Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

Analisi Matematica 2 – Complementi di Analisi Matematica I

a.a. 2022/2023

Scritto del 17 gennaio 2024

---

1. M-F Riportare solo il risultato

Si determini l'insieme dei valori $\lambda \geq 0$ tali che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(t)y'(t) = (t^2+1)^{-1} \\ y(0) = \lambda \end{cases}$$

risulti definita su tutto $\mathbb{R}$.

2. M-F Riportare solo il risultato

Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 con centro $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \frac{2}{2x^2 - y + 2}.$$

3. M-F Riportare il risultato e una <u>motivazione sintetica</u>

(a) Sia data, per $\alpha > 0$, la spirale

$$\gamma_\alpha(t) = \Big(\frac{\cos t}{(\pi+t)^\alpha}, \frac{\sin t}{(\pi+t)^\alpha}\Big), \qquad t \in [0,T]$$

e sia $\ell_T(\gamma_\alpha)$ la sua lunghezza. Determinare per quali α si ha che $\lim_{T\to+\infty} \ell_T(\gamma_\alpha) < +\infty$.

(b) Determinare l'area della porzione di piano delimitata dalle due spirali

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{(\pi+t)^{1/2}}, \frac{\sin t}{(\pi+t)^{1/2}}\right), \eta(t) = \left(\frac{\cos t}{(2\pi+t)^{1/2}}, \frac{\sin t}{(2\pi+t)^{1/2}}\right), \qquad t \in [0,2\pi]$$

e dai segmenti $[(4\pi)^{-1/2}, (3\pi)^{-1/2}] \times \{0\}$, $[(2\pi)^{-1/2}, \pi^{-1/2}] \times \{0\}$.

4. M-F Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

(a) Detta C_r una parametrizzazione della circonferenza di raggio $r > 0$ centrata nell'origine percorsa una volta in senso antiorario, dare un esempio di forma differenziale $\omega \in C^1$ chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tale che

$$\int_{C_1} \omega \neq 0.$$

(b) Dato $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dare un esempio di forma differenziale $\omega \in C^1$ chiusa, ma non esatta, su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), P\}$ tale che, per ogni $r > |P|$, si abbia

$$\int_{C_r} \omega = 0.$$

(c) Dati $P, Q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con $P \neq Q$, determinare condizioni su P e su Q che garantiscano l'esistenza di una forma $\omega \in C^1$ chiusa, ma non esatta, su $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ che soddisfi

$$\int_{C_r} \omega = 0 \qquad \forall\, r \in (0, +\infty) \setminus \{|P|, |Q|\}.$$

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Dimostrare che, se $f \in C^0([a,b])$, allora il grafico di f ha misura bidimensionale nulla.

T2. (Fisici) Si enunci il teorema sul differenziale della funzione composta e lo si applichi per ricavare l'espressione della seguente derivata:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(s,t), y(s,t)),$$

dove $f(\cdot,\cdot)$, $x(\cdot,\cdot)$ e $y(\cdot,\cdot)$ sono funzioni reali di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$.

T3. (Fisici) Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Si enuncino le formule di Gauss-Green nel piano relativamente al dominio D. Se ne deduca quindi, sempre riferendosi al dominio D, l'enunciato del teorema della divergenza.

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e si ponga $g(x,y) := f(x)f(y)$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Nel primo caso fornire una dimostrazione, nel secondo un controesempio.

(a) Se s è un punto di massimo relativo per f allora (s,s) è un punto di massimo relativo per g.

(b) Se (s,s) è un punto di massimo relativo per g allora s è un punto di massimo relativo per f.

(c) Se (s,s) è un punto di massimo relativo per g allora $f'(s) = 0$.

(d) Se (x,y) è un punto di estremo relativo per g allora x e y sono punti di estremo relativo per f.