Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA 2 – COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA I

a.a. 2022/2023

Scritto del 24 luglio 2023

---

1. M-F   Riportare solo il risultato

Sia data la forma differenziale $\omega = w\ \mathrm{d}x + a(x,y,z,w)\ \mathrm{d}y + y\ \mathrm{d}z + x\ \mathrm{d}w$. Determinare un esempio di funzione a per cui ω sia esatta e trovare quindi una primitiva F di ω.

2. M-F   Riportare solo il risultato

Si consideri una lamina omogenea che occupa, nel piano cartesiano xy, la regione E del semipiano $y \geq 0$ delimitata dalla curva di equazione $x^2+y^2 = (x^2+y^2-x)^2$. Individuare l'ordinata del baricentro della figura $E \setminus C$, ottenuta da E rimuovendone la parte contenuta nel disco C di centro $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$.

3. M-F   Riportare il risultato e una <u>motivazione sintetica</u>

Si consideri la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ così parametrizzata: $\alpha(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$, ove $t \in [\sinh 1, \sinh 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Determinare l'area di S. Considerato inoltre il solido V determinato dall'unione di tutti i segmenti aventi come estremi un generico punto $(x,y,z) \in S$ e la rispettiva proiezione $(x,y,0)$ sul piano xy, determinare il volume di V. [Si ricorda che $\sinh\alpha = (e^\alpha - e^{-\alpha})/2$, $\cosh\alpha = (e^\alpha + e^{-\alpha})/2$ e che $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$.]

4. M-F Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

Si consideri il problema di Cauchy costituito dall'equazione $y'(x) = \dfrac{1}{12y(y-1)}$ con la condizione iniziale $y(0) = 1/2$. Sia (a, b) il più grande intervallo di $\mathbb{R}$ su cui tale soluzione può essere definita (si dice, allora, che si considera la soluzione *massimale* del problema). Quanto vale $b - a$? Si consideri, inoltre, il problema di Cauchy dato dalla stessa equazione differenziale con la generica condizione iniziale $y(0) = y_0$. Sia S_0 la regione di $\mathbb{R}^2$ definita come unione dei grafici di tutte le soluzioni massimali di tale problema al variare di $y_0 \in (0, 1)$ e sia S la chiusura di S_0. Determinare l'area di S. Determinare, infine, il massimo e il minimo assoluto assunti dalla funzione $f(x, y) = x + 2y^2$ sull'insieme S.

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Dimostrare che, dati un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e una funzione $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, se P_0 è un punto di minimo relativo per f allora la matrice Hessiana $Hf(P_0)$ è semidefinita positiva.

T2. (Fisici) Si dimostri che un segmento di $\mathbb{R}^2$ ha misura bidimensionale nulla. Anche un'unione numerabile di segmenti ha misura bidimensionale nulla?

T3. (Fisici) Siano E, F insiemi non vuoti di $\mathbb{R}^2$. Dato $x \in \mathbb{R}^2$, si supponga che $x \in \partial E \cap \partial F$. Possiamo allora concludere che $x \in \partial(E \cap F)$? E se $x \in \partial E \cup \partial F$ possiamo concludere che $x \in \partial(E \cup F)$?

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M Sia $f : [0, +\infty)$ una funzione continua e non negativa. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Nel primo caso fornire una dimostrazione, nel secondo un controesempio.

(a) Il $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ certamente esiste, finito o infinito.

(b) Se $\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$ allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$ converge.

(c) Se l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$ converge allora il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ esiste e vale 0.

(d) Se l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$ converge allora anche l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\, \mathrm{d}x$ converge.