ANALISI 2 - 14/02/24

ES. 1) $f_x = yz \Rightarrow f = xyz + g(y,z)$ ove

$g_{yy} = g_{zz} = 0$ - Dunque $g(y,z) = ayz + by + cz + d$

Da $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$ segue rispettivamente

$d = 0$ e $b = c = 0$ - Dunque $f(x,y,z) = xyz + ayz$

Sostituendo $f(1,1,1) = 4$ ottengo $a = 3$.

ES 2) Se $a = 0$ si vede subito che $y(t) = t^2$

Se $a \neq 0$ ho $y(t) = c_1 e^{-at} + c_2 + \bar{y}$

dove $\bar{y}$ si vede essere $\frac{2}{a} t$ - Imponendo le CI ho

$$y(t) = \frac{2}{a^2} e^{-at} - \frac{2}{a^2} + \frac{2t}{a} \quad \left(\sim a^{-2} \cdot 2 \left(e^{-at} - (1-at)\right) \right)$$

ES 4) (a) $f_x = \dfrac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4}{(\quad)^2}$ e f_y analoga fuori dall'origine

$\nabla f(0,0) = 0$ (direttamente) - Si verifica facilmente

che f_x e f_y sono continue in $(0,0)$ - Dunque $f \in C^1$

(b) Posto $g = f_x$ si ha che $\nabla g(0,0) = (2,0)$

Calcolo $g(x,y) - g(0,0) - \nabla g(0,0) \cdot (x,y)$ - Ho

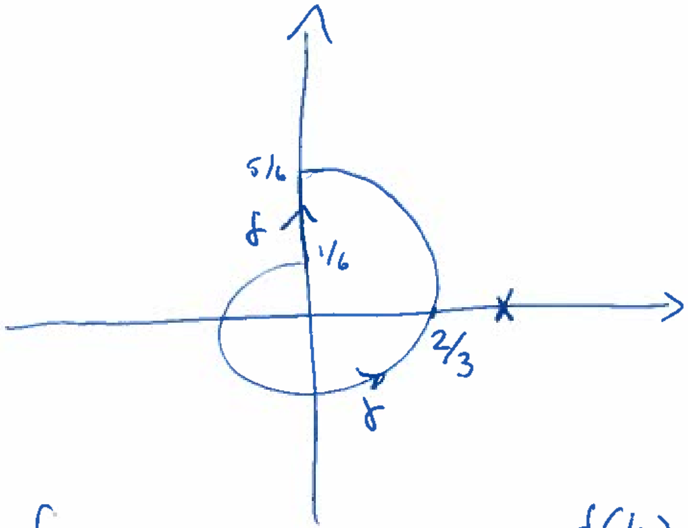
$$\frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4 - 2x^5 - 2xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

Segue g non differenziabile in $(0,0)$ e f non C^2

ANALISI 2 – 14/02/24

ES. 3

(a)



ω è chiusa ma non esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$

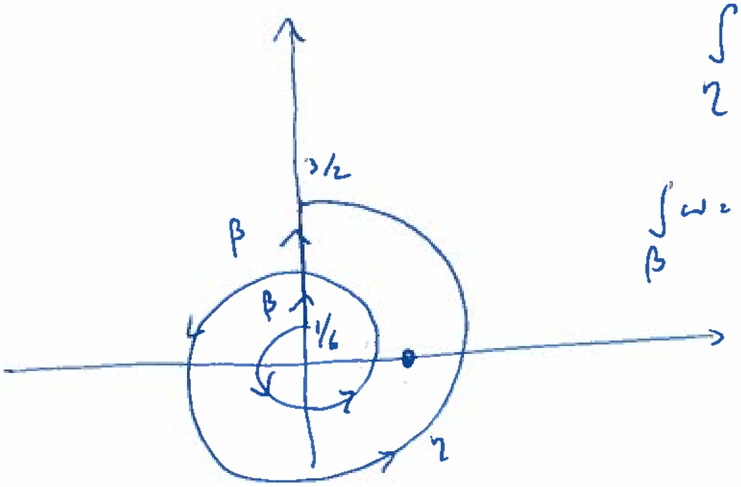
È tuttavia esatta su $B(0, 1-\varepsilon)$, $\varepsilon < 1$

$\delta(t) = (0, t) \quad t \in \left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$

Dunque $\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega =$

$$= \int_{1/6}^{5/6} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan\frac{5}{6} - \arctan\frac{1}{6}$$

(b)



$$\int_\eta \omega = \int_{\eta-\beta} \omega + \int_\beta \omega$$

$$\int_\beta \omega = \arctan\frac{3}{2} - \arctan\frac{1}{6}$$

Per ragioni di omotopia $\int_{\eta-\beta} \omega = \int_{\partial^+ B((1,0),1)} \omega = -2\pi$

Dunque $\int_\eta \omega = -2\pi + \arctan\frac{3}{2} - \arctan\frac{1}{6}$

ES. 5) (a) Esempio: $\sqrt{x}$ su $[0,1]$.

Sia $L = \inf \{ \ell : \ell$ è Lipschitz per $f \}$. Allora $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x, y \in \operatorname{dom} f$, si ha $|f(x) - f(y)| \leq (L+\varepsilon)|x-y|$ da cui anche L è di Lipschitz per la permanenza del segno

(b) $\forall$ poligonale P individuata da una partizione $x_0 = a \leq x_1 < \ldots < x_n = b$ di $[a,b]$ si ha

$$\ell_P(\operatorname{graf} f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(1+L^2)(x_k - x_{k-1})^2} = \sqrt{1+L^2}\, |b-a| =: \phi(|b-a|, L)$$

L'ottimalità si mostra scegliendo un segmento di retta di pendenza pari a L.

c) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

p. es. sull'intervallo $[0,1]$