Corso di Laurea in Matematica – Corso di Laurea in Fisica

Analisi Matematica 2 – Complementi di Analisi Matematica I

a.a. 2022/2023

Scritto del 14 febbraio 2024

---

1. M-F Riportare solo il risultato

Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ una funzione tale che $f_x(x,y,z) = yz$, $f_{yy}(x,y,z) = 0$, $f_{zz}(x,y,z) = 0$, $f(0,0,0) = 0$, $\nabla f(0,0,0) = 0$, $f(1,1,1) = 4$. Allora l'espressione di f è

2. M-F Riportare solo il risultato

Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy dato dall'equazione $y'' + ay' = 2$ con le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.

3. M-F Riportare il risultato e una motivazione sintetica

(a) Si consideri la forma differenziale $\omega = \dfrac{y}{(x-1)^2 + y^2}\,\mathrm{d}x - \dfrac{(x-1)}{(x-1)^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$. Calcolare l'integrale di ω lungo la curva $\gamma(t) = (3\pi)^{-1}(t\cos t, t\sin t)$, $t \in [\pi/2, 5\pi/2]$, giustificando la risposta data.

(b) Calcolare l'integrale di ω lungo la curva $\eta(t) = (3\pi)^{-1}(t\cos t, t\sin t)$, $t \in [\pi/2, 9\pi/2]$.

4. M-F Riportare anche lo svolgimento, restando comunque all'interno del riquadro

(a) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e si dimostri che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(b) Dire se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ giustificando la risposta alla luce della teoria.

Per i soli studenti di Fisica: rispondere alle seguenti domande su foglio protocollo

T1. (Fisici) Data l'equazione differenziale a variabili separabili, $y' = a(t)b(y)$ descrivere il metodo risolutivo.

T2. (Fisici) Descrivere le coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$ e la relativa formula di cambiamento di variabile per integrali tripli.

T3. (Fisici) Ricordare le definizioni di funzione Lipschitziana e di funzione uniformemente continua. Dimostrare, possibilmente utilizzando un formalismo rigoroso, che ogni funzione Lipschitziana è uniformemente continua. Dare, eventualmente riferendosi al caso di una sola variabile, un esempio di funzione che sia uniformemente continua ma non Lipschitziana.

Per i soli studenti di Matematica: risolvere il seguente esercizio su foglio protocollo

5. M (a) Ricordare le definizioni di funzione Lipschitziana e di funzione uniformemente continua. Dare un esempio di funzione che sia uniformemente continua, ma non Lipschitziana. Dimostrare, inoltre, che, se f è una funzione Lipschitziana, allora l'insieme delle sue costanti di Lipschitz è una semiretta **chiusa** della forma $[L, +\infty)$ (dove L si chiama "miglior costante" di Lipschitz di f).

(b) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continua** e si consideri graf f (il grafico di f) come una curva in $\mathbb{R}^2$. Si osservi inoltre che, sebbene f possa non essere C^1, si può comunque definire la lunghezza di graf f come estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte. Dimostrare che, se f è Lipschitziana, allora graf f è *rettificabile* (ovvero la sua lunghezza, definita utilizzando le poligonali, è finita). Trovare inoltre una stima esplicita della lunghezza del grafico di f della forma lungh(graf f) $\leq \phi(|b-a|, L)$ ove L è la miglior costante di Lipschitz di f. Mostrare, infine, che si può scegliere la funzione ϕ in maniera "ottimale": ciò vale a dire che: (1) si ha lungh(graf f) $\leq \phi(|b-a|, L)$ per ogni f L-Lipschitziana; (2) si può inoltre trovare una certa funzione g L-Lipschitziana tale che si abbia *esattamente* lungh(graf g) $= \phi(|b-a|, L)$.

(c) Mostrare con un esempio esplicito che, se f è (uniformemente) continua ma non Lipschitziana su $[a, b]$, allora la lunghezza di graf f può non essere finita.