Gli esercizi segnati ☒ sono comuni a Matematici e Fisici.

☒ 1. Qual è la direzione $\mathbf{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ in cui è massima la rapidità di variazione della funzione $f(x,y) = x^2 + \sqrt{3}y^2$ nel punto $(1,1)$?

☒ 2. Sia $f(x,y) = 2x - 3\sqrt{2x^2+y}$. Individuare una direzione rispetto alla quale la derivata direzionale di f nel punto $(0,3)$ vale $1/4$. È possibile sostituendo $1/4$ con $2\sqrt{2}$?

☒ 3. Verificare che le seguenti funzioni sono armoniche nel loro insieme naturale di definizione (cioè risolvono l'equazione $\Delta u(x,y) = 0$):

$$a)\ \log(x^2+y^2), \quad b)\ \arctan\frac{y}{x}, \quad c)\ \frac{x}{x^2+y^2}.$$

☒ 4. Siano u e v funzioni armoniche (cioè soluzioni dell'equazione di Laplace) su tutto $\mathbb{R}^2$. Dare una condizione geometrica sulle linee di livello di u e di v affinché la funzione prodotto uv sia armonica.

☐ 5. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che si annulla in $(0,0)$ e vale

$$f(x,y) = \sin(x+y^2)\log(x^2+y^2)$$

se $(x,y) \neq (0,0)$. La funzione f è continua? È differenziabile? Lungo quali direzioni v esiste $\partial f/\partial v$ in $(0,0)$?

☒ 6. Calcolare l'equazione della tangente alla curva di livello di

$$f(x,y) = 5\mathrm{arctg}\frac{y}{x} - 2\sqrt{x^2+y^2}$$

passante per il punto $(-3,4)$.

Calcolare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione

$$(*) \qquad \sqrt{x^2+y^3+1} + 2x^2y = 2$$

nel punto $(-1/2, 1)$ (dopo aver verificato che tale punto appartiene alla curva).

☒ 7. Calcolare l'equazione del piano tangente alla superficie di livello di $f(x,y,z) = xy^3 - 2x^2z - 3xyz^2$ passante per il punto $(1,-1,2)$.

Calcolare l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione

$$(4x - z^2)\log(2x^2+y^2+z) = 0$$

nel punto $(1, e, -2)$ (dopo aver verificato che tale punto appartiene alla superficie).

☒ 8. Sia γ l'arco di curva di equazione polare

$$\varrho = e^{\vartheta/\sqrt{3}}, \qquad 0 \le \vartheta \le \pi.$$

Determinare il punto di γ in cui la retta tangente è parallela alla retta di equazione $\sqrt{3}x + y = 0$.

☒ 9. Sia $\mathscr{C}$ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos \pi t \\ y = 2 \sin \pi t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = \log t \end{cases}$$

Verificare che il punto $P_0 = (-1, 0, 0)$ appartiene a $\mathscr{C}$ e scrivere le equazioni della retta tangente a $\mathscr{C}$ in P_0.

☒ 10. Sia u una funzione reale definita e derivabile con continuità su un intervallo aperto I_u e si consideri la funzione f definita da

$$f(x, y) = e^{u(x)/y}, \qquad x \in I_u,\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sia S_u la superficie, nello spazio delle coordinate x, y, z, grafico della funzione f.

a) Scrivere una rappresentazione parametrica della curva γ_u ottenuta intersecando S_u con la superficie cilindrica di equazione $x^2 - y = 0$.

b) Determinare tutte le funzioni u per le quali il piano tangente a S_u in ogni punto di γ_u passi per l'origine.

Soluzioni

1. Il vettore $\mathbf{v}_\vartheta = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ rappresenta il generico vettore unitario. Sappiamo che, in un punto fissato, la direzione di massima rapidità di variazione di una funzione f è quella indicata dal gradiente di f (calcolato nel punto dato); più precisamente, la direzione di ∇f è quella di massima *crescita*, quella opposta è la direzione di massima *decrescita*. Nel caso specifico, il gradiente di f nel punto $(1,1)$ è $\nabla f(1,1) = (2, 2\sqrt{3})$. Allora $\mathbf{v}_\vartheta$ dà la direzione di massima crescita di f nel punto $(1,1)$ se coincide con il versore di $\nabla f(1,1)$, cioè, tenendo conto che $|\nabla f(1,1)| = 4$,

$$(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

quindi $\cos\vartheta = 1/2$ e $\sin\vartheta = \sqrt{3}/2$. Concludiamo che $\vartheta = \pi/3$.

2. Risulta

$$\nabla f(0,3) = (2, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Indichiamo il generico vettore unitario con $\mathbf{v}_\vartheta = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. Allora, la condizione che la derivata direzionale di f nel punto $(0,3)$ rispetto alla direzione $\mathbf{v}_\vartheta$ valga $1/4$ diventa

$$2\cos\vartheta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta = \frac{1}{4}.$$

Una soluzione è data da $\cos\vartheta = 1/2$, $\sin\vartheta = \sqrt{3}/2$. Dal punto di vista geometrico le soluzioni attese sono in realtà due, che danno vettori $\mathbf{v}_\vartheta$ simmetrici rispetto al vettore $\nabla f(0,3)$ in modo da formare lo stesso angolo con $\nabla f(0,3)$. Indicando con α e β le componenti del generico vettore unitario, deve essere:

$$\begin{cases} 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta = \frac{1}{4} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo si ottengono le coppie:

$$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \qquad (-\frac{11}{38}, -\frac{21}{38}\sqrt{3}).$$

Il problema non avrebbe invece soluzione nel caso si richiedesse il valore $2\sqrt{2}$ per la derivata direzionale, dal momento che tale valore supera $|\nabla f(0,3)| = \sqrt{19}/2$ (ricordiamo che il valore assoluto del gradiente dà il massimo valore della derivata direzionale).

3. Ricordiamo che

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Svolgiamo i calcoli necessari.
a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Poiché le variabili x e y compaiono in modo simmetrico nell'espressione della funzione, la derivata seconda rispetto alla variabile y è data da:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Quindi si ha immediatamente $\Delta u(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$.
b) La funzione data è definita per ogni coppia (x, y) con $x \neq 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Quindi $\Delta u(x, y) = 0$.
c)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{-2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

Quindi $\Delta u(x, y) = 0$ per ogni coppia (x, y) con $(x, y) \neq (0, 0)$.

4. Calcoliamo $\Delta(uv)$. Si ha:

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Analogamente si calcola $\partial^2(uv)/\partial y^2$. Allora

$$\Delta(uv) = (\Delta u)v + 2\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v.$$

pertanto uv è armonica se e solo se $\nabla u \cdot \nabla v$=0 in ogni punto: ciò significa che le linee di livello di u e di v costituiscono due famiglie di linee fra loro ortogonali.

5. Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ risulta (ricordiamo che $|\sin t| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$):

$$|f(x, y)| \leq |\sin(x + y^2)|\,|\log(x^2 + y^2)| \leq |x + y^2|\,|\log(x^2 + y^2)|,$$

quindi, in coordinate polari:

$$|f| \leq \varrho|\cos\vartheta + \varrho\sin^2\vartheta|\,|2\log\varrho| \to 0 \qquad \text{per } \varrho \to 0.$$

Quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

e la funzione risulta continua nell'origine.

Consideriamo ora la restrizione di f ad una retta per l'origine. Se la retta coincide con l'asse y allora

$$f(0,y) = \begin{cases} \sin(y^2)\log(y^2) & \text{se } y \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Considerando il limite del rapporto incrementale in $y = 0$ si vede che tale funzione è derivabile in $y = 0$. Quindi esiste la derivata parziale di f rispetto a y nell'origine. Consideriamo invece la restrizione ad una retta non verticale $y = mx$:

$$f(x,mx) = \begin{cases} \sin(x + m^2x^2)\log[(1+m^2)x^2] & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Valutiamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x + m^2x^2)}{x} \log[(1+m^2)x^2] = -\infty.$$

Concludiamo che non esiste la derivata direzionale in $(0,0)$ rispetto ad alcuna direzione diversa dall'asse y. Ne segue, inparticolare, che la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

6. Ricordiamo che il gradiente di una funzione su $\mathbb{R}^2$ risulta ortogonale alle sue linee di livello, per cui l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $g(x,y) = k$ nel punto (x_0, y_0) è

$$g_x(x_0,y_0)(x - x_0) + g_y(x_0,y_0)(y - y_0) = 0.$$

Se applichiamo questa formula alla funzione proposta, svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\left(-\frac{5y}{x^2+y^2} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Bigg|_{(-3,4)} (x+3) + \left(\frac{5x}{x^2+y^2} - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Bigg|_{(-3,4)} (y-4) = 0,$$

cioè

$$\frac{2}{5}(x+3) - \frac{11}{5}(y-4) = 0$$

da cui $2x - 11y + 50 = 0$.

Per la curva di equazione $(*)$ si procede in modo analogo, a partire dalla funzione a primo membro in $(*)$; si ottiene:

$$-\frac{7}{3}(x + \frac{1}{2}) + \frac{3}{2}(y-1) = 0,$$

cioè $14x - 9y + 16 = 0$.

7. Ricordiamo che il gradiente di una funzione su $\mathbb{R}^3$ risulta ortogonale alle sue superficie di livello, per cui l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $g(x,y,z) = k$ nel punto (x_0, y_0, z_0) è

$$g_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + g_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + g_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0.$$

Applichiamo questa formula alla funzione proposta; otteniamo:

$$3(x-1)-9(y+1)+10(z-2)=0,$$

cioè $3x-9y+10z-26=0$.

In modo analogo si procede per la seconda superficie, ottenendo: $8(x-1)+8(z-2)=0$, cioè $x+z-3=0$.

8. La curva γ può essere descritta dalla funzione

$$\varphi : \vartheta \mapsto \begin{cases} x(\vartheta) = e^{\vartheta/\sqrt{3}} \cos\vartheta \\ y(\vartheta) = e^{\vartheta/\sqrt{3}} \sin\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta \in [0,\pi]$$

(si dice anche che φ è una *rappresentazione parametrica* della curva γ vista come insieme di punti di $\mathbb{R}^2$). Il vettore $\varphi'(\vartheta)$ è tangente alla curva in $\varphi(\vartheta)$. Questo è parallelo alla retta di equazione $\sqrt{3}+y=0$ (che ha la direzione del vettore $(1,-\sqrt{3})$) se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi'(\vartheta)=\lambda(1,-\sqrt{3})$. Quindi

$$\begin{cases} e^{\vartheta/\sqrt{3}} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos\vartheta - e^{\vartheta/\sqrt{3}} \sin\vartheta = \lambda \\ \\ e^{\vartheta/\sqrt{3}} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin\vartheta + e^{\vartheta/\sqrt{3}} \cos\vartheta = -\sqrt{3}\lambda. \end{cases}$$

Per risolvere osserviamo che, in particolare, deve essere

$$\cos\vartheta - \sqrt{3}\sin\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\vartheta - \cos\vartheta$$

quindi

$$\sqrt{3}\cos\vartheta - \sin\vartheta = 0, \quad \text{cioè} \quad \tan\vartheta = \sqrt{3}.$$

L'unico valore $\vartheta \in [0,\pi]$ che risolve questa equazione è $\vartheta = \frac{\pi}{3}$.

9. Il punto P_0 si ottiene in corrispondenza del valore $t=1$ del parametro. Un vettore tangente alla curva in P_0 è dato dalla derivata della funzione che fornisce la rappresentazione parametrica, quindi

$$(-\pi\sin\pi t, 2\pi\cos\pi t, 1/t)\Big|_{t=1} = (0,-2\pi,1).$$

Allora la retta tangente ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2\pi t \\ z=t. \end{cases}$$

10. *a*) Nel piano xy la curva di equazione $x^2 - y = 0$ è una parabola $\mathscr{P}$, mentre la stessa equazione nello spazio xyz individua la superficie cilindrica con generatrici parallele all'asse z e direttrice $\mathscr{P}$ (cioè il cilindro verticale che interseca il piano xy nella parabola $\mathscr{P}$). Se $x = t$, $y = t^2$ (al variare di $t \in \mathbb{R}$) danno una rappresentazione parametrica di $\mathscr{P}$, la curva γ_u viene descritta da

$$\gamma_u : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = e^{u(t)/t^2} \end{cases} \qquad (t \in I_u).$$

b) Fissiamo un valore t_0 arbitrario e sia (x_0, y_0, z_0) il corrispondente punto della curva γ_u. Il piano tangente alla superficie S_u in tale punto ha equazione

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

cioè

$$z = e^{u(x_0)/y_0} + e^{u(x_0)/y_0} \frac{u'(x_0)}{y_0}(x - x_0) - e^{u(x_0)/y_0} \frac{u(x_0)}{y_0^2}(y - y_0),$$

e quindi

$$z = e^{u(t_0)/t_0^2} + e^{u(t_0)/t_0^2} \frac{u'(t_0)}{t_0^2}(x - t_0) - e^{u(t_0)/t_0^2} \frac{u(t_0)}{t_0^4}(y - t_0^2).$$

La condizione di passaggio per l'origine si traduce in:

$$0 = e^{u(t_0)/t_0^2} - \frac{u'(t_0)}{t_0} e^{u(t_0)/t_0^2} + \frac{u(t_0)}{t_0^2} e^{u(t_0)/t_0^2},$$

cioè

$$u'(t_0) - \frac{1}{t_0} u(t_0) = t_0.$$

Ricordando l'arbitrarietà di t_0, concludiamo che la condizione richiesta per u si traduce nel richiedere che sia soluzione dell'equazione differenziale

$$u' - \frac{1}{t} u = t.$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Applicando la formula risolutiva si ottiene la famiglia di funzioni

$$u(t) = t^2 + ct, \qquad c \in \mathbb{R}.$$