Gli esercizi segnati ☒ sono comuni a Matematici e Fisici.

☒ 1. Calcolare

$$\int\int_{D_1} \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy\,, \qquad \int\int_{D_2} \frac{x}{1+y}\,dxdy$$
$$\int\int_{D_3} xy\,dxdy\,, \quad \int\int_{D_4} \frac{xy}{1+y^4}\,dxdy\,,$$

dove

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x,\ 1 \leq x \leq 3\}$, $\quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$,
$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq x^2\}$, $\quad D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x \leq y \leq 1\}$,

☒ 2. Calcolare il volume di

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2,\ x^2 \leq y \leq 4\}.$$

$[\frac{512}{15}]$

☒ 3. Determinare l'area racchiusa dalle seguenti curve:

$$a)\ \rho^2 = \cos\vartheta\,; \qquad b)\ \rho^2 = 2a^2\cos 2\vartheta.$$

☒ 4. Attraverso una sfera di raggio 2 viene praticato, centralmente, un foro cilindrico di raggio 1. Qual è il volume rimosso?

☒ 5. Calcolare il volume del solido costituito dalla parte interna del paraboloide di equazione $3z = x^2 + y^2$ che è anche interna alla superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. $[\frac{19}{6}\pi]$

❑ 6. Calcolare il volume di

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ x^2 + y^2 \leq ax\}.$$

❑ 7. Calcolare il volume del solido limitato dalle superficie $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.

$[\frac{16}{3}a^3]$

☒ 8. Sia

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le (x^2+y^2)\big(1-\sqrt{x^2+y^2}\big)\}.$$

Dimostrare che T è limitato e calcolare

$$\int_T |y|^3 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

$[\frac{1}{21}]$

☐ 9. Calcolare $\int_D x^2y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2-2x \le 0, \quad y^2 \le x^3\}.$$

$[\frac{16}{45} + \frac{7}{48}\pi]$

☐ 10. Calcolare

$$\int_D \frac{x^2e^z}{1+z^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le z^2+1, \quad |z| \le 1\}.$$

$[\frac{\pi}{2}(e - \frac{3}{e})]$

☒ 11. Siano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \ge -y^2+y, \quad y \ge x^2-x\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 1\}.$$

Calcolare

$$\int_{A\cap B} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$[\frac{13}{120}]$

☒ 12. Calcolare il volume dell'insieme

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D, \quad 0 \le |z| \le y^2\},$$

dove D è il triangolo di vertici i punti $(0,0)$, $(2,0)$ e $(1,1)$.

$[\frac{1}{3}]$

☒ 13. *a*) Siano

$$D_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\},$$
$$D_1 = D_0 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq x\}.$$

Calcolare

$$\int\int_{D_0} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \int\int_{D_1} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

b) Per ogni $\alpha > 0$ sia

$$D_\alpha = D_0 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq \alpha x\}.$$

Calcolare α in modo tale che

$$\int_{D_\alpha} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}.$$

[$\frac{1}{\sqrt{3}}$]

☒ 14. Calcolare il volume dell'insieme

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2|y| \leq x^2 + y^2,\quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

[$\frac{128}{9}$]

❑ 15. Sia T l'insieme dei punti dello spazio $\mathbb{R}^3$ ottenuto eseguendo una rotazione completa dell'insieme $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq z \leq e^{-x^2/4}\}$ attorno all'asse x. Sia $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2 + z^2 \leq e^{-2}\}$. Posto $D = T \setminus C$ (insieme ottenuto togliendo C da T), calcolare

$$\int_D \frac{|x||y|^3}{y^2+z^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[$\frac{32}{27}(1 - 4e^{-3})$]

☒ 16. Un'ampolla T, appoggiata sul piano xy, è individuata dalle disuguaglianze $0 \leq z \leq f(x,y)$, dove f è la funzione non negativa la cui linea di livello α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ è, con l'esclusione dell'origine, il bordo dell'insieme descritto in coordinate polari da:

$$\varrho \leq (1-\alpha)\vartheta, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi(1-\alpha).$$

Determinare il livello raggiunto da $\pi^3/48$ unità di volume di liquido versate in T.

[$1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$]

☒ 17. Calcolare il volume di $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ |z| \leq x - x^2 - y^2\}$.

[$\frac{\pi}{16}$]

❑ 18. Calcolare il volume dell'ellissoide di semiassi a, b, c (svolgerlo per sezioni).

$[\frac{4}{3}\pi abc]$

❑ 19. Dimostrare il seguente risultato:

> *(Teorema di Guldino)* Sia D un insieme compatto misurabile nel piano. Sia r una retta del piano che non interseca D e si consideri il solido E ottenuto per rotazione di D di un angolo α attorno all'asse r. Allora il volume di E è pari al prodotto dell'area di D per la lunghezza del cammino percorso dal baricentro di D.

[Si consideri D nel piano yz di un riferimento xyz e come retta r l'asse z. Il baricentro di D (nel piano yz) ha coordinate

$$y_0 = \frac{1}{\text{mis}\,(D)} \int_D y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad z_0 = \frac{1}{\text{mis}\,(D)} \int_D z \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z]$$

Come esempio si calcoli il volume del toro di raggi r, R.

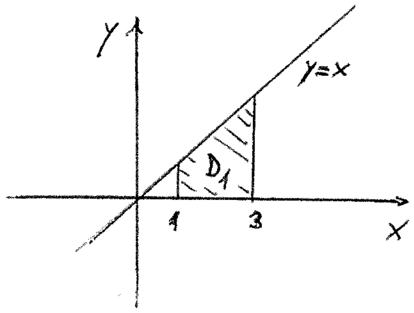
❑ 20. Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa. Sia E il solido ottenuto facendo ruotare il sottografico di f di un giro completo attorno all'asse x. Dimostrare che

$$\text{vol}\, E = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

[Si proceda per sezioni o utilizzando il Teorema di Guldino].

1.

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le x \ , \ 1 \le x \le 3\}$$

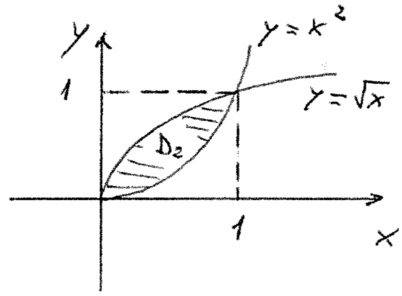


$$\iint_{D_1} \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_1^3 dx \int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}\, dy =$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{x}\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_1^3 \frac{1}{x}\,\frac{\pi}{4}\, dx = \frac{\pi}{4}\log 3 \ .$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$$



$$I_2 = \iint_{D_2} \frac{x}{1+y}\, dx\, dy$$

D_2 è un dominio normale sia rispetto all'asse y che rispetto all'asse x.

* Risulta più semplice l'integrazione come dominio normale rispetto all'asse y:

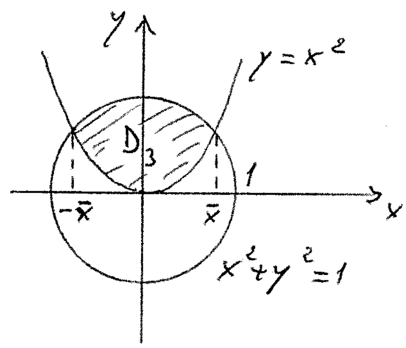
$$0 \le y \le 1, \qquad y^2 \le x \le \sqrt{y}$$

$$I_2 = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{x}{1+y}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y-y^4}{y+1}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(y^3 - y^2 + y - 2 + \frac{2}{y+1}\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 2\log 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{19}{12} - 2\log 2\right) = \frac{19}{24} - \log 2 \ .$$

$D_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ y \ge x^2\}$



Troviamo il punto di intersezione fra la circonferenza e la parabola (per $x>0$):

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x^2 \end{cases} \qquad x^4+x^2-1=0$$

$$x^2 = \frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}, \qquad \text{quindi } \bar{x}^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Allora

$$\iint_{D_3} xy\,dx\,dy = \int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} dx \int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy =$$

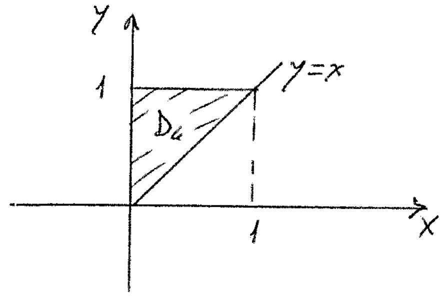
$$= \frac{1}{2}\int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} x\,(1-x^2-x^4)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\bar{x}}^{\bar{x}} (x-x^3-x^5)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6\right]_{-\bar{x}}^{\bar{x}} = 0 .$$

Il risultato era prevedibile per la simmetria del dominio rispetto all'asse y, tenendo conto che la funzione integranda $f(x,y)=xy$ soddisfa:

$$f(-x,y) = -f(x,y).$$

$D_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\ge 0\ ,\ \ x\le y\le 1\}$



$$I_4 = \iint_{D_4} \frac{xy}{1+y^4}\,dx\,dy$$

Svolgiamolo come dominio normale rispetto all'asse y:

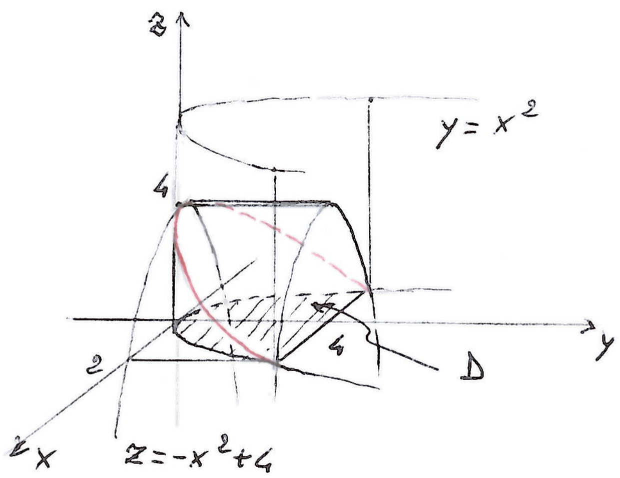
$$0\le y\le 1\ , \qquad 0\le x\le y\ .$$

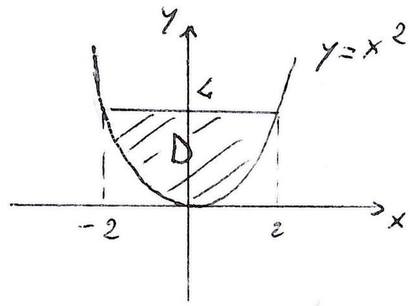
$$I_4 = \int_0^1 dy \int_0^y \frac{xy}{1+y^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^3}{1+y^4}\,dy =$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\log(1+y^4)\Big]_0^1 = \frac{1}{8}\log 2\,.$$

(Meno rapida l'integrazione come dominio normale rispetto all'asse y).

2. $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 4-x^2,\ x^2\le y\le 4\}$





$$\mathrm{vol}\,S=\iint_D (4-x^2)\,dx\,dy=$$

$$=2\int_0^2 dx\int_{x^2}^4 (4-x^2)\,dy = 2\int_0^2 (4-x^2)^2\,dx=$$

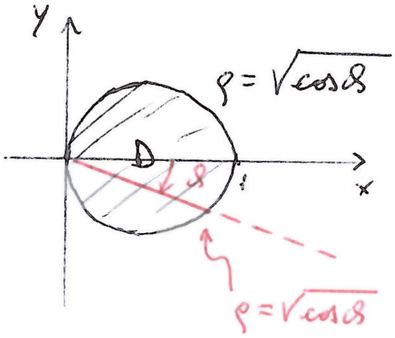
$$=2\int_0^2 (x^4-8x^2+16)\,dx = 2\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^2=$$

$$=2\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32\right)=\frac{512}{15}.$$

3. a) $\rho^2 = \cos\theta$

$\rho = \sqrt{\cos\theta}$ (ricordiamo che $\rho \geq 0$)

Sia D il dominio racchiuso da tale curva:



$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \rho \leq \sqrt{\cos\theta}$

$$\text{area } D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos\theta}} \rho \, d\rho \qquad \left(\text{area } D = \iint_D 1 \, dx\,dy \right)$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[\rho^2\right]_0^{\sqrt{\cos\theta}} d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = \left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2} = 1.$$

b) $\rho = \sqrt{2}\,a\sqrt{\cos 2\theta}$

deve essere $\cos 2\theta \geq 0$ quindi

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

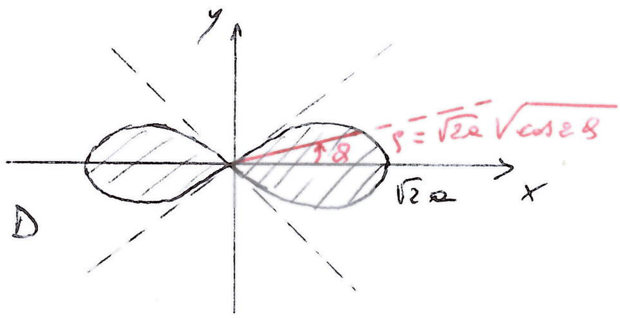
$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$$

In $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ vi sono gli intervalli

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$$

$$\text{area } D = 4\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}\,a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho \, d\rho =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = 2a^2.$$



4. Attraverso una sfera di raggio 2 viene praticato, centralmente, un foro cilindrico di raggio 1. Qual è il volume rimosso?

$$\text{volume} = 2 \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

dove $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Allora

$$\text{volume} = 2 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sqrt{4 - \rho^2}\, \rho\, d\rho =$$

$$= -2\pi \, \frac{2}{3} \left[(4 - \rho^2)^{3/2} \right]_0^1 = -\frac{4}{3} \pi \left(3\sqrt{3} - 8 \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi \left(8 - 3\sqrt{3} \right).$$

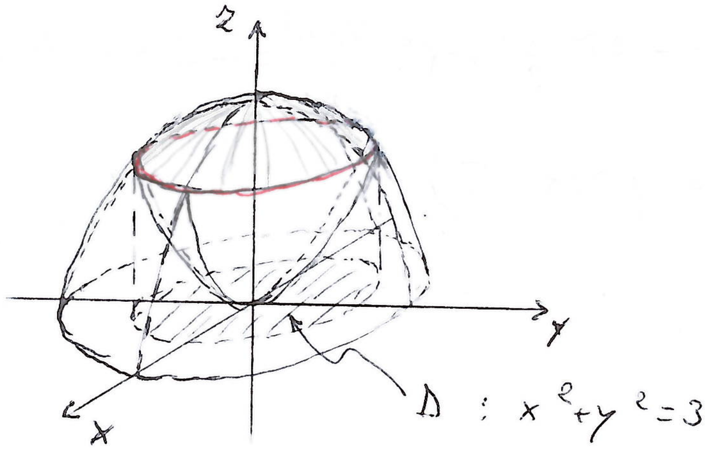
5. Il solido T indicato può essere così descritto:

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ 3z \ge x^2+y^2 \ , \quad x^2+y^2+z^2 \le 4\} .$$

L'intersezione delle due superficie è:

$$\begin{cases} 3z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3z=x^2+y^2 \\ 4z^2=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$$

si tratta della circonferenza, sul piano $z=1$, di centro $(0,0,1)$ e raggio $\sqrt{3}$.



Allora

$$\operatorname{vol} T = \iint_D \left[\sqrt{4-x^2-y^2} - \frac{1}{3}(x^2+y^2)\right] dx\,dy =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-\rho^2} - \frac{1}{3}\rho^2\right)\rho\, d\rho =$$

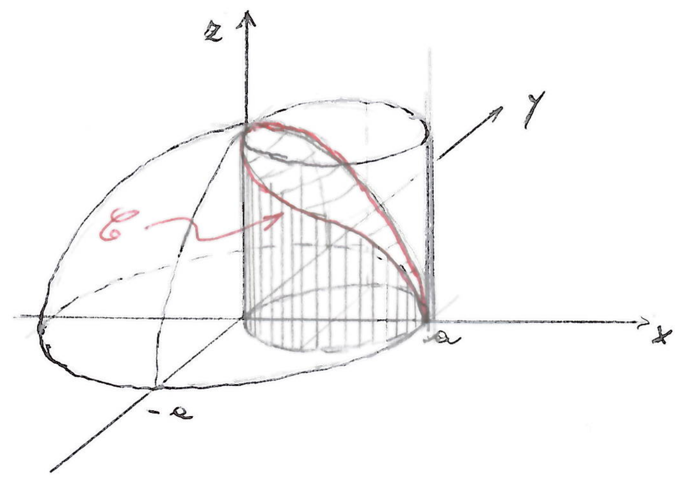
$$= 4\,\frac{\pi}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,(4-\rho^2)^{3/2} - \frac{1}{12}\rho^4\right)\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}(1-8) - \frac{1}{12}\cdot 9\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{4}\right) = \pi\,\frac{19}{6} .$$

Alternativamente si poteva procedere per sezioni orizzontali. Il raggio della sezione a quota z è $\sqrt{4-z^2}$ o $\sqrt{3z}$ a seconda che $z\in[0,1]$ o $z\in[1,2]$.

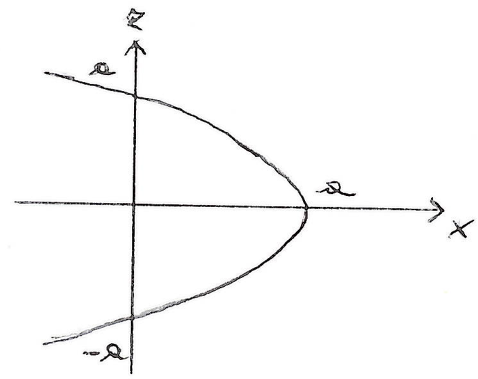
6. $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le a^2 \ ,\ x^2+y^2\le ax\}$



$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$$

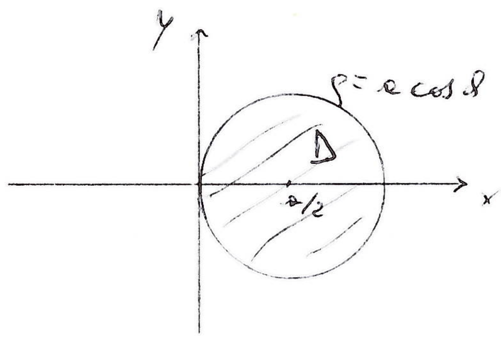
La curva $\mathcal{C}$ di intersezione ha come proiezione, sul piano $y=0$, la curva di equazione

$$x=-\frac{1}{a}z^2+a$$



$$\text{vol}\,T=\iint_D \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le ax\}$



$$x^2+y^2=ax$$

$$\rho^2=a\rho\cos\theta$$

$$\begin{cases} \rho=a\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Allora

$$\mathrm{vol}\,T = 2\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{a\cos\vartheta} \sqrt{a^2-\rho^2}\;\rho\, d\rho =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2}\frac{2}{3}(a^2-\rho^2)^{3/2}\right]_{\rho=0}^{\rho=a\cos\vartheta} d\vartheta =$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} a^3\left[(1-\cos^2\vartheta)^{3/2}-1\right] d\vartheta =$$

$$= +\frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$= \frac{\pi}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{\pi}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^3\left[-\cos\vartheta+\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^3\left(1-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}\right)a^3.$$

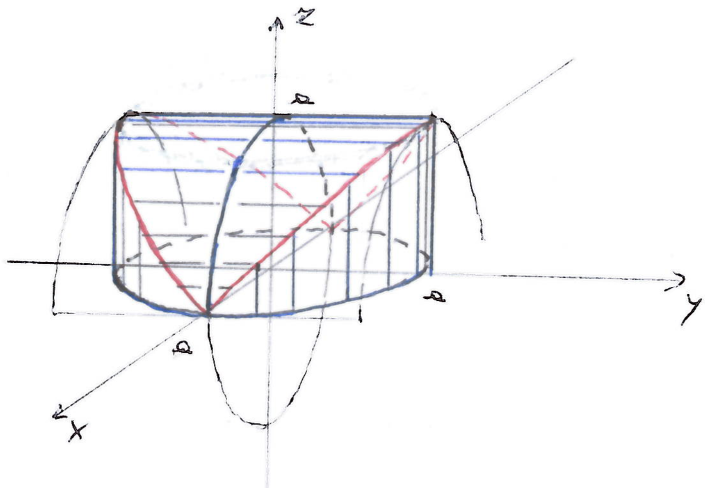
7. Sia

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le a^2\ ,\ x^2+z^2\le a^2\}$$

Notiamo che le intersezioni delle superficie che limitano T sono curve piane; infatti:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2+z^2=a^2 \end{cases} \quad \text{implica} \quad z^2-y^2=0 \quad \text{cioè} \quad z=\pm y.$$

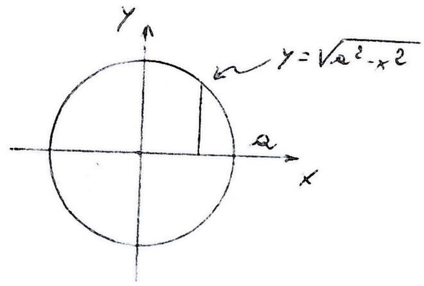
Le curve si trovano sui piani $z=\pm y$.



$$\text{vol}\,T = 2\iint_{D_a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy \qquad D_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le a^2\}$$

Conviene svolgere l'integrale in coordinate cartesiane.

$$\text{vol}\,T = 2\cdot 4\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy$$



$$= 8\int_0^a (a^2-x^2)\,dx =$$

$$= 8\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)=\frac{16}{3}a^3 .$$

8. Sia

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le z\le (x^2+y^2)(1-\sqrt{x^2+y^2})\}$$

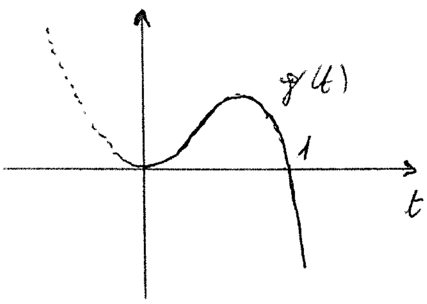
Dimostrare che T è limitato e calcolare $\iiint_T |y|^3\,dx\,dy\,dz$.

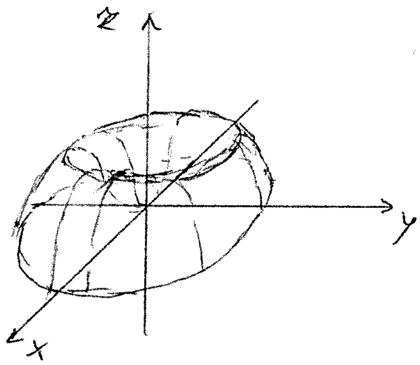
La funzione

$$h(x,y)=(x^2+y^2)(1-\sqrt{x^2+y^2})$$

è della forma

$$h(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad ,\ \text{con } g(t)=t^2(1-t) \quad (t\ge 0)$$





Quindi il grafico di h si ottiene per rotazione completa del grafico di g attorno all'asse verticale.

Poiché deve essere

$$h(x,y)\ge 0$$

risulta $\quad t=\sqrt{x^2+y^2}\le 1 \quad ; \quad T$ è limitato.

T è un dominio normale rispetto all'asse z; quindi

$$I=\int_T |y|^3\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_0^{h(x,y)}|y|^3\,dz \quad =$$

dove D è il cerchio unitario. Svolgendo:

$$I = \iint_D |y|^3 \, h(x,y) \, dx\,dy =$$

$$= 4 \iint_{D \cap \{x \geq 0,\, y \geq 0\}} y^3 (x^2+y^2)\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$$

In coordinate polari:

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 \rho^3 (\sin^3\vartheta)\, \rho^2 (1-\rho)\, \rho \, d\rho =$$

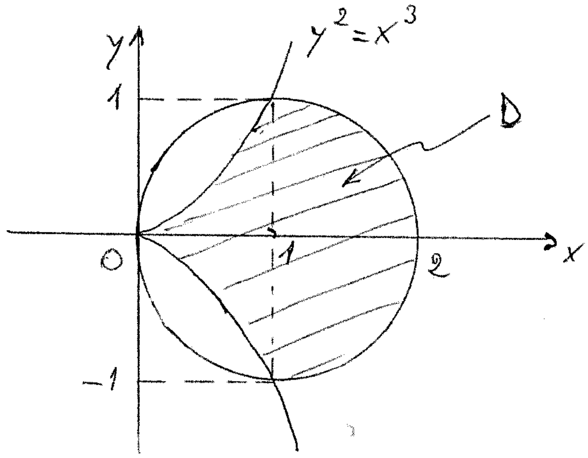
$$= 4 \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta \cdot \int_0^1 (\rho^6 - \rho^7)\, d\rho =$$

$$= 4 \left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{56} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3 \cdot 56} = \frac{1}{21}.$$

9. Calcolare $\int_D x^2y^2\,dx\,dy$ dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x \le 0\ ,\ y^2 \le x^3\}$$



Il dominio è normale rispetto all'asse y, della forma

$$-1 \le y \le 1, \qquad |y|^{2/3} \le x \le 1+\sqrt{1-y^2}$$

allora (utilizzando la simmetria)

$$I = 2\int_0^1 dy \int_{y^{2/3}}^{1+\sqrt{1-y^2}} x^2y^2\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 y^2\left[\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)^3 - y^2\right] dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 y^2\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)^3 - \frac{2}{3}\int_0^1 y^4\,dy$$

Il secondo termine vale $\frac{2}{15}$. Per il primo:

$$\frac{2}{3}\int_0^1 y^2\left[1+3\sqrt{1-y^2}+3(1-y^2)+(1-y^2)^{3/2}\right] dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (4y^2-3y^4)\,dy + \frac{2}{3}\int_0^1 y^2(4-y^2)\sqrt{1-y^2}\,dy\,.$$

Il primo di questi integrali vale $\frac{22}{45}$. Per il secondo eseguiamo la sostituzione

$$y = \sin t, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Otteniamo

$$J := \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)(4 - \sin^2 t)\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos^2 t\,dt.$$

Inoltre:

$$\int \sin^2 2t\,dt = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\sin 4t + \text{costante}$$

$$\int \sin^4 t\,\cos^2 t\,dt = \int (\sin^3 t)\cdot(\cos^2 t)\sin t\,dt =$$

$$= -(\sin^3 t)\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{3}\int (\cos^3 t)\,3\sin^2 t\cos t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^3 t\cos^3 t + \int \cos^4 t\,\sin^2 t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^3 t\cos^3 t + \int (1 - \sin^2 t)\cos^2 t\,\sin^2 t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^3 t\cos^3 t + \frac{1}{4}\int \sin^2(2t)\,dt - \int \sin^4 t\,\cos^2 t\,dt,$$

da cui

$$2\int \sin^4 t\cos^2 t\,dt = -\frac{1}{3}\sin^3 t\cos^3 t + \frac{1}{4}\int \sin^2 2t\,dt.$$

Allora

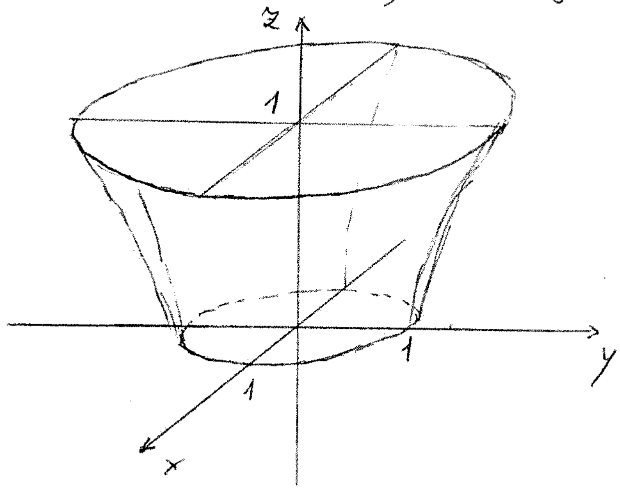
$$J = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{6}\left[\sin^3 t\cos^3 t\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt\right) =$$

$$= \frac{7}{12}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt = \frac{7}{12}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{7}{48}\pi.$$

Concludiamo che

$$I = \frac{22}{45} + \frac{7}{48}\pi - \frac{2}{15} = \frac{16}{45} + \frac{7}{48}\pi.$$

10. $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le z^2+1 \ , \ |z|\le 1\}$



$D\cap\{z\ge 0\}$ $(0\le z\le 1)$

Un punto $P=(x,y,z)$ con $|z|\le 1$ appartiene sicuramente a D se risulta $x^2+y^2\le 1$, cioè se appartiene al cilindro

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1\}.$$

Se invece $x^2+y^2>1$ allora deve essere

$$|z|\ge\sqrt{x^2+y^2-1}$$

(L'equazione $x^2+y^2-z^2=1$ è quella di un iperboloide iperbolico)

$$I=\int_D \frac{x^2e^z}{1+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

svolgiamo l'integrale per sezioni orizzontali; la sezione di D a z costante è il cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{z^2+1}$. Quindi

$$I=\int_{-1}^{1}dz\int_{D_z}\frac{x^2e^z}{1+z^2}\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}\frac{e^z}{1+z^2}\,dz\int_{D_z}x^2\,dx\,dy$$

(attenzione che la funzione integranda non è simmetrica rispetto al piano $z=0$), dove:

$$D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq z^2+1\}.$$

Svolgiamo $\int_{D_z} x^2\,dx\,dy$ in coordinate polari.

$$\int_{D_z} x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z^2+1}} \rho^2(\cos^2\theta)\,\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\frac{1}{4}\left[\rho^4\right]_0^{\sqrt{z^2+1}} d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}(z^2+1)^2 \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}(z^2+1)^2.$$

Quindi:

$$I = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} e^z(1+z^2)\,dz = \frac{\pi}{4}\left(e - e^{-1} + \int_{-1}^{1} z^2 e^z\,dz\right)$$

$$\int z^2 e^z\,dz = z^2e^z - \int e^z 2z\,dz = z^2e^z - 2\left(ze^z - \int e^z\,dz\right) =$$

$$= (z^2-2z+2)e^z$$

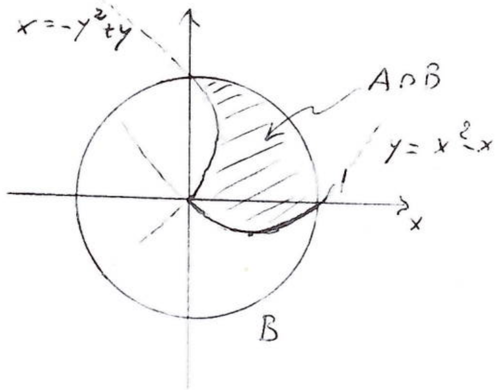
Infine:

$$I = \frac{\pi}{4}\left(e - e^{-1} + e - 5e^{-1}\right) = \frac{\pi}{4}\left(2e - 6e^{-1}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(e - \frac{3}{e}\right).$$

11. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq -y^2+y \ , \ y \geq x^2-x\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1\}$



$$I = \iint_{A\cap B} xy \, dx\, dy = \int_{D_1} + \int_{D_2}$$

dove

$D_1 = (A\cap B) \cap \{y \geq 0\}$: dominio normale rispetto all'asse y

$D_2 = (A\cap B) \cap \{y \leq 0\}$: " " " " x

Allora:

$$\int_{D_1} x\, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_{-y^2+y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 y\,(1-y^2-(-y^2+y)^2)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (-y^5+2y^4-2y^3+y)\, dy = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{60}$$

$$\int_{D_2} xy\, dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2-x}^{0} xy\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,(-(x^2-x)^2)\, dx =$$

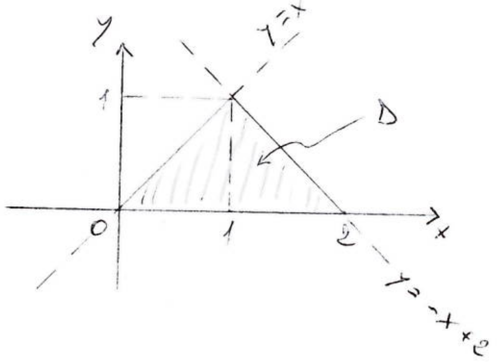
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (-x^5+2x^4-x^3)\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-20+48-30}{120} = -\frac{1}{120}$$

Quindi

$$I = \frac{7}{60} - \frac{1}{120} = \frac{13}{120}$$

12. $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)\in D\ ,\quad 0\le |z|\le y^2\}$

dove D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,0)$ e $(1,1)$.



T è della forma

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)\in D,\quad g(x,y)\le z\le h(x,y)\},$$

con

$$g(x,y)=-y^2\ ,\qquad h(x,y)=y^2.$$

Allora

$$\text{vol}\,T=\iint_D dx\,dy\int_{g(x,y)}^{h(x,y)}1\,dz=\iint_D[h(x,y)-g(x,y)]\,dx\,dy$$

Per simmetria:

$$\text{vol}\,T=2\iint_D y^2\,dx\,dy.$$

Integriamo come dominio normale rispetto all'asse y (ad esempio).

$$\text{vol}\,T=2\int_0^1\left(\int_y^{-y+2}y^2\,dx\right)dy=2\int_0^1 y^2(-2y+2)\,dy=$$

$$=2\left[-\frac{2}{4}y^4+\frac{2}{3}y^3\right]_0^1=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

13. a) Siano

$$D_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \ , \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$D_1 = D_0 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\} .$$

Calcolare

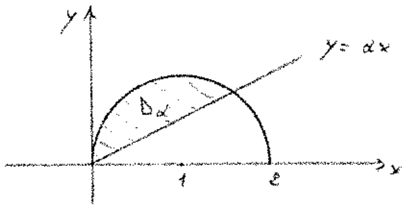
$$\iint_{D_0} y \, dx \, dy \, , \quad \iint_{D_1} y \, dx \, dy \, .$$

b) Per ogni $\alpha > 0$ sia

$$D_\alpha = D_0 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \alpha x\} .$$

Calcolare α in modo che

$$\iint_{D_\alpha} y \, dx \, dy = \frac{3}{8} .$$



$$\begin{cases} y = \alpha x \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \alpha x \\ x^2 - 2x + \alpha^2 x^2 = 0 \end{cases}$$

$$x[(1+\alpha^2)x - 2] = 0 \qquad x = 0 , \quad x = 2/(1+\alpha^2)$$

$$\iint_{D_\alpha} y \, dx \, dy = \int_0^{2/(1+\alpha^2)} dx \int_{\alpha x}^{\sqrt{2x - x^2}} y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{2/(1+\alpha^2)} (2x - x^2 - \alpha^2 x^2) \, dx = \frac{1}{2} \left[x^2 - \frac{1+\alpha^2}{3} x^3 \right]_0^{2/(1+\alpha^2)} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+\alpha^2} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{3} (1+\alpha^2) \frac{2}{1+\alpha^2} \right] = \frac{2}{3} \frac{1}{(1+\alpha^2)^2}$$

Allora

$$\iint_{D_0} y \, dx \, dy = \frac{2}{3} \, , \qquad \iint_{D_1} y \, dx \, dy = \frac{1}{6}$$

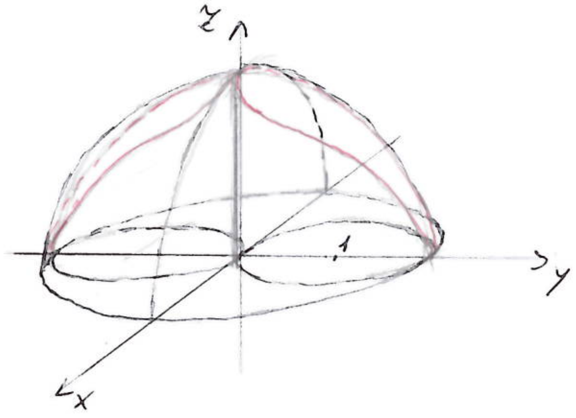
e

$$\iint_{D_\alpha} y \, dx \, dy = \frac{3}{8} \quad \text{se} \quad \frac{1}{(1+\alpha^2)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{8}$$

$$(1+\alpha^2)^2 = 16/9 \qquad 1 + \alpha^2 = 4/3$$

$$\alpha^2 = 1/3 \qquad \alpha = 1/\sqrt{3} .$$

14. $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ 2|y|\le x^2+y^2 \ , \ x^2+y^2+z^2\le 4\}$.



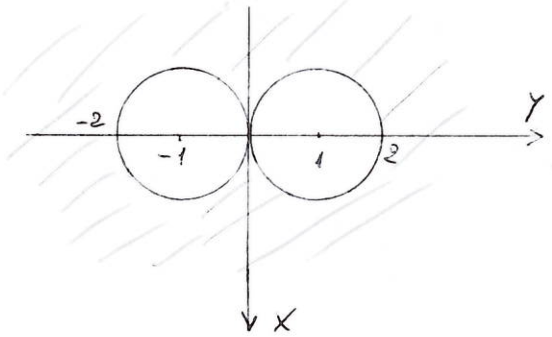
$T\cap\{z\ge 0\}$

La disuguaglianza $2|y|\le x^2+y^2$ si traduce in

$$-(x^2+y^2)\le 2y \le x^2+y^2$$

cioè

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y\ge 0 \\ x^2+y^2+2y\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+(y-1)^2\ge 1 \\ x^2+(y+1)^2\ge 1 \end{cases}$$



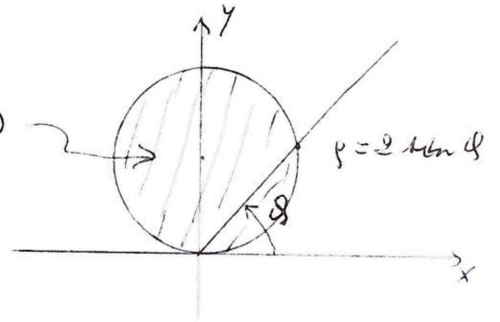
Il volume di T è quello della sfera a cui si sottragga il volume dei due cilindri, quindi

$$\operatorname{vol} T=\frac{4}{3}\pi\, 2^3 - 4\int_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

dove

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x^2+(y-1)^2\le 1\}.$$

Svolgiamo l'integrale in coordinate polari:



$$x^2+(y-1)^2=1$$

$$\rho^2-2\rho\sin\theta=0$$

$$\rho=2\sin\theta$$

$$\int_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \frac{2}{3}\left[(4-\rho^2)^{3/2}\right]_0^{2\sin\theta} d\theta =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[(4\cos^2\theta)^{3/2}-8\right]d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\pi - \frac{8}{3}\int_0^{\pi} |\cos^3\theta|\,d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\pi - \frac{8}{3}\cdot 2\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\pi - \frac{16}{3}\left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}\pi - \frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}.$$

Allora

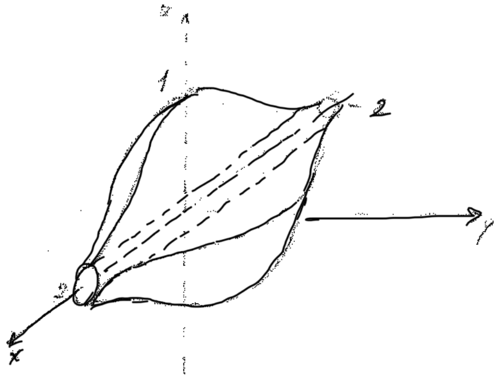
$$\text{vol}\,T = \frac{32}{3}\pi - 4\cdot\left(\frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}\right) = \frac{128}{9}.$$

15.

Sia T l'insieme dei punti dello spazio $\mathbb{R}^3$ ottenuto eseguendo una rotazione completa dell'insieme $\{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le e^{-x^2/4}\}$ attorno all'asse x. Sia $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \le e^{-2}\}$. Calcolare

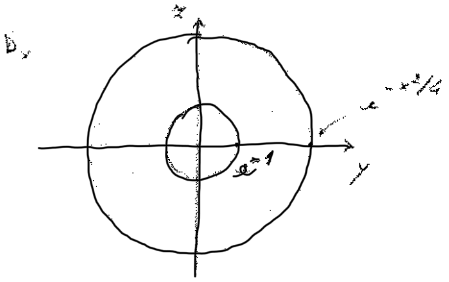
$$\iiint_D \frac{|x|\,|y|^3}{y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

dove $D=T\setminus C$ è l'insieme ottenuto togliendo C da T.



$$\begin{cases} z=e^{-x^2/4} \\ z=e^{-1} \end{cases} \qquad x^2/4=1 \qquad x=\pm 2$$

Le sezioni di D con piani ortogonali all'asse di rotazione x dà delle corone circolari:



Per simmetria (la funzione è simmetrica rispetto a tutti i piani coordinati, e pure D): l'integrale richiesto I è dato da

$$I = 8\iiint_{D\cap\{x\ge0,\,y\ge0,\,z\ge0\}} \frac{x\,y^3}{y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$$

Quindi:

$$I = 8 \int_0^2 dx \iint_{D_x \cap \{y \geq 0,\ z \geq 0\}} \frac{x y^3}{y^2 + z^2}\, dy\, dz$$

Svolgiamo l'integrale interno in coordinate polari:

$$I = 8 \int_0^2 dx \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{e^{-1}}^{e^{-x^2/4}} \frac{x \rho^3 \cos^3\theta}{\rho^2} \rho\, d\rho =$$

$$= 8 \left(\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta \right) \int_0^2 x\, dx \int_{e^{-1}}^{e^{-x^2/4}} \rho^2\, d\rho =$$

$$= 8 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta) \cos\theta\, d\theta \quad \int_0^2 x \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_{e^{-1}}^{e^{-x^2/4}} dx =$$

$$= 8 \left[\sin\theta - \frac{1}{3} \sin^3\theta \right]_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \int_0^2 x \left(e^{-3x^2/4} - e^{-3} \right) dx =$$

$$= \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left[-\frac{2}{3} e^{-3x^2/4} - \frac{1}{2} e^{-3} x^2 \right]_0^2 =$$

$$= \frac{16}{9} \left(-\frac{2}{3} e^{-3} - 2 e^{-3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{27} \left(2 - 8 e^{-3} \right) = \frac{32}{27} \left(1 - 4 e^{-3} \right).$$

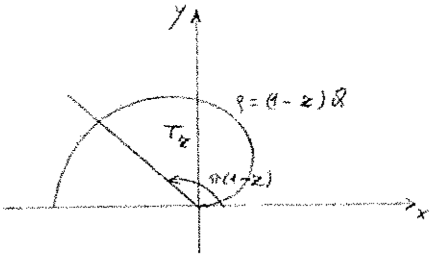
16. Un'ampolla T, appoggiata sul piano xy, è individuata dalle disuguaglianze

$$0 \le z \le f(x,y) \quad ,$$

dove f è la funzione non negativa la cui linea di livello α è (con l'esclusione dell'origine) il bordo dell'insieme descritto in coordinate polari da:

$$\rho \le (1-\alpha)\vartheta \,, \qquad 0 \le \vartheta \le \pi(1-\alpha) \,.$$

Determinare il livello raggiunto da $\pi^3/48$ unità di liquido versate in T.



T_z : sezione di T a quota $z \in [0,1]$.

Sia z_0 il livello incognito. Il volume occupato è

$$\int_0^{z_0} \text{area } T_z \, dz.$$

Si ha

$$\text{area } T_z = \int_0^{\pi(1-z)} \left(\int_0^{(1-z)\vartheta} \rho \, d\rho \right) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi(1-z)} (1-z)^2 \vartheta^2 \, d\vartheta = \frac{1}{6} (1-z)^2 \pi^3 (1-z)^3 = \frac{\pi^3}{6} (1-z)^5 \,.$$

Quindi deve essere

$$\frac{\pi^3}{6} \int_0^{z_0} (1-z)^5 \, dz = \frac{\pi^3}{48}$$

$$\frac{1}{6}\left[1-(1-z_0)^6\right] = \frac{1}{8}$$

$$1-(1-z_0)^6 = \frac{3}{4}$$

$$(1-z_0)^6 = \frac{1}{4}$$

$$1-z_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$z_0 = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \,.$$

17. $T = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ |z| \le x - x^2 - y^2 \}$.

Per la simmetria rispetto a z:

$$\text{vol}\, T = 2\ \text{vol}\,(T \cap \{z \ge 0\})$$

e

$$T \cap \{z \ge 0\} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le z \le x - x^2 - y^2 \}$$

Si tratta del sottografico della funzione

$$f(x,y) = x - x^2 - y^2$$

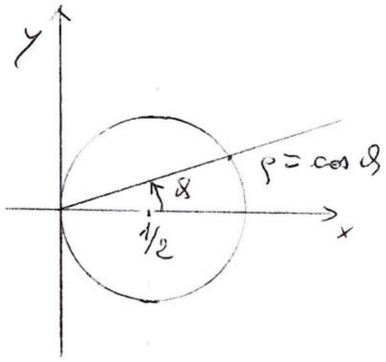
dove questa è non negativa, cioè

D: $\quad x - x^2 - y^2 \ge 0$

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le 1/4 .$$

$$\rho^2 \le \rho \cos\vartheta$$

$$0 \le \rho \le \cos\vartheta$$



Allora

$$\text{vol}\, T = 2 \iint_D (x - x^2 - y^2)\, dx\, dy = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\cos\vartheta} (\rho\cos\vartheta - \rho^2)\, \rho\, d\rho =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}\rho^3 \cos\vartheta - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\vartheta} d\vartheta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3}\cos^4\vartheta - \frac{1}{4}\cos^4\vartheta \right) d\vartheta$$

$$= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\vartheta) \cos^2\vartheta\, d\vartheta$$

$$\int \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{2}\left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2}\right) + c$$

$$\int \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{4} \int \sin^2 2\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\vartheta - \frac{1}{4}\sin 4\vartheta\right) + c$$

Quindi

$$\mathrm{vol}\, T = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left[\vartheta + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{8}\left[\vartheta - \frac{1}{4}\sin 4\vartheta\right]_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{16}.$$

18. Calcoliamo innanzitutto l'area di un'ellisse di semiassi a e b.

Utilizziamo il sistema di coordinate

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\vartheta \\ y = b\rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{array}$$

Il determinante della matrice jacobiana è:

$$\det\begin{pmatrix} a\cos\vartheta & -a\rho\sin\vartheta \\ b\sin\vartheta & b\rho\cos\vartheta \end{pmatrix} = ab\rho\cos^2\vartheta + ab\rho\sin^2\vartheta =$$

$$= ab\rho$$

Quindi

$$\text{area } E = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 ab\rho \, d\rho = \frac{1}{2} \cdot 2\pi ab = \pi ab.$$

Il volume di un'ellissoide di semiassi a, b, c lo otteniamo per sezioni:

$$\text{volume} = \int_{-c}^{c} (\text{area } S_z)\, dz$$

dove S_z è l'ellisse ottenuta per sezione ~~cose~~ a quota costante:

$$S_z : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

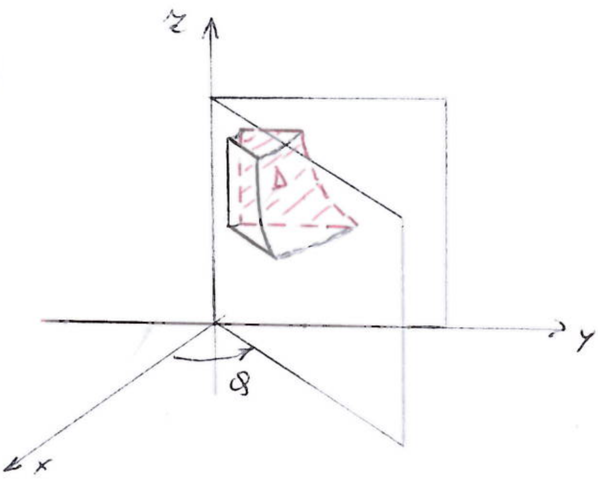
$$\frac{x^2}{(a_z)^2} + \frac{y^2}{(b_z)^2} \le 1$$

dove $a_z = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$, $\quad b_z = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$.

Allora

$$\text{volume} = \int_{-c}^{c} \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab\left[z - \frac{1}{3c^2} z^3\right]_{-c}^{c} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

13. (Teor. di Guldino)



Sia E il solido ottenuto per rotazione completa di D (sottoinsieme di yz, con $y \geq 0$) rispetto all'asse z.

Si consideri il sistema di coordinate (cilindriche):

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \\ z = z \end{cases}$$

Qui $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$: distanza dall'origine della proiezione $(x, y, 0)$.

Poiché ogni sezione di E con piani verticali passanti per l'asse z coincidono (con D), nelle coordinate (ρ, ϑ, z) l'insieme E è descritto da:

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad (\rho, z) \in D$$

Allora, tenendo conto che il determinante della matrice jacobiana della trasformazione è ρ (calcolo diretto), si ha:

$$\operatorname{vol} E = \int_E 1 \, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_D \rho \, d\rho \, dz .$$

Teniamo ora conto che, nel piano yz, la coordinata y del baricentro di D è

$$y_0 = \frac{1}{\text{area } D} \iint_D y \, dy dz$$

cioè

$$y_0 = \frac{1}{\text{area } D} \iint_D \rho \, d\rho \, dz$$

Quindi

$$\iint_D \rho \, d\rho \, dz = y_0 \text{ area } D.$$

Concludiamo che

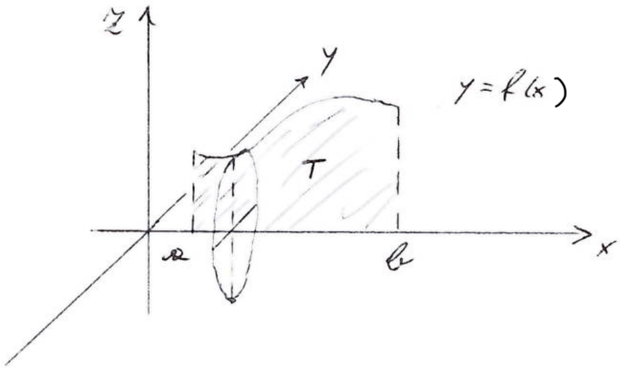
$$\text{vol } E = 2\pi y_0 \text{ area } D.$$

Il valore $2\pi y_0$ è proprio la lunghezza della circonferenza percorsa dal baricentro di D.

Ad es. se D è una circonferenza di raggio r il cui centro è a distanza $R > r$ dall'asse z, risulta:

$$\text{vol} = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R.$$

20.



$f \geq 0$

Il solido E ottenuto per rotazione del grafico di f attorno all'asse x ha come volume:

$$\text{vol } E = \int_E 1 \, dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{E_x} dy\,dz = \int_a^b \text{area } E_x \, dx$$

dove E_x è la sezione con piani ortogonali all'asse x.

E_x è un cerchio di raggio $f(x)$; quindi

$$\text{vol } E = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Del resto, l'ordinata del baricentro del trapezoide T è

$$y_0 = \frac{1}{\text{area } T} \int_T y \, dx\,dy = \frac{1}{\text{area } T} \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y\,dy =$$

$$= \frac{1}{\text{area } T} \, \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Per il teorema di Guldino:

$$\text{vol } E = 2\pi y_0 \, \text{area } T = 2\pi \, \text{area } T \, \frac{1}{\text{area } T} \, \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 \, dx =$$

$$= \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$