Gli esercizi segnati ☒ sono comuni a Matematici e Fisici.

☒ 1. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo, locali e/o assoluti, delle seguenti funzioni nel loro insieme naturale di definizione:

a) $x^2y + xy^2 - xy$, *b*) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, *c*) $x^4 + 3x^2y^2 + y^4$,

d) $\mathrm{e}^{x-y}(x^2 - 2y^2)$, *e*) $\dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$, *f*) $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2 + y^2}$,

g) $y^3 + (x - y)^2$, *h*) $x^4 - (x - y)^2$, *i*) $y + x \sin y$,

l) $x^4 - 2xy^2 + 2y^4$.

☒ 2. Individuare i punti di estremo locale della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Tracciare un grafico qualitativo di tale funzione.

❑ 3. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locali e assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \log(y - x)$$

nel suo insieme naturale E di definizione. La funzione f ha massimo o minimo assoluti sull'insieme $E \cap C$, dove $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 + x - y \leq 0\}$?

☒ 4. Determinare la natura dei punti critici di $f(x, y) = \alpha x^n + \beta y^n$ al variare di $n \geq 2$ $(\alpha\beta \neq 0)$.

☒ 5. Sia $f(x, y) = e^{\frac{3}{2}x + y^2}(x - x^2 - y^2)$.

a) Determinare gli eventuali punti di massimo/minimo locale o assoluto della funzione f su $\mathbb{R}^2$.

b) La funzione è limitata superiormente? Inferiormente?

c) (Matematici) Esistono valori $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali gli insiemi di sopralivello $E_\alpha = \{(x, y) : \; f(x, y) \geq \alpha\}$ non sono limitati?

❑ 6. Determinare gli eventuali punti di estremo locale delle funzioni

$$f(x, y) = \sqrt{x - y^2}\,\log x \qquad g(x, y) = \sqrt{|x - y^2|}\,\log x$$

La funzione f ammette minimo assoluto? E la funzione g?

☒ 7. Si consideri la funzione

$$f(x,y)=x^4+y^4-2(x^2+y^2)-4xy.$$

a) Individuare gli eventuali punti di estremo locale su $\mathbb{R}^2$.

b) (Matematici) È possibile individuare $\alpha>0$ tale che la funzione f ristretta all'insieme

$$E=\{(\varrho\cos\vartheta,\varrho\sin\vartheta):\ 0\le\vartheta\le\alpha,\ \varrho\ge 0\}$$

abbia nell'origine un punto di massimo locale?

c) (Matematici) La funzione f ha massimo/minimo assoluti su tutto $\mathbb{R}^2$?

☒ 8. Determinare i punti della curva di equazione $4x^3+x^2-y^2=0$ in cui non è possibile applicare il teorema della funzione implicita rispetto ad alcuna delle due variabili.

☒ 9. Verificare nei casi seguenti che $(\overline{x},\overline{y})$ è soluzione dell'equazione $g(x,y)=0$ e che in un intorno di $(\overline{x},\overline{y})$ è possibile esplicitare y in funzione di x, cioè nella forma $y=\varphi(x)$ per un'opportuna funzione φ. Calcolare inoltre $\varphi'(\overline{x})$ e $\varphi''(\overline{x})$. In base a ciò rappresentare approssimativamente la curva di equazione $g(x,y)=0$ nell'intorno del suo punto $(\overline{x},\overline{y})$:

a) $g(x,y)=x^2-2xy+y^2+x+y-2,\ \ (\overline{x},\overline{y})=(1,1)$;

b) $g(x,y)=x\log(y^2+1)-x^2+y,\ \ (\overline{x},\overline{y})=(0,0)$.

☒ 10. Verificare che la superficie Σ di equazione $x^2\mathrm{e}^z+z\mathrm{e}^y+y^2=0$ passa per l'origine e intorno all'origine è grafico di una funzione $\varphi(x,y)$. Determinare il polinomio di Taylor del second'ordine di φ relativo al punto $(0,0)$.

☒ 11. Sia $g(x,y)=x^3-y^3+2xy$. Indichiamo con $\mathscr{C}$ la linea di livello 0 della funzione g.

a) Scrivere l'equazione della retta tangente a $\mathscr{C}$ nel punto $(1,-1)$.

b) Individuare i punti di $\mathscr{C}$ per i quali non è possibile applicare il Teorema della funzione implicita (rispetto ad alcuna delle due variabili).

c) (Matematici) Dopo aver verificato che in un intorno del punto $(1,-1)$ la curva $\mathscr{C}$ è grafico $y=\varphi(x)$ per un'opportuna funzione φ, calcolare il

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log|\varphi(x)|}{x-1}.$$

☒ 12. Si consideri la curva $\mathscr{C}$ di equazione

$$x^4+y^4+2x^2y-1=0.$$

a) Individuare i punti di $\mathscr{C}$ nei quali la retta tangente è orizzontale. Dopo aver verificato che fra tali punti si trova $P_0=(0,1)$, mostrare che in un intorno di P_0 la curva $\mathscr{C}$ è grafico $y=\varphi(x)$ per un'opportuna funzione φ. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 di φ relativo al punto $x_0=0$.

b) (Matematici) La curva $\mathscr{C}$ è limitata?

$\boxtimes$ 13. Sia $\mathscr{C}$ la curva piana di equazione

$$x^2 + y^2 + 2x - 2\sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

a) Verificare che $P_0 = (0, 2) \in \mathscr{C}$. Verificare che in un intorno di P_0 la curva $\mathscr{C}$ è grafico $y = \varphi(x)$ di una funzione concava φ.

b) Scrivere la curva $\mathscr{C}$ in coordinate polari e darne una rappresentazione grafica.

c) (Matematici) Verificare che il limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathscr{C},\, y>0}} \frac{y}{|x|^{3/2}}$$

esiste finito (può essere utile procedere in coordinate polari).

Soluzioni

1. Indichiamo con f la funzione di volta in volta considerata.

a) La funzione è di classe C^n su tutto $\mathbb{R}^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Risulta:

$$f_x = 2xy + y^2 - y, \qquad f_y = x^2 + 2xy - x.$$

Risolvendo il sistema delle due equazioni $f_x = 0$ e $f_y = 0$ si ottengono i punti critici

$$(0,0), \qquad (1/3, 1/3), \qquad (1,0), \qquad (0,1).$$

La matrice hessiana è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\det H(0,0) &= -1 < 0 : && (0,0) \text{ punto di sella;} \\
\det H(1,0) &= -1 < 0 : && (1,0) \text{ punto di sella;} \\
\det H(0,1) &= -1 < 0 : && (0,1) \text{ punto di sella;} \\
\det H(1/3,1/3) &= \frac{1}{3}, \quad f_{xx} = \frac{2}{3} > 0 : && (1/3,1/3) \text{ punto di minimo.}
\end{aligned}$$

La funzione f non ammette né minimo né massimo assoluto, poiché

$$f(x,x) = 2x^3 - x^2 \to \pm\infty \qquad \text{per } x \to \pm\infty.$$

b) Il grafico della funzione f è la superficie emisferica di centro l'origine e raggio 1 nel semispazio $z \geq 0$. Pertanto il minimo assoluto è assunto sulla frontiera del cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$, insieme di definizione di f, mentre il massimo assoluto è assunto nell'origine.

c) La funzione è di classe C^n su tutto $\mathbb{R}^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Risulta:

$$f_x = 4x^3 + 6xy^2, \qquad f_y = 6x^2y + 4y^3.$$

Risolvendo il sistema delle due equazioni $f_x = 0$ e $f_y = 0$ si ottiene come unico punto critico l'origine. La matrice hessiana è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 6y^2 & 12xy \\ 12xy & 6x^2 + 12y^2 \end{pmatrix},$$

che si annulla nell'origine. Pertanto il criterio della matrice hessiana non permette di concludere circa la natura dell'origine come punto critico. Si osservi però che $f \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e che $f(0,0) = 0$, per cui l'origine è punto di minimo assoluto. Il massimo assoluto non esiste poiché, ad esempio, $f(x,0) = x^4 \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

d) La funzione è di classe C^n su tutto $\mathbb{R}^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Risulta:

$$f_x = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x), \qquad f_y = e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y).$$

Il sistema di equazioni che dà i punti critici è

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases} \quad \text{cioè (sommando le due equazioni)} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano i punti $(0,0)$ e $(-4,-2)$. La matrice hessiana è

$$H(x,y) = e^{2(x-y)} \begin{pmatrix} x^2 - 2y^2 + 4x + 2 & -x^2 + 2y^2 - 2x - 4y \\ -x^2 + 2y^2 - 2x - 4y & x^2 - 2y^2 + 8y - 4 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{aligned} \det H(0,0) &= -8 < 0: \qquad (0,0) \text{ punto di sella;} \\ \det H(-4,-2) &= e^{-4}8 > 0, \qquad f_{xx} = -6 < 0: \qquad (-4,-2) \text{ punto di massimo.} \end{aligned}$$

La funzione f non ammette né minimo né massimo assoluto, poiché, ad esempio

$$\begin{aligned} f(x,0) &= e^x x^2 \to +\infty \qquad \text{per } x \to +\infty; \\ f(x,x) &= -x^2 \to -\infty \qquad \text{per } x \to +\infty. \end{aligned}$$

e) La funzione f è il reciproco della funzione $g(x,y) = 1 + x^2 + y^2$; poiché quest'ultima ha l'origine come punto di minimo assoluto e non ammette massimo assoluto, concludiamo subito che la funzione f ha l'origine come punto di massimo assoluto (con valore $1/g(0,0) = 1$) e non ammette minimo assoluto.

f) In modo analogo a quanto svolto in (*e*), la funzione f è composizione di $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ con la funzione crescente arctan. Allora gli estremi di f sono quelli di g.

g) La funzione è di classe C^n su tutto $\mathbb{R}^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Risulta:

$$f_x = 2(x-y), \qquad f_y = 3y^2 - 2(x-y).$$

Risolvendo il sistema delle due equazioni $f_x = 0$ e $f_y = 0$ si ottiene come unico punto critico l'origine. La matrice hessiana è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y+2 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\det H(0,0) = 0$ e il criterio della matrice hessiana non permette di concludere. Si osservi però che $f(0,0) = 0$ e che $f(x,x) = x^3$: lungo la bisettrice $y = x$ la funzione cambia segno attraversando l'origine. Quindi l'origine è punto di sella.

La non esistenza del massimo e del minimo assoluto discende anch'essa, ad esempio, dall'analisi della restrizione $f(x,x) = x^3$.

h) L'esercizio procede parallelamente a quanto svolto in (*g*) e l'unico punto critico, l'origine, presenta la matrice hessiana a determinante nullo. Risulta:

$$f(x,x) = x^4, \qquad f(0,y) = -y^2.$$

Quindi ancora l'origine è punto di sella. Si provi anche a studiare il segno della funzione f (che coincide con il segno dell'incremento $f - f(0,0)$).

i) La funzione è di classe C^n su tutto $\mathbb{R}^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Risulta:

$$f_x = \sin y, \qquad f_y = 1 + x\cos y.$$

Pertanto abbiamo infiniti punti critici:

$$\big((-1)^{k+1}, k\pi\big) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

La matrice hessiana è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\sin y \end{pmatrix}, \qquad \text{quindi} \qquad H\big((-1)^{k+1}, k\pi\big) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora $\det H\big((-1)^{k+1}, k\pi\big) = -1 < 0$: si tratta di punti di sella.

Poiché $f(0,y) = y$, la funzione non ammette né massimo né minimo assoluto.

l) La funzione è di classe C^n su tutto $\mathbb{R}^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Risulta:

$$f_x = 4x^3 - 2y^2, \qquad f_y = -4xy + 8y^3,$$

quindi otteniamo i punti critici dal sistema seguente:

$$\begin{cases} 2x^3 - y^2 = 0 \\ y(x - 2y^2) = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} 2x^3 - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} 2x^3 - y^2 = 0 \\ x = 2y^2 \end{cases}$$

Dai due sistemi indicati si ottengono facilmente le soluzioni

$$(0,0), \quad (\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}).$$

Calcoliamo la matrice hessiana:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4y \\ -4y & -4x + 24y^2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\det H(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}) = \det \begin{pmatrix} 3 & \mp 2 \\ \mp 2 & 4 \end{pmatrix} = 8 > 0, \qquad f_{xx}(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}) > 0,$$

quindi $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ sono punti di minimo, con valore $-1/16$.

Invece $H(0,0)$ è la matrice nulla. Si osservi però che, ad esempio

$$f(x,x) = 3x^4 - 2x^3 = x^3(3x - 2);$$

tale funzione ha, in un intorno sufficientemente piccolo di $x = 0$, il segno di $-x^3$; pertanto l'origine è punto di sella.

Osserviamo infine che

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = +\infty.$$

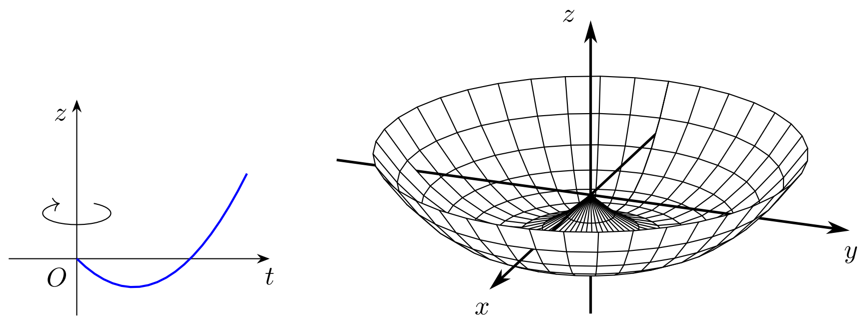
Infatti:

$$f(x,y) \geq x^4 + y^4 - 2xy^2 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2xy^2,$$

quindi, in coordinate polari

$$f \geq \frac{1}{2}\varrho^4 - 2\varrho^3 \cos\vartheta \sin^2\vartheta \to +\infty \quad \text{per } \varrho \to +\infty.$$

Concludiamo che non esiste massimo assoluto ed esiste il minimo assoluto, assunto dei punti di minimo individuati sopra.



(a) $g(t) = t^2 - t$ (b) $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$

Figura 1 - Grafico di una funzione radiale (vedi Esercizio 2).

2. La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$; in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è di classe C^n per ogni n, mentre l'origine è punto singolare (non esiste $\nabla f(0,0)$).

La funzione f è della forma

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}), \qquad \text{con } g(t) = t^2 - t;$$

pertanto il grafico di f si ottiene per rotazione del grafico di $g\Big|_{t \geq 0}$ attorno all'asse verticale (vedi Figura 1).

Il valore $t = 1/2$ è punto di minimo per la funzione g; pertanto, i punti (x, y) della circonferenza $\mathscr{C}$ di centro $(0,0)$ e raggio $1/2$ (cioè i punti per i quali $\sqrt{x^2 + y^2} = 1/2$) sono tutti punti di minimo assoluto, mentre l'origine è punto di massimo relativo.

Si noti che il calcolo dei punti critici fornisce i punti di $\mathscr{C}$ e che la matrice hessiana in tali punti risulta avere determinante nullo. Infatti abbiamo:

$$f_x(x, y) = 2x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_y(x, y) = 2y - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

quindi i punti critici si ottengono come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ 2y - \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono i punti della circonferenza $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 1/4$. Risulta poi:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2 - \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \\ f_{yy}(x, y) &= 2 - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

È immediato ora verificare che nei punti (x, y) della circonferenza $\mathscr{C}$ risulta $\det H(x, y) = 0$.

3. La funzione è definita sul semipiano $y > x$. Individuiamo i punti critici.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{1}{y-x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{1}{y-x}.$$

Quindi:

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y-x} = 0 \\ 2y - \dfrac{1}{y-x} = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} y = -x \\ 4x^2 = 1 \end{cases}$$

Abbiamo pertanto i punti $\pm(1/2, -1/2)$; dal momento che deve essere $y > x$ consideriamo soltanto il punto $(-1/2, 1/2)$.

Calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{1}{(x-y)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{(x-y)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{1}{(x-y)^2}.$$

Allora

$$H(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det H(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 8 > 0, \quad f_{xx} > 0.$$

Il punto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è quindi un punto di minimo locale.

Chiaramente la funzione non ha massimo assoluto su E: questo sarebbe infatti, in particolare, massimo locale. Del resto si ha, ad esempio, $f(x, -x) \to +\infty$ per $x \to -\infty$. Dimostriamo, più in generale, che

$$\lim_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in E}} f(x, y) = +\infty. \tag{1}$$

Infatti, se $(x, y) \in E$ è tale che $0 < y - x \leq 1$ allora $\log(y - x) \leq 0$ e

$$f(x, y) \geq x^2 + y^2 = |(x, y)|^2 \to +\infty \qquad \text{per } |(x, y)| \to +\infty.$$

Sia invece $y - x > 1$; poiché

$$1 < y - x \leq |y| + |x| \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)},$$

abbiamo

$$f(x, y) \geq x^2 + y^2 - \log \sqrt{2(x^2 + y^2)} \to +\infty \qquad \text{per } |(x, y)| \to +\infty.$$

Analizziamo ora la parte di E vicina al bordo $y - x = 0$, quindi nella striscia S_δ definita da $0 < y - x < \delta$ con $\delta \in (0, 1)$. Se $(x, y) \in S_\delta$ allora

$$f(x, y) \geq -\log(y - x) \geq \log \frac{1}{\delta} \to +\infty \qquad \text{per } \delta \to 0^+.$$

Questo risultato, assieme a (1), assicura che comunque preso $M > 0$ esistono $R > 0$ e $\delta_M > 0$ tali che

$$f(x, y) \geq M \qquad \text{per } (x, y) \in E \setminus K,$$

dove K è il compatto, contenuto in E,

$$K = \overline{B}_R(0, 0) \cap \{y - x \geq \delta_M\}.$$

Un'applicazione del teorema di Weierstrass permette di concludere che esiste il minimo assoluto di f su E. Tale punto di minimo è pertanto il punto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sopra determinato.

Consideriamo infine f sull'insieme $E \cap C$, cioè sul cerchio di centro il punto $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ passante per l'origine, origine esclusa. Poiché

$$\lim_{\substack{|(x,y)|\to(0,0)\\(x,y)\in E}} f(x,y) = +\infty, \tag{2}$$

e l'origine è punto di accumulazione per f su $E \cap C$, la funzione non ammette massimo assoluto su $E \cap C$. Poiché $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in C$, tale punto è in particolare punto di minimo assoluto anche su $E \cap C$. Comunque, il fatto che su $E \cap C$ esista un punto di minimo assoluto può essere dedotto direttamente osservando che lo stesso risultato (2) implica che il minimo assoluto di f sul compatto $C \setminus B_\delta(0,0)$ è minimo assoluto su tutto $E \cap C$ per δ sufficientemente piccolo.

4. L'unico punto critico è chiaramente l'origine. Se n è dispari il valore $f(x,0)$ (o $f(0,y)$) cambia segno attraversando l'origine, per cui si ha un punto di sella. Sia pertanto n pari. Se α e β sono discordi allora i valori $f(x,0)$ e $f(0,y)$ sono discordi, per cui l'origine è un punto di sella. Se α e β sono concordi, allora i valori αx^n e βy^n sono concordi, per cui la funzione ha segno costante e l'origine è punto di massimo o minimo assoluto.

5. *a*) Risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{3}{2}x+y^2}\big[\frac{3}{2}(x - x^2 - y^2) + 1 - 2x\big],$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{\frac{3}{2}x+y^2}(x - x^2 - y^2 - 1).$$

Quindi i punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}(x - x^2 - y^2) + 1 - 2x = 0, \\ y(x - x^2 - y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $y = 0$ oppure $x - x^2 - y^2 = 1$. Nel primo caso:

$$\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{3}{2}(x - x^2) + 1 - 2x = 0, \end{cases}$$

da cui $3x^2 + x - 2 = 0$ cioè $x = -1$ e $x = 2/3$. Invece, il caso $x - x^2 - y^2 = 1$ dà luogo a:

$$\begin{cases} x - x^2 - y^2 = 1, \\ \dfrac{3}{2} + 1 - 2x = 0, \quad \text{cioè } x = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$$

però, con tale valore di x la prima equazione risulta impossibile.

Allora i punti stazionari sono: $(-1,0)$ e $(\frac{2}{3},0)$. Calcoliamo ora le derivate seconde; risulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{\frac{3}{2}x+y^2}\big[-\frac{9}{4}(x^2+y^2)-\frac{15}{4}x+1\big],\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= e^{\frac{3}{2}x+y^2}y\big[-3(x^2+y^2)-x-1\big],\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2e^{\frac{3}{2}x+y^2}\big[(x-x^2-y^2-1)(1+2y^2)-2y^2\big].
\end{aligned}$$

Allora

$$\det H(-1,0) = e^{-3}\begin{vmatrix} -\frac{9}{4}+\frac{15}{4}+1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = e^{-3}\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -15e^{-3} < 0.$$

Ne segue che $(-1,0)$ è punto di sella. Quanto al punto $(\frac{2}{3},0)$:

$$\det H(\frac{2}{3},0) = e^{2}\begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{14}{9} \end{vmatrix} > 0;$$

inoltre $f_{xx}(2/3,0), f_{yy}(2/3,0) < 0$; conlcudiamo che $(\frac{2}{3},0)$ è punto di massimo locale.

Osserviamo che $f \geq 0$ per $x-x^2-y^2 \geq 0$, cioè all'interno della circonferenza

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

Il massimo assoluto in tale cerchio (che esiste per il Teorema di Weierstrass) è pertanto anche massimo assoluto su $\mathbb{R}^2$. Invece non esiste il minimo assoluto poiché, ad esempio,

$$f(x,0) = e^{\frac{3}{2}x}(x-x^2) \to -\infty \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Del resto, se esistesse un punto di minimo assoluto questo dovrebbe trovarsi, in particolare, fra i punti di minimo relativo.

b) Per quanto detto sopra, la funzione f è limitata superiormente, ma non inferiormente. Osserviamo che

$$f(x,0) = e^{\frac{3}{2}x}(x-x^2) \to 0 \qquad \text{per } x \to -\infty.$$

Pertanto, comunque preso $\alpha < 0$, l'insieme $E_\alpha = \{(x,y): \ f(x,y) \geq \alpha\}$ contiene i punti $(x,0)$ per $x < 0$ e $|x|$ sufficientemente grande; ne segue che E_α non è limitato.

6. La funzione f è definita nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq y^2, \ x \neq 0\}.$$

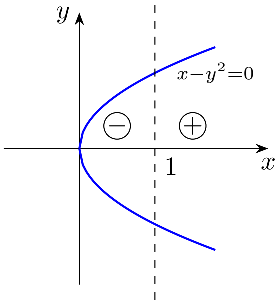


Figura 2 - Segno di $\sqrt{x-y^2}\log x$ (vedi Esercizio 6).

L'interno di E è costituito dai punti (x,y) per i quali $x > y^2$. Cerchiamo i punti critici di f in tale insieme. Il sistema di equazioni ottenuto annullando le derivate prime è:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-y^2}}\log x + \dfrac{\sqrt{x-y^2}}{x} = 0 \\ -\dfrac{y\log x}{\sqrt{x-y^2}} = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $y = 0$ oppure $x = 1$. Nel primo caso la prima equazione diventa $\log x + 2 = 0$, da cui il punto critico $(e^{-2}, 0)$. Se invece $x = 1$ allora dovrebbe essere $y^2 = 0$: i punti $(1, \pm 1)$ non sono tuttavia accettabili (annullano il denominatore $\sqrt{x-y^2}$). Valutiamo ora la matrice hessiana nel punto $(e^{-2}, 0)$; risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{2(x-y^2) - x\log x}{4x(x-y^2)^{3/2}} - \frac{x+2y^2}{2x^2\sqrt{x-y^2}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^{-2},0) = \frac{1}{2}e^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{y\log x}{2(x-y^2)^{3/2}} - \frac{y}{x\sqrt{x-y^2}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(e^{-2},0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{x\log x}{(x-y^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^{-2},0) = 2e. \end{aligned}$$

Quindi

$$H(e^{-2},0) = \begin{pmatrix} e^3/2 & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix};$$

il punto $(e^{-2}, 0)$ è pertanto punto di minimo locale, con valore $-2/e$.

Consideriamo ora i punti di E che stanno sulla frontiera, cioè i punti della parabola di equazione $x = y^2$, con $x \neq 0$. In tali punti la funzione si annulla, mentre è negativa per $x < 1$ e positiva per $x > 1$. Allora tutti i punti della parabola con $0 < x < 1$ sono punti di massimo locale, mentre sono di minimo locale i punti della parabola con $x > 1$. I punti $(1, \pm 1)$ non sono né di massimo né di minimo (in qualunque loro intorno la funzione cambia segno: vedi Figura 2).

Consideriamo ora il problema degli estremi assoluti. Chiaramente non esiste massimo assoluto, poiché $f(x,0) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Osserviamo poi che

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} f(x,y) = 0,$$

poiché

$$|f(x,y)| \le \sqrt{x}\log x \to 0 \qquad \text{per } x \to 0.$$

Allora la funzione $\tilde{f}$, ottenuta da f estendendola nell'origine con valore nullo, è continua sull'insieme compatto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 \le x \le 1\}.$$

Pertanto $\tilde{f}$, su tale insieme, ammette un punto di minimo assoluto, che deve essere interno a K poiché $\tilde{f} = 0$ sulla frontiera di K, mentre $\tilde{f} = f < 0$ internamente a K; deve allora coincidere con $(e^{-2}, 0)$. Questo punto è anche punto di minimo assoluto di f su tutto E, dal momento che $f \ge 0$ su $E \setminus K$.

Passiamo ora alla funzione g; questa è ora definita su tutto il semipiano $x > 0$:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } x \ge y^2; \\ \\ \sqrt{y^2 - x}\log x & \text{se } 0 < x < y^2. \end{cases}$$

I punti della parabola $x = y^2$ sono punti singolari. Guardiamo se esistono punti critici per $0 < x < y^2$. Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{1}{2\sqrt{y^2 - x}}\log x + \frac{\sqrt{y^2 - x}}{x}, \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{y \log x}{\sqrt{y^2 - x}}. \end{aligned}$$

Si vede facilmente che il sistema $\nabla g(x,y) = 0$ non ammette soluzioni. Poiché $g = 0$ lungo la parabola, anche per la funzione g i punti della parabola con ascissa $0 < x < 1$ sono punti di massimo locali, mentre se $x > 1$ si hanno punti di minimo locale.

La funzione g non ammette massimo assoluto (come per f), e nemmeno minimo assoluto, poiché se $\overline{y} \ne 0$ risulta $g(x, \overline{y}) \to -\infty$ se $x \to 0^+$.

7. *a*) Individuiamo i punti critici di f:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x - 4y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y - 4x. \end{cases}$$

Imponendo che entrambe le derivate si annullino otteniamo (si sottraggano le due equazioni):

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 0 \\ 4x^3 - 4x - 4y = 0. \end{cases} \qquad \text{quindi} \qquad \begin{cases} y = x \\ x^3 - 2x = 0 : \quad x = 0, \ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Abbiamo pertanto i punti critici $(0,0)$ e $\pm(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Calcoliamo la matrice hessiana:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2-4 & -4\\ -4 & 12y^2-4\end{pmatrix}$$

Allora $\det H(0,0)=0$, mentre

$$\det H\big(\pm(\sqrt{2},\sqrt{2})\big)=\begin{vmatrix}20 & -4\\ -4 & 20\end{vmatrix}>0,\qquad f_{xx},f_{yy}>0.$$

Allora i punti $\pm(\sqrt{2},\sqrt{2})$ sono punti di minimo locale, mentre per l'origine dobbiamo indagare il segno dell'incremento $f(x,y)-f(0,0)$, cioè il segno di f. Nel caso attuale riusciamo a stabilire che il segno non è costante poichè vi sono rette per l'origine su cui f ha, in un intorno dell'origine, segno differente. Infatti

$$f(x,x)=2x^4-8x^2=2x^2(x^2-4)<0\qquad \text{per } 0<|x|<2;$$

mentre

$$f(x,-x)=2x^4>0\qquad \text{per } x\neq 0.$$

Concludiamo che l'origine è punto di sella.

b) Scriviamo f in coordinate polari:

$$f(\varrho\cos\vartheta,\varrho\sin\vartheta)=\varrho^2\big[\varrho^2(\cos^4\vartheta+\sin^4\vartheta)-2-4\cos\vartheta\sin\vartheta\big].$$

Poiché il primo termine nella parentesi tende a zero per $\varrho\to 0$, il valore di f è negativo (cioè minore del valore in $(0,0)$) in un insieme E se per ogni ϑ, coordinata angolare di punti di E, risulta $-2-4\cos\vartheta\sin\vartheta\le c<0$, per qualche valore c. È allora sufficiente considerare $0\le\vartheta\le\pi/2$ per avere

$$-2-4\cos\vartheta\sin\vartheta=-2(1+\sin 2\vartheta)\le -2.$$

Possiamo pertanto considerare, ad esempio, $\alpha=\pi/2$.

c) Utilizziamo la disuguaglianza $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$, con $a=x^2$ e $b=y^2$; allora $(x^2+y^2)^2\le 2(x^4+y^4)$, da cui

$$\begin{aligned}f(x,y)&\ge\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)-4xy\\ &=\frac{1}{2}\varrho^4-2\varrho^2-4\varrho^2\cos\vartheta\sin\vartheta\to+\infty\qquad \text{per } \varrho\to+\infty.\end{aligned}$$

Ne segue che non esiste il massimo assoluto di f su $\mathbb{R}^2$, ma esiste il minimo assoluto, che deve pertanto coincidere con il valore assunto in uno dei punti di minimo locale $\pm(\sqrt{2},\sqrt{2})$. In entrambi la funzione assume lo stesso valore (-8), per cui entrambi sono punti di minimo assoluto.

8. Sia $g(x,y)=4x^3+x^2-y^2$. Il Teorema della funzione implicita (Teorema del Dini) non può essere applicato rispetto ad alcuna delle due variabili nei punti della curva in cui si annullano entrambe le derivate di g:

$$\begin{cases}g_x(x,y)=12x^2+2x=0\\ g_y(x,y)=-2y=0,\end{cases}$$

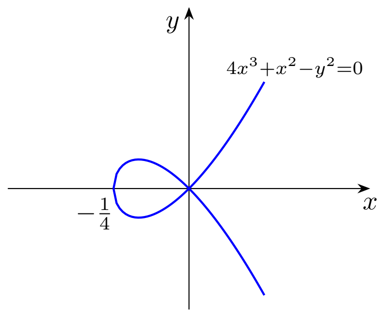


Figura 3 - Esercizio 8

cioè nei punti $(0,0)$ e $(-\frac{1}{6},0)$. Tuttavia solo il primo appartiene alla curva: per esso non è possibile applicare il Teorema della funzione implicita rispetto ad alcuna delle due variabili. Il grafico (vedi Figura 3) evidenzia come nell'intorno di tale punto la curva non sia un grafico cartesiano. Il grafico può essere disegnato come unione dei grafici delle funzioni $\pm x\sqrt{4x+1}$.

9. *a*) Risulta $g(1,1)=0$ e

$$g_y(x,y) = -2x+2y+1, \qquad g_y(1,1)=1\neq 0.$$

Allora è possibile applicare il Teorema della funzione implicita nel punto $(1,1)$. Sia φ la funzione definita implicitamente dall'equazione $g(x,y)=0$ in un intorno del punto $(1,1)$; quindi φ è definita in un intorno del punto $x=1$ e in tale intorno risulta

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))} = -\left.\left(\frac{2x-2y+1}{-2x+2y+1}\right)\right|_{y=\varphi(x)} = -\frac{2x-2\varphi(x)+1}{-2x+2\varphi(x)+1}.$$

In particolare abbiamo $\varphi'(1)=-1$.

Per calcolare $\varphi''(1)$ conviene partire dalla relazione $f(x,\varphi(x))=0$, cioè

$$x^2-2x\varphi(x)+\varphi(x)^2+x+\varphi(x)-2=0,$$

e derivare due volte; si ottiene

$$2-4\varphi'(x)+2(\varphi'(x))^2+(-2x+2\varphi(x)+1)\varphi''(x)=0.$$

Calcoliamo in $x=1$, tenendo conto che $\varphi(1)=1$ e $\varphi'(1)=-1$:

$$8+\varphi''(1)=0, \qquad \text{da cui } \varphi''(1)=-8.$$

Allora in un intorno di $x=1$

$$\varphi(x)\sim 1-(x-1)-4(x-1)^2=-4x^2+7x-2.$$

b) Risulta $g(0,0)=0$ e

$$g_y(x,y)=\frac{2xy}{y^2+1}+1, \qquad g_y(0,0)=1\neq 0.$$

Allora è possibile utilizzare il Teorema della funzione implicita nel punto $(0,0)$ e ottenere una funzione φ definita in un intorno di 0 il cui grafico rappresenta la curva di equazione $g(x,y)=0$ in un intorno dell'origine. Si ha

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\frac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))} = -\left(\frac{\log(y^2+1)-2x}{\frac{2xy}{y^2+1}+1}\right)\Bigg|_{y=\varphi(x)} \\ &= \frac{\big[2x-\log\big(\varphi(x)^2+1\big)\big]\big(\varphi(x)^2+1\big)}{2x\varphi(x)+\varphi(x)^2+1}.\end{aligned}$$

In particolare abbiamo $\varphi'(0)=0$.

Come sopra, per calcolare $\varphi''(1)$ conviene partire dalla relazione $g(x,\varphi(x))=0$, cioè

$$x\log(\varphi(x)^2+1)-x^2+\varphi(x)=0,$$

e derivare due volte; si ottiene

$$\frac{2\varphi\varphi'}{\varphi^2+1}+2\Big[(\varphi\varphi'+x\varphi'^2+x\varphi\varphi'')\frac{1}{\varphi^2+1}-\frac{x\varphi\varphi'}{(\varphi^2+1)^2}2\varphi\varphi'\Big]-2+\varphi''=0.$$

Calcoliamo in $x=0$, tenendo conto che $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$:

$$-2+\varphi''(0)=0, \qquad \text{da cui } \varphi''(0)=2.$$

Allora in un intorno di $x=0$

$$\varphi(x)\sim x^2.$$

10. L'origine sta chiaramente su Σ. Indichiamo con g la funzione a primo membro dell'equazione. Risulta:

$$g_z(x,y,z)=x^2e^z+e^y, \qquad g_z(0,0,0)=1\neq 0.$$

Allora in un intorno di O la superficie è grafico di una funzione $\varphi(x,y)$. Risulta:

$$\begin{aligned}\varphi_x(x,y) &= -\frac{g_x(x,y,\varphi(x,y))}{g_z(x,y,\varphi(x,y))} = -\left(\frac{2xe^z}{x^2e^z+e^y}\right)\Bigg|_{z=\varphi(x,y)} \\ &= -\frac{2xe^{\varphi(x,y)}}{x^2e^{\varphi(x,y)}+e^y}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi_y(x,y) &= -\frac{g_y(x,y,\varphi(x,y))}{g_z(x,y,\varphi(x,y))} = -\left(\frac{ze^y+2y}{x^2e^z+e^y}\right)\Bigg|_{z=\varphi(x,y)} \\ &= -\frac{\varphi(x,y)e^y+2y}{x^2e^{\varphi(x,y)}+e^y}.\end{aligned}$$

Allora
$$\varphi_x(0,0) = 0, \qquad \varphi_y(0,0) = 0.$$

Per ottenere le derivate seconde possiamo eseguire la derivazione parziale delle funzioni φ_x e φ_y ora determinate. Oppure partire dall'equazione $g(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, cioè
$$x^2 e^{\varphi}(x, y) + \varphi(x, y)e^y + y^2 = 0$$
e derivare due volte. Derivando rispetto a x due volte si ottiene:
$$e^{\varphi}(2 + 4x\varphi_x + x^2\varphi_x^2) + (x^2e^{\varphi} + e^y)\varphi_{xx} = 0,$$
da cui $\varphi_{xx}(0,0) = -2$.

Derivando rispetto a x e poi rispetto a y si ha invece:
$$e^{\varphi}(2x\varphi_y + x^2\varphi_x\varphi_y) + \varphi_x e^y + (x^2e^{\varphi} + e^y)\varphi_{xy} = 0,$$
da cui $\varphi_{xy}(0,0) = 0$.

Infine, derivando rispetto a y due volte si ottiene:
$$x^2e^{\varphi}\varphi_y^2 + 2\varphi_y e^y + \varphi e^y + 2 + (x^2e^{\varphi} + e^y)\varphi_{yy} = 0,$$
da cui $\varphi_{yy}(0,0) = -2$. Concludiamo che il polinomio di Taylor di grado 2 di φ rispetto all'origine è dato da
$$P_2(x, y) = -(x^2 + y^2).$$

11. *a*) L'equazione della retta tangente a $\mathscr{C}$ in un suo punto $(\overline{x}, \overline{y})$ in cui ∇g non si annulla è data da
$$g_x(\overline{x}, \overline{y})(x - \overline{x}) + g_y(\overline{x}, \overline{y})(y - \overline{y}) = 0.$$

Il punto $(1, -1)$ sta su $\mathscr{C}$, come subito si verifica. Inoltre
$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= 3x^2 + 2y, \qquad & g_x(1, -1) &= 1 \\ g_y(x, y) &= -3y^2 + 2x, \qquad & g_y(1, -1) &= -1 \end{aligned}$$

Allora l'equazione della retta tangente in $(1, -1)$ è
$$(x - 1) - (y + 1) = 0, \qquad \text{cioè } x - y - 2 = 0.$$

b) I punti per i quali non è possibile applicare il Teorema della funzione implicita rispetto ad alcuna delle due variabili x o y sono i punti, *di* $\mathscr{C}$, nei quali il gradiente si annulla, cioè che sono soluzioni del sistema
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ -3y^2 + 2x = 0 \\ x^3 - y^3 + 2xy = 0. \end{cases}$$

Le prime due equazioni danno

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x^2 \\ -\dfrac{27}{4}x^4 + 2x = 0, \quad \text{da cui } x = 0 \text{ oppure } x^3 = \dfrac{8}{27}, \text{ cioè } x = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Abbiamo pertanto i punti $(0,0)$ e $(2,3,-2/3)$: soltanto il primo soddisfa l'equazione della curva.

c) Poiché $g_y(1,-1) = -1 \neq 0$, in un intorno di $(1,-1)$ la curva $\mathscr{C}$ è grafico $y = \varphi(x)$ per un'opportuna funzione φ di classe C^1. Il limite proposto si presenta in forma indeterminata; vorremmo utilizzare il Teorema di de l'Hôpital. Osserviamo che $\varphi(1) = -1$, per cui possiamo supporre $\varphi < 0$ e valutare

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log\bigl(-\varphi(x)\bigr)}{x-1}.$$

Dal Teorema della funzione implicita (o dall'equazione della retta tangente determinata in (*a*)) sappiamo che $\varphi'(1) = -g_x/g_y = 1$. Risulta

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(-\varphi(x))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-1)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \to -1 \qquad \text{per } x \to 1.$$

Concludiamo che il limite richiesto vale 1.

12. *a*) Indichiamo con g la funzione a primo membro dell'equazione di $\mathscr{C}$. L'equazione della retta tangente a $\mathscr{C}$ in un suo punto $(\overline{x},\overline{y})$ in cui ∇g non si annulla è data da

$$g_x(\overline{x},\overline{y})(x-\overline{x}) + g_y(\overline{x},\overline{y})(y-\overline{y}) = 0;$$

questa è orizzontale se e solo se $g_x(\overline{x},\overline{y}) = 0$. Risulta:

$$g_x(x,y) = 4x^3 + 4xy, \qquad g_y(x,y) = 4y^3 + 2x^2.$$

Cerchiamo pertanto i punti che risolvono il sistema

$$\begin{cases} 4x^3 + 4xy = 0 \\ x^4 + y^4 + 2x^2y - 1 = 0. \end{cases}$$

La prima equazione è $x(x^2+y) = 0$, quindi $x = 0$ o $y = -x^2$; nel primo caso la seconda equazione dà $y = \pm 1$, quindi i punti $(0,\pm 1)$. Se invece $y = -x^2$ allora la seconda equazione dà

$$x^8 - x^4 - 1 = 0, \qquad \text{da cui } x = \pm\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/4}.$$

Otteniamo quindi anche i punti

$$\left(\pm\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/4}, -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2}\right).$$

Nessuno dei punti individuati annulla g_y.

Applichiamo ora il Teorema del Dini al punto $(0,1)$; indichiamo con φ la funzione definita implicitamente. Risulta $\varphi(0) = 1$ e

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x(0,1)}{g_y(0,1)} = 0.$$

Per calcolare $\varphi''(0)$ conviene derivare due volte direttamente l'uguaglianza $g\big(x, \varphi(x)\big) = 0$, cioè

$$x^4 + \varphi(x)^4 + 2x^2\varphi(x) - 1 = 0.$$

Derivando si ottiene:

$$4x^3 + 4\varphi^3\varphi' + 4x\varphi + 2x^2\varphi' = 0,$$

e derivando ulteriormente:

$$12x^2 + 12\varphi^2(\varphi')^2 + 4\varphi^3\varphi'' + 4\varphi + 4x\varphi' + 4x\varphi' + 2x^2\varphi'' = 0.$$

Calcoliamo ora il primo membro in $x = 0$, tenendo conto che $\varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = 0$; abbiamo: $4\varphi''(0) + 4 = 0$, da cui $\varphi''(0) = -1$.

Concludiamo che il polinomio di Taylor di grado 2 della funzione φ relativo al punto $x = 0$ è

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

b) La curva $\mathscr{C}$ è la linea di livello 0 della funzione g. Poiché

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} g(x,y) = +\infty,$$

ogni linea di livello è limitata.

13. *a*) È immediato verificare che $(0,2)$ soddisfa l'equazione.

Vorremmo applicare il Teorema della funzione implicita alla funzione $g(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 2\sqrt{x^2+y^2}$ relativamente al punto P_0. Risulta:

$$g_y(x,y) = 2y - 2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \text{quindi } g_y(0,2) = 2 \neq 0.$$

Allora l'equazione $g(x,y) = 0$ definisce univocamente, in un intorno del punto $(0,2)$, la funzione implicita φ. Calcoliamo $\varphi''(0)$ per valutare la concavità di φ in un intorno di 0.

Sappiamo che

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = -\frac{g_x\big(x,\varphi(x)\big)}{g_y\big(x,\varphi(x)\big)} &= -\left.\frac{(x+1)\sqrt{x^2+y^2} - x}{y\big(\sqrt{x^2+y^2} - 1\big)}\right|_{y=\varphi(x)} \\ &= \frac{(x+1)\sqrt{x^2+\varphi(x)^2} - x}{y\big(\sqrt{x^2+\varphi(x)^2} - 1\big)},\end{aligned}$$

da cui $\varphi(0) = -1$.

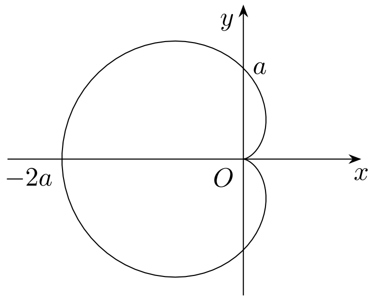


Figura 4 - Cardioide di equazione $\varrho = a(1-\cos\vartheta)$ (vedi Esercizio 13)

Per il calcolo di φ'' conviene partire dall'uguaglianza $g\big(x, \varphi(x)\big) = 0$, cioè

$$x^2 + \varphi(x)^2 + 2x - 2\sqrt{x^2 + \varphi(x)^2} = 0,$$

e derivare due volte. Si ottiene:

$$1 + \varphi'(x)^2 + \varphi(x)\varphi''(x) - \frac{1 + \varphi'(x)^2 + \varphi(x)\varphi''(x)}{\sqrt{x^2 + \varphi(x)^2}} - \frac{\big(x + \varphi(x)\varphi'(x)\big)^2}{\big(x^2 + \varphi(x)^2\big)^{3/2}} = 0.$$

Valutando in $x = 0$ si ricava $\varphi''(0) = -3/2$. Pertanto φ'' è negativa, quindi φ concava, in un intorno di $x = 0$.

b) In coordinate polari l'equazione della curva $\mathscr{C}$ diventa $\varrho^2 + 2\varrho\cos\vartheta - 2\varrho = 0$, quindi

$$\varrho = 2(1 - \cos\vartheta).$$

Si tratta di una *cardioide* (vedi Figura 4).

c) Per $(x, y) \in \mathscr{C}$, con $y > 0$, risulta:

$$\frac{y}{|x|^{3/2}} = \frac{\varrho\sin\vartheta}{|\varrho\cos\vartheta|^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\frac{\sin\vartheta}{|\cos\vartheta|^{3/2}} = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\vartheta}}\frac{1}{|\cos\vartheta|^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sin^2\vartheta}{1-\cos\vartheta}}\frac{1}{|\cos\vartheta|^{3/2}} \to 1 \qquad \text{per } \vartheta \to 0+.$$