Analisi Matematica 2
Complementi di Analisi Matematica 1

Programma per l'Anno 2021/22

1) Equazioni differenziali ordinarie: cenni ai principali problemi della teoria (esistenza delle soluzioni, unicità, regolarità, dominio di definizione); problema di Cauchy per le equazioni scalari del primo e del secondo ordine; equazioni a variabili separabili (risoluzione esplicita; ricerca delle soluzioni stazionarie; condizioni per l'unicità; fenomeno dell'esplosione in tempi finiti); equazioni lineari del primo ordine a coefficienti variabili (struttura dell'insieme delle soluzioni; equazione "completa" ed equazione omogenea associata; metodo della variazione delle costanti); equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti variabili (struttura dell'insieme delle soluzioni; equazione "completa" ed equazione omogenea associata; trattazione dei secondi membri di tipo polinomiale, esponenziale, trigonometrico; fenomeno della risonanza).

Riferimenti al testo. [Vol. II]: 4.1.1, 4.1.2, 4.1.6 (senza le equazioni "esatte"), 4.2.1 (limitandosi al caso scalare), 4.2.4 (soltanto le parti che riguardano le equazioni scalari di ordine superiore al primo, senza il riferimento ai sistemi; vedi soprattutto Esempio 2.11), 4.2.6 (soltanto le parti che riguardano le equazioni scalari di ordine superiore al primo, senza il riferimento ai sistemi; vedi soprattutto dall'Esempio 2.14 in poi).

2) Spazi metrici e spazi normati. Topologia di $\mathbb{R}^n$: richiami sugli spazi vettoriali; spazi normati; spazi metrici; prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$; disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; verifica della disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}^n$; elementi di topologia (punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, isolati; insiemi aperti e chiusi; interno e chiusura di un insieme; caratterizzazione della chiusura tramite successioni); teorema di Bolzano-Weiestrass; retta reale estesa, punto all'infinito, $\mathbb{R}^n$ "esteso" (cenni); compattezza, compattezza per successioni; in $\mathbb{R}^n$ un insieme è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato; connessione (definizione utilizzando gli insiemi separati; topologia indotta e caratterizzazione della connessione tramite la topologia indotta); gli aperti connessi sono connessi per archi; norme equivalenti; teorema sull'equivalenza delle norme in dimensione finita; totale limitatezza; teorema di caratterizzazione degli spazi metrici compatti; esempi di situazioni infinito-dimensionali in cui chiuso e limitato non implica compatto.

Riferimenti al testo. [Vol. I]: 3.1.1, 3.1.2, 3.1.4, 3.2.1, 3.2.2., 3.2.3 (solo leggere), 3.2.4 (senza dimostrazione del teorema di Heine-Borel; infatti si è privilegiato l'approccio tramite la compattezza per successioni); 3.2.5. [Vol. II]: 3.1.1. Vedi [EG, par. 6.1] per il teorema di caratterizzazione degli spazi metrici compatti e [GG, par. III.2] per il discorso sulle norme equivalenti.

3) Limiti e continuità: successioni a valori in uno spazio metrico, concetto di limite, successioni di Cauchy; completezza; esempi di spazi metrici completi e non completi; limiti di funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$; verifica dell'esistenza del limite, anche utilizzando le coordinate polari; continuità di funzioni definite e a valori in spazi metrici; caratterizzazione della continuità in un punto utilizzando gli intorni; caratterizzazione della continuità globale utilizzando gli aperti; funzioni continue su compatti e su connessi; continuità uniforme e teorema di Heine.

Riferimenti al testo. [Vol. I]: 4.3.5 (come richiamo), 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 5.1.4 (come richiamo), 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 (il teorema 2.10 si suppone già noto).

4) Calcolo differenziale: derivate parziali e direzionali; differenziabilità; funzioni di classe C^1; matrice Jacobiana; gradiente e suo significato geometrico; estensione del teorema di Lagrange al caso delle funzioni di più variabili; teorema del differenziale totale (7.1.2); enunciato del teorema di Schwarz; derivate parziali e direzionali di ordine superiore al primo; matrice Hessiana; formula di Taylor per funzioni di più variabili (secondo ordine con resto in forma di Peano); funzioni convesse (cenni); massimi e minimi liberi per funzioni di più variabili; studio della matrice Hessiana e della forma quadratica ad essa associata; formula di Taylor di ordine qualunque; multiindici; teorema multinomiale (cenni) e raggruppamento delle derivate dello stesso tipo; resto in forma di Lagrange.

Riferimenti al testo. [Vol. I]: 6.1.5 (come richiamo), 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3 (senza la dimostrazione del teorema di Schwarz; omettere anche il Teorema 1.4 e limitarsi a leggere la parte sui differenziali di ordine superiore al primo), 7.1.4 (per la formula di Taylor si è preferito però seguire [EG, par. 4.3]), 7.1.5 (solo leggere; per la caratterizzazione della convessità si è utilizzata la matrice Hessiana anziché il differenziale secondo), 7.2.1, 7.2.2. [Vol. II]: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5. Vedi anche [EG, Esempio 4.5.1] per lo studio degli autovalori della matrice Hessiana ed [EG, par. 4.3] per la formula di Taylor di ordine qualunque e la caratterizzazione del resto in forma di Lagrange.

5) Calcolo integrale: definizione di integrale di Riemann su un rettangolo di $\mathbb{R}^2$; teorema di riduzione; proprietà fondamentali dell'integrale; integrali su insiemi qualunque; insiemi di misura nulla; riduzione degli integrali su insiemi "normali"; teorema di cambiamento di variabile (solo idea geometrica della dimostrazione); estensione della teoria al caso n-dimensionale; coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, cilindriche e sferiche in $\mathbb{R}^3$; calcolo del baricentro; volume dei solidi di rotazione; teorema di derivazione sotto il segno di integrale; integrali impropri in dimensione uno; integrabilità e assoluta integrabilità; criteri di convergenza per integrali impropri; comportamento dell'integrale di $|x|^{-\alpha}$ vicino a 0 e vicino a ∞ al variare di $\alpha > 0$.

Riferimenti al testo: [Vol. II]: 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3, 5.1.4, 5.1.5, 5.1.6 (senza la dimostrazione del Teorema 1.14), 5.1.7, 5.1.8. [Vol. I]: 8.1.9 (per la derivazione sotto il segno di integrale; 8.3.1, 8.3.2, 8.3.3 (per gli integrali impropri).

6) Curve, superfici, funzioni implicite: curve in $\mathbb{R}^n$; rettificabilità; vettore tangente e vettori normali; lunghezza di una curva; giustificazione della definizione di lunghezza di una curva tramite poligonali inscritte; integrali curvilinei; riparametrizzazioni; lunghezza d'arco; teorema delle funzioni implicite (caso bidimensionale); punti regolari e punti singolari; regolarità e derivate della funzione implicita; superfici parametrizzate in $\mathbb{R}^3$; area di una superficie; integrali di superficie; curve tracciate su una superficie, prima forma fondamentale (cenni); teorema delle funzioni implicite nel caso generale (solo enunciato e trattazione euristica del caso di due vincoli scalari in $\mathbb{R}^3$);

spazio tangente e spazio normale a superficie definite in forma parametrizzata e in forma implicita (con cenni all'estensione al caso di ipersuperficie); teorema di invertibilità locale (solo enunciato); estremi vincolati; metodo dei moltiplicatori di Lagrange, anche nel caso di più vincoli scalari; teorema di invertibilità locale.

Riferimenti al testo. [Vol. II]: 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6, 1.2.1, 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3, 6.1.4, 6.1.5, 6.1.6, 6.1.7 (solo leggere), 6.1.8 (solo leggere), 2.2.1, 2.2.2. Vedi anche [EG, cap. 7], in particolare [EG, par. 7.6] per il teorema di invertibilità locale.

7) Forme differenziali: campi vettoriali e forme differenziali; cammini orientati e circuiti; "somme" e "differenze" di cammini; integrazione di una forma differenziale lungo un cammino; invarianza per riparametrizzazioni orientate; forme differenziali esatte; teorema di caratterizzazione delle forme differenziali esatte di classe C^0; forme differenziali chiuse; Lemma di Poincaré; circuiti omotopi; aperti semplicemente connessi; invarianza dell'integrale di una forma differenziale chiusa su una coppia di circuiti omotopi.

Riferimenti al testo. [Vol. II]: 1.2.2, 1.2.3 (saltando il discorso sulle funzioni olomorfe), 1.2.4. Vedi anche [GG., par. XIII.7] per la parte relativa alle omotopie.

8) Successioni e serie di funzioni: concetto di successione di funzioni; convergenza puntuale e convergenza uniforme; la convergenza uniforme conserva la continuità; norma $\|\cdot\|_\infty$ "della convergenza uniforme" e norma $\|\cdot\|_1$ "dell'integrale"; completezza dello spazio delle funzioni continue su un compatto e dello spazio delle funzioni limitate; teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale (dimostrazione solo nelle ipotesi di continuità); teorema di derivazione "per serie" (dimostrazione solo nelle ipotesi di regolarità C^1 e in una dimensione); concetto di serie di funzioni; convergenza puntuale, assoluta, uniforme, totale; criterio di Weierstrass (o della convergenza totale).

Riferimenti al testo. [Vol. II]: 3.1.2, 3.1.3 (attenzione: a lezione i teoremi 1.6 e 1.8 sono stati dimostrati sotto ipotesi più restrittive, riferirsi agli appunti), 3.1.4, 3.2.1.

N.B.: Le parti in rosso fanno parte del programma di Analisi Matematica 2 e **non fanno parte** del programma di Complementi di Analisi Matematica 1.

Testi di riferimento:

[Vol. I] C.D. Pagani, S. Salsa, "*Analisi Matematica 1 - Seconda Edizione*", Zanichelli.

[Vol. II] C.D. Pagani, S. Salsa, "*Analisi Matematica 2 - Seconda Edizione*", Zanichelli.

[EG] E. Giusti, "*Analisi Matematica 2 - Seconda Edizione*", Bollati Boringhieri.

[GG] G. Gilardi, "*Analisi Matematica 2 - Seconda Edizione*", McGraw-Hill Italia.