Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

Analisi Matematica 2 – Complementi di Analisi Matematica I

a.a. 2022/2023

Scritto del 20 giugno 2023

---

1. M-F Riportare solo il risultato

Determinare la soluzione del problema di Cauchy costituito dall'equazione $y''(t) + 2y'(t) + 1 = 0$ e dalle condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.

2. M-F Riportare solo il risultato

Determinare la lunghezza della curva

$$\gamma(t) = \left(e^t, \sqrt{\frac{3}{2}}e^{2t}, e^{3t}\right), \qquad t \in [0, 1].$$

3. M-F Riportare il risultato e una motivazione sintetica

Sia data la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definita come il luogo dei punti di $\mathbb{R}^3$ in cui $F(x, y, z) = x^2+y-z+1 = 0$. Determinare il punto $P_1 \in S$ di minima distanza di S dall'origine. Data inoltre, per $a \in \mathbb{R}$, S_a descritta come il luogo dei punti in cui $F_a(x, y, z) = x^2 + ay - z + 1 = 0$, determinare al variare di a, il punto P_a avente minima distanza dall'origine. Stabilire infine per quale $a \in \mathbb{R}$ la distanza di P_a dall'origine è massima.

4. M-F   Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

Per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ si consideri il cono $C(a, b) \subset \mathbb{R}^3$ ottenuto come unione di tutti i segmenti aventi come estremi il punto $(a, b, 1)$ e un generico punto $(x, y, 0)$ tale che $x^2 + y^2 \leq 1$ (ciò vale a dire un generico punto appartenente al prodotto cartesiano $\overline{B}(0, 1) \times \{0\}$).

Calcolare, al variare di $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il valore dell'integrale

$$\iiint_{C(a,b)} (x + y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

(si consiglia di integrare per strati considerando, al variare di $z \in [0, 1]$, l'intersezione del cono $C(a, b)$ col piano orizzontale $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$).

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Si dia un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che sia derivabile parzialmente in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ ma che non sia differenziabile né in $(0, 0)$ né in $(1, 1)$.

T2. (Fisici) Si dimostri che se $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^2)$ è una curva regolare (ove dunque si intende che $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$) allora per ogni $t_0 \in (a, b)$ esiste $\delta > 0$ tale che la restrizione di γ all'intervallo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ è grafico di una funzione di una variabile avente anch'essa la regolarità C^1.

T3. (Fisici) Si dia un esempio di forma differenziale ω che sia chiusa, ma non esatta, su $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \big(\{1\} \times \{2\} \times \mathbb{R}\big)$.

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M Sia $f : \mathbb{R}^2 \to (0, +\infty)$ una funzione di classe C^1, tale che $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = 0$, ovvero

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists M > 0 : \ f(x, y) < \epsilon \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |(x, y)| \geq M.$$

Si ponga quindi

$$F(x, y) := \iint_{B((x,y),1)} f(r, s) \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}s,$$

dove $B((x, y), 1)$ rappresenta la palla di centro (x, y) e raggio 1.

(a) Dimostrare, possibilmente in modo rigoroso (utilizzando i risultati della teoria), che F ammette almeno un punto di massimo assoluto;

(b) Dimostrare, possibilmente in modo rigoroso, che F non ammette minimo assoluto;

(c) Determinare i punti di massimo assoluto e il valore massimo assoluto di F nel caso in cui $f(x, y) = e^{-x^2-6x-y^2-8y}$.