ANALISI 2 — 26/7/2022

ES 1) — Si verifica che $\alpha(s,t) = (s\cos t, s\sin t, st)$

parametrizza, per $(s,t) \in [0,1] \times [0,\pi)$, la superficie S —

Si ha $\alpha_s \wedge \alpha_t = (s\sin t - st\cos t, -st\sin t - s\cos t, s)$

da cui $|\alpha_s \wedge \alpha_t| = (2s^2 + s^2 t^2)^{1/2}$ —

Segue $\text{Area } S = \int_0^1 s \int_0^{2\pi} (2+t^2)^{1/2}\, dt = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2}\sinh z \\ dt = \sqrt{2}\cosh z\, dz \end{array}\right]$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{sh^{-1}(\sqrt{2}\pi)} (2 + 2 sh^2 z)^{1/2} \sqrt{2}\cosh z\, dz = (1) \text{ oppure } (2)$$

$$(1) = \int_0^{sh^{-1}(\sqrt{2}\pi)} \cosh^2 z\, dz = \int_0^{sh^{-1}(\sqrt{2}\pi)} \frac{1+\cosh 2z}{2}\, dz$$

$$= \left[\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sinh 2z\right]_0^{\sinh^{-1}(\sqrt{2}\pi)}$$

$$(2) = \int_0^{sh^{-1}(\sqrt{2}\pi)} \frac{1}{4}e^{2z} + \frac{1}{4}e^{-2z} + \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{8}e^{2z} - \frac{1}{8}e^{-2z} + \frac{1}{2}z\right]_0^{sh^{-1}(\sqrt{2}\pi)}$$

– Si vede che la forma ω è esatta e, in part,

$\omega = dF$ dove $F = (x+z)e^{4z}$

da cui $\int_\gamma \omega = F(1,0,2\pi) - F(1,0,0) = 2\pi$

• Se non si trova la primitiva comunque il risultato si

trova finito ω (che è esatta xchè chiusa in $\mathbb{R}^3$)

su $\eta(s) = (1,0,s) \quad s \in [0,2\pi]$

ANALISI 2 — 26/7/2022

ES 2). La verifica che $\| \ \|_X$ è una norma è semplice.

- $\forall x \neq 0$ si ha $|f(x)| \leq |f(0)| + \frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|}|x-0|$

$$\leq \|f\|_X (1+|x|)$$

- $\cdot\cdot$ Basta prendere una succ. $f_n \in Lip([-1,1])$ tale che $\|f_n\|_\infty \leq 1$ e $f_n \to \sqrt[3]{x}$ in $\| \ \|_\infty$. Si ha allora $\|f_n\|_\infty \leq 1$ e $\|f_n\|_X \nearrow +\infty$

- <u>Completezza</u>. Se f_n è X-Cauchy, $f_n \to f \in C^0$ in $\| \ \|_\infty$. Usando che una succ. di Cauchy è lim., si vede subito che $f \in X$.

Per la cond. di Cauchy, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n}$ si ha

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))| \leq \varepsilon |x-y| \quad \forall x,y \in [-1,1]$$

Poiché $f_m \to f$ puntualmente, si ha $|(f_n - f)(x) - (\ \ )(y)| \leq \varepsilon |x-y|$ da cui la tesi.

- Infine, per la chiusura di Y, sia $\{f_n\}$ come nell'enunciato. Sia $\varepsilon > 0$. Mostro che f_n' è di Cauchy in $\| \ \|_\infty$.

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \left| f_n'(x) - \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right| + \text{analogo}(m)$$

$$+ \left| \frac{f_n(x+h) - f_m(x+h) - (f_n(x) - f_m(x))}{h} \right|$$

Per la cond. di Cauchy in $\| \ \|_X$ si ha che $\exists \bar{n}$ indip. da x e da h : $\forall n, m \geq \bar{n}$ l'ultimo addendo è $< \varepsilon$.

ANALISI 2 - 26/7/22

ES 2 - CONTINUAZ

Segue $\left|f_n'(x) - f_m'(x)\right| \leq \varepsilon + \left|f_n'(x) - \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}\right|$

$+$ analogo (m)

Ora, il 1° membro non dipende da h. Dunque passando $h \to 0$ ho

$\left|f_n'(x) - f_m'(x)\right| \leq \varepsilon + \left(\lim_{h\to 0} \left| \quad \right| + \lim_{h\to 0} \left| \quad \right|\right)$

dove l'$\exists$enza del lim è garantita dalla derivabilità di f_n e f_m in x $\forall x \in [-1, 1]$

· Segue $\|f_n' - f_m'\|_{C^0} \leq \varepsilon \qquad \forall n, m \geq \bar{n}$

da cui applicando teor. di derivaz. per serie ho la tesi.