Correzione simulazione 1

Esercizio 1

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Infatti

$$24y' = e^t e^{-24y}$$

quindi si risolve dividendo per il termine e^{-24y} (osservare che è sempre diverso da 0) e integrando entrambi i membri.

$$\int \frac{24y(t)'}{e^{-24y(t)}} dt = \int e^t dt.$$

A destra dell'uguale si ottiene $e^t + c$, mentre a sinistra sostituendo $u = 24y(s)$ si ha

$$\int \frac{24y(s)'}{e^{-24y(s)}} ds = \int e^u du = e^{24y(s)} + c$$

A questo punto si tratta di risolvere

$$\begin{aligned} e^{24y(t)} &= e^t + c \\ 24y(t) &= \log(e^t + c) \\ y(t) &= \frac{1}{24} \log(e^t + c). \end{aligned}$$

Imponendo $y(0) = 0$, si trova il valore della costante c.

$$y(0) = \frac{1}{24} \log(1 + c)$$

quindi $c = 0$. La soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(0) = 0$ è $y(t) = \frac{1}{24}t$, pertanto

$$y(2) = \frac{1}{12}.$$

Esercizio 2

Si osserva che il dominio A può essere scritto come differenza di insiemi $A = Q \setminus T$, dove

$$\begin{aligned} Q &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < \sqrt{1 - x^2}\right\} \\ T &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < 1 - x\right\}, \end{aligned}$$

pertanto:

$$\int_A x \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_Q x \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \int_T x \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Integrale su Q. Si può scrivere l'integrale in coordinate polari.

$$\int_Q x \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \cos(\theta) \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}$$

Integrale su T

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} x \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^1 x(1 - x) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

Integrale su A

$$\int_A x \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 3

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}(x,y,z) = -2xyh(z) + xyh'(z)$$

imponendo che sia nulla si ottiene la relazione differenziale

$$-2xyh(z) + xyh'(z) = 0,$$

quindi si deve avere che $h'(z) = 2h(z)$. Intuitivamente si vede che $h(z) = ce^{2z}$, per $c \in \mathbb{R}$. Imponendo $h(0) = 3$, si ottiene che $h(0) = c$ quindi $c = 3$, quindi $h(z) = 3e^{2z}$

Esercizio 4

Per calcolare il punto richiesto, si possono calcolare la base del piano tangente della superficie Σ. Questi vettori sono

$$v_1 : (1, 0, \partial_x f) = (1, 0, 6x),$$
$$v_2 : (0, 1, \partial_y f) = (0, 1, 2y).$$

La condizione che il piano tangente sia ortogonale al vettore $(24, 2, -2)$ è equivalente a chiedere che tale vettore sia ortogonale a v_1 e a v_2. Quindi si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 24 - 12x = 0 \\ -2 + 4y = 0 \end{cases}$$

Pertanto $y = \frac{1}{2}$, mentre $x = 2$.

Esercizio 5

Dal momento che si tratta di una funzione continua su un dominio compatto, massimo e minimo assoluti devono esistere. Si possono calcolare i massimi e minimi cercando se ci sono dei punti stazionari.

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = (2xy\mathrm{e}^{x^2 y}, x^2\mathrm{e}^{x^2 y}),$$

i punti stazionari sono quindi dati da

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

quindi i punti stazionari sono $(0, y)$, per ogni valore di y. Si osserva che per $x = 0$ la funzione vale $f(0, y) = 1$. Senza utilizzare il criterio dell'hessiana, si osserva che i punti della forma $(0, y)$ non possono essere i nostri candidati perchè $f(3, 1) = e^9 > 1$ e $f(-1, -1) = e^{-1} < 1$.

Quindi bisogna restringersi a calcolare i massimi e minimi sul bordo del quadrato.

1. Ponendo $x = 3$, $f(3, y) = e^{9y}$, il cui massimo è in $y = 1$ e vale e^9, mentre il minimo vale e^{-9}.
2. Ponendo $x = 1$, $f(1, y) = e^y$, massimo e minimo valgono e e e^{-1} rispettivamente.
3. Ponendo $y = 1$, $f(x, 1) = e^{x^2}$, massimo e minimo valgono e^9 ed e rispettivamente.
4. Ponendo $y = -1$, $f(x, -1) = e^{-x^2}$, massimo e minimo valgono e^{-1} e e^{-9} rispettivamente.

Pertanto massimo e minimo assoluto valgono e^9 ed e^{-9} rispettivamente.

Correzione simulazione 2

Esercizio 1

Risolviamo il problema omogeneo associato, calcolando le radici del polinomio caratteristico

$$\lambda(\lambda + 1) = 0$$

che sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$. Quindi la soluzione del problema omogeneo è $y(t) = c_1 + c_2 e^{-t}$. Per calcolare la soluzione particolare si usa il metodo di somiglianza. La soluzione particolare è della forma $\overline{y}(t) = \overline{c}e^t$, con $\overline{c}$ è una costante. Sostituendo nell'equazione differenziale, si ottiene che $\overline{c} = 12$, quindi la soluzione generale è $y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + 12e^t$. Imponendo le condizioni iniziali si trovano c_1 e c_2

$$y(0) = c_1 + c_2 + 12 = 15, y'(0) = -c_2 + 12 = 15.$$

Quindi $c_2 = -3$, mentre $c_1 = 6$.

$$y(t) = 6 - 3e^{-t} + 12e^t.$$

Esercizio 2

Dal momento che il dominio è semplicemente connesso, tutte le forme chiuse sono esatte. Dunque è sufficiente controllare la chiusura della forma ω. Indicando con f_1 e f_2 i coefficienti della forma

$$\begin{aligned}\partial_x f_2 &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\\ \partial_y f_1 &= \frac{1}{y} + \frac{1}{x},\end{aligned}$$

quindi la forma è chiusa.

Chiamiamo F la primitiva. Integrando f_1 rispetto a x e f_2 rispetto a y, bisogna determinare φ e ψ tali che

$$\begin{aligned}F(x, y) &= x \ln y + y \ln x + \psi(y)\\ F(x, y) &= y \ln x + x \ln y + \varphi(x).\end{aligned}$$

Sostituendo la condizione $F(1, 1) = 6e$ nelle due possibili definizioni di F, si ottiene che $\varphi(1) = \psi(1) = 6e$. Quindi

$$F(x, y) = x \ln y + y \ln x + 6e$$

infine

$$F(e, e) = 6e + e + e = 8e$$

Esercizio 3

L'insieme A descrive il cono di raggio 1 con base nel piano (x, y) e altezza 4:

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{16}(4 - z)^2, z \in [0, 4]\right\}$$

Sostituendo in coordinate polari si ottiene

$$\begin{aligned}\int_A (4 - z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^4 (4 - z) \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{4}(4-z)} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z\\ &= \int_0^4 (4 - z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{32}(4 - z)^2 \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z\\ &= 2\pi \int_0^4 \frac{1}{32}(4 - z)^3 \mathrm{d}z\\ &= \frac{\pi}{16} \left[-\frac{1}{4}(4 - z)^4\right]_0^4 = \frac{\pi}{16} 64 = 4\pi\end{aligned}$$

Esercizio 4

Usando il teorema del Dini, calcoliamo che sia verificata l'ipotesi sulla jacobiana di F:

$$JF(x,y,z) = (2x(x-y), -2z(x-y), (x-y)^2),$$

valutata nel punto $(1,2,3)$ vale

$$JF(1,2,3) = (-6,6,1).$$

Possiamo applicare il teorema del Dini dal momento che $\partial_z F(1,2,3) = 1 \neq 0$. Per calcolare la funzione f usiamo la relazione $F(x,y,z) = 0$, che implica

$$z = f(x,y) = \frac{3}{(x-y)^2}.$$

Per calcolare la derivata rispetto a x si può calcolare a mano, oppure sfruttare le implicazioni del teorema del Dini. Infatti ci dice che la jacobiana di f nel punto $(1,2)$ è data da

$$Jf(1,2) = -(\partial_z F(1,2,3))^{-1}\big(\partial_x F(1,2,3), \partial_y F(1,2,3)\big) = (6,-6),$$

quindi $f_x(1,2) = 6$.

Esercizio 5

Il vincolo è regolare, si può utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. La lagrangiana del problema è data data

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = 6xy + \lambda\left(\frac{x^2}{32} + y^2 - 1\right),$$

i cui punti stazionari sono dati da

$$\partial_x \mathcal{L} = 6y + \frac{\lambda x}{16} = 0,$$
$$\partial_y \mathcal{L} = 6x + 2\lambda y = 0,$$
$$\partial_\lambda \mathcal{L} = \frac{x^2}{32} + y^2 - 1 = 0$$

Sostituendo x dalla seconda nella prima si può ricavare $\lambda^2 = 288$, da cui si ricava $\lambda = \pm 12\sqrt{2}$. Si trovano i candidati che sono le combinazioni di $x = \pm 4$ e $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. I valori di f nei punti sono

$$f(\pm 4, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{24}{\sqrt{2}},$$
$$f(\pm 4, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{24}{\sqrt{2}}$$

quindi il valore del massimo è $\frac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$.