+y^2 \leq \rho^2\}$.

(c) Ripetere il calcolo precedente sostituendo a Σ_ρ la superficie $\Sigma'_\rho \coloneqq \Sigma_\rho \cup \Xi_\rho$, ove Ξ_ρ è la calotta sferica

$$\Xi_\rho \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+(z-1)^2=\rho^2,\ z \geq 1\}.$$

3. Sia $\beta > 0$. Calcolare l'area della regione $S_\beta \subset \mathbb{R}^2$ compresa tra le spirali logaritmiche

$$\left\{(e^{\beta t}\cos t, e^{\beta t}\sin t),\ t \in [0,4\pi]\right\}, \qquad \left\{(e^{2\beta t}\cos t, e^{2\beta t}\sin t),\ t \in [0,2\pi]\right\}.$$

Che cosa succede al limite per $\beta \to 0^+$?

4. Calcolare l'area delle seguenti superfici di $\mathbb{R}^3$:

(a) La scala elicoidale di passo costante $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata dalla funzione

$$\mathbf{r} : [0,2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{r}(t,s) \coloneqq (s\cos t, s\sin t, t).$$

(b) Il nastro elicoidale di passo variabile $\widetilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzato dalla funzione

$$\widetilde{\mathbf{r}} : [0,2\pi] \times [\pi,2\pi] \to \mathbb{R}^3 : \widetilde{\mathbf{r}}(t,s) \coloneqq \left(s\cos t, s\sin t, \frac{t^2}{2}\right).$$