Gli esercizi segnati ☒ sono comuni a Matematici e Fisici.

☒ 1. Dati due punti distinti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^N$, diciamo *retta* per $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ l'insieme dei punti

$$\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Verificare che i punti di $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{x}_1 = (-2, 0, 3, 1), \quad \mathbf{x}_2 = (1, -1, 2, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (-5, 1, 4, 2), \quad \mathbf{x}_4 = (4, -2, 1, -1)$$

sono *allineati*, cioè esiste una retta che li contiene.

☒ 2. Individuare l'interno e i punti di frontiera del seguente insieme:

$$A_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad r \leq x^2 + y^2 < 1\} \text{ al variare di } r \in [0, 1).$$

❑ 3. Individuare l'interno e i punti di frontiera del seguente insieme:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \in (0, \pi), \; y = \frac{\sin x}{x}\}.$$

☒ 4. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in \mathscr{F}E$. Verificare che se $x_0 \notin E$ allora x_0 è di accumulazione per E. Il punto x_0 è anche di accumulazione per il complementare E^c di E?

☒ 5. Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che:

a) se A e B sono aperti [chiusi] allora $A \cap B$ e $A \cup B$ sono aperti [chiusi];

b) se A è aperto e B chiuso allora $A \setminus B$ è aperto

(l'insieme vuoto, come pure l'intero $\mathbb{R}^N$, sono sia aperti che chiusi).

❑ 6.

a) Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che $\bigcup_{i \in I} A_i$ è un insieme aperto;

b) Sia $(C_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}^N$. Dimostrare che $\bigcap_{i \in I} C_i$ è un insieme chiuso.

Dimostrare che l'intersezione di una famiglia arbitraria di aperti non è necessariamente un insieme aperto e che l'unione di una famiglia arbitraria di insiemi chiusi non è necessariamente un insieme chiuso.

☒ 7. *a*) Sia $\mathbf{x}_0 = (-2, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$. Per quali valori di $r > 0$ l'insieme $B_1(0) \setminus B_r(\mathbf{x}_0)$ è aperto?

b) Per quali punti $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ l'insieme $B_2(0) \setminus B_1(\mathbf{x})$ è aperto?

☐ 8. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che:

a) la chiusura $\overline{E}$ di E è il più piccolo insieme chiuso contenente E (cioè: $\overline{E}$ è chiuso e se F è un chiuso contenente E allora $F \supseteq \overline{E}$);

b) $\overline{E} = \bigcap\limits_{\substack{C \supseteq E \\ C \text{ chiuso}}} C.$

☒ 9. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si considerino i sottoinsiemi E_k di $\mathbb{R}^2$ definiti di volta in volta come segue

$$a)\ E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x^k\};$$
$$b)\ E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq x^k\};$$
$$c)\ E_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^k\}.$$

Determinare $E = \bigcap_k E_k$, $\overline{E}$ e $\bigcap_k \overline{E}_k$.

☒ 10. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia

$$E_j = \overline{B}_j(x_j) \qquad \text{con } x_j = (j,0).$$

L'insieme $E = \big(\bigcup_j E_j\big) \setminus \{(0,0)\}$ è aperto?

☒ 11. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e $A = B_r(x_0)$. Descrivere l'insieme

$$E = \{tx \in \mathbb{R}^2 :\ \ t \in \mathbb{R},\ t > 0,\ x \in A\}.$$

☐ 12. Verificare che, dati $x, y \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\lim_{p \to +\infty} \big(|x|^p + |y|^p\big)^{1/p} = \max(|x|, |y|). \tag{1}$$

Determinare poi la chiusura di $\bigcup_{p \geq 1} B_p$, dove

$$B_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \big(|x|^p + |y|^p\big)^{1/p} < 1\}.$$

☐ 13. Sia (X,d) uno spazio metrico (si pensi eventualmente all'usuale spazio euclideo $\mathbb{R}^N$). Sia $x_0 \in X$.

– Dimostrare che la funzione $x \mapsto d(x, x_0)$ è lipschitziana.

– Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto. Chiamiamo *distanza di x_0 da A* il valore
$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, x) :\ \ x \in A\}.$$
Dimostrare che la funzione $x \mapsto d(x, A) \colon X \to \mathbb{R}$ è lipschitziana.

❑ 14. Sia A un sottoinsieme di uno spazio metrico (X, d) (si pensi eventualmente all'usuale spazio euclideo $\mathbb{R}^N$). Verificare che

$$\overline{A} = \{x \in X : \quad d(x, A) = 0\},$$

dove $d(\cdot, A)$ (distanza dall'insieme A) è definita da:

$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, x) : \quad x \in A\} \qquad (x_0 \in \mathbb{R}^N).$$

❑ 15. Sia X l'insieme delle funzioni reali continue sull'intervallo $[0, 1]$. Su $X \times X$ si definiscano le funzioni:

$$d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \qquad \delta(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Si verifichi che si tratta di distanze su X. Descrivere la palla di centro la funzione nulla e raggio 1 rispetto alla distanza d.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $f_k(x) = \max(0, 1 - kx)$ per $(x \in [0, 1])$. Calcolare $d(f_k, 0)$ e $\delta(f_k, 0)$.

Soluzioni

1. La retta per i punti $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ è data dai punti $\mathbf{x}$ della forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$. Pertanto i punti $\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_4$ stanno su questa retta se i vettori $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1$ sono proporzionali a $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$: la verifica è immediata (si può anche verificare che la matrice contenente nelle righe, o colonne, i vettori $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1$ ha rango 1.

2. Se $r > 0$ l'insieme A_r è una corona circolare di centro l'origine che include la circonferenza interna, ma non quella esterna. Le due circonferenze costituiscono la frontiera dell'insieme; la corona circolare tra le due circonferenze dà la parte interna.

Se $r = 0$ l'insieme A_r è il cerchio di centro l'origine e raggio 1, esclusa la circonferenza, che ne costituisce la frontiera. Si notiche ora l'origine è punto interno ad A_r.

3. Premettiamo una considerazione più generale. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione, con $I \subseteq \mathbb{R}$. Sia G_f il grafico di f:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in I,\ y = f(x)\}.$$

L'insieme G_f ha sempre interno vuoto: se $\big(x_0, f(x_0)\big) \in G_f$, allora $(x_0, y) \notin G_f$ comunque preso $y \neq f(x_0)$. Sia ora $I = [a, b]$ e f continua. Mostriamo che G_f è chiuso, per cui, non avendo punti interni, G_f coincide con la sua frontiera.

Dimostriamo che il complementare di G_f è aperto. Fissiamo $(x_0, y_0) \notin G_f$; se $x_0 < a$ oppure $x_0 > b$ chiaramente esiste un intorno $B_r(x_0, y_0)$ che ha intersezione vuota con G_f (sia $r < a - x_0$ o $r < x_0 - b$).

Sia pertanto $x_0 \in [a, b]$ e sia $\varepsilon = |y_0 - f(x_0)| > 0$. Non è restrittivo supporre che $y_0 - f(x_0) > 0$ (nell'altro caso si procede in modo analogo). Per continuità esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2.$$

Pertanto, nell'intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ il grafico di f sta tutto al di sotto della retta $y = f(x_0) + \varepsilon/2$. Il punto (x_0, y_0) sta al di sopra di tale retta, per cui prendendo $r = \min(\delta, \varepsilon/2)$, il quadrato $(x_0 - r, x_0 + r) \times (y_0 - r, y_0 + r)$ (che è un intorno di (x_0, y_0)) è disgiunto da G_f. Concludiamo che (x_0, y_0) è interno al complementare di G_f.

Osservazione. Alternativamente, avendo a disposizione le proprietà delle funzioni continue in più variabili, per dimostrare che il grafico di f, continua su $I = [a, b]$, è chiuso, si può procedere più semplicemente come segue.

Osserviamo che risulta

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [a, b],\ y - f(x) = 0\} = g^{-1}(0),$$

dove $g\colon [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $g(x, y) = y - f(x)$. Poiché g è continua e l'insieme $[a, b] \times \mathbb{R}$ è chiuso, l'insieme G_f è chiuso. Qui si deve utilizzare la topologia indotta: i chiusi dell'insieme $E = [a, b] \times \mathbb{R}$ si ottengono per intersezione di E con i chiusi di $\mathbb{R}^N$, ma essendo E stesso chiuso, si ottengono degli insiemi che sono chiusi anche in $\mathbb{R}^N$.

La funzione $x \mapsto \frac{\sin x}{x} : (0, \pi] \to \mathbb{R}$ è estendibile con continuità in $x = 0$; alla funzione f su $[0, \pi]$ così ottenuta applichiamo l'osservazione precedente. Pertanto G_f è chiuso; inoltre

$$B = G_f \setminus \{(0, 1), (\pi, 0)\}.$$

Allora $\mathring{B} = \emptyset$ e $\overline{B} = \mathscr{F}B = G_f$.

4. Comunque preso un intorno U di x_0 risulta

$$\emptyset \neq U \cap E = U \cap (E \setminus \{x_0\}),$$

poiché $E = E \setminus \{x_0\}$. Da ciò segue che x_0 è di accumulazione per E.

Nelle ipotesi poste non è detto che x_0 sia di accumulazione per il complementare E^c: si consideri, ad esempio, l'insieme E costituito da un cerchio privato del suo centro x_0: quest'ultimo sta in $(\mathscr{F}E) \setminus E$, ma è un punto isolato di E^c.

5. *a*) Siano A e B aperti di $\mathbb{R}^N$; mostriamo che $A \cap B$ è aperto. Fissiamo quindi $\mathbf{x} \in A \cap B$ e mostriamo che $\mathbf{x}$ è interno ad $A \cap B$. Per ipotesi esitono $r_a, r_b > 0$ tali che

$$B_{r_a}(\mathbf{x}) \subseteq A, \qquad B_{r_b}(\mathbf{x}) \subseteq B.$$

Allora $B_r(\mathbf{x}) \subseteq A \cap B$ se $r < \min(r_a, r_b)$. Quindi $\mathbf{x}$ è interno ad $A \cap B$.

Consideriamo ora $A \cup B$. Se $\mathbf{x}$ è interno ad A (o B) allora è interno ad ogni soprainsieme di A (o B); pertanto $A \cup B$ è aperto.

Nel caso A e B siano chiusi si considerino gli insiemi complementari.

b) Se B è chiuso allora $\mathbb{R}^N \setminus B$ è aperto, per cui $A \setminus B = A \cap (\mathbb{R}^N \setminus B)$ è aperto per quanto prima dimostrato.

6. *a*) È sufficiente osservare che un punto interno a un insieme A è interno anche a ogni soprainsieme di A.

b) Si passi ai complementari.

Sia ora, ad esempio, $A_i = (-1/i, 1/i)$ per $i \in \mathbb{N}$ $(N = 1)$. La famiglia $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è costituita da insiemi aperti la cui intersezione è l'insieme chiuso $\{0\}$. passando ai complementari si ottiene una famiglia di insiemi chiusi la cui unione non è chiusa: è l'insieme aperto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. *a*) Il punto $\mathbf{x}_0 = (-2, 1, 2)$ dista 3 dall'origine; quindi $B_1(0) \setminus B_r(\mathbf{x}_0)$ è aperto se $r \le 3 - 1 = 2$ oppure se $r \ge 4$ (in quanto, in quest'ultimo caso, l'insieme è vuoto).

b) L'insieme $B_2(0) \setminus B_1(\mathbf{x})$ è aperto se e solo se la palla $B_1(\mathbf{x})$ è tutta contenuta nel complementare di $B_2(0)$, cioè se e solo se $|\mathbf{x}| \ge 3$.

8. *a*) Sappiamo che $\overline{E}$ è un insieme chiuso. Se poi F è un insieme chiuso e $F \supseteq E$, allora $F = \overline{F} \supseteq \overline{E}$.

b) Sappiamo che $\overline{E}$ è chiuso e contiene E, per cui contiene l'intersezione di tutti i chiusi contenenti E:

$$\overline{E} \supseteq \bigcap_{\substack{C \supseteq E \\ C \text{ chiuso}}} C\,.$$

Viceversa, sia C un chiuso arbitrario contenente E; allora $\overline{E} \subseteq \overline{C} = C$, per cui

$$\overline{E} \subseteq \bigcap_{\substack{C \supseteq E \\ C \text{ chiuso}}} C\,.$$

9. Indichiamo con E_k^a, E_k^b ed E_k^c gli insiemi E_k nei vari casi (a), (b) e (c).

Iniziamo con il considerare il caso (a). L'insieme intersezione E risulta vuoto. Infatti se esistesse $(\overline{x}, \overline{y}) \in E$ dovrebbe essere

$$0 < \overline{y} < \overline{x}^k \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che $\overline{x} \in (0,1)$, risulta $\lim_k \overline{x}^k = 0$: assurdo. Allora $E = \emptyset = \overline{E}$.

Assunto che risulti

$$\overline{E}_k^a = \{(x,y) :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^k\}\ (= E_k^c)$$

(si ragioni in analogia con quanto visto per i grafici nell'Esercizio 3), si ottiene facilmente che

$$\bigcap_k \overline{E}_k^a = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0,1])$$

(come prima, la disuguaglianza $0 \le y \le x^k$ forza a zero il valore dell'ordinata se l'ascissa è minore di 1).

Nel caso (b) l'insieme E_k coincide con quello del caso (a) a cui si aggiunga il segmento $S = \{1\} \times (0,1]$. Pertanto

$$E = \bigcap_k E_k^b = S, \quad \overline{E} = \overline{S} = \{1\} \times [0,1].$$

Osserviamo infine che

$$E_k^a \subseteq E_k^b \subseteq E_k^c = \overline{E}_k^a;$$

quindi $\overline{E}_k^a = \overline{E}_k^b = \overline{E}_k^c = E_k^c$. Da ciò segue anche che

$$\cap_k \overline{E}_k^b = \cap_k E_k^c = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0,1]) = \cap_k \overline{E}_k^c = \overline{\cap_k E_k^c}.$$

10. L'insieme può essere descritto esplicitamente come $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0\}$; pertanto è aperto.

11. L'insieme E è l'unione delle semirette s_x uscenti dall'origine O al variare di x nel cerchio A; equivalentemente, E è l'unione delle semirette uscenti da O e che intersecano il cerchio A. Distinguiamo tre casi.

Se $|x_0| > r$ allora l'origine è al di fuori del cerchio A. L'insieme E è allora costituito dal settore angolare del piano ottenuto conducendo da O le tangenti al cerchio; i punti di tali tangenti non sono punti di E.

Se $|x_0| < 1$ allora O è interno al cerchio A. In tal caso l'insieme E è tutto $\mathbb{R}^2$, poichè ogni semiretta per l'origine interseca A.

Se $|x_0| = 1$ allora O è sul bordo del cerchio: l'insieme E è il semipiano, contenente A, individuato dalla retta tangente in O al cerchio (infatti ogni semiretta di origine O in tale semipiano interseca A).

12. Sia, ad esempio, $\max(|x|,|y|)=|x|$. Allora

$$|x| \leq \big(|x|^p+|y|^p\big)^{1/p} \leq 2^{1/p}|x| \to |x| \quad \text{per } p\to+\infty.$$

Si conclude per il Teorema del confronto.

Mostriamo ora che

$$\bigcup_{p\geq 1} B_p = (-1,1)^2.$$

Sia $(x,y)\in B_p$; allora $|x|^p+|y|^p<1$ per cui $|x|,|y|<1$ e quindi $(x,y)\in Q$. Ne segue che $\bigcup_{p\geq 1} B_p \subseteq (-1,1)^2$. Viceversa, sia $(x,y)\in(-1,1)^2$; supponiamo, per fissare le idee, che $\max(|x|,|y|)=|x|$; per ipotesi tale valore è strettamente minore di 1. Dal risultato di limite in (1) segue allora che esiste $\overline{p}$ tale che per $p\geq\overline{p}$ risulta

$$\big(|x|^p+|y|^p\big)^{1/p}<1,$$

cioè $(x,y)\in B_p$. Quindi $(x,y)\in\bigcup_{p\geq 1} B_p$.

13. Fissiamo $x,y\in X$. Per la disuguaglianza triangolare

$$d(x,x_0)\leq d(x,y)+d(y,x_0),$$

da cui

$$d(x,x_0)-d(y,x_0)\leq d(x,y).$$

Scambiando i ruoli di x e di y si ha anche

$$d(y,x_0)-d(x,x_0)\leq d(y,x)=d(x,y).$$

Ne segue che:

$$|d(x,x_0)-d(y,x_0)|\leq d(x,y).$$

Pertanto la funzione $x\mapsto d(x,x_0)$ è lipschitziana.

Consideriamo ora la funzione $d(\cdot,A)$. Fissiamo x_0 e y_0; comunque preso $x\in A$ risulta:

$$d(x_0,A)\leq d(x_0,x)\leq d(x_0,y_0)+d(y_0,x),$$

quindi

$$d(x_0,A)-d(x_0,y_0)\leq d(y_0,x).$$

Per l'arbitrarietà di $x\in A$:

$$d(x_0,A)-d(x_0,y_0)\leq\inf\{d(y_0,x):\ x\in A\}=d(y_0,A),$$

quindi

$$d(x_0,A)-d(y_0,A)\leq d(x_0,y_0).$$

Scambiano i ruoli di x_0 e y_0 concludiamo che

$$|d(x_0,A)-d(y_0,A)|\leq d(x_0,y_0).$$

La funzione $d(\cdot,A)$ è pertanto lipschitziana.

14. Dato $x\in A$ la condizione $d(x,A)=0$ significa (definizione di estremo inferiore) che comunque preso $\varepsilon>0$ esiste un punto $y\in A$ tale che $d(x,y)<\varepsilon$, cioè $y\in B_\varepsilon(x)\cap A$: la condizione su x è quindi quella di appartenenza a $\overline{A}$.

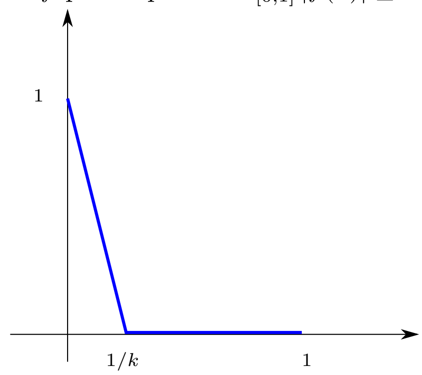
15. La disuguaglianza triangolare segue subito dall'analoga disuguaglianza valida puntualmente: date $f, g, h \in X$ e $x \in [0,1]$

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Rispetto alla distanza d, la palla di centro la funzione nulla e raggio 1 è costituita da tutte le funzioni continue su $[0,1]$ il cui grafico è compreso nel rettangolo $[0,1] \times [-1,1]$: si tratta infatti delle funzioni f per le quali $\max_{[0,1]} |f(x)| \leq 1$.

Sia

$$f_k(x) = \max(0, 1 - kx)$$
$$= \begin{cases} 1 - kx, & \text{se } 0 \leq x \leq 1/k \\ 0, & \text{se } 1/k \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Risulta $d(f_k, 0) = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Invece, $\delta(f_k, 0)$ è l'area sottesa dal grafico di f_k, che vale $1/(2k)$: tende a 0 per $k \to +\infty$.