SVOLGIMENTO PROVA SCRITTA
ANALISI MATEMATICA 2 - COMPLEMENTI A.M. 1

Svolgimento prescritto

Lo svolgimento è fatto solamente per la prima fila del prescritto.

Esercizio 1. Si tratta di un'equazione differenziabile separabile, quindi si possono integrare i due membri e ottenere

$$y^3(t) + y(t) = t^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Trovare una forma chiusa per la soluzione generale $y(t)$ non è conveniente in questo caso, quindi evitiamo. Bisogna trovare una costante reale c che sia compatibile con il dato iniziale $y(1) = 0$. Imponendo $t = 1$ e usando che $y(1) = 0$ si trova che

$$1 + c = 0$$

quindi $c = -1$. Per calcolare $y(\sqrt{3})$ sostituiamo $t =\sqrt{3}$ nella relazione trovata sopra

$$y(\sqrt{3})\left(y^2(\sqrt{3}) + 1\right) = 2,$$

che bisogna risolvere per rispetto a $y(\sqrt{3})$. A questo punto si intuisce che $y(\sqrt{3}) = 1$.

Esercizio 2. Calcoliamo la divergenza di questo campo vettoriale, per trovare che

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 2xy - y\partial_x g(x, z) - 2xy + y\partial_z g(x, z) = -y(\partial_x g(x, z) - \partial_z g(x, z)).$$

La condizione che la divergenza implica la seguente relazione

$$\partial_x g(x, z) = \partial_z g(x, z).$$

Allora la funzione g è della forma

$$g(x, z) = c_1(x + z) + c_2,$$

per certe costanti reali c_1, c_2. Imponendo che $g(x, 0) = 6x + 1$ si trova che

$$c_1 x + c_2 = 6x + 1$$

da cui si trova che $c_1 = 6$ e $c_2 = 1$.

Esercizio 3. Calcoliamo gli α per cui f è continua. Per farlo basta calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

Usando una stima radiale, si trova che la funzione f è continua in $9(0, 0)$ per $\alpha < \frac{1}{4}$. Calcolando le derivate parziali in $(0, 0)$ si trova che

$$\partial_x f(0, 0) = 0, \qquad \partial_y f(0, 0) = 0,$$

quando $\alpha < \frac{1}{8}$ (non è derivabile altrimenti); pertanto verificare la differenziabilità della funzione f corrisponde a controllare che

$$\lim_{|\boldsymbol{h}|\to 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \boldsymbol{\nabla} f(0, 0) \cdot \boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|} = 0,$$

quando la funzione f è derivabile. Usando ancora una maggiorante radiale per l'argomento del limite, si trova che il limite vale 0 se $\alpha < \frac{1}{8}$. Pertanto la funzione f è continua ma non differenziabile per $\alpha \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$.

Esercizio 4. Osservando la forma differenziale, si nota che è la somma di due forme differenziali ω_e e ω_i:

$$\omega_e = \frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2}dx + \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2}dy, \qquad \omega_i = 3(y-1)dx.$$

Si noti che ω_e è una forma esatta: infatti è chiusa e definita su un dominio semplicemente connesso (si vede anche a occhio che una sua primitiva è $F(x,y) = -\frac{1}{1+x^2+y^2}$). Quindi l'integrale di ω_e su un circuito chiuso è 0, e pertanto l'integrale di ω su un circuito chiuso corrisponde all'integrale di ω_i sul circuito chiuso. Parametrizziamo il quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$, parametrizzando i lati individualmente:

- Lato superiore: $\boldsymbol{\gamma}(t) = (2t-1, 1)$, $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (2, 0)$, $t \in [0,1]$.
- Lato destro: $\boldsymbol{\gamma}(t) = (1, -2t+1)$, $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (0, -2)$, $t \in [0,1]$.
- Lato inferiore: $\boldsymbol{\gamma}(t) = (-2t+1, -1)$, $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (-2, 0)$, $t \in [0,1]$.
- Lato sinistro: $\boldsymbol{\gamma}(t) = (-1, 2t-1)$, $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (0, 2)$, $t \in [0,1]$.

Spezziamo l'integrale sul bordo del quadrato come integrale sui singoli lati, usando le parametrizzazioni viste sopra. Dal momento che l'unica componente non nulla della forma ω_i è la prima, i lati che contribuiscono all'integrale sono il lato superiore e quello inferiore (quelli per i quali la prima componente di $\boldsymbol{\gamma}'$ non è nulla).

Integrale sul lato superiore.

$$\int_0^1 3(y(t)-1)x'(t)dt = \int_0^1 3(1-1)2dt = 0$$

Integrale sul lato inferiore.

$$\int_0^1 3(y(t)-1)x'(t)dt = \int_0^1 3(-2)(-2)dt = 12$$

Quindi l'integrale sul bordo del quadrato della forma ω vale 12.

Esercizio 5. Calcoliamo i punti stazionari della f,

$$\partial_x f(x,y) = ye^{2y} = 0 \implies y = 0,$$
$$\partial_y f(x,y) = (x+2xy)e^{2y} = 0 \implies x = 0, y = -\frac{1}{2}$$

quindi l'unico punto stazionario per f è l'origine, dove $f(0,0) = 0$. Tuttavia questo non è un punto di massimo e minimo assoluto, infatti, negli angoli del rettangolo $[-1,1]\times[-3,3]$ la funzione assume valori sia maggiori che minori di 0. Calcoliamo il valore della funzione sul bordo del quadrato, per cercare un massimo.

Lato $x = -1$. La funzione ristretta al lato $x = -1$ diventa $f(-1,y) = -ye^{2y}$, che ha un punto stazionario in $y = -\frac{1}{2}$, e il valore in quel punto è $\frac{1}{2e}$. Imponendo $y = \pm 3$ si ottiene $f(-1,3) = -3e^6$ e $f(-1,-3) = 3e^{-6}$. Quindi il massimo e il minimo sul lato $x = -1$, sono $\frac{1}{2e}$ e $-3e^6$ rispettivamente.

Lato $x = 1$. Come prima, si ha un punto stazionario in $y = -\frac{1}{2}$, dove la funzione vale $f(1,-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$, mentre in corrispondenza di $y = \pm 3$ la funzione vale $f(1,3) = 3e^6$ e $f(1,-3) = -3e^{-6}$, quindi il massimo vale $3e^6$ e il minimo $-\frac{1}{2e}$.

Lato $y = 3$. Restringendosi a $y = 3$ la funzione diventa $f(x,3) = 3xe^6$, che è lineare. Quindi il massimo è $f(1,3) = 3e^6$ e il minimo $f(-1,3) = -3e^6$.

Lato $y = -3$. Sul lato $y = -3$ la funzione è $f(x, -3) = -3xe^{-6}$, il cui massimo è $f(-1, -3) = 3e^{-6}$ e il minimo è $f(1, -3) = -3e^{-6}$.

Combinando tutto, si trova che il massimo assoluto è $f(1, 3) = 3e^6$ e il minimo $f(-1, 3) = -3e^6$.

Svolgimento scritto

Esercizio 1.a. Per applicare il teorema della funzione implicita, dal momento che F è regolare sul dominio Ω, è sufficiente controllare in quali punti si annullano le derivate parziali.

$$\partial_t F(t, z) = -e^{t+z},$$
$$\partial_z F(t, z) = \frac{1}{1+z} - e^{t+z}.$$

- $\partial_t F$ non si annulla mai, pertanto è sempre possibile scrivere localmente l'insieme $Z(F)$ come il grafico di una funzione che mappa z in t.
- $\partial_x F$ si annulla in un punto $(\bar{t}, \bar{z})$ di $Z(F)$ (si osservi infatti che la funzione $\frac{1}{1+z}$ è strettamente decrescente mentre e^{t+z} è strettamente crescente). Quindi a parte in quel punto è sempre possibile scrivere $Z(F)$ localmente come grafico di una funzione che mappa t in z.

Esercizio 1.b. Consideriamo l'equazione differenziale $F(t, y') = 0$ e i problemi di Cauchy (P_1) e (P_2) dati dal testo del problema.

Problema (P_1). Si osservi che non esistono punti in $Z(F)$ aventi $t = 2$. Pertanto questo problema di Cauchy non ammette soluzione.

Problema (P_2). Esistono due punti di $Z(F)$ associati alla coordinata $t = -2$, questi sono $(-2, z_i)$ per $i = 1, 2$. In questi due punti si può applicare il teorema della funzione implicita e trovare due funzioni g_1, g_2 per cui $g_1(-2) = z_1$ e $g_2(-2) = z_2$. Quindi dall'equazione differenziale $F(t, y') = 0$, con dato iniziale $y(-2) = 0$ ammette due soluzioni locali associate ai problemi in forma normale $y' = g_1(t)$ e $y' = g_2(t)$, quindi la soluzione non è unica.

Esercizio 2.a. Innanzitutto è necessario dimostrare che i limiti esistono. Si osservi che dal momento che f è continua, non negativa gli integrali

$$\int_{A_n} f(x, y)dxdy, \qquad \int_{B_m} f(x, y)dxdy$$

sono definiti per ogni n e m. (A_n e B_m sono misurabili secondo Peano-Jordan). Quindi le successioni

$$\left\{\int_{A_n} f(x, y)dxdy\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \left\{\int_{B_m} f(x, y)dxdy\right\}_{m\in\mathbb{N}},$$

sono positive, strettamente crescenti e pertanto ammettono un limite (eventualmente non finito). Dimostriamo che i limiti sono uguali. Si noti che se entrambi i limiti sono infiniti non è necessario dimostrare altro. **Assumiamo quindi che almeno uno dei limiti sia finito**. Sia $n \in \mathbb{N}$ fissato, allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $A_n \subset B_m$. Quindi

$$\int_{A_n} fdxdy \leq \int_{B_m} fdxdy \leq \sup_m \int_{B_m} fdxdy = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} fdxdy.$$

Analogamente si dimostra che per ogni $m \in \mathbb{N}$ fissato

$$\int_{B_m} f dxdy \leq \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f dxdy.$$

Questo dimostra che se uno dei due limiti è finito, necessariamente anche l'altro limite deve esserlo. Passsando al limite nelle relazioni ottenute si trova che

$$\lim_n \int_{A_n} f dxdy \leq \lim_m \int_{B_m} f dxdy,$$
$$\lim_m \int_{B_m} f dxdy \leq \lim_n \int_{A_n} f dxdy,$$

e da questo si conclude che i due limiti sono uguali.

Esercizio 2.b. Per semplificare i conti, consideriamo una successione di insiemi B_m che verificano le condizioni del punto precedente. Ad esempio si può utilizzare

$$B_m = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 < y \leq m, e^y - 1 \leq x \leq e^y\right\}$$

che verifica le condizioni del punto precedente. Quindi si può calcolare l'integrale sulla successione di insiemi B_m.

$$\int_0^m \int_{e^y-1}^{e^y} \frac{dxdy}{(1+y)^\alpha} = \int_0^m \frac{dy}{(1+y)^\alpha}$$

Caso $\alpha = 1$. Allora vale che

$$\int_0^m \frac{dy}{1+y} = \ln(1+m) \xrightarrow{m\to\infty} +\infty.$$

Caso $\alpha \neq 1$. L'integrale vale

$$\frac{(1+m)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Se $\alpha > 1$ allora $\frac{(1+m)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ tende a 0. Quindi il limite vale

$$-\frac{1}{1-\alpha}.$$

Se invece $\alpha < 1$ allora, $\frac{(1+m)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \to +\infty$ per $m \to \infty$, quindi il limite dell'integrale è $+\infty$.