Elementi di Topologia e di Analisi Funzionale

Gianni Gilardi

Queste pagine costituiscono il contenuto del corso di “Analisi Funzionale” tenuto nell’a.a. 2003/04 nell’ambito del Dottorato in Matematica e Statistica, che è attivo presso il Dipartimento di Matematica “F. Casorati” dell’Università di Pavia.

Il nome del corso, tuttavia, è convenzionale. Il suo contenuto, infatti, riguarda non solo i primi elementi dell’analisi funzionale, con qualche complemento più avanzato, ma anche alcuni dei concetti e dei risultati più importanti della topologia generale, che all’analisi funzionale è propedeutica, e si rivolge agli studenti che non sono laureati in Matematica e che, pur conoscendo i rudimenti del calcolo, hanno una preparazione carente o addirittura nulla in settori più astratti della matematica connessi con l’analisi. Lo scopo è quello di fornire in 36 ore a questi studenti un’alfabetizzazione rapida che li agevoli in eventuali letture successive più approfondite.

Il contenuto tocca le tematiche concernenti gli spazi topologici, gli spazi metrici, gli spazi di Banach e di Hilbert e gli spazi localmente convessi. Tuttavia esso è impostato in modo che procedano parallelamente e continuamente interagiscano, per quanto possibile, i capitoli della topologia generale e quelli dell’analisi funzionale.

Con l’obiettivo di cercare un equilibrio fra l’aspetto logico-deduttivo e quello induttivo, presentiamo un numero limitato di definizioni e di risultati e puntiamo prioritariamente sugli esempi connessi con le applicazioni alle equazioni alle derivate parziali.

Per quanto riguarda poi le dimostrazioni, nelle lezioni si è fatta una scelta: varie fra quelle molto semplici ma solo alcune ben più complesse sono state svolte per intero; di altre è stata data solo la traccia senza i dettagli; di altre ancora, infine, non è stata data alcuna indicazione e si è supplito con qualche esempio semplice, possibilmente significativo, che potesse illustrare il risultato in esame. In queste pagine, tuttavia, sono raramente riportate dimostrazioni complete.

Capitolo I

I concetti fondamentali

Nelle impostazioni tradizionali la nozione di spazio topologico e le proprietà di tipo topologico della teoria che ne consegue vengono basate sulla nozione di aperto. Ragioni di opportunità, legate al fatto che gli spazi topologici che maggiormente ci interessano sono spazi funzionali, ci inducono invece a privilegiare le nozione di intorno di un punto e di base di intorni per un punto. Successivamente introdurremo le nozioni fondamentali collegate, fra le quali quella di aperto.

1. Intorni e basi di intorni

Sia X un insieme non vuoto. Assegnare una topologia su X significa *scegliere*, per ogni $x \in X$, i sottoinsiemi di X da chiamare *intorni di* x. Tuttavia, perché ne segua una teoria soddisfacente, tale scelta non può essere arbitraria e va in qualche modo regolamentata. Le proprietà che imponiamo conducono, nel caso dell'usuale topologia euclidea, alla nozione di soprainsieme di una palla, come sarà chiaro fra un attimo. Ecco quanto richiediamo per ogni punto $x \in X$:

- (i) x ha almeno un intorno
- (ii) ogni intorno di x contiene x
- (iii) ogni soprainsieme di un intorno di x è ancora un intorno di x
- (iv) l'intersezione di due intorni di x è ancora un intorno di x
- (v) ogni intorno I di x contiene un intorno I_0 di x che è anche intorno di ogni suo punto.

Formalizziamo il tutto nella definizione che segue.

Definizione 1.1. *Uno spazio topologico è una coppia $(X, \mathcal{I})$ costituita da un insieme non vuoto X e da una applicazione $\mathcal{I}$ che a ogni $x \in X$ associa una famiglia $\mathcal{I}(x)$ di sottoinsiemi di X in modo che, per ogni $x \in X$, valgano le proprietà seguenti:*

$$\mathcal{I}(x) \neq \emptyset \tag{1.1}$$

$$I \ni x \quad \text{per ogni } I \in \mathcal{I}(x) \tag{1.2}$$

$$I \in \mathcal{I}(x) \quad \text{e} \quad Y \supseteq I \quad \text{implicano} \quad Y \in \mathcal{I}(x) \tag{1.3}$$

$$I' \in \mathcal{I}(x) \quad \text{e} \quad I'' \in \mathcal{I}(x) \quad \text{implicano} \quad I' \cap I'' \in \mathcal{I}(x) \tag{1.4}$$

$$\text{per ogni } I \in \mathcal{I}(x) \text{ esiste } I_0 \in \mathcal{I}(x) \text{ tale che } I_0 \subseteq I \text{ e } I_0 \in \mathcal{I}(y) \text{ per ogni } y \in I_0. \ \blacksquare \tag{1.5}$$

Nella (1.3) è sottinteso che $Y \subseteq X$. Si noti poi che le proprietà elencate poco sopra si riottengono usando la frase I *è un intorno di* x come sostitutiva di $I \in \mathcal{I}(x)$.

Osservazione 1.2. Occorre ribadire che, fissato l'insieme X, la topologia, che possiamo formalmente definire come l'applicazione $\mathcal{I}$ che determina la nozione di intorno, è frutto di una scelta. Anche se in alcuni casi vi è una scelta "più naturale" di altre, ogni applicazione $\mathcal{I}$ nelle condizioni dette è ugualmente legittima. Dunque, in generale, su uno stesso insieme X si possono assegnare più topologie, ciascuna delle quali attribuisce un significato diverso alla parola *intorno*.

Ciò nonostante, si usa spesso la notazione semplice X anziché $(X, \mathcal{I})$ per denotare uno spazio topologico. In tali casi si intende che X è l'insieme su cui lo spazio è costruito e che effettivamente è stata scelta la nozione di intorno, senza tuttavia introdurre una notazione al riguardo.

Esempio 1.3: lo spazio euclideo. Quanto detto sopra si applica allo spazio $\mathbb{R}^n$, nel quale vi è una topologia privilegiata, detta *topologia euclidea* e definita come segue. Per $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ poniamo

$$|x| = \Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Bigr)^{1/2} \quad \text{e} \quad B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |x-y| < r\} \tag{1.6}$$

e chiamiamo $B_r(x)$ palla di centro x e raggio r. Allora un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è un intorno del punto $x \in \mathbb{R}^n$ se e solo se esiste $r > 0$ tale che $I \supseteq B_r(x)$. Effettivamente si ottiene una topologia, come si controlla senza difficoltà (per quanto riguarda la (1.5) si prenda come I_0 la palla $B_r(x)$ della definizione stessa di intorno). Se non si dice nulla, resta inteso che la topologia di $\mathbb{R}^n$ è quella appena definita. Tuttavia altre topologie sono possibili, come mostrano gli esempi "estremi" che seguono, nei quali si può prendere, in particolare, $X = \mathbb{R}^n$.

Esempio 1.4: la topologia banale. Essa si può definire su un qualunque insieme X non vuoto ponendo $\mathcal{I}(x) = \{X\}$ per ogni $x \in X$.

Esempio 1.5: la topologia discreta. Anche questa si può definire su un qualunque insieme X non vuoto denotando, per ogni $x \in X$, con $\mathcal{I}(x)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X che contengono x. ■

Per assegnare una topologia, come abbiamo detto, occorre dire quali sono gli intorni dei vari punti. Siccome ciò può risultare gravoso, è opportuno avere la possibilità di assegnare solo famiglie più ridotte e maneggevoli, detta basi di intorni.

Definizione 1.6. *Siano X uno spazio topologico e x un punto di X. Una famiglia $\mathcal{B}(x)$ di sottoinsiemi di X è una base di intorni di x quando:*

(i) *ogni elemento $B \in \mathcal{B}(x)$ è un intorno di x*
(ii) *per ogni intorno I di x esiste $B \in \mathcal{B}(x)$ tale che $B \subseteq I$.* ■

Proposizione 1.7. *Sia X uno spazio topologico e, per ogni $x \in X$, sia assegnata una base $\mathcal{B}(x)$ di intorni di x. Allora, per ogni $x \in X$, valgono le condizioni*

$$\mathcal{B}(x) \neq \emptyset \tag{1.7}$$

$$B \ni x \quad \text{per ogni } B \in \mathcal{B}(x) \tag{1.8}$$
$$\text{per ogni } B', B'' \in \mathcal{B}(x) \text{ esiste } B \in \mathcal{B}(x) \text{ tale che } B \subseteq B' \cap B'' \tag{1.9}$$
$$\text{per ogni } B \in \mathcal{B}(x) \text{ esiste } I_0 \subseteq B \text{ tale che} \tag{1.10}$$
$$\text{per ogni } y \in I_0 \text{ esista } B' \in \mathcal{B}(y) \text{ tale che } B' \subseteq I_0 \,. \ \blacksquare \tag{1.11}$$

Viceversa, vale il risultato dato di seguito, il quale ci autorizza, nel definire una topologia, a introdurre solo gli intorni che dovranno formare la base.

Teorema 1.8. *Sia X un insieme non vuoto e, per ogni $x \in X$, sia assegnata una famiglia $\mathcal{B}(x)$ di sottoinsiemi di X in modo che, per ogni $x \in X$, valgano le proprietà (1.7–11). Allora esiste una e una sola topologia su X per la quale, per ogni $x \in X$, la famiglia $\mathcal{B}(x)$ è una base di intorni di x. Tale topologia è definita dalla condizione seguente: un sottoinsieme $I \subseteq X$ è un intorno del punto $x \in X$ se e solo se*

$$\text{esiste } B \in \mathcal{B}(x) \text{ tale che } B \subseteq I \,. \ \blacksquare \tag{1.12}$$

Osservazione 1.9. Supponiamo ora di avere, per ogni $x \in X$, due famiglie $\mathcal{B}'(x)$ e $\mathcal{B}''(x)$ verificanti le condizioni (1.7–11). Allora, semplicemente applicando la (1.12), si vede che le due topologie date dal teorema precedente sono la stessa se e solo se, per ogni $x \in X$, valgono le condizioni

$$\text{per ogni } B' \in \mathcal{B}'(x) \text{ esiste } B'' \in \mathcal{B}''(x) \text{ tale che } B'' \subseteq B'$$
$$\text{per ogni } B'' \in \mathcal{B}''(x) \text{ esiste } B' \in \mathcal{B}'(x) \text{ tale che } B' \subseteq B''.$$

Il risultato precedente è particolarmente utile quando si vuole introdurre una topologia a partire da qualche altra struttura. Ciò è l'oggetto dei paragrafi successivi.

2. Spazi metrici e spazi metrizzabili

Il primo e più importante esempio di topologia indotta da una struttura preesistente è quella di spazio topologico metrizzabile, la cui topologia è indotta da una metrica.

Definizione 2.1. *Sia X un insieme non vuoto. Una metrica in X è una funzione $d : X^2 \to \mathbb{R}$ verificante, per ogni $x, y, z \in X$, le condizioni*

$$d(x,y) \geq 0 \tag{2.1}$$
$$d(x,y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = y \tag{2.2}$$
$$d(x,y) = d(y,x) \tag{2.3}$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z). \tag{2.4}$$

Se $x, y \in X$, il numero reale $d(x,y)$ si dice distanza di x da y e, se $x \in X$ e $r > 0$, l'insieme

$$B_r(x) = \{y \in X : \ d(x,y) < r\} \tag{2.5}$$

si dice palla di centro x *e raggio* r *.* ■

Definizione 2.2. *Uno spazio metrico è una coppia* (X, d) *ove* X *è un insieme non vuoto e* d *è una metrica in* X *.* ■

Si può fare un'osservazione analoga alla 1.2: anche in questo caso la metrica d è frutto di una scelta e su uno stesso insieme possono essere prese più metriche, ciascuna delle quali attribuisce un suo significato alle parole *distanza* e *palla*. Anche in questo caso, tuttavia, si usa spesso la notazione abbreviata X per denotare uno spazio metrico: in tal caso è inteso che effettivamente è stata scelta una metrica in X non accompagnata da una notazione precisa. In taluni casi poi, vi è una metrica privilegiata, come nel caso dello spazio euclideo che tratteremo fra un attimo. Notiamo infine che dalle proprietà della metrica segue quest'altra

$$|d(x,y) - d(x,z)| \le d(x,z) \tag{2.6}$$

detta come la (2.4) *disuguaglianza triangolare*. ■

Sia ora (X, d) uno spazio metrico e, per ogni $x \in X$ fissato, consideriamo l'insieme $\mathcal{B}(x)$ costituite da tutte le palle di centro x . Allora, come si vede facilmente usando le proprietà della metrica, le condizioni del Teorema 1.8 sono soddisfatte, per cui è ben definita la topologia nella quale, per ogni $x \in X$, la famiglia di tutte le palle di centro x è una base di intorni.

Definizione 2.3. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico. La topologia nella quale, per ogni* $x \in X$ *, la famiglia di tutte le palle di centro* x *è una base di intorni è detta topologia indotta dalla metrica* d *. Uno spazio topologico è detto metrizzabile se esiste una metrica che ne induce la topologia.* ■

Dunque, per definizione, le palle di uno spazio metrico costituiscono basi di intorni per la topologia indotta. Si vede facilmente che basi che inducono la stessa topologia si ottengono imponendo ai raggi delle palle di non superare quantità positive prefissate, eventualmente dipendenti dal punto, oppure di variare solo in successioni positive infinitesime. Un'altra base di intorni di x per la topologia indotta dalla metrica d si ottiene prendendo le cosiddette palle chiuse: $\{y \in X : \ d(x,y) \le r\}$. Per il controllo delle affermazioni precedenti basta riprendere l'Osservazione 1.9. La stessa osservazione consente di verificare quanto segue.

Consideriamo due metriche d' e d'' sullo stesso insieme X e denotiamo con $B'_r(x)$ e con $B''_r(x)$ la palla di centro x e raggio r nelle due metriche d' e d'' rispettivamente. Allora d' e d'' inducono la stessa topologia o, come si dice, sono *topologicamente equivalenti*, se e solo se, per ogni $x \in X$, valgono le due condizioni

$$\begin{aligned} &\text{per ogni } r' > 0 \text{ esiste } r'' > 0 \text{ tale che } B''_{r''}(x) \subseteq B'_{r'}(x) \\ &\text{per ogni } r'' > 0 \text{ esiste } r' > 0 \text{ tale che } B'_{r'}(x) \subseteq B''_{r''}(x). \end{aligned}$$

Una condizione sufficiente perché le due metriche inducano la stessa topologia è che

$$\begin{aligned} &\text{esistano due costanti } c_1 \text{ e } c_2 \text{ tali che} \\ &d'(x,y) \le c_1 d''(x,y) \quad \text{e} \quad d''(x,y) \le c_2 d'(x,y) \quad \text{per ogni } x, y \in X. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Tali disuguaglianze, infatti, implicano inclusioni del tipo precedente.

Questa condizione, tuttavia, non è necessaria. Ad esempio, si può dimostrare che una metrica topologicamente equivalente a una metrica prefissata d' su un generico insieme X è data dalla formula $d''(x,y) = \varphi(d'(x,y))$, ove $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, concava, strettamente crescente e tale che $\varphi(0) = 0$. Ora, se φ è limitata e d' non lo è (si pensi alla metrica euclidea), non è possibile soddisfare la prima delle (2.7) con nessuna scelta di c_1.

Osservazione 2.4. Notiamo che due metriche topologicamente equivalenti ma diverse fra loro forniscono lo stesso spazio topologico ma due diversi spazi metrici. Dunque occorre distinguere i termini *metrico* e *metrizzabile*, il secondo dei quali si riferisce alla topologia. Ciò nonostante si usa spesso dire “metrico” intendendo “metrizzabile”.

Esempio 2.5: lo spazio euclideo (seguito). Sia $X = \mathbb{R}^n$. Con la prima delle notazioni (1.6), poniamo $d(x,y) = |x-y|$. Allora otteniamo una metrica, detta *metrica euclidea*. In questo caso le disuguaglianze triangolari assumono un chiaro significato geometrico ma non si dimostrano in modo banale per n generico. Osservato che la seconda delle (1.6) e la (2.5) assumono lo stesso significato, vediamo che la metrica euclidea induce la topologia euclidea dell'Esempio 1.3. Metriche topologicamente equivalenti alla metrica euclidea sono date dalla formula $d(x,y) = |x-y|_p$, con $p \in [1,\infty]$, ove si è posto per $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|x|_p = \Bigl(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Bigr)^{1/p} \quad \text{e} \quad |x|_\infty = \max\{|x_i - y_i| :\ 1 \le i \le n\} \tag{2.8}$$

a seconda che $1 \le p < \infty$ o $p = \infty$. La metrica euclidea corrisponde a $p = 2$. La restrizione $p \ge 1$ serve perché valga la disuguaglianza triangolare. La notazione $|x|_\infty$ è dovuta alla formula $|x|_\infty = \lim_{p\to+\infty} |x|_p$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Il controllo dell'equivalenza topologica si basa sul fatto seguente: per ogni $p,q \in [1,\infty]$ esiste una costante c tale che

$$|x|_p \le c|x|_q \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.9}$$

Ciò è conseguenza di un risultato generale che vedremo successivamente.

Esempio 2.6: la metrica discreta. Sia X un insieme non vuoto. Per $x,y \in X$ poniamo $d(x,y) = 0$ se $x = y$ e $d(x,y) = 1$ se $x \ne y$. La topologia indotta è la topologia discreta dell'Esempio 1.5.

3. Alcuni tipi di spazi vettoriali topologici

Tutti gli spazi vettoriali che consideriamo sono per semplicità reali. Ciò vale anche per il seguito, senza alcun preavviso. Gli spazi che introduciamo sono, con l'eventuale aggiunta di una proprietà che vedremo successivamente, casi particolari di *spazi vettoriali topologici*. La definizione precisa di questo termine, tuttavia, viene rimandata dato che richiede la conoscenza di altre cose.

Definizione 3.1. *Sia* V *uno spazio vettoriale. Una norma in* V *è una funzione* $\|\cdot\| : V^2 \to \mathbb{R}$ *verificante, per ogni* $x, y \in V$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *, le condizioni*

$$\|x\| \geq 0 \tag{3.1}$$

$$\|x\| = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad x = 0 \tag{3.2}$$

$$\|cx\| = |c|\,\|x\| \tag{3.3}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \,. \tag{3.4}$$

Uno spazio normato è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ *costituita da uno spazio vettoriale* V *e da una norma in* V *.* ∎

Notiamo che anche la (3.4) viene detta *disuguaglianza triangolare*, per un motivo ovvio fra un attimo. Sia infatti $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Non ci sono difficoltà nel verificare che la formula

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{3.5}$$

definisce una metrica in V . Vale di conseguenza la disuguaglianza

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\| \tag{3.6}$$

analoga alla (2.6).

Definizione 3.2. *Sia* $(V, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato. La metrica definita dalla* (3.5) *è detta metrica indotta dalla norma. La topologia indotta da tale metrica è detta topologia indotta dalla norma. Uno spazio vettoriale dotato di una topologia è detto normabile quando esiste una norma che ne induce la topologia.* ∎

Si può fare un'osservazione analoga alla 2.4. Tuttavia l'aggettivo *normabile* è di uso poco frequente e si usa al suo posto l'aggettivo *normato*, anche in riferiferimento alla sola topologia indotta e non a una norma precisa.

Notiamo inoltre che non tutte le metriche in uno spazio vettoriale sono indotte da norme e che due norme che inducono la stessa metrica sono necessariamente la stessa. La norma che induce la metrica (3.5), infatti, è ricostruibile con la formula $\|x\| = d(x, 0)$ a partire dalla norma. ∎

Ci occupiamo ora dell'*equivalenza topologica* di due norme, cioè del fatto che esse inducono la stessa topologia. In particolare segue la disuguaglianza (2.9).

Teorema 3.3. *Siano* V *uno spazio normato e* $\|\cdot\|'$ *e* $\|\cdot\|''$ *due norme in* V *. Allora tali norme inducono la stessa topologia se e solo se esistono due costanti* c_1 *e* c_2 *tali che valgano le due disuguaglianze*

$$\|x\|' \leq c_1 \|x\|'' \quad \textit{e} \quad \|x\|'' \leq c_2 \|x\|' \quad \textit{per ogni } x \in V. \; ∎ \tag{3.7}$$

Cenno della dimostrazione. Le (3.7) equivalgono alle (2.7), ove d' e d'' sono le metriche indotte dalle due norme considerate. ∎

Teorema 3.4. *Sia V uno spazio normato di dimensione finita. Allora due norme qualunque in V inducono la stessa topologia.* ∎

Cenno della dimostrazione. Per isomorfismi algebrici ci si riduce al caso $V = \mathbb{R}^n$. Inoltre basta verificare l'equivalenza fra una norma generica e una fissata, ad esempio la norma $|\cdot|_p$ della (2.8) con $p = 1$. Una delle due disuguaglianze è banale e l'altra può essere dimostrata per assurdo con l'aiuto del Teorema di Bolzano-Weierstrass. ∎

Esempio 3.5: lo spazio euclideo (seguito). La *norma euclidea* di $\mathbb{R}^n$ è data dalla prima delle formule (1.6), che coincide con la (2.8) nel caso $p = 2$. Altre norme in $\mathbb{R}^n$ sono date dalla (2.8), ove $p \in [1, \infty]$. La topologia indotta è sempre la topologia euclidea, l'unica fra le topologie in $\mathbb{R}^n$ che può essere indotta da una norma.

Esempio 3.6: lo spazio $C^0[a,b]$. Esso è lo spazio vettoriale costituito dalle funzioni $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Esso è spesso denotato anche con $C[a,b]$ o con notazioni analoghe che fanno intervenire parentesi tonde aggiuntive e la sua norma "naturale" è definita dalla formula

$$\|v\|_\infty = \max\{|v(t)| : \ 0 \le t \le 1\}. \tag{3.8}$$

Il fatto che tale scelta sia quella che abbiamo chiamato naturale sarà chiaro solo in seguito. La (3.8) è detta anche *norma del massimo*.

Notiamo che l'intervallo chiuso $[a,b]$ può essere sostituito da altri tipi di insiemi, ad esempio da un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ chiuso e limitato. La sola cosa che serve, infatti, è che tutte le funzioni continue sull'insieme K considerato abbiano massimo. Si ottiene lo spazio denotato con $C^0(K)$.

Esempio 3.7. Un'altra norma in $C^0[a,b]$ è data dalla formula

$$\|v\|_1 = \int_a^b |v(t)|\,dt. \tag{3.9}$$

Tale norma non è equivalente alla (3.8). Più in generale, altre norme sullo stesso spazio che inducono topologie tutte diverse fra loro sono date dalle formule

$$\|v\|_p = \left(\int_a^b |v(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \tag{3.10}$$

ove $1 \le p < \infty$. Tale restrizione serve per verificare la disuguaglianza triangolare (3.4), detta in questo caso *disuguaglianza di Minkowski*, la cui dimostrazione, al contrario di quelle delle altre proprietà della norma, non è banale. Segnaliamo infine che risulta $\|v\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|v\|_p$ per ogni $v \in C^0[a,b]$.

Esempio 3.8: lo spazio $C^1[a,b]$. Esso è lo spazio vettoriale costituito dalle funzioni $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1, cioè differenziabili con derivata continua. La sua topologia naturale è quella indotta dalla norma

$$\|v\| = \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty \tag{3.11}$$

nella definizione della quale è stata usata la notazione (3.8).

Altre norme possono essere prese in considerazione e alcune di esse, al contrario di altre, inducono la stessa topologia. Norme equivalenti alla (3.11) sono

$$\|v\| = \max\{\|v\|_\infty\,, \|v'\|_\infty\} \quad \text{e} \quad \|v\| = |v(t_0)| + \|v'\|_\infty$$

ove ancora si è usata la notazione (3.8) e ora t_0 è fissato ad arbitrio in $[a,b]$. Al contrario, con le notazioni (3.8) e (3.9), le norme

$$\|v\| = \|v\|_\infty \quad \text{e} \quad \|v\| = \|v\|_\infty + \|v'\|_1 \tag{3.12}$$

inducono topologie diverse fra loro e da quella naturale.

Esempio 3.9: lo spazio $C^1(\overline{\Omega})$. L'intervallo $[a,b]$ può essere sostituito da insiemi più generali e il caso importante è quello della chiusura $\overline{\Omega}$ di un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si ottiene lo spazio $C^1(\overline{\Omega})$ e la singola derivata della (3.11) deve essere sostituita dalle n derivate parziali. Si noti però che questa generalizzazione porta a problemi concettuali già a livello della definizione stessa, dato che non è ovvio che cosa debba significare la derivata parziale in un punto della frontiera. Tuttavia possiamo dire che, in ipotesi opportune su Ω (nelle quali rientrerebbero tutti i casi interessanti), tutte le definizioni ragionevoli conducono allo stesso spazio.

Esempio 3.10: lo spazio $C^k[a,b]$. Esso generalizza l'Esempio 3.8. Se $k > 0$ si tratta dello spazio vettoriale costituito dalle funzioni $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^k, cioè differenziabili k volte con derivate continue fino all'ordine k. La sua topologia naturale è quella indotta dalla norma (sempre con la notazione (3.8))

$$\|v\| = \sum_{j=0}^{k} \|v^{(j)}\|_\infty\,. \tag{3.13}$$

Anche nella costruzione di questo spazio è possibile sostituire l'intervallo $[a,b]$ con la chiusura di un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, eventualmente in ipotesi opportune su Ω. Si ottiene lo spazio $C^k(\overline{\Omega})$.

Definizione 3.11. *Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare in V è una applicazione $(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : V^2 \to \mathbb{R}$ verificante, per ogni $x,y,z \in V$ e $c \in \mathbb{R}$, le condizioni*

$$(x,x) \geq 0 \tag{3.14}$$

$$(x,x) = 0 \quad \textit{se e solo se} \quad x = 0 \tag{3.15}$$

$$(x,y) = (y,x) \tag{3.16}$$

$$(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \quad \textit{e} \quad (cx,y) = c(x,y) \tag{3.17}$$

Uno spazio prehilbertiano è una coppia $(V,(\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ costituita da uno spazio vettoriale V e da un prodotto scalare in V. ■

La (3.17) si esprime dicendo che il prodotto scalare è lineare nel primo fattore. Tenendo conto della simmetria data dalla (3.16), otteniamo l'analoga linearità nel secondo fattore. Un prodotto scalare, dunque, è una applicazione di V^2 in $\mathbb{R}$ bilineare, simmetrica e definita positiva.

Sia ora $(V, (\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ uno spazio prehilbertiano. Anche se la verifica non è banale, si dimostra che la formula (che ha senso per la (3.14))

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} \tag{3.18}$$

fornisce una norma in V.

Definizione 3.12. *Sia* $(V, (\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ *uno spazio prehilbertiano. La norma definita dalla* (3.18) *è detta norma indotta dal prodotto scalare considerato. La metrica e la topologia indotte da tale norma sono chiamate indotte dal prodotto scalare. Uno spazio vettoriale dotato di una topologia è detto prehilbertizzabile quando esiste un prodotto scalare che ne induce la topologia. Infine due prodotti scalari in uno stesso spazio vettoriale* V *si dicono topologicamente equivalenti quando inducono la stessa topologia.* ∎

Anche l'aggettivo *prehilbertizzabile* è di uso poco frequente e si usa al suo posto l'aggettivo *prehilbertiano*, anche in riferiferimento alla sola topologia indotta e non a un prodotto scalare preciso. La verifica del fatto che la (3.18) effettivamente è una norma si basa sul risultato che segue (nel quale il termine "norma indotta" è solo un modo di dire finché non si sono effettivamente controllate le proprietà della norma) e che ha anche un interesse autonomo.

Proposizione 3.13. *Siano* $(V, (\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ *uno spazio prehilbertiano e* $\|\cdot\|$ *la corrispondente norma indotta. Allora, per ogni* $x, y \in V$, *vale la disuguaglianza*

$$|(x, y)| \le \|x\| \, \|y\| \tag{3.19}$$

detta disuguaglianza di Schwarz. ∎

Notiamo che due prodotti scalari che inducono la stessa norma devono necessariamente coincidere. Valgono infatti le *formule del binomio*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2(x, y). \tag{3.20}$$

Seguono varie formule, ad esempio

$$(x, y) = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right). \tag{3.21}$$

In particolare è possibile ricostruire, a partire dalla norma, del prodotto scalare che induce la norma (3.18) stessa.

Notiamo inoltre che la disuguaglianza di Schwarz consente una definizione di *angolo* fra due vettori $x, y \in V$ non nulli. Essa, infatti, rende sensata la formula

$$\widehat{xy} = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \, \|y\|}. \tag{3.22}$$

Resta allora addirittura tautologica la formula

$$(x, y) = \|x\| \, \|y\| \cos \widehat{xy}$$

che però suggerisce di chiamare *ortogonali* due elementi x, y tali che $(x, y) = 0$.

Dunque negli spazi prehilbertiani si può parlare di angoli e ortogonalità e ci si può chiedere se la stessa cosa può essere fatta negli spazi normati. La risposta è negativa in quanto non tutte le norme in uno spazio vettoriale sono indotte da prodotti scalari. Vale infatti il risultato seguente:

Proposizione 3.14. *Sia* $(V, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato. Allora esiste un prodotto scalare che induce la norma* $\|\cdot\|$ *se e solo se, per ogni* $x, y \in V$, *vale la cosiddetta regola del parallelogrammo*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 \,. \blacksquare \tag{3.23}$$

Cenno della dimostrazione. Se la norma è indotta da un prodotto scalare, la (3.23) segue dalla (3.20). Viceversa, data una norma $\|\cdot\|$ e assunta la (3.21) come definizione di $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, si riescono a verificare le proprietà del prodotto scalare se vale la (3.23). $\blacksquare$

Esempio 3.15: lo spazio euclideo (seguito). Nello spazio $\mathbb{R}^n$ si introduce il cosiddetto *prodotto scalare euclideo*, usualmente denotato con il puntino anziché con le parentesi e definito dalla formula

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{3.24}$$

se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sono i punti generici di $\mathbb{R}^n$. La norma indotta è la norma euclidea dell'Esempio 3.5. Notiamo invece che, escluso il caso banale $n = 1$ nel quale tutte le (2.8) forniscono l'usuale modulo, nessuna delle norme (2.8) con $p \neq 2$ è indotta da un prodotto scalare dato che cade la regola del parallelogrammo. Può dunque avvenire che, assegnata una famiglia di norme tutte equivalenti fra loro, solo qualcuna di esse sia indotta da un prodotto scalare.

Altri prodotti scalari in $\mathbb{R}^n$, necessariamente equivalenti a quello euclideo per la Proposizione 3.4, sono dati dalla formula

$$(x, y) = x^* A y$$

ove x e y sono pensati vettori colonna, x^* è il trasposto di x e A è una arbitraria matrice $n \times n$ reale simmetrica e definita positiva.

Esempio 3.16. Si vede inoltre che la norma (3.8) in $C^0[a, b]$ non verifica la (3.23), per cui non è indotta da alcun prodotto scalare. La stessa cosa vale per le norme (3.10) con $p \neq 2$. Se invece $p = 2$ la (3.10) verifica la regola del parallelogrammo e il prodotto scalare che induce la norma è dato dalla formula

$$(u, v) = \int_a^b u(t)\, v(t)\, dt.$$

Un altro prodotto scalare in $C^0[a,b]$ è dato dalla formula

$$(u,v) = \int_a^b (t-a)\, u(t)\, v(t)\, dt$$

ma la topologia indotta non coincide con la precedente, come mostra l'applicazione della Proposizione 3.3 alle corrispondenti norme indotte. ■

Una classe di spazi vettoriali topologici che vogliamo considerare è costituita dagli spazi localmente convessi che ora introduciamo. Anche se tale classe è di rilevanza minore rispetto a quella degli spazi normati, riteniamo utile introdurla con un certo dettaglio. Sono infatti spazi localmente convessi non normabili sia vari spazi funzionali di uso corrente sia gli spazi ottenuti a partire dagli spazi normati di dimensione infinita considerando le corrispondenti topologie deboli che introdurremo in seguito.

Definizione 3.17. *Sia V uno spazio vettoriale. Una seminorma in V è una funzione $|\cdot| : V^2 \to \mathbb{R}$ verificante, per ogni $x, y \in V$ e $c \in \mathbb{R}$, le condizioni*

$$|x| \geq 0 \tag{3.25}$$
$$|cx| = |c|\,|x| \tag{3.26}$$
$$|x+y| \leq |x| + |y| \,.\ ■ \tag{3.27}$$

Una norma è una particolare seminorma e una seminorma è una norma se e solo se essa si annulla solo sullo zero dello spazio. La seconda *disuguaglianza triangolare* analoga alle (2.6) e (3.6)

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x-y| \tag{3.28}$$

segue direttamente dalle proprietà delle seminorme.

Esempio 3.18. Un semplice esempio di seminorma che non è una norma è quello del modulo della prima coordinata del generico punto di $\mathbb{R}^2$: le proprietà (3.25–27) valgono ma la seminorma considerata si annulla su tutti i vettori della forma $(0, x_2)$. ■

C'è un modo di definire una topologia indotta da una seminorma. Tuttavia è più interessante considerare una famiglia di seminorme anziché una singola seminorma.

Siano dunque V uno spazio vettoriale, $\mathcal{F} = \{|\cdot|_j :\ j \in \mathcal{J}\}$ una famiglia non vuota di seminorme in V e x un punto di V. Per ogni scelta di indici $j_1, \ldots, j_m \in \mathcal{J}$ in numero finito e ogni $r > 0$ consideriamo l'insieme

$$\{y \in V :\ |x-y|_{j_k} < r,\ k = 1, \ldots, m\}\,. \tag{3.29}$$

Se denotiamo con $\mathcal{B}(x)$ la famiglia di tutti gli insiemi costruiti in tal modo, sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 1.8. Possiamo allora dare la definizione seguente:

Definizione 3.19. *Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{F} = \{|\cdot|_j :\ j \in \mathcal{J}\}$ una famiglia non vuota di seminorme in V. Per ogni $x \in V$ denotiamo con $\mathcal{B}(x)$ la famiglia costituita dagli insiemi* (3.29) *che si ottengono a partire da tutti i sottoinsiemi finiti*

$j_1, \ldots, j_m$ di $\mathcal{J}$ e da tutti i numeri reali $r > 0$. La topologia data in corrispondenza dal Teorema 1.8 è detta topologia indotta dalla famiglia $\mathcal{F}$.

Uno spazio vettoriale V dotato di una topologia è detto localmente convesso quando esiste una famiglia di seminorme che ne induce la topologia e due famiglie di seminorme in V si dicono topologicamente equivalenti quando inducono la stessa topologia. ■

Osservazione 3.20. Anche se sarà necessario riprendere il discorso in seguito, possiamo anticipare il motivo dell'aggettivo *localmente convesso* attribuito a gli spazi introdotti nella definizione precedente. Ebbene non è difficile controllare che ciascuno degli insiemi (3.29) è convesso (nel senso della definizione che per completezza diamo di seguito), per cui gli spazi introdotti godono della proprietà seguente: ogni punto ha una base di intorni convessi.

Vedremo in seguito che, viceversa, la topologia degli spazi di una certa categoria (spazi vettoriali topologici separati) che godono di tale proprietà è necessariamente indotta da una famiglia di seminorme.

Definizione 3.21. *Se V è uno spazio vettoriale e $x, y \in V$, chiamiamo segmento di estremi x e y l'immagine dell'applicazione $t \mapsto x + t(y - x)$, $t \in [0, 1]$, e diciamo che un sottoinsieme $C \subseteq V$ è convesso quando, dati comunque $x, y \in C$, il segmento di estremi x e y è incluso in C.* ■

Esempio 3.22: il caso degli spazi normati. Se $\|\cdot\|$ è una norma su uno spazio vettoriale V e se consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ costituita dalla sola norma considerata, la topologia indotta coincide con quella indotta dalla norma. ■

Ancora si pone il problema dell'equivalenza topologica e vale in proposito il risultato che enunciamo di seguito e che generalizza il Teorema 3.3.

Teorema 3.23. *Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ due famiglie di seminorme in V. Allora $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ inducono la stessa topologia se e solo se valgono la condizione che enunciamo esplicitamente e l'analoga ottenuta scambiando i ruoli delle due famiglie. Ecco la condizione richiesta: per ogni seminorma $|\cdot|'' \in \mathcal{F}''$ esistono un numero finito $|\cdot|'_{j_k}$ $(k = 1, \ldots, m)$ di seminorme di $\mathcal{F}'$ e una costante $c > 0$ tali che*

$$|x|'' \le c \max_{k=1,\ldots,m} |x|'_{j_k} \quad \textit{per ogni } x \in V. \; \blacksquare \tag{3.30}$$

Esempio 3.24: lo spazio euclideo (seguito). In $\mathbb{R}^n$ possiamo considerare la famiglia $\mathcal{F}$ costituita dalle n seminorme $|\cdot|_i$, $i = 1, \ldots, n$, definite dalle formule

$$|x|_i = |x_i| \quad \text{se } x = (x_1, \ldots, x_n)$$

ove il simbolo al secondo membro è quello di modulo. Allora la topologia indotta da $\mathcal{F}$ è la topologia euclidea, come si vede applicando il Teorema 3.23.

Esempio 3.25: lo spazio $C^0(a, b)$. Esso è lo spazio vettoriale costituito dalle funzioni $v : (a, b) \to \mathbb{R}$ continue. In questo caso a e b non sono necessariamente finiti. La sua topologia "naturale" è quella indotta dalla famiglia delle seminorme definite dalle formule

$$|v|_{\infty,K} = \max_{t \in K} |v(t)| \tag{3.31}$$

ottenuta facendo variare K nella classe degli intervalli chiusi e limitati inclusi in (a,b). Notiamo che non esiste alcuna norma che induce tale topologia.

Nel caso in cui a e b sono finiti, una famiglia equivalente e, si badi bene, numerabile si ottiene considerando, fra le seminorme precedenti, solo quelle relative a intervalli del tipo $K = [a + 1/k, b - 1/k]$ con k intero positivo tale che $a + 1/k < b - 1/k$.

Famiglie numerabili equivalenti a quella standard si possono però scrivere facilmente nel caso di intervalli (a,b) non limitati. Ad esempio, nel caso $(a,b) = \mathbb{R}$, possiamo limitarci agli intervalli del tipo $K = [-k, k]$ con k intero positivo.

Esempio 3.26: lo spazio $C^0(\Omega)$. Come nel caso dell'Esempio 3.6, l'intervallo (a,b) può essere variamente sostituito. Possiamo così considerare lo spazio $C^0(\Omega)$ costituito dalle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{R}$ continue, ove Ω è un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$. La sua topologia naturale è quella indotta dalla famiglia costituita dalle seminorme definite dalla formula (3.31), ove ora K varia fra i sottoinsiemi chiusi e limitati inclusi in Ω.

Anche in questo caso è possibile costruire una famiglia numerabile di seminorme equivalente a quella considerata. Infatti, come si vede facilmente applicando il Teorema 3.23, si ottiene una famiglia equivalente prendendo le seminorme considerate ma limitatamente agli insiemi K presi in una famiglia $\mathcal{K}$ di sottoinsiemi chiusi e limitati di Ω che gode della proprietà seguente: per ogni $K \subseteq \Omega$ chiuso e limitato esiste $K' \in \mathcal{K}$ tale che $K' \supseteq K$. Ebbene, detta B_r la palla chiusa di $\mathbb{R}^n$ di centro 0 e raggio $r > 0$, una famiglia numerabile $\mathcal{K}$ nelle condizioni dette si ottiene prendendo gli insiemi K_i, $i = 1, 2, \ldots$, definiti come segue. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ poniamo $K_i = B_i$; se $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ definiamo K_i come l'insieme dei punti $x \in \Omega \cap B_i$ che distano al massimo $1/i$ dal bordo di Ω.

Esempio 3.27: lo spazio $C^1(a,b)$. Esso è lo spazio vettoriale costituito dalle funzioni $v : (a,b) \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Anche in questo caso a e b non sono necessariamente finiti. La sua topologia naturale è quella indotta dalla famiglia delle seminorme definite, con la notazione (3.31), dalle formule

$$|v|_K = |v|_{\infty,K} + |v'|_{\infty,K} \tag{3.32}$$

ottenuta facendo variare K nella classe degli intervalli chiusi e limitati inclusi in (a,b). Anche in questo caso non esiste alcuna norma che induce tale topologia ed è possibile costruire famiglie numerabili equivalenti.

Tutto ciò vale poi anche per lo spazio $C^1(\Omega)$, ottenuto, come abbiamo fatto nella costruzione dell'Esempio 3.25, sostituendo (a,b) con un generico aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

In modo analogo si costruisce la topologia naturale dello spazio $C^k(\Omega)$ costituito dalle funzioni di classe C^k, ove k è un intero positivo fissato ad arbitrio.

Esempio 3.28: lo spazio $C^\infty[a,b]$. Esso è lo spazio vettoriale costituito dalle funzioni $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e la sua topologia naturale è definita dalla famiglia numerabile di seminorme (di fatto norme)

$$|v|_k = \|v^{(k)}\|_\infty, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.33}$$

sempre con la notazione (3.8). Anche in questo caso non esiste una norma che induce la topologia considerata.

Le stesse considerazioni valgono poi (con le difficoltà segnalate nell'Esempio 3.9) se $[a,b]$ è sostituito dalla chiusura di un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, eventualmente in ipotesi ragionevoli su Ω. Si ottiene lo spazio localmente convesso $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Esempio 3.29: lo spazio $C^\infty(a,b)$. Esso è lo spazio vettoriale costituito dalle funzioni $v : (a,b) \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e la sua topologia naturale è definita dalla famiglia di seminorme

$$|v|_{k,K} = \|v^{(k)}\|_{\infty,K}$$

(con la notazione (3.31)) ottenuta facendo variare K, come nel caso di $C^0(a,b)$, nella classe degli intervalli chiusi e limitati inclusi in (a,b) e k fra gli interi non negativi. Anche in questo caso possiamo limitarci a un'infinità numerabile di insiemi K, dunque a un'infinità numerabile di seminorme, senza alterare la topologia. Anche questo spazio non è normabile. Le stesse cose si ripetono poi per lo spazio $C^\infty(\Omega)$, ottenuto prendendo un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ anziché un intervallo di $\mathbb{R}$.

Capitolo II

Alcuni punti della teoria

Ci occupiamo di definire i concetti collegati alla nozione di intorno, come quelli di aperto e di funzione continua, di qualche costruzione canonica e di qualche categoria importante di spazi topologici.

1. I concetti topologici abituali

Essi costituiscono la naturale estensione al caso generale di spazi topologici di concetti ben noti nel caso dello spazio euclideo. Ecco le definizioni principali.

Definizione 1.1. *Siano X uno spazio topologico, $E \subseteq X$ e $x \in X$. Diciamo che x è interno a E, esterno a E, di frontiera per E, di aderenza per E, di accumulazione per E quando, rispettivamente, sono soddisfatte le condizioni seguenti:*

$$\text{esiste un intorno di } x \text{ incluso in } E \tag{1.1}$$

$$\text{esiste un intorno di } x \text{ disgiunto da } E \tag{1.2}$$

$$x \text{ non è né interno a } E \text{ né esterno a } E \tag{1.3}$$

$$\text{ogni intorno di } x \text{ interseca } E \tag{1.4}$$

$$\text{ogni intorno di } x \text{ interseca } E \setminus \{x\}. \ \blacksquare \tag{1.5}$$

Osservazione 1.2. In relazione alla definizione precedente, si vede facilmente che, se $\mathcal{B}(x)$ è una base di intorni di x, si ottengono gli stessi concetti sostituendo le parole *intorno di* x con *elemento di* $\mathcal{B}(x)$.

Definizione 1.3. *Siano X uno spazio topologico e $E \subseteq X$. L'interno di E, l'esterno di E, la frontiera di E, la chiusura di E e il derivato di E sono, rispettivamente, l'insieme dei punti interni a E, l'insieme dei punti esterni a E, l'insieme dei punti di frontiera per E, l'insieme dei punti di aderenza per E e l'insieme dei punti di accumulazione per E.* ■

Definizione 1.4. *Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme $E \subseteq X$ è detto aperto, chiuso, denso quando, rispettivamente, sono soddisfatte le condizioni seguenti:*

$$\text{ogni punto di } E \text{ è interno a } E \tag{1.6}$$

$$\text{ogni punto di } X \setminus E \text{ è esterno a } E \tag{1.7}$$

$$\text{la chiusura di } E \text{ è } X. \ \blacksquare \tag{1.8}$$

Si potrebbe fare un lungo elenco di proprietà di facile dimostrazione, ma per questo rimandiamo ai testi specializzati e ci limitiamo a osservare che

$$\text{un sottoinsieme è chiuso se e solo se il suo complementare è aperto} \tag{1.9}$$

e a enunciare i risultati che seguono, i quali consentono in particolare di vedere come la nozione di spazio topologico può essere data in modo alternativo.

Proposizione 1.5. *Siano* $(X, \mathcal{I})$ *uno spazio topologico e* $\mathcal{A}$ *la famiglia degli aperti. Allora valgono le condizioni seguenti:*

$$\emptyset, X \in \mathcal{A} \tag{1.10}$$

$$\text{se } A_i \in \mathcal{A} \text{ per ogni } i \text{ di un certo insieme di indici, allora } \bigcup_i A_i \in \mathcal{A} \tag{1.11}$$

$$\text{se } A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \text{ allora } A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}. \tag{1.12}$$

Inoltre, per ogni $x \in X$ *e* $I \subseteq X$, *risulta* $I \in \mathcal{I}(x)$ *se e solo se*

$$\text{esiste } A \in \mathcal{A} \text{ tale che } x \in A \text{ e } A \subseteq I \,. \ \blacksquare \tag{1.13}$$

Teorema 1.6. *Siano* X *un insieme non vuoto e* $\mathcal{A}$ *una famiglia di sottoinsiemi di* X *verificante le condizioni* (1.10–12). *Allora esiste una e una sola topologia su* X *la cui famiglia di aperti sia* $\mathcal{A}$. *Tale topologia si ottiene definendo le famiglie di intorni nel modo seguente: se* $x \in X$ *e* $I \subseteq X$, *diciamo che* I *è un intorno di* x *se e solo se vale la condizione* (1.13). ■

Tenendo conto della (1.9) si vede immediatamente che la famiglia $\mathcal{C}$ dei chiusi verifica le proprietà

$$\emptyset, X \in \mathcal{C} \tag{1.14}$$

$$\text{se } C_i \in \mathcal{C} \text{ per ogni } i \text{ di un certo insieme di indici, allora } \bigcap_i C_i \in \mathcal{C} \tag{1.15}$$

$$\text{se } C_1, C_2 \in \mathcal{C}, \text{ allora } C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C} \tag{1.16}$$

e che, viceversa, data comunque una famiglia $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di X in queste condizioni, esiste una e una sola topologia per la quale $\mathcal{C}$ è la famiglia dei chiusi.

Dunque una topologia può essere assegnata scegliendo indifferentemente una delle cose seguenti (ciascuna con le dovute proprietà, ben inteso): *(i)* le famiglie degli intorni dei vari punti; *(ii)* famiglie di basi di intorni dei vari punti; *(iii)* la famiglia degli aperti; *(iv)* la famiglia dei chiusi. In particolare viene recuperata l'impostazione tradizionale secondo la quale uno spazio topologico è una coppia $(X, \mathcal{A})$ ove X è un insieme non vuoto e $\mathcal{A}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X , detti aperti, verificante le condizioni (1.10–12).

2. Continuità

Passiamo ora alle nozioni di continuità e di limite e ai concetti a questi collegati. Ancora privilegiamo l'impostazione basata sugli intorni.

Definizione 2.1. *Siano X e Y due spazi topologici, $f : X \to Y$ e $x_0 \in X$. Diciamo che f è continua in x_0 quando per ogni intorno I di $f(x_0)$ esiste un intorno J di x_0 tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in J$. Diciamo poi che f è continua quando essa è continua in ogni punto di X.* ■

Anche in questo caso possiamo sostituire le famiglie di intorni di x_0 e di $f(x_0)$ con basi di intorni di tali punti senza che il concetto venga alterato. Se, in particolare, facciamo ciò nel caso in cui le due topologie di X e Y sono indotte da due metriche d_X e d_Y rispettivamente e come basi di intorni prendiamo le famiglie costituite dalle palle, otteniamo la generalizzazione della classica formulazione della continuità in termini di ε e δ: *la funzione f è continua in x_0 se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ per ogni $x \in X$ verificante $d_X(x, x_0) < \delta$.*

Osservazione 2.2. Fissati gli insiemi X e Y e la funzione $f : X \to Y$, per parlare di continuità di f occorre fissare le topologie e il concetto che si ottiene dipende dalle topologie considerate. Consideriamo ad esempio il caso semplicissimo in cui X e Y coincidono con un insieme contenente almeno due punti e $f(x) = x$ per ogni $x \in X$. Se X e Y sono dotati della stessa topologia, allora f è continua in ogni punto, ovviamente. Se invece Y è dotato della topologia banale e Y di quella discreta, allora f non è continua in alcun punto di X.

Le (I.2.6), (I.3.6) e (I.3.28) assicurano che, se la topologia considerata in un insieme X è indotta da una metrica d o, nel caso vettoriale, da una norma $\|\cdot\|$ o da una famiglia $\mathcal{F}$ di seminorme, allora sono continue rispettivamente le funzioni a valori in $\mathbb{R}$ (euclideo) date dalle formule

$$x \mapsto d(x, y), \qquad x \mapsto \|x\|, \qquad x \mapsto |x|$$

ove $y \in X$ è fissato ad arbitrio e $|\cdot|$ è una qualunque seminorma di $\mathcal{F}$. ■

Enunciamo ora due risultati, il primo dei quali è una caratterizzazione della continuità in termini di aperti (spesso assunta come definizione di continuità). Analogamente si potrebbe dare una caratterizzazione in termini di chiusi.

Proposizione 2.3. *Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \to Y$. Allora f è continua se e solo se la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di X.* ■

Teorema 2.4. *Siano X, Y e Z tre spazi topologici e $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni continue. Allora anche $g \circ f$ è continua.* ■

In modo del tutto analogo si definisce la nozione di limite di una funzione f fra due spazi topologici X e Y. La definizione viene data in modo che valga la proprietà seguente: f tende a $f(x_0)$ per x tendente a x_0 se e solo se essa è continua in x_0. Eventualmente si richiede tutto ciò solo nel caso in cui x_0 sia un punto di accumulazione di X . Nel caso opposto, nel quale si dice che x_0 è un *punto isolato* di X , la continuità di f è automatica e sta al gusto di ciascuno dare o meno la definizione di limite.

Definizione 2.5. *Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \to Y$. Si dice che f è un* omomorfismo *se f è biiettiva e se f e f^{-1} sono continue. Si dice poi che X e Y sono* omeomorfi *quando esiste un omeomorfismo $f : X \to Y$.*

*Siano (X, d') e (Y, d'') due spazi metrici e $f : X \to Y$. Si dice che f è un'*isometria *se $d''(f(x), f(z)) = d'(x, z)$ per ogni $x, z \in X$ e si dice che i due spazi sono* isometrici *quando esiste un'isometria $f : X \to Y$ che sia anche suriettiva.*

Siano V e W due spazi normati e $f : V \to W$. Si dice che f è un isomorfismo *se f è un omemomorfismo ed è anche lineare. L'isomorfismo è detto* isometrico *quando è anche un'isometria. Si dice poi che V e W sono* isomorfi *quando esiste un isomorfismo $f : V \to W$ e che V e W sono* isometricamente isomorfi *quando esiste un isomorfismo isometrico $f : V \to W$.* ■

Notiamo il fatto seguente, di verifica banale: due topologie in uno stesso insieme X coincidono se e solo se l'applicazione identica è un omeomorfismo di uno dei due spazi topologici nell'altro.

Notiamo poi che tutte le isometrie sono iniettive e che ogni isometria suriettiva è anche un omeomorfismo rispetto alle topologie indotte dalle metriche considerate.

Notiamo infine che un isomorfismo fra due spazi normati è isometrico se e solo se conserva le norme, dato che le metriche e le norme corrispondenti sono ricostruibili le une a partire dalle altre. Nel caso di spazi prehilbertiani, poi, un isomorfismo è isometrico se e solo se conserva i prodotti scalari, dato che questi e le norme corrispondenti sono ricostruibili gli uni a partire dalle altre.

3. Convergenza di una successione

Anche la nozione di convergenza di una successione ha carattere topologico e può essere data nel quadro generale che stiamo trattando.

Definizione 3.1. *Siano X uno spazio topologico, $\{x_n\}$ una successione di elementi di X e x un punto di X . Diciamo che $\{x_n\}$* converge *a x quando per ogni intorno I di x esiste un indice m tale che $x_n \in I$ per ogni $n \geq m$.* ■

Osservazione 3.2. Quando l'ambiente è anche uno spazio vettoriale oltre che uno spazio topologico, come avviene ad esempio nel caso degli spazi normati, abbiamo sia la nozione di somma che quella di limite e possiamo definire il concetto di *serie* come limite della successione delle somme parziali.

Osservazione 3.3. Consideriamo la retta estesa $X = [-\infty, +\infty]$ e, usando il Teorema I.1.8, introduciamo in X l'unica topologia che ha le seguenti basi di intorni: se $x \in \mathbb{R}$ denotiamo con $\mathcal{B}(x)$ l'insieme costituito dagli intervalli aperti (a, b) che contengono x ; denotiamo con $\mathcal{B}(+\infty)$ l'insieme degli intervalli del tipo $(a, +\infty]$ con $a \in \mathbb{R}$; denotiamo infine con $\mathcal{B}(-\infty)$ l'insieme degli intervalli del tipo $[-\infty, b)$ con $b \in \mathbb{R}$. Allora la successione data dalla formula $x_n = n$ converge a $+\infty$ nella topologia considerata e la cosa si generalizza: tutte le successioni reali divergenti a $+\infty$ o a $-\infty$ nel senso elementare comune ora convergono. ∎

Anche per quanto riguarda la definizione di convergenza di una successione possiamo limitarci a considerare solo basi di intorni anziché le intere famiglie degli intorni. Ciò è particolarmente utile quando la topologia è indotta da altre strutture, nel qual caso vi sono basi di intorni privilegiate legate alla struttura preesistente. Queste considerazioni conducono a dimostrazioni semplici dei risultati dati di seguito, nei quali la convergenza di una successione è espressa in termini di convergenza a 0 di successioni di numeri reali.

Proposizione 3.4. *Siano (X,d) uno spazio metrico, $\{x_n\}$ una successione di elementi di X e $x \in X$. Allora $\{x_n\}$ converge a x se e solo se* $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$. ∎

Proposizione 3.5. *Siano V uno spazio vettoriale, $\mathcal{F}$ una famiglia di seminorme in V, $\{x_n\}$ una successione di elementi di V e $x \in V$. Allora $\{x_n\}$ converge a x nella topologia indotta da $\mathcal{F}$ se e solo se* $\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$ *per ogni seminorma $|\cdot|$ della famiglia $\mathcal{F}$.* ∎

Il caso degli spazi normati rientra in entrambi i risultati enunciati. In tal caso la condizione di convergenza diventa $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Esempio 3.6: lo spazio $C^0[a,b]$ (seguito). Consideriamo, in particolare, lo spazio $V = C^0[a,b]$, restando inteso che la topologia è quella indotta dalla norma (I.3.8) del massimo. Allora una successione $\{v_n\}$ di elementi di V converge all'elemento $v \in V$ se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \max\{|v_n(t) - v(t)| : \ 0 \le t \le 1\} = 0. \tag{3.1}$$

Siccome la condizione (3.1) coincide con la convergenza uniforme, si usa dire che la topologia naturale di $C^0[a,b]$ è quella della convergenza uniforme.

Esempio 3.7: lo spazio $C^0(a,b)$ (seguito). Consideriamo invece lo spazio $V = C^0(a,b)$ con la sua topologia naturale introdotta nell'Esempio I.3.25. In questo caso la Proposizione 3.5 dice che la convergenza coincide con la convergenza uniforme su ogni intervallo chiuso e limitato incluso in (a,b). Per questo motivo si usa dire che la topologia naturale di $C^0(a,b)$ è quella della convergenza uniforme sugli intervalli chiusi e limitati.

Esempio 3.8: lo spazio $C^\infty(a,b)$ (seguito). Riprendiamo l'Esempio I.3.29. La convergenza in questo spazio localmente convesso significa allora convergenza uniforme della successione di funzioni e di quelle delle derivate di ogni ordine in tutti gli intervalli chiusi e limitati inclusi in (a,b). Notiamo che, nel caso particolare $(a,b) = (-r,r)$ con $r > 0$ finito o meno, proprio in questo senso convergono tutte le serie di potenze aventi r come raggio di convergenza.

4. La separazione di Hausdorff

Se si tenta di dimostrare un teorema di unicità del limite di una successione in un generico spazio topologico si trova un ostacolo. In effetti un risultato competamente generale di questo tipo è falso e per convincersi basta pensare al caso di uno spazio X con la topologia banale: ogni successione converge a ogni punto dello spazio.

Definizione 4.1. *Si dice che uno spazio topologico X è uno spazio di Hausdorff quando verifica la proprietà seguente, detta di separazione di Hausdorff: per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esistono un intorno di x e un intorno di y fra loro disgiunti.* ∎

Esistono altre proprietà di separazione, alcune più deboli di quella di Hausdorff, altre più forti, ma noi non le prenderemo in considerazione. Per questo motivo parleremo spesso di *spazi topologici separatati*, intendendo con ciò gli spazi di Hausdorff, senza timore di ambiguità.

Proposizione 4.2. *Ogni spazio topologico metrizzabile è separato.* ∎

Cenno della dimostrazione. Se $x \neq y$, posto $r = d(x, y)$, si considerano le palle $B_{r/2}(x)$ e $B_{r/2}(y)$. ∎

In particolare sono separati gli spazi normati e, ancora più in particolare, quelli prehilbertiani. Per il caso localmente convesso, invece, abbiamo il risultato che segue.

Proposizione 4.3. *Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{F}$ una famiglia di seminorme in V. Allora $\mathcal{F}$ induce una topologia di Hausdorff se e solo se $\mathcal{F}$ è separata, cioè verifica la condizione seguente: per ogni $x \neq 0$ esiste una seminorma $|\cdot|$ della famiglia $\mathcal{F}$ tale che $|x| > 0$.* ∎

Cenno della dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ separata e siano $x, y \in V$ distinti. Scelta una seminorma $|\cdot| \in \mathcal{F}$ che non si annulla su $x - y$ e posto $r = |x - y|$, sono disgiunti i due intorni $\{z : \ |z - x| < r/2\}$ e $\{z : \ |z - y| < r/2\}$.

Viceversa, la topologia sia di Hausdorff e sia $x \neq 0$. Allora esiste un intorno I di 0 che non contiene x. Ma $I \supseteq \{y : \ |y|_i < r, \ i = 1, \ldots, m\}$ per certe seminorme $|\cdot|_i \in \mathcal{F}$ e un certo $r > 0$. Allora una di queste seminorme non si annulla su x. ∎

Teorema 4.4. *Siano X uno spazio di Hausdorff e $\{x_n\}$ una successione di punti di X convergente a un punto x di X. Allora $\{x_n\}$ non converge ad alcun punto $y \in X$ diverso da x.* ∎

Cenno della dimostrazione. Per assurdo, la successione converga anche a $y \neq x$. Presi due intorni di x e di y fra loro disgiunti e applicata la Definizione 3.1, si arriva subito a una contraddizione. ∎

Il risultato precedente ci autorizza a parlare *del limite* della successione e a usare la notazione abituale $\lim_{n\to\infty} x_n$. Questo simbolo non ha significato se la successione non converge e denota l'unico limite in caso di convergenza. Nel caso di uno spazio normato (o più in generale di uno spazio localmente convesso separato) possiamo analogamente parlare *della somma di una serie* e usare il simbolo $\sum_n x_n$ per denotarla.

Nel caso del limite di una funzione $f : X \to Y$ si ha una situazione analoga: per avere unicità del limite di $f(x)$ al tendere di x a un punto x_0, oltre a richiedere che x_0 sia un punto di accumulazione per X, dobbiamo imporre a Y di essere uno spazio di Hausdorff.

5. Due costruzioni canoniche

Ci limitiamo al caso del sottospazio e a quello del prodotto di due spazi. Naturalmente poi, per iterazione, si arriva al prodotto di un numero finito di spazi. Il caso del prodotto di infiniti spazi, invece, non verrà trattato.

Partendo dal caso del sottospazio, supponiamo di avere uno spazio topologico X e un suo sottoinsieme non vuoto X_0. Per ogni $x \in X_0$ consideriamo la famiglia costituita da tutte le intersezioni $I \cap X_0$ ottenuta facendo variare I fra gli intorni di X. Non è difficile verificare che in tal modo si ottiene una topologia per X_0.

Definizione 5.1. *Siano $(X, \mathcal{I})$ uno spazio topologico e X_0 un sottoinsieme non vuoto di X. Chiamiamo topologia indotta da $\mathcal{I}$ su X_0 la topologia $\mathcal{I}_0$ definita dalla condizione seguente: se $x \in X_0$ e $I_0 \subseteq X_0$, diciamo che $I_0 \in \mathcal{I}_0(x)$ se e solo se esiste $I \in \mathcal{I}(x)$ tale che $I_0 = I \cap X_0$.* ∎

Quando X_0 è munito della topologia indotta si dice che X_0 è un sottospazio dello spazio topologico dato. Si vede poi facilmente che la stessa costruzione fatta a partire da basi di intorni porta a basi di intorni per la topologia indotta.

Esempio 5.2. Consideriamo l'intervallo $[0, 1]$ e costruiamo la topologia indotta su di esso dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}$. Essa è quella che ha le seguenti basi di intorni: se $x \in (0, 1)$ una base di intorni di x si ottiene prendendo tutti gli intervalli aperti che contengono x e sono inclusi in $(0, 1)$; una base di intorni di 0 è costituita da tutti gli intervalli del tipo $[0, b)$ con $0 < b < 1$; una base di intorni di 1 è costituita da tutti gli intervalli del tipo $(a, 1]$ con $0 < a < 1$.

Esempio 5.3. Consideriamo la retta estesa introdotta nell'Osservazione 3.3. Allora la topologia indotta su $\mathbb{R}$ è la topologia euclidea.

Osservazione 5.4. Di particolare interesse sono i casi di spazi topologici la cui topologia è indotta da altre strutture. Per tali spazi gradiremmo esprimere la topologia indotta su un sottoinsieme direttamente in termini della struttura preesistente. Iniziamo dal caso degli spazi metrici.

Se (X, d) è uno spazio metrico e X_0 è un sottoinsieme non vuoto di X, si vede subito che la restrizione d_0 di d a X_0^2, cioè la funzione $(x, y) \mapsto d(x, y)$, $x, y \in X_0$, è una metrica in X_0. Denotiamo con $\mathcal{I}$ la topologia in X indotta da d. Ebbene la topologia indotta in X_0 dalla metrica d_0 coincide con la topologia indotta su X_0 dalla topologia $\mathcal{I}$.

Considerazioni sostanzialmente identiche si possono fare nel caso degli spazi normati, prehilbertiani, localmente convessi: la sola precauzione aggiuntiva è che il sottoinsieme deve essere un sottospazio vettoriale, dato che senza questa struttura non possiamo parlare di norme, prodotti scalari, seminorme. Così, se si prende un sottoinsieme di uno spazio normato che non sia un sottospazio vettoriale si ottiene solo uno spazio metrico e non più uno spazio normato. Se invece V è uno spazio vettoriale, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ è un prodotto scalare in V e V_0 è un sottospazio vettoriale di V, allora la topologia naturale di V_0 è quella indotta dal prodotto scalare che si ottiene prendendo il prodotto scalare (x,y) limitatamente al caso $x,y\in V_0$. ■

Naturalmente il discorso andrebbe sviluppato e occorrerebbe descrivere ad esempio gli aperti e i chiusi della topologia di sottospazio, riprendere la continuità e la convergenza di successioni e verificare se proprietà notevoli (come la separazione) dello spazio di partenza implicano analoghe proprietà del sottospazio: ad esempio si vede subito che un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è esso stesso di Hausdorff. Ma tutte queste cose non riservano particolari sorprese, per cui sostanzialmente soprassediamo e ci limitiamo a osservare che gli aperti della topologia che X induce sul sottoinsieme X_0 sono esattamente le intersezioni di X_0 con i vari aperti di X. In riferimento all'Esempio 5.2, abbiamo così che $[0,1/2)$ è una aperto di $[0,1]$ mentre $[0,1/2]$ non lo è. ■

Passiamo al caso del prodotto di due spazi topologici $(X',\mathcal{I}')$ e $(X'',\mathcal{I}'')$. La topologia prodotto è la topologia naturale che si introduce nel prodotto cartesiano $X=X'\times X''$ e si procede come segue. Fissiamo un punto $x=(x',x'')$ di X e consideriamo tutti i prodotti $I'\times I''$ ottenuti al variare di I' in $\mathcal{I}'(x')$ e di I'' in $\mathcal{I}''(x'')$. Se però ci si limita a operare come si è detto non si ottiene una topologia: ad esempio la proprietà (I.1.3) sarà in generale falsa. Questa costruzione, tuttavia, porta a famiglie $\mathcal{B}(x)$ nelle condizioni del Teorema I.1.8. Ecco allora che possiamo dare le definizione seguente:

Definizione 5.5. *Siano $(X',\mathcal{I}')$ e $(X'',\mathcal{I}'')$ due spazi topologici. Si chiama topologia prodotto delle due topologie $\mathcal{I}'$ e $\mathcal{I}''$ la topologia in $X'\times X''$ che gode della proprietà seguente: per ogni $x'\in X'$ e $x''\in X''$ una base di intorni di (x',x'') è costituita da tutti i prodotti $I'\times I''$ ottenuti facendo variare I' in $\mathcal{I}'(x')$ e di I'' in $\mathcal{I}''(x'')$.*

Quando il prodotto cartesiano $X'\times X''$ è munito di tale topologia, si dice che esso è il prodotto degli spazi topologici dati. ■

Alla stessa topologia si arriva se, anziché le intere famiglie di intorni, si prendono solo basi di intorni per i punti generici x' e x'' che intervengono nella definizione.

Esempio 5.6: lo spazio euclideo (seguito). Se $n=n'+n''$ con n',n'' interi positivi, allora possiamo vedere $\mathbb{R}^n$ come il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^{n'}\times\mathbb{R}^{n''}$. Ebbene la topologia prodotto delle due topologie euclidee di $\mathbb{R}^{n'}$ e di $\mathbb{R}^{n''}$ è proprio la topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$. ■

Anche per questa costruzione occorrerebbe qualche approfondimento. Noi ci limitiamo a poche cose di facile verifica: il prodotto $X=X'\times X''$ di due spazi di Hausdorff X' e X'' è di Hausdorff; le applicazioni $(x',x'')\mapsto x'$ e $(x',x'')\mapsto x''$ da X in X' e in X'' rispettivamente, dette proiezioni canoniche, sono continue; per ogni $x'\in X'$ è continua da X'' in X l'applicazione $x''\mapsto(x',x'')$ e per ogni $x''\in X''$ è continua da X' in X l'applicazione $x'\mapsto(x',x'')$. Quelche dettaglio in più lo riserviamo al caso degli spazi metrici, normati, prehilbertiani.

Supponiamo che le topologie di X' e X'' siano indotte dalle due metriche d' e d'' rispettivamente. Allora la topologia prodotto è indotta dalla metrica d definita dalla formula

$$d((x', x''), (y', y'')) = d'(x', y') + d''(x'', y''). \tag{5.1}$$

Metriche equivalenti a questa si ottengono prendendo il massimo anziché la somma nel secondo membro, oppure prendendo la radice della somma dei quadrati. Dunque si vede che non vi è una metrica privilegiata nel prodotto.

Lo stesso discorso si ripete nel caso di spazi normati. Se le topologie in due spazi vettoriali V' e V'' sono indotte dalle due norme $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ rispettivamente, allora la topologia prodotto è indotta dalla norma $\|\cdot\|$ definita dalla formula

$$\|(x', x'')\| = \|x'\|' + \|x''\|'' \tag{5.2}$$

e anche in questo caso possiamo prendere, ad esempio, il massimo oppure la radice della somma dei quadrati: si ottiene ancora la topologia prodotto.

Le cose cambiano leggermente nel caso prehilbertiano, per trattare il quale denotiamo momentaneamente con $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ le coppie, riservando la notazione $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ per il prodotto scalare. Se le topologie in due spazi vettoriali V' e V'' sono indotte dai due prodotti scalari $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)'$ e $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)''$, allora la topologia prodotto è indotta dal prodotto scalare $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ definito dalla formula

$$(\,[x', y'], [x'', y'']\,) = (x', y')' + (x'', y'')''. \tag{5.3}$$

Si noti che, prendendo $y' = x'$ e $y'' = x''$, si ottengono i legami fra le norme

$$\|(x', x'')\|^2 = (\|x'\|')^2 + (\|x''\|'')^2$$

il che dice che in questo caso vi è una norma privilegiata. ■

Usiamo la nozione di prodotto per precisare la nozione di spazio vettoriale topologico e riprendere l'Osservazione I.3.20. Nella definizione che segue è inteso che gli spazi V^2 e $\mathbb{R} \times V$ sono muniti delle topologie prodotto.

Definizione 5.7. *Uno spazio vettoriale topologico è uno spazio vettoriale V munito di una topologia di Hausdorff verificante la condizione seguente: le applicazioni*

$$(x, y) \mapsto x + y, \quad x, y \in V, \qquad e \qquad (c, x) \mapsto cx, \quad c \in \mathbb{R},\ x \in V,$$

sono continue da V^2 in V e da $\mathbb{R} \times V$ in V rispettivamente. ■

Proposizione 5.8. *Sia V uno spazio vettoriale topologico. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: (i) ogni punto ha una base di intorni convessi; (ii) l'origine ha una base di intorni convessi; (iii) esiste una famiglia di seminorme che induce la topologia.* ■

Cenno della dimostrazione. L'equivalenza delle prime due condizioni è ovvia e il fatto che la terza implica le altre è stato chiarito nell'Osservazione I.3.20. Rimane da vedere la parte difficile: la (ii) implica la (iii). La procedura può essere la seguente. A partire da una base $\mathcal{B}$ di intorni convessi di 0 si costruisce un'altra base $\mathcal{B}'$ di intorni convessi di 0 che sono anche aperti e simmetrici. Per $B \in \mathcal{B}'$ si considera il cosiddetto funzionale di Minkowski di B definito dalla formula

$$|x|_B = \inf \{\lambda > 0 : \ x/\lambda \in B\}$$

e, sfruttando le proprietà di B, si verifica che esso è una seminorma e che B è l'insieme dei punti x tali che $|x|_B < 1$. Si prende allora la famiglia $\mathcal{F} = \{|\cdot|_B : \ B \in \mathcal{B}'\}$ e si controlla che questa genera la topologia data verificando che la base di intorni dell'origine naturalmente associata a $\mathcal{F}$ e $\mathcal{B}'$ verificano le condizioni dell'Osservazione I.1.9. Il fatto che V è uno spazio vettoriale topologico viene sfruttato in vari punti della costruzione, ad esempio per garantire che l'interno di un convesso è esso stesso convesso. ∎

6. Basi numerabili di intorni

Una categoria notevole di spazi topologici è quella dei cosiddetti spazi a basi numerabili di intorni. Per spazi di questo tipo le proprietà topologiche si possono esprimere per mezzo delle successioni.

Definizione 6.1. *Diciamo che uno spazio topologico è uno spazio a basi numerabili di intorni quando ogni suo punto ha una base di intorni al più numerabile.* ∎

Sono a basi numerabili di intorni tutti gli spazi metrizzabili, in particolare gli spazi normati e, ancora più in particolare, gli spazi prehilbertiani. Il caso localmente convesso, invece, riserva qualche sorpresa. In generale abbiamo il risultato seguente:

Proposizione 6.2. *Sia V uno spazio localmente convesso separato. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: (i) V è uno spazio a base numerabile di intorni; (ii) l'origine ha una base numerabile di intorni; (iii) esiste una famiglia numerabile di seminorme che induce la topologia; (iv) la topologia è metrizzabile.* ∎

Si può precisare meglio il caso in cui sono soddisfatte le condizioni del risultato precedente: una metrica che induce la topologia è data dalla formula

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varphi(|x-y|_k) \tag{6.1}$$

ove $\{|\cdot|_k\}$ è una famiglia numerabile di seminorme di cui al punto (iii) e φ è una qualunque funzione $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ limitata, continua, concava, strettamente crescente e tale che $\varphi(0) = 0$.

Notiamo che sono in queste condizioni tutti gli spazi localmente convessi che abbiamo introdotto nei vari esempi (I.3.6 e successivi).

Notiamo infine che vale un risultato molto più generale: *uno spazio vettoriale topologico è metrizzabile se e solo se è a basi numerabili di intorni*. ∎

Come abbiamo detto all'inizio del paragrafo, la categoria di spazi topologici che stiamo esaminando è importante perché i concetti topologici si possono esprimere per mezzo delle successioni. Ci limitiamo a qualche risultato di facile dimostrazione.

Proposizione 6.3. *Sia X uno spazio a basi numerabili di intorni. Allora un punto $x \in X$ è di accumulazione per X se e solo se esiste una successione di elementi di $X \setminus \{x\}$ che converge a x.* ■

Proposizione 6.4. *Sia X uno spazio a basi numerabili di intorni. Allora un sottoinsieme C di X è chiuso se solo se vale la condizione seguente: se $\{x_n\}$ è una successione di elementi di C convergente a un punto $x \in X$, allora x appartiene a C.* ■

Proposizione 6.5. *Sia X uno spazio a basi numerabili di intorni. Allora un sottoinsieme E di X è denso se solo se vale la condizione seguente: per ogni $x \in X$ esiste una successione $\{x_n\}$ di elementi di E convergente a x.* ■

Definizione 6.6. *Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \to Y$. Diciamo che f è continua per successioni, o sequenzialmente continua, quando vale la condizione seguente: dalla convergenza di $\{x_n\}$ a x nella topologia di X segue la convergenza di $\{f(x_n)\}$ a $f(x)$ nella topologia di Y.* ■

Si vede facilmente che la continuità implica la continuità sequenziale. Il viceversa, invece, è falso in generale, anche se non è banale costruire un controesempio. Abbiamo però i risultati enunciati di seguito. Il primo si dimostra facilmente e il secondo (che sarebbe falso senza l'ipotesi imposta sulle topologie) si ottiene semplicemente applicando il primo alla funzione identità e poi scambiando il ruolo delle due topologie.

Proposizione 6.7. *Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \to Y$. Se X è a basi numerabili di intorni allora f è continua se e solo se è continua per successioni.* ■

Corollario 6.8. *Sia X un insieme non vuoto e si considerino in X due topologie. Se ciascuna di queste è a basi numerabili di intorni, allora esse coincidono se e solo se inducono lo stesso concetto di convergenza delle successioni.* ■

Ribadiamo che l'ipotesi che entrambe le topologie siano a basi numerabili di intorni fatta nel corollario è essenziale e che il caso metrizzabile rientra. Il corollario implica allora il fatto seguente: se due topologie inducono la stessa nozione di convergenza delle successioni e sono diverse fra loro, allora almeno una di esse non può essere metrizzabile.

Capitolo III

Completezza

La nozione di completezza non può essere data nell'ambito generale degli spazi topologici. Anche se è possibile parlare di completezza di uno spazio vettoriale topologico, noi ci limitiamo al caso degli spazi metrici.

1. Spazi metrici completi

Siano (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n\}$ una successione di elementi di X. Supponiamo per un istante che la successione converga a un certo punto $x \in X$. Allora si vede facilmente che vale la condizione seguente:

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \quad \text{esiste } m \text{ tale che} \quad d(x_{n'}, x_{n''}) \le \varepsilon \quad \text{per ogni } n', n'' \ge m. \tag{1.1}$$

Il problema principale che ci si pone è il seguente: la condizione (1.1), necessaria per la convergenza, è anche sufficiente? La risposta è negativa.

Definizione 1.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Si dice che una successione $\{x_n\}$ di elementi di X è una successione di Cauchy quando verifica la condizione* (1.1). ■

Definizione 1.2. *Uno spazio metrico (X, d) è completo quando tutte le successioni di Cauchy di elementi di X convergono in X.* ■

Tenendo conto di quanto è stato detto all'inizio del paragrafo abbiamo che: *gli spazi metrici completi sono quelli nei quali la classe delle successioni convergenti coincide con quella delle successioni di Cauchy*.

Teorema 1.3. *La retta reale $\mathbb{R}$ è completa rispetto alla metrica euclidea.* ■

Questo risultato è strettamente connesso con l'altra ben nota proprietà di completezza di $\mathbb{R}$: ogni sottoinsieme non vuoto e limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo inferiore e estremo superiore. ■

Va notato subito che la completezza non è un concetto topologico e dipende dalla metrica precisa che si considera. Infatti può accadere che due metriche in uno stesso insieme X siano topologicamente equivalenti e che X risulti completo rispetto a una sola delle due, come mostra l'esempio successivo. Allo stesso modo possiamo dire che

$$\textit{uno spazio isometrico a uno completo è completo} \tag{1.2}$$

mentre un omeomorfismo può non conservare la completezza.

L'idea è la seguente: se le due metriche sono topologicamente equivalenti, allora esse danno la stessa nozione di convergenza. Ma esse possono non dare la stessa nozione di successione di Cauchy. Se ciò avviene e se X è completo rispetto a una delle metriche considerate, allora X non può essere completo rispetto all'altra.

Una condizione sufficiente perché le classi delle successioni di Cauchy rispetto a due metriche coincidano è la (I.2.7). La stessa condizione, dunque, assicura che la completezza rispetto a una delle due metriche implica quella rispetto all'altra.

Esempio 1.4. Consideriamo la retta reale con le due metriche seguenti: d è la metrica euclidea e d' è quella definita dalla formula

$$d'(x,y) = |\arctan x - \arctan y|.$$

Allora $(\mathbb{R}, d)$ è completo, $(\mathbb{R}, d')$ non lo è e le due metriche inducono la stessa topologia, come ora mostriamo.

La prima affermazione è data dal Teorema 1.3. Per giustificare le altre due notiamo che una successione $\{x_n\}$ converge rispetto alla metrica d' se e solo se la successione $\{\arctan x_n\}$ converge nella topologia euclidea dell'intervallo aperto $(-\pi/2, \pi/2)$. Allora, siccome le funzioni $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi, \pi/2)$ e la sua inversa sono continue (rispetto alla topologia euclidea), abbiamo un omeomorfismo e le due metriche inducono la stessa topologia e la stessa nozione di convergenza delle successioni. D'altra parte, una successione $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto alla metrica d' se e solo se la successione $\{\arctan x_n\}$ è di Cauchy rispetto alla metrica euclidea dell'intervallo aperto $(-\pi/2, \pi/2)$. Siccome la successione $\{\arctan n\}$ converge a $\pi/2$ in senso euclideo e quindi è di Cauchy in tal senso, deduciamo che la successione definita dalla formula $x_n = n$ è di Cauchy rispetto alla metrica d' e non converge in tale metrica. Naturalmente essa non è di Cauchy rispetto alla metrica euclidea. ■

Gli spazi metrici completi sono spazi "ricchi di elementi". L'idea intuitiva è la seguente. Immaginiamo di partire da uno spazio metrico completo e da un suo punto di accumulazione x. Allora, per la Proposizione II.6.3, esiste una successione $\{x_n\}$ di elementi di $X \setminus \{x\}$ che converge a x. Tale successione è di Cauchy, per quanto abbiamo detto all'inizio del paragrafo. Ora togliamo x da X. Resta il fatto che la successione considerata è di Cauchy, ma ora tale successione non converge più.

Gli spazi metrici non completi, tuttavia, possono essere completati "aggiungendo i limiti" delle successioni di Cauchy che non convergono, e ciò può essere fatto in modo "unico". Abbiamo naturalmente usato più volte le virgolette, dato che ad esempio l'aggiunta comporta una costruzione opportuna, che rispetti tutti i crismi del rigore. Il tutto è precisato nel risultato successivo.

Teorema 1.5. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Allora esiste uno spazio metrico (X',d') con le due proprietà seguenti: (i) (X',d') è completo; (ii) esiste un'isometria $f : X \to X'$ tale che $f(X)$ sia denso in X'.*

Inoltre, se (X'',d'') è un altro spazio nelle stesse condizioni, allora (X',d') e (X'',d'') sono isometrici. ■

I due risultati che seguono si riferiscono al "trasporto" della proprietà di completezza tramite le costruzioni canoniche che abbiamo introdotto nel Paragrafo V.5.

Teorema 1.6. *Siano* (X, d) *uno spazio metrico completo,* X_0 *un sottoinsieme di* X *e* d_0 *la restrizione di* d *a* X_0^2 *. Allora* (X_0, d_0) *è uno spazio metrico completo se e solo se* X_0 *è un sottoinsieme chiuso di* X *.* ■

Cenno della dimostrazione. Si usa la Proposizione II.6.4. ■

Osservazione 1.7. Il dettaglio della dimostrazione mostra però che la completezza dello spazio ambiente X è sfruttata solo per dedurre la completezza di X_0 a partire dal fatto che X_0 è un chiuso. Allora ogni sottospazio completo è necessariamente chiuso anche quando lo spazio ambiente non è completo.

Teorema 1.8. *Il prodotto di due spazi metrici completi è uno spazio metrico completo rispetto alla metrica* (II.5.1) *indotta dalle metriche degli spazi dati.* ■

La metrica (II.5.1) può essere sostituita da una delle varianti segnalate, che sono legate alla (II.5.1) dalla (I.2.7). La dimostrazione del risultato precedente si fonda essenzialmente sul confronto fra la nozione di convergenza nel prodotto e quella di convergenza negli spazi di partenza e sul confronto fra le corrispondenti nozioni di successione di Cauchy. Per la convergenza abbiamo

$$\begin{aligned}&\{(x'_n, x''_n)\} \text{ converge a } (x', x'') \text{ in } X' \times X'' \text{ se e solo se}\\ &\{x'_n\} \text{ converge a } x' \text{ in } X' \text{ e } \{x''_n\} \text{ converge a } x'' \text{ in } X''\end{aligned} \tag{1.3}$$

e un analoga equivalenza vale per le condizioni di Cauchy. ■

La completezza è una proprietà importante e ricca di conseguenze. Qui ci limitiamo a enunciare il cosiddetto Teorema delle contrazioni di Banach.

Teorema 1.9. *Siano* (X, d) *uno spazio metrico completo e* $f : X \to X$ *tale che*

$$\textit{esiste } \alpha \in (0,1) \textit{ tale che } \quad d(f(x), f(y)) \le \alpha\, d(x, y) \quad \textit{per ogni } x, y \in X. \tag{1.4}$$

Allora l'equazione $f(x) = x$ *ha in* X *una e una sola soluzione* x^* *. Inoltre, se la successione* $\{x_n\}$ *è definita per ricorrenza dalla formula* $x_{n+1} = f(x_n)$ *a partire da un punto* $x_0 \in X$ *arbitrario, allora essa converge a* x^* *.* ■

Cenno della dimostrazione. L'unicità è conseguenza immediata della (1.4). Per dimostrare tutto il resto dell'enunciato si parte da un punto $x_0 \in X$ e si definisce la successione $\{x_n\}$. Si dimostra che questa è di Cauchy sfruttando la (1.4) e si conclude, usando la completezza, che essa converge a un punto $x^* \in X$. Siccome la (1.4) implica che f è continua, si deduce facilmente che x^* risolve l'equazione $f(x) = x$. ■

Il nome attribuito al teorema è dovuto al fatto che un'applicazione verificante la (1.4) è detta *contrazione*. Notiamo che le soluzioni dell'equazione $f(x) = x$ sono detti *punti fissi di* f , per cui il teorema enunciato rientra nella categoria dei teoremi di punto fisso. Teoremi di questo tipo hanno applicazioni nei campi più svariati della matematica.

2. Spazi di Banach, di Hilbert, di Fréchet

Definizione 2.1. *Uno spazio di Banach è uno spazio normato che è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma e uno spazio di Hilbert è uno spazio prehilbertiano che è di Banach rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare.* ∎

Osservazione 2.2. Grazie al Teorema I.3.3, abbiamo che la condizione (I.2.7) è automaticamente soddisfatta se le distanze sono quelle indotte da due norme topologicamente equivalenti, per cui la nozione di completezza diventa "più topologica": essa riguarda infatti solo la topologia se ci si limita a considerare metriche indotte da norme che inducono la topologia data.

Teorema 2.3. *Uno spazio normato* $(V, \|\cdot\|)$ *è uno spazio di Banach se e solo se vale la condizione seguente: data comunque una successione* $\{x_n\}$ *di* V *tale che* $\sum_n \|v_n\|$ *converga, converge in* V *la serie* $\sum_n v_n$ *.* ∎

Cenno della dimostrazione. Si osserva preliminarmente che la condizione di Cauchy per la successione delle ridotte di una serie del tipo $\sum_n x_n$ si può esprimere nella forma seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m tale che

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right\| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq m \text{ e per ogni } p > 0\,.$$

Allora la necessità della condizione data nell'enunciato si dimostra facilmente confrontando la condizione di Cauchy per la serie considerata con la condizione di Cauchy per la serie delle norme.

Più complessa è la sufficienza. Si osserva che perché una successione di Cauchy converga è sufficiente che essa abbia una sottosuccessione convergente. Allora, data una successione $\{x_n\}$ di Cauchy, con un procedimento ricorsivo si costruiscono gli indici crescenti n_k in modo che $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ per ogni k e si applica la condizione dell'enunciato alla serie di termine generale $x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Questo porta alla convergenza della sottosuccessione costruita. ∎

Il caso localmente convesso è più complicato e merita qualche considerazione aggiuntiva. Supponiamo che V sia uno spazio localmente convesso metrizzabile. Allora, per il Teorema II.6.2, esiste una famiglia numerabile di seminorme che induce la topologia e una metrica che induce la stessa topologia è data dalla (II.6.1). Ebbene, se si prendono due famiglie numerabili e topologicamente equivalenti di seminorme, le due metriche che si ottengono non verificano necessariamente la condizione (I.2.7). Dunque occorre cautela e si può procedere come segue.

Data una famiglia $\mathcal{F}$ di seminorme che induce la topologia, diciamo che una successione $\{x_n\}$ è di Cauchy rispetto a $\mathcal{F}$ quando, per ogni seminorma $|\cdot|$ di $\mathcal{F}$, vale la condizione

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \quad \text{esiste } m \text{ tale che} \quad |x_{n'} - x_{n''}| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } n', n'' \geq m. \qquad (2.1)$$

Usando la condizione (I.3.30) data dal Teorema I.3.23, non è difficile controllare che due famiglie di seminorme che inducono la stessa topologia inducono anche la stessa nozione di successione di Cauchy. D'altra parte, fissata una famiglia numerabile $\mathcal{F}$ di seminorme e considerata la metrica d data dalla (II.6.1) in corrispondenza a una scelta ammissibile della funzione φ, si vede che la condizione di Cauchy rispetto alla metrica d equivale alla condizione di Cauchy rispetto alla famiglia $\mathcal{F}$ di seminorme considerata. Allora la nozione di successione di Cauchy è la stessa per tutte le metriche ottenute mediante la (II.6.1) a partire da famiglie numerabili di seminorme che inducono la topologia e da funzioni φ ammissibili e ha senso la definizione data di seguito.

Definizione 2.4. *Uno spazio di Fréchet è uno spazio localmente convesso, metrizzabile e completo rispetto alla metrica* (II.6.1), *ove* $\{|\cdot|_k\}$ *è una famiglia numerabile di seminorme di che induce la topologia e* $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *è una funzione limitata, continua, concava, strettamente crescente e tale che* $\varphi(0) = 0$. ■

Naturalmente, nei casi concreti, sono più maneggevoli le famiglie di seminorme rispetto alla metrica. Così, in riferimento all'Esempio I.3.25, una successione $\{v_n\}$ di elementi di $C^0(a,b)$ è di Cauchy se e solo se, per ogni intervallo K chiuso e limitato incluso in (a,b), vale la condizione: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m tale che $|v_{n'} - v_{n''}|_{\infty,K} \leq \varepsilon$ per ogni $n', n'' \geq m$, ove si è utilizzata la notazione (I.3.31).

Osservazione 2.5. I risultati del paragrafo precedente hanno corrispondenti per spazi di Banach e di Hilbert. Così il completamento di uno spazio normato è di Banach e il completamento di uno spazio prehilbertiano è di Hilbert.

Un commento particolare merita invece il Teorema 1.6. Se V è uno spazio di Banach oppure di Hilbert e se V_0 è un suo sottospazio vettoriale che sia anche un sottoinsieme chiuso, allora V_0 è esso stesso uno spazio di Banach o, rispettivamente, di Hilbert, naturalmente rispetto alla restrizione della norma o del prodotto scalare.

Se invece X_0 è solo un sottoinsieme chiuso ma non un sottospazio vettoriale, allora viene persa la possibilità di parlare di norme e di prodotti scalari in X_0, ma resta il fatto che X_0 è uno spazio metrico completo rispetto alla metrica naturale.

Teorema 2.6. *Ogni spazio normato di dimensione finita è di Banach. Esso risulta uno spazio di Hilbert rispetto a una norma equivalente.* ■

Cenno della dimostrazione. Il risultato si dimostra facilmente combinando i risultati precedenti I.3.4, 1.3 e 1.8. ■

Il risultato vale, in particolare, per lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Segue inoltre che, se V è uno spazio di Banach e V_0 è un suo sottospazio vettoriale di dimensione finita, allora V_0 è anche chiuso.

Notiamo più in generale che la topologia di ogni spazio localmente convesso separato di dimensione finita è indotta da una norma, per cui, di fatto, ogni spazio di quel tipo è sostanzialmente uno spazio di Banach, anzi di Hilbert per una norma equivalente.

3. Spazi funzionali importanti

Il discorso cambia radicalmente per quanto riguarda gli spazi normati o localmente convessi di dimensione infinita: non tutti sono completi e non tutti i loro sottospazi sono chiusi. Fra gli spazi importanti vi sono gli spazi funzionali introdotti precedentemente, per i quali abbiamo parlato spesso di topologie naturali: esse sono le topologie che assicurano la completezza.

Esempio 3.1: lo spazio $C^0[a,b]$ (seguito). Lo spazio $C^0[a,b]$ dell'Esempio I.3.6 è di Banach rispetto alla sua norma naturale, cioè alla norma del massimo data dalla formula (I.3.8) (o a una qualunque delle norme equivalenti), e considerazioni analoghe valgono per lo spazio $C^0(K)$, ove K è come nell'esempio citato.

La dimostrazione della completezza può basarsi sul Teorema 2.3 e sui ben noti risultati classici sulle serie di funzioni continue: il Criterio di Weierstrass sulla convergenza uniforme e la continuità della somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue.

Al contrario, $C^0[a,b]$ non è completo rispetto a nessuna delle norme introdotte nell'Esempio I.3.7 e non equivalenti alla norma del massimo.

Esempio 3.2: lo spazio $C^1[a,b]$ (seguito). Lo spazio $C^1[a,b]$ dell'Esempio I.3.8 è di Banach rispetto alla sua norma naturale, cioò a quella data dalla (I.3.11). Più in generale sono completi gli spazi $C^k(\overline{\Omega})$ (si vedano gli Esempi I.3.9 e I.3.10) rispetto alle loro norme naturali.

La proprietà di completezza di questi spazi coincide sostanzialmente con il risultato ben noto di derivazione del limite: se una successione di funzioni di classe C^1 converge uniformemente con quella delle sue derivate, allora il limite è di classe C^1 e la sua derivata è il limite delle derivate.

Lo spazio $C^1[a,b]$ non è invece completo rispetto a nessuna delle norme (I.3.12). Se consideriamo lo spazio normato ottenuto munendo $C^1[a,b]$ della prima di queste due norme, il suo completamento è $C^0[a,b]$ con la norma del massimo. Infatti $C^0[a,b]$ è completo rispetto alla norma del massimo e si dimostra che $C^1[a,b]$ è un suo sottospazio denso, per cui le condizioni del Teorema 1.5 sono soddisfatte. Un altro sottospazio denso in $C^0[a,b]$ rispetto alla norma del massimo è $C^\infty[a,b]$. Un risultato fine, dovuto a Weierstrass, dice che addirittura lo spazio dei polinomi è denso in $C^0[a,b]$, sempre rispetto alla norma del massimo.

Il completamento di $C^1[a,b]$ rispetto alla seconda delle due norma (I.3.12) è invece uno spazio diverso: esso è denotato con $W^{1,1}(a,b)$ e rientra nella classe dei cosiddetti spazi di Sobolev.

Esempio 3.3: lo spazio $C^0(a,b)$ (seguito). Lo spazio $C^0(a,b)$, con la sua topologia naturale introdotta nell'Esempio I.3.25, è uno spazio di Fréchet. La stessa cosa vale per lo spazio $C^0(\Omega)$ dell'Esempio I.3.26.

Esempio 3.4: lo spazio $C^1(a,b)$ (seguito). Lo spazio $C^1(a,b)$ dell'Esempio I.3.27 è uno spazio di Fréchet rispetto alla sua topologia naturale. Analogamente per quanto riguarda lo spazio $C^k(a,b)$, al quale nell'esempio citato si è solo accennato.

Esempio 3.5: lo spazio $C^\infty[a,b]$ (seguito). Lo spazio $C^\infty[a,b]$ è uno spazio di Fréchet rispetto alla sua topologia naturale introdotta nell'Esempio I.3.28.

Esempio 3.6: lo spazio $C^\infty(a,b)$ (seguito). Lo spazio $C^\infty(a,b)$ è uno spazio di Fréchet rispetto alla sua topologia naturale introdotta nell'Esempio I.3.29. ■

Per costruire invece spazi di Hilbert interessanti occorre introdurre classi di funzioni integrabili secondo Lebesgue. Iniziamo dal caso più semplice.

Vorremmo costruire uno spazio di funzioni $v : (a,b) \to \mathbb{R}$ nel quale mettere la norma (I.3.9). Come abbiamo già osservato, le funzioni continue nell'intervallo chiuso $[a,b]$ non bastano perché non otterremmo uno spazio completo. Allo stesso modo non bastano le funzioni continue nell'intervallo aperto e integrabili in qualche senso generalizzato: ancora non avremmo la completezza.

Allora dobbiamo ripiegare su classi contenenti funzioni discontinue e qui sorge un problema: la (I.3.9) sarebbe solo una seminorma e non una norma. Questo inconveniente spiacevole si supera nel modo seguente: si identificano fra loro due funzioni u e v tali che $\|u-v\|_1 = 0$ (in termini più precisi occorre considerare il quoziente rispetto alla relazione di equivalenza data dalla condizione introdotta). Fatto ciò varie classi di funzioni sarebbero possibili candidate ma, per avere anche la completezza, occorre scegliere una classe molto ricca e quella che risulta conveniente è la classe delle funzioni integrabili secondo Lebesgue. Si ottiene lo spazio $L^1(a,b)$, che è un caso particolare dello spazio che introduciamo fra breve.

In modo alternativo, si potrebbe porre il problema del completamento dello spazio $C^0[a,b]$ rispetto alla norma (I.3.9). Uno spazio astratto esiste, grazie al Teorema 1.5, ma si vorrebbe avere uno suo modello concreto. Ebbene, il più semplice di questi è proprio lo spazio $L^1(a,b)$, che però non è uno spazio di funzioni nel senso letterale del termine, ma uno spazio di classi di funzioni, a causa dell'identificazione di cui sopra. Notiamo che tale identificazione equivale alla condizione

$$u(x) = v(x) \quad \text{per q.o. } x \tag{3.1}$$

ove q.o. (quasi ogni) è inteso rispetto alla misura di Lebesgue: i punti eccezionali nei quali l'uguaglianza è violata costituiscono un insieme di misura nulla secondo Lebesgue.

Esempio 3.7: lo spazio $L^1(\Omega)$. Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, lo spazio $L^1(\Omega)$ è lo spazio costituito dalle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabili secondo Lebesgue, nel quale il concetto abituale di uguaglianza è sostituito dal seguente: due funzioni u e v sono uguali se e solo se vale la (3.1), ove x varia ora in Ω. La norma naturale è data dalla formula

$$\|v\|_1 = \int_\Omega |v(x)|\,dx \tag{3.2}$$

e rende $L^1(\Omega)$ spazio di Banach.

Più in generale, Ω può essere sostituito da uno spazio astratto di misura σ-finito, il che comprende diversi casi particolari interessanti. Uno di questi è il caso del bordo di un aperto (abbastanza regolare) di $\mathbb{R}^n$, con l'usuale misura superficiale. Un altro caso particolare è quello in cui prendiamo $\Omega = \mathbb{N}$ munito della misura che conta: in questo caso le funzioni sono le successioni, che diventano tutte misurabili, gli integrali diventano serie e il corrispondente spazio $L^1(\Omega)$ è denotato semplicemente con ℓ^1.

Esempio 3.8: lo spazio $L^p(\Omega)$. Analogamente possiamo introdurre lo spazio più generale $L^p(\Omega)$, costituito dalle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue e tali che $|v|^p$ sia integrabile, pure munito del nuovo concetto di uguaglianza introdotto sopra. In questo caso p è un numero reale verificante la disuguaglianza $p \geq 1$, senza la quale non varrebbe la disuguaglianza triangolare della norma, detta in questo caso *disuguaglianza di Minkowski*. Si ottiene effettivamente uno spazio vettoriale e lo si munisce della norma

$$\|v\|_p = \Big(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} \tag{3.3}$$

rispetto alla quale $L^p(\Omega)$ diventa uno spazio di Banach. Il caso $p = 2$ è poi speciale: la norma verifica la regola (I.3.23) del parallelogrammo, per cui è indotta da un prodotto scalare. Questo è dato dalla formula

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) \, v(x) \, dx \tag{3.4}$$

e rende $L^2(\Omega)$ spazio di Hilbert. Notiamo che per nessun altro valore di p vale la regola del parallelogrammo, nemmeno per norme equivalenti alla norma (3.3), per cui la topologia di $L^p(\Omega)$ proprio è lontana dal caso hilbertiano se $p \neq 2$.

Notiamo infine che, come abbiamo introdotto lo spazio ℓ^1 alla fine dell'esempio precedente, possiamo introdurre ℓ^p con $p > 1$: si ottiene uno spazio di Banach, che è di Hilbert se e solo se $p = 2$.

Esempio 3.9: lo spazio $L^\infty(\Omega)$. Se prendiamo una funzione v appartenente a $L^p(\Omega)$ per ogni $p \geq 1$ e facciamo tendere p a $+\infty$ nella (3.3), otteniamo

$$\lim_{p \to +\infty} \|v\|_p = \inf \{ M \geq 0 : \ |v(x)| \leq M \text{ per q.o. } x \} \tag{3.5}$$

se effettivamente esiste M in tali condizioni e $+\infty$ se un tale M non esiste. In questo secondo caso conviene assumere comunque il secondo membro come notazione, attribuendogli il valore $+\infty$. In ogni caso chiamiamo allora *estremo superiore essenziale di* $|v|$ il secondo membro della (3.5) e chiamiamo *essenzialmente limitate* le funzioni per le quali esso è finito. Per semplicità, poi, si usa spesso omettere l'aggettivo "essenziale" e l'avverbio "essenzialmente". Si parla cioè direttamente di funzioni limitate e si introduce il simbolo abituale $\sup |v|$ con il nuovo significato di secondo membro della (3.5).

Ebbene, denotiamo con $L^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue e (essenzialmente) limitate, consideriamo ancora il nuovo concetto di ugualgianza dato dalla (3.1) e muniamo lo spazio considerato della norma definita dalla formula

$$\|v\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| \tag{3.6}$$

con l'intesa, ribadiamo, che il secondo membro della (3.6) sia semplicemente una notazione più comoda per indicare il secondo membro della (3.5). Otteniamo uno spazio di Banach (non hilbertizzabile).

Anche in questo caso Ω può essere variamente sostituito. La sostituzione che ha condotto agli spazi ℓ^1 e ℓ^p porta ora allo spazio di Banach ℓ^∞, lo spazio delle successioni limitate.

Osservazione 3.10. Consideriamo per fissare le idee il caso $\Omega = (0,1)$ e $p = 1$. Fra le funzioni integrabili secondo Lebesgue ci sono senz'altro tutte le funzioni continue in $[0,1]$, o meglio, se vogliamo considerare funzioni rigorosamente definite solo sull'intervallo aperto, le funzioni continue in $(0,1)$ che hanno limiti finiti in 0 e in 1. Anche queste funzioni vengono identificate ad altre mediante la (3.1), ma ciò facendo accade la cosa seguente (legata al fatto che nessun aperto non vuoto ha misura nulla): tutte le altre funzioni della stessa classe, cioè identificate a quella data, hanno almeno un punto di discontinuità. Dunque, in una classe di funzioni considerate uguali fra loro dalla (3.1) vi è al massimo una funzione continua (di solito nessuna). Questa funzione, se effettivamente c'è, resta in tal modo privilegiata rispetto alle altre e consente di attribuire un significato preciso all'inclusione

$$C^0[0,1] \subset L^1(0,1)$$

inclusione che letteralmente non sussiste dato che gli oggetti dei due spazi hanno natura diversa. Il senso preciso è dunque il seguente: a ogni funzione u continua in $[0,1]$ si associa la classe di tutte le funzioni integrabili v che verificano la (3.1). Così facendo otteniamo che $C^0[0,1]$ è un sottospazio vettoriale di $L^1(0,1)$. Notiamo poi che l'estremo superiore inteso nei due sensi tradizionale e nuovo coincidono nel caso di funzioni continue, per cui il sottospazio $C^0[0,1]$ di $L^\infty(0,1)$ coincide a tutti gli effetti con lo spazio già introdotto precedentemente. Abbiamo di conseguenza anche l'inclusione

$$C^\infty[0,1] \subset L^1(0,1)$$

e lo stesso discorso si ripete sostituendo $L^1(0,1)$ con $L^p(0,1)$ oppure con $L^\infty(0,1)$. Valgono i risultati seguenti: $C^\infty(0,1)$ è denso in $L^p(0,1)$ se $1 \le p < +\infty$; $C^0[0,1]$ è un sottospazio chiuso di $L^\infty(0,1)$; $C^\infty[0,1]$ non è un sottospazio chiuso di $L^\infty(0,1)$ e la sua chiusura in $L^\infty(0,1)$ coincide con $C^0[0,1]$.

Risultati analoghi si hanno sostituendo $(0,1)$ e $[0,1]$ con un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abbastanza regolare e, rispettivamente, con la sua chiusura, qualche disturbo essendo dato essenzialmente solo dalla necessità di definire con precisione la regolarità C^∞ nella chiusura. Occorre invece maggiore cautela nel caso dell'aperto illimitato, dato che la continuità nella chiusura non garantisce più l'integrabilità. ∎

Un punto importante riguarda la comprensione della nozione di convergenza di una successione negli spazi che stiamo considerando. Tralasciando senz'altro il caso di $L^\infty(\Omega)$, la convergenza del quale è essenzialmente di tipo uniforme, trattiamo brevemente il caso di uno spazio $L^p(\Omega)$ con p finito, la convergenza del quale è detta *convergenza in media di ordine* p (quadratica nel caso $p = 2$). Una successione $\{v_n\}$ converge a v in $L^p(\Omega)$ se e solo se la successione numerica delle norme $\|v_n - v\|_p$ è infinitesima, cioè quando

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |v_n - v|^p \, dx = 0. \tag{3.7}$$

Nel caso più semplice in cui $p = 1$ e Ω è un intervallo, l'integrale che compare nella formula si interpreta come l'area della parte di piano compresa fra i grafici di v_n e di v, per cui si intuisce che, già in questo caso e a maggior ragione nel caso generale, non ci sono speranze di equivalenza della convergenza in media con convergenze di tipo puntuale. Notiamo subito che la convergenza puntuale nel senso letterale del termine non può nemmeno essere presa in considerazione, dato che stiamo trattando con classi di funzioni e non con funzioni vere e proprie a causa dell'identificazione (3.1). L'unica convergenza di tipo puntuale che è ragionevole considerare è la convergenza *quasi ovunque*, cioè quella data dalla condizione

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x) \quad \text{per q.o. } x\,. \tag{3.8}$$

Ebbene, non c'è equivalenza fra convergenza q.o. e convergenze in media ma le due nozioni sono strettamente collegate fra loro, come mostrano i risultati che ora enunciamo.

Proposizione 3.11. *Sia $\{v_n\}$ una successione di funzioni di $L^p(\Omega)$ convergente q.o. a una funzione v. Se esiste $\varphi \in L^p(\Omega)$ tale che $|v_n(x)| \le \varphi(x)$ q.o. per ogni n, allora v appartiene a $L^p(\Omega)$ e la convergenza è anche in media, cioè nel senso della* (3.7). ∎

Proposizione 3.12. *Sia $\{v_n\}$ una successione di funzioni di $L^p(\Omega)$ convergente in $L^p(\Omega)$ a una funzione v. Allora esiste una sottosuccessione della successione data che converge a v q.o.* ∎

Non è difficile dedurre che, se una successione $\{v_n\}$ di funzioni di $L^p(\Omega)$ converge in $L^p(\Omega)$ a una funzione v e q.o. a u, allora $u = v$ q.o., per cui i due concetti di convergenza, anche se non sono equivalenti, sono compatibili fra loro. Allo stesso modo sono compatibili fra loro i concetti di convergenza relativi ai diversi valori di p. ∎

Terminiamo il paragrafo con la costruzione di un altro spazio di Hilbert e di uno spazio di Fréchet legato all'integrabilità anziché alla continuità.

Esempio 3.13: funzioni periodiche. Fissato $T > 0$, diciamo che una funzione misurabile $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è T-periodica quando $v(x + T) = v(x)$ q.o. Consideriamo allora lo spazio V costituito dalle funzioni T-periodiche (sempre con l'uguaglianza data dalla (3.1)) tali che $|v|^2$ sia integrabile su $(0, T)$ munito del prodotto scalare

$$(u, v) = \int_0^T u(x)\, v(x)\, dx.$$

Si ottiene uno spazio di Hilbert isometricamente isomorfo a $L^2(0, T)$.

Esempio 3.14: lo spazio $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$). Esso è lo spazio costituito dalle funzioni misurabili $v : \Omega \to \mathbb{R}$, con il concetto di uguaglianza dato dalla (3.1), che sono integrabili su ogni sottoinsieme chiuso e limitato $K \subset \Omega$. La sua topologia naturale è quella indotta dalla famiglia di seminorme

$$|v|_{1,K} = \int_K |v|\, dx$$

ottenuta lasciando variare K fra i sottoinsiemi chiusi e limitati inclusi in Ω. Si ottiene uno spazio di Fréchet. Analogamente si può intodurre lo spazio di Fréchet $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Capitolo IV

Qualche elemento di analisi funzionale

In questo capitolo diamo qualche cenno sullo sviluppo della teoria degli spazi di Banach e di Hilbert. La ristrettezza ci costringere tuttavia a toccare solo alcuni punti.

1. Operatori lineari e continui

Con il termine generico *operatore* intendiamo una funzione definita in uno spazio vettoriale a valori in un altro spazio vettoriale. L'operatore è poi chiamato abitualmente *funzionale* quando il codominio è lo spazio $\mathbb{R}$ degli scalari.

Nel caso degli operatori lineari fra spazi euclidei non vi sono problemi: ogni operatore lineare, fissate le basi, si rappresenta per mezzo di una matrice e da questa rappresentazione si vede immediatamente che esso è continuo. Più in generale sono continui tutti gli operatori lineari da uno spazio normato di dimensione finita in un altro spazio normato. Le cose cambiano radicalmente se il dominio dell'operatore ha dimensione infinita, e basta già considerare i funzionali.

Esempio 1.1. Consideriamo lo spazio $V = C^0[0,1]$ munito della norma (I.3.9) considerato nell'Esempio I.3.7 e il funzionale lineare $L : V \to \mathbb{R}$ definito dalla formula $Lv = v(1)$. Ebbene esso non è continuo. Infatti, se si prendono la successione $\{v_n\}$ di elementi di V definiti dalla formula $v_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$, e la funzione nulla, che denotiamo con v, si controlla subito che $\{v_n\}$ converge a v nel senso della norma considerata. Eppure risulta che $Lv_n = 1$ per ogni n e che $Lv = 0$, per cui $\{Lv_n\}$ non converge a Lv. ■

Più difficile, ma possibile con l'aiuto dell'assioma della scelta, è costruire un esempio analogo nel caso in cui il dominio sia uno spazio completo, il che non avviene nell'esempio precedente. In ogni caso, gli operatori lineari e non continui sono di interesse molto modesto, per cui conviene avere una caratterizzazione comoda della continuità di un operatore lineare.

Teorema 1.2. *Siano* $(V, \|\cdot\|_V)$ *e* $(W, \|\cdot\|_W)$ *due spazi normati e* $L : V \to W$ *un operatore lineare. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti:* (i) L *è continuo;* (ii) L *è continuo nell'origine;* (iii) *esiste una costante* $M \ge 0$ *tale che*

$$\|Lv\|_W \le M \|v\|_V \quad \text{per ogni } v \in V. \;\blacksquare \tag{1.1}$$

Segnaliamo che la condizione (iii) si esprime comunemente dicendo che L è un operatore *limitato*. Essa equivale al fatto che L trasforma ogni sottoinsieme limitato di V in un sottoinsieme limitato di W, la nozione di limitatezza dei sottoinsiemi negli spazi normati essendo quella data di seguito. Cogliamo l'occasione per dare anche la definizione di successione limitata.

Definizione 1.3. *Diciamo che un sottoinsieme E di uno spazio normato V è limitato quando esiste una palla che lo include e diciamo che una successione $\{x_n\}$ di elementi di V è limitata quando è limitato il suo insieme immagine.* ∎

Si richiede dunque l'esistenza di una costante $M > 0$ tale che $\|x\| \leq M$ e $\|x_n\| \leq M$ rispettivamente per ogni $x \in E$ e per ogni n.

Si noti che la nozione di limitatezza che abbiamo dato fa intervenire la norma o la la metrica indotta dalla norma. Ciò nonostante, essa dipende solo dalla topologia dello spazio, dato che essa non cambia significato se si cambia la norma in un'altra equivalente (ma bisogna considerare solo metriche compatibili con la topologia e indotte da norme, altrimenti succedono pasticci). Se si riprende l'Esempio 1.1, non è difficile controllare direttamente che l'operatore L considerato non è limitato.

Definizione 1.4. *Siano V e W due spazi normati. Si denota con $\mathcal{L}(V;W)$ lo spazio vettoriale costituito da tutti gli operatori $L : V \to W$ lineari e continui.*

Nel caso particolare in cui $W = \mathbb{R}$, lo spazio $\mathcal{L}(V;W)$ viene denotato con V' e detto spazio duale dello spazio normato V. ∎

Specialmente nel caso dello spazio duale V', alla notazione Lv si preferisce la seguente: $\langle L, v \rangle$. Si pone cioè

$$\langle L, v \rangle = Lv \quad \text{per ogni } L \in V' \text{ e } v \in V. \tag{1.2}$$

Questa notazione è aderente al fatto che l'applicazione $(L, v) \mapsto \langle L, v \rangle$ è bilineare dal prodotto $V' \times V$ in $\mathbb{R}$. Vedremo che essa è anche continua non appena avremo introdotto in V' una topologia. ∎

Consideriamo ora un operatore $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Allora è non vuoto l'insieme delle costanti M verificanti la (1.1) e possiamo prenderne l'estremo inferiore. Usiamo la notazione

$$\|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} = \inf \{M \geq 0 : \ \|Lv\|_W \leq M \|v\|_V \ \text{per ogni } v \in V\}. \tag{1.3}$$

Ebbene, non è difficile verificare che con la (1.3) si è definita una norma nello spazio $\mathcal{L}(V;W)$, norma che verifica le formule (che, dunque, ne costituiscono definizioni alternative)

$$\begin{aligned} \|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} &= \sup \{\|Lv\|_W / \|v\|_V : \ v \in V, \ v \neq 0\} \\ &= \sup \{\|Lv\|_W : \ v \in V, \ \|v\|_V \leq 1\}. \\ &= \sup \{\|Lv\|_W : \ v \in V, \ \|v\|_V = 1\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Si è così introdotta una topologia in $\mathcal{L}(V;W)$, detta topologia uniforme dello spazio degli operatori. Il motivo di questo nome è il seguente: una successione $\{L_n\}$ di elementi di $\mathcal{L}(V;W)$ converge a un elemento L di $\mathcal{L}(V;W)$ se e solo se la successione $\{L_n v\}$ converge a Lv uniformemente sulla palla unitaria dello spazio V.

Usando poi il Teorema 1.2 non è difficile controllare che, se cambiamo le due norme di V e W in norme rispettivamente equivalenti, allora la norma data dalla (1.3) si muta in una norma equivalente, per cui la topologia di $\mathcal{L}(V;W)$ non cambia. Si noti che

$$\|Lv\|_W \leq \|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} \|v\|_V \quad \text{per ogni } v \in V \text{ e } L \in \mathcal{L}(V;W) \tag{1.5}$$

grazie alla definizione stessa di norma di L. Da questa disuguaglianza è possibile dedurre che l'applicazione $(L,v) \mapsto Lv$ è continua da $\mathcal{L}(V;W) \times V$ in W.

Particolare attenzione merita il caso dello spazio duale, per il quale dobbiamo prendere $W = \mathbb{R}$, restando inteso che la norma in $\mathbb{R}$ è il modulo. In tal caso la norma in V' definita dalla (1.3) viene detta *norma duale* della norma considerata per lo spazio V (ora denotiamo quest'ultima semplicemente con $\|\cdot\|$ senza timori di ambiguità). Viene usata spesso la notazione

$$\|v'\|_* = \inf\{M \geq 0 : \; |\langle v', v\rangle| \leq M\|v\| \text{ per ogni } v \in V\} \tag{1.6}$$

nella quale abbiamo denotato con v' la variabile in V'. Il secondo membro della (1.6) può essere sostituito in accordo con la (1.4), ove la norma in $W = \mathbb{R}$, che è il modulo, può anche essere soppressa. Notiamo la disuguaglianza ovvia ma importante

$$|\langle v', v\rangle| \leq \|v'\|_* \|v\| \quad \text{per ogni } v \in V \text{ e } v' \in V' \tag{1.7}$$

come caso particolare della (1.5).

Teorema 1.5. *Siano V e W due spazi normati. Se W è completo, allora è completo anche il corrispondente spazio $\mathcal{L}(V;W)$ degli operatori lineari e continui. In particolare il duale di ogni spazio normato è uno spazio di Banach.* ■

Cenno della dimostrazione. Sia $\{L_n\}$ una successione di Cauchy. Si vede facilmente che, per ogni $x \in V$, la successione $\{L_n x\}$ è di Cauchy in W, dunque convergente in W a un elemento che denotiamo con Lx. Si è così costruito un operatore $L : V \to W$. Il resto della dimostrazione consiste nel verificare che $L \in \mathcal{L}(V;W)$ e che L è il limite della successione data anche nella topologia di $\mathcal{L}(V;W)$. ■

2. I teoremi di rappresentazione di Riesz

Il problema che ci si pone, e che occorre vedere caso per caso in relazione allo spazio normato V considerato, è il seguente: trovare, se possibile, una formula comoda che consenta di scrivere diversamente il valore $\langle L, v\rangle$ che il generico funzionale $L \in V'$ assume sul generico elemento $v \in V$. Quando si riesce a fare ciò in modo "concreto" si dice che si è ottenuto un teorema di rappresentazione del duale.

Iniziamo dal caso degli spazi $L^p(\Omega)$ degli Esempio III.3.8 e III.3.9 e a ogni esponente $p \in [1,\infty]$ associamo l'unico $p' \in [1,\infty]$ che verifica la formula

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{2.1}$$

con la convenzione $1/\infty = 0$. Tale p' è detto *esponente coniugato di* p. Si ha subito $(p')' = p$ per ogni p ammissibile, $1' = \infty$, da cui $\infty' = 1$, e $2' = 2$.

Teorema 2.1. *Se $u \in L^{p'}(\Omega)$ e $v \in L^p(\Omega)$ allora $uv \in L^1(\Omega)$ e vale la disuguaglianza*

$$\left| \int_\Omega uv\, dx \right| \le \|u\|_{p'} \, \|v\|_p \tag{2.2}$$

detta disuguaglianza di Hölder. ■

Fissiamo ora $u \in L^{p'}(\Omega)$ e poniamo $L_u(v) = \int_\Omega uv\, dx$. Se ci limitiamo a lasciar variare v in $L^p(\Omega)$, vediamo che il valore $L_u(v)$ è ben definito, per cui questa procedura definisce un funzionale L_u sullo spazio $L^p(\Omega)$, funzionale che risulta ovviamente lineare. Ebbene la disuguaglianza (2.2) di Hölder assicura che L_u è anche continuo. Possiamo infatti prendere $M = \|u\|_{p'}$ nella (1.1). Dunque, per la definizione stessa di norma duale, abbiamo anche $\|L_u\|_* \le \|u\|_{p'}$.

Facciamo ora variare u e consideriamo dunque l'applicazione $u \mapsto L_u$ da $L^{p'}(\Omega)$ nel duale di $L^p(\Omega)$. Si vede facilmente che essa è lineare e la disuguaglianza appena trovata assicura che essa è anche continua, dato che si può prendere $M = 1$ nella (1.1).

Allora il problema che naturalmente ci si pone è quello di stabilire se tale applicazione è anche biiettiva. A questa domanda risponde il seguente Teorema di Riesz, il quale assicura che, se $p \ne \infty$, essa è un isomorfismo isometrico.

Teorema 2.2. *Se $1 \le p < \infty$, per ogni L del duale di $L^p(\Omega)$ esiste una e una sola $u \in L^p(\Omega)$ tale che*

$$\langle L, v \rangle = \int_\Omega uv\, dx \quad \text{per ogni } v \in V. \tag{2.3}$$

Risulta inoltre $\|u\|_{p'} = \|L\|_*$. ■

Anche questo teorema, come la definizione stessa di L^p, vale in un ambito più vasto, l'aperto Ω potendo infatti essere sostituito da uno spazio di misura più generale.

Si noti poi che il caso $p = 2$, nel quale lo spazio L^p è di Hilbert, rientra come caso particolare anche nel risultato successivo, pure dovuto a Riesz, al quale sarebbe opportuno premettere qualche considerazione introduttiva analoga a quelle relative agli spazi L^p, ma possiamo procedere rapidamente.

Ora abbiamo uno spazio di Hilbert V e fissiamo $u \in V$. La definizione di L_u è ora la seguente: $L_u(v) = (u, v)$, ove v varia in V e $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ è il prodotto scalare di V. Il ruolo svolto prima dalla disuguaglianza di Hölder è giocato ora dalla disuguaglianza (I.3.19) di Schwarz, per cui si vede che $L_u \in V'$ e che l'applicazione $u \mapsto L_u$ è lineare e continua da V in V'.

Ancora si pone il problema della biiettività e quanto ora enunciamo assicura di più: *ogni spazio di Hilbert è isometricamente isomorfo al suo duale*. Viene di conseguenza che anche la norma duale verifica la regola (I.3.23) del parallelogrammo, per cui anche il duale è uno spazio di Hilbert e non solo di Banach.

Teorema 2.3. *Sia V uno spazio di Hilbert. Allora, per ogni $L \in V'$ esiste uno e un solo $u \in V$ tale che*

$$\langle L, v \rangle = (u, v) \quad \text{per ogni } v \in V. \tag{2.4}$$

Risulta inoltre $\|u\| = \|L\|_* \,.$ ∎

Si può aggiungere qualcosa di interessante. L'unico u dato dal Teorema di Riesz è anche l'unica soluzione di un altro problema. A questo proposito, introduciamo il funzionale quadratico $J : V \to \mathbb{R}$ definito dalla formula

$$J(v) = \frac{1}{2}\, \|v\|^2 - \langle L, v \rangle \,, \quad v \in V. \tag{2.5}$$

Ci poniamo il problema di vedere se esso ha minimo. La traccia della dimostrazione del risultato che ora enunciamo dimostra anche il Teorema 2.3 di Riesz.

Teorema 2.4. *Siano* V *uno spazio di Hilbert e* $L \in V'$. *Allora il funzionale* J *definito dalla* (2.5) *ha uno e un solo punto di minimo* $u \in V$ *e questo è anche l'unico elemento* $u \in V$ *che verifica la* (2.4). ∎

Cenno della dimostrazione. Il procedimento può essere il seguente: (i) esiste almeno un punto $u \in V$ di minimo per J; (ii) ogni punto di minimo per J verifica la (2.4); (iii) vi è al massimo un elemento $u \in V$ che verifica la (2.4).

Il terzo punto è del tutto immediato, mentre il primo offre qualche difficoltà. Si procede come segue. Si pone $\lambda = \inf J$ e, controllato che $\lambda > -\infty$, si costruisce facilmente una successione $\{x_n\}$ tale che $J(x_n) \le \lambda + 1/n$ per ogni n. Usando la regola del parallelogrammo, scrivendo la somma $x_n + x_m$ come doppio della semisomma ed esprimendo i quadrati delle norme che intervengono per mezzo del funzionale J, si arriva a controllare che $\{x_n\}$ è di Cauchy. Non è poi difficile vedere che il suo limite, che esiste per l'ipotesi di completezza, è un punto di minimo per J.

Per verificare il punto (ii), infine, si pone $\varphi(t) = J(u + tv)$ per $t \in \mathbb{R}$, ove u è il punto di minimo considerato e $v \in V$ è fissato ad arbitrio. Si controlla che $t = 0$ è un punto di minimo per φ e si vede che la (2.4) segue dalla condizione $\varphi'(0) = 0$. ∎

3. Proiezioni ortogonali

Come abbiamo già anticipato, nell'ambito degli spazi prehilbertiani si può parlare di angoli, dunque di ortogonalità. Siccome la completezza sarà indispensabile per altri motivi, la richiediamo comunque, per semplicità, e supponiamo fin dall'inizio che lo spazio in esame sia di Hilbert.

Definizione 3.1. *Sia* V *uno spazio di Hilbert. Due elementi* $u, v \in V$ *si dicono ortogonali fra loro quando* $(u, v) = 0$. *Due sottoinsiemi non vuoti* $A, B \subseteq V$ *si dicono ortogonali fra loro quando* $(u, v) = 0$ *per ogni* $u \in A$ *e* $v \in B$. *L'ortogonale di un sottoinsieme* $E \subseteq V$ *non vuoto è l'insieme definito dalla formula*

$$E^\perp = \{u \in V : \ (u, v) = 0 \ \ \textit{per ogni } v \in V\} \,. \ ∎ \tag{3.1}$$

Proposizione 3.2. *Siano* V *uno spazio di Hilbert e* E *un sottoinsieme non vuoto di* V. *L'ortogonale* $E^\perp$ *di* E *è un sottospazio chiuso di* V *e coincide con il più grande sottoinsieme di* V *ortogonale a* E.

Inoltre, l'ortogonale $(E^{\perp})^{\perp}$ *dell'ortogonale* $E^{\perp}$ *di* E *coincide con la chiusura del sottospazio vettoriale generato da* E *. In particolare esso coincide con* E *se e solo se* E *è esso stesso un sottospazio chiuso di* V *.* ■

Il problema che ora ci poniamo è il seguente: dati un sottoinsieme E di V e un punto $w \in V$, trovare il punto $u \in V$ di minima distanza da w . Tale punto in generale non esiste oppure può non essere unico, come mostrano esempi banali in $\mathbb{R}$. Quando tale punto esiste ed è unico, esso viene chiamato *proiezione ortogonale di* w *su* E *.*

Il risultato che segue, detto *Teorema delle proiezioni*, vale nell'ambito hilbertiano e non ha corrispondenti nell'ambito generale degli spazi di Banach, nemmeno nella sua parte che non fa intervenire il prodotto scalare.

Teorema 3.3. *Siano* V *uno spazio di Hilbert,* V_0 *un suo sottospazio chiuso e* $w \in V$ *. Allora esiste uno e un solo punto* $u \in V$ *tale che*

$$\|u - w\| \le \|v - w\| \quad \text{per ogni } v \in V. \tag{3.2}$$

Inoltre tale u *è anche l'unico punto di* V *tale che* $w - u \in V_0^{\perp}$ *.* ■

Cenno della dimostrazione. Si può applicare il Teorema 2.4 allo spazio di Hilbert V_0 e al funzionale L definito da $\langle L, v\rangle = (w, v)$. Si vede che l'unico punto di minimo per J è l'unico u che risolve la (3.2) e che la (2.4) equivale alla condizione $w - u \in V_0^{\perp}$. ■

Se si riprende la dimostrazione del Teorema 2.4 nella situazione particolare del Teorema delle proiezioni si vede che si arriva senza fatica alla seguente generalizzazione interessante:

Teorema 3.4. *Siano* V *uno spazio di Hilbert,* C *un convesso chiuso e non vuoto di* V *e* $w \in V$ *. Allora esiste uno e un solo* $u \in C$ *tale che*

$$\|u - w\| \le \|v - w\| \quad \text{per ogni } v \in C. \tag{3.3}$$

Inoltre tale u *è anche l'unico punto di* V *tale che*

$$(u, u - v) \le (w, u - v) \quad \text{per ogni } v \in C. \tag{3.4}$$

Infine, se u_i *è la soluzione corrispondente a* w_i *per* $i = 1, 2$ *allora*

$$\|u_1 - u_2\| \le \|w_1 - w_2\| . \ ■ \tag{3.5}$$

Cenno della dimostrazione. Basta, come si è detto, riprendere la dimostrazione del Teorema 2.4. Per il controllo della condizione di Cauchy del punto (i) è sufficiente la condizione seguente: se $x, y \in C$ allora $(x + y)/2 \in C$. Ebbene ciò è vero se C è convesso. Alla fine del punto (i) serve poi concludere che il limite di $\{x_n\}$ appartiene a C , e ciò è vero se C è chiuso.

Il punto (ii) , invece, ora è diverso. Dato $v \in C$, si definisce la funzione φ mediante $\varphi(t) = J(u + t(v - u))$, $t \in [0, 1]$, sfruttando la convessità di C . Ancora

$t = 0$ è un punto di minimo, ma ora la condizione di minimalità diventa $\varphi'(0) \geq 0$, che fornisce la (3.4). Si noti che questa, almeno nel caso non banale in cui $u \neq w$, si può esprimere dicendo che, per ogni $v \in C \setminus \{u\}$, l'angolo ω dei due vettori $w - u$ e $v - u$ (si veda la (I.3.22)) verifica la disuguaglianza $\omega \geq \pi/2$, il che è geometricamente evidente nel caso $V = \mathbb{R}^2$.

Il punto (iii), infine, è meno immediato e ora può essere dedotto dall'ultima affermazione dell'enunciato, che si dimostra come segue: si scrive la (3.4) con $w = w_i$, $u = u_i$ e $v = v_j$ per $(i,j) = (1,2)$ e per $(i,j) = (2,1)$, si sommano le due disuguaglianze ottenute e si usa la disuguaglianza di Schwarz. ■

Combinando opportunamente il Teorema delle proiezioni con la Proposizione 3.2, si deduce il risultato successivo, che è detto *Teorema di decomposizione* e che assicura la decomposizione $V = V_0 \oplus V_0^{\perp}$ di V in somma diretta di due sottospazi ortogonali.

Teorema 3.5. *Siano V uno spazio di Hilbert e V_0 un suo sottospazio chiuso. Allora ogni elemento $w \in V$ si decompone in uno e in un solo modo nella somma $w = u + v$ con $u \in V_0$ e $v \in V_0^{\perp}$. Inoltre tali u e v coincidono con le proiezioni ortogonali di w su V_0 e su $V_0^{\perp}$ rispettivamente.* ■

Con le notazioni del teorema precedente calcoliamo $\|w\|^2$. Tenendo conto della formula (I.3.20) del binomio e ricordando che u e v sono ortogonali fra loro, deduciamo la relazione pitagorica

$$\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \tag{3.6}$$

che lega la norma di un elemento qualunque a quelle delle sue proiezioni su due sottospazi chiusi che siano l'uno l'ortogonale dell'altro.

Esempio 3.6. Fissiamo un sottoinsieme misurabile $A \subseteq \Omega$ e, per non cadere nel banale, supponiamo che sia A sia il suo complementare abbiano misura positiva. Consideriamo il sottoinsieme V_0 di $L^2(\Omega)$ costituito dalle funzioni v che si annullano q.o. in A. Come si vede facilmente, esso è un sottospazio chiuso. Ora, se $w \in L^2(\Omega)$ e $v \in V_0$, risulta

$$\|w - v\|_2^2 = \int_{\Omega \setminus A} |w - v|^2 + \int_A |w|^2$$

per cui è chiaro che si ottiene la minima distanza prendendo l'unica $v \in V_0$ che verifica $v = w$ in $\Omega \setminus A$. Tale funzione è dunque la proiezione ortogonale di w su V_0.

Osserviamo ora che l'ortogonale di V_0 è l'analogo sottospazio chiuso di $L^2(\Omega)$ costituito dalle funzioni v che si annullano q.o. in $\Omega \setminus A$, per cui, per quanto riguarda la proiezione su $V_0^{\perp}$, vale lo stesso discorso, con lo scambio fra A e il suo complementare. Risulta poi evidente che la somma delle due proiezioni è proprio w, in accordo con il Teorema di decomposizione.

Esempio 3.7. Prendiamo $V = L^2(\mathbb{R})$ e come V_0 il sottospazio V_p delle funzioni pari, cioè degli elementi $u \in V$ che verificano $u(-x) = u(x)$ q.o. Si verifica che V_0 è un sottospazio chiuso. Il suo ortogonale coincide con il sottospazio chiuso V_d delle funzioni dispari. Sia ora $w \in V$ e si considerino le due funzioni u e v date dalle formule

$$u(x) = \frac{1}{2}(w(x) + w(-x)) \quad \text{e} \quad v(x) = \frac{1}{2}(w(x) - w(-x)) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}\,.$$

Siccome $u \in V_p$, $v \in V_d$ e $u + v = w$, le funzioni u e v coincidono con le proiezioni ortogonali di w su V_p e su V_d rispettivamente. In particolare esse sono, fra le funzioni pari e le funzioni dispari rispettivamente, quelle più vicine di ogni altra a w nella metrica di V.

Esempio 3.8. Siano V uno spazio di Hilbert e w_0 un elemento non nullo di V. Vogliamo calcolare la proiezione del generico elemento $w \in V$ sul sottospazio V_0 generato da w_0, che è chiuso in quanto di dimensione 1. Siccome questo è costituito da tutti e soli i vettori del tipo $u = cw_0$ con $c \in \mathbb{R}$, la vera incognita è lo scalare c e applicando la condizione $w - u \in V_0^{\perp}$ si ottiene facilmente la soluzione, che è data dalla formula $u = \|w_0\|^{-2}\,(w, w_0)\, w_0$. ■

Il Teorema di decomposizione può essere iterato: ad esempio, dopo una prima applicazione, possiamo considerare come nuovo ambiente il sottospazio V_0 (che è di Hilbert in quanto sottospazio chiuso) e prendere un suo sottospazio chiuso V_1. In tal modo si decompone il generico elemento di V nella somma di tre addendi fra loro ortogonali. Nel caso (banale) di uno spazio di dimensione n l'iterazione di questa procedura consente, fissati n sottospazi $V_1, \dots, V_n$ tutti di dimensione 1 e fra loro ortogonali, di decomporre il generico $w \in V$ nella somma di n vettori $u_1, \dots, u_n$ appartenenti ai rispettivi sottospazi. Questi coincidono con le proiezioni ortogonali e verificano una relazione pitagorica. Se per ogni i scegliamo ad arbitrio un vettore $w_i \in V_i$ non nullo, abbiamo precisamente

$$u_i = \frac{(w, w_i)}{\|w_i\|^2}\, w_i \quad \text{e} \quad \|w\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2\,.$$

Osservazione 3.9. Un'estensione importante riguarda il caso di una infinità numerabile $\{V_n\}$ di sottospazi chiusi dello spazio di Hilbert V a due a due ortogonali, caso al quale accenniamo brevemente. La novità principale riguarda i problemi di convergenza, dato che avremo serie anziché somme finite.

Supponiamo innanzi tutto di avere una successione $\{u_n\}$ di elementi tali che $u_n \in V_n$ per ogni n. Il primo risultato, che sfrutta in modo determinante la mutua ortogonalità dei vettori, afferma che

$$\textit{la serie } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n \textit{ converge in } V \textit{ se e solo se } \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < +\infty\,. \tag{3.7}$$

Se tale condizione è soddisfatta, detta u la somma della serie di vettori, vale la conclusione seguente: ciascuno degli u_n è la proiezione ortogonale di u sul sottospazio V_n.

Fissiamo ora $w \in V$ e cerchiamo di rappresentare w come serie di elementi presi nei rispettivi sottospazi V_n. Ciò non è di solito possibile e, in generale, vale il risultato che ora illustriamo. Consideriamo il sottospazio generato dall'unione di tutti i V_n, che è chiuso solo in situazioni banali, e la sua chiusura che denotiamo con Z per comodità. Allora w ha una rappresentazione del tipo

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + z'$$

con $u_n \in V_n$ per ogni n e $z' \in Z^{\perp}$. Tale rappresentazione è unica, i suoi addendi sono necessariamente le proiezioni ortogonali di w sui rispettivi sottospazi e vale la relazione pitagorica generalizzata

$$\|w\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 + \|z'\|^2 . \tag{3.8}$$

Deduciamo che vale la cosiddetta *disuguaglianza di Bessel*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 \le \|w\|^2 \tag{3.9}$$

e che il fatto che nella (3.9) ci sia il segno di uguaglianza, e in tal caso di parla di *uguaglianza di Parseval*, equivale a $z' = 0$, cioè a $w \in (Z^{\perp})^{\perp}$, cioè a $w \in Z$.

In particolare resta risolto il problema posto all'inizio quando l'appartenenza di w a Z è soddisfatta per ogni $w \in V$, cioè quando $Z = V$, vale a dire quando l'unione dei V_n genera un sottospazio denso.

Osservazione 3.10. Particolarmente interessante è il caso in cui tutti i sottospazi V_n abbiano dimensione 1. In tal caso, preso in ciascuno dei V_n un generatore w_n e tenendo conto dell'Esempio 3.8, otteniamo la rappresentazione

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w, w_n)}{\|w_n\|^2}\, w_n + z' \tag{3.10}$$

il residuo z' essendo nullo se sono verificate le condizioni di cui abbiamo appena parlato. Notiamo che la serie che compare nella (3.10) è detta *serie di Fourier* di w rispetto al sistema di vettori $\{w_n\}$.

Le serie di Fourier classiche delle funzioni 2π-periodiche si ottengono come caso particolare: basta infatti applicare quanto ottenuto allo spazio dell'Esempio III.3.13 con $T = 2\pi$ e al sistema costituito dalle funzione date dalle formule

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots$$

Siccome si dimostra che l'unione dei corrispondenti sottospazi generati è densa, ogni funzione w dello spazio è rappresentabile in serie di Fourier. Naturalmente la convergenza della serie è nel senso della media quadratica. La convergenza è di tipo migliore, ad esempio uniforme, solo se w verifica ipotesi supplementari opportune.

Tuttavia la nozione di serie di Fourier astratta ha applicazioni molto importanti in problemi lontanissimi dalle funzioni periodiche, ad esempio nell'ambito di vaste classi di problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali.

Capitolo V

Compattezza

Questo capitolo della topologia e dell'analisi funzionale è molto importante. Iniziamo dalle definizioni fondamentali che introducono due nozioni di compattezza, la seconda delle quali è detta precisamente *compattezza per successioni* ma è spesso chiamata molto più semplicemente *compattezza*, come la prima.

1. Compattezza in ambito topologico

Definizione 1.1. *Siano X uno spazio topologico e $E \subseteq X$. Diciamo che una famiglia $\mathcal{R}$ di sottoinsiemi di X è un ricoprimento di E quando l'unione degli insiemi della famiglia $\mathcal{R}$ include E. Un ricoprimento $\mathcal{R}$ di E è detto aperto quando tutti gli elementi di $\mathcal{R}$ sono aperti di X.* ■

Definizione 1.2. *Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme $K \subseteq X$ è detto compatto quando per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{R}$ di K esiste una famiglia finita $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$ che sia ancora un ricoprimento di E.* ■

Definizione 1.3. *Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme $K \subseteq X$ è detto compatto per successioni, oppure sequenzialmente compatto, quando da ogni successione di elementi di K si può estrarre una sottosuccessione convergente a un elemento di K.*

Definizione 1.4. *Uno spazio topologico X è detto compatto quando X è un sottoinsieme compatto di se stesso ed è detto compatto per successioni quando X è un sottoinsieme compatto per successioni di se stesso.* ■

Osservazione 1.5. Siccome il sottoinsieme K di X può essere visto esso stesso come uno spazio topologico rispetto alla topologia indotta da quella di X, abbiamo per K due nozioni di compattezza, quella di sottoinsieme e quella di spazio. Tuttavia non è difficile vedere che esse coincidono. La stessa osservazione vale per quanto riguarda la compattezza per successioni.

Osserviamo inoltre che le due nozioni di compattezza sono in generale scollegate. Vedremo invece che esse si equivalgono nel caso degli spazi metrizzabili. ■

Mentre il controllo di una delle due proprietà di compattezza corrisponde in generale all'applicazione di un teorema, verificare che un sottoinsieme E non è compatto è di solito più facile, dato che basta trovare un ricoprimento aperto di E che non ha sottoricoprimenti finiti oppure una successione che non ha sottosuccessioni convergenti.

Esempio 1.6. Nessun sottoinsieme illimitato $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è compatto. Consideriamo infatti il ricoprimento aperto $\mathcal{R}$ di E costituito da tutte le palle di raggio 1 aventi i centri nei punti di E. Siccome ogni famiglia finita $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$ ha unione limitata, se E non è limitato nessuna di tali famiglie può ricoprire tutto E.

Per verificare che l'insieme illimitato $E \subseteq \mathbb{R}^N$ non è compatto per successioni basta osservare che esso contiene una successione $\{x_n\}$ divergente (in modulo) e che da questa non è possinile estrarre successioni convergenti. ∎

L'ipotesi di compattezza è ricca di conseguenze, ma qui ci dobbiamo limitare a pochi risultati fra i più importanti. Notiamo che alcuni di questi fanno intervenire la proprietà di separazione di Hausdorff che, dunque, non riguarda solo l'unicità del limite.

Teorema 1.7. *Siano X uno spazio topologico e $K \subseteq X$. Se X è compatto e K è chiuso, allora K è compatto. Se X è di Hausdorff e K è compatto, allora K è chiuso.* ∎

Cenno della dimostrazione. Per la prima parte fissiamo un ricoprimento aperto $\mathcal{R}$ di K. Allora è un ricoprimento aperto di X quello ottenuto aggiungendo a $\mathcal{R}$ l'aperto $X \setminus K$. Estratto da questo un ricoprimento finito di X, si arriva facilmente a un ricoprimento finito di K estratto da $\mathcal{R}$.

Per la seconda parte fissiamo $x \in X \setminus K$. Per ogni $y \in K$ troviamo due intorni aperti A_y di y e B_y di x disgiunti. Consideriamo il ricoprimento di K costituito da tutti gli aperti A_y costruiti ed estraiamo un sottoricoprimento finito. Ciò corrisponde a considerare gli aperti A_y relativi a un numero finito di scelte del tipo $y = y_i \in K$, $i = 1, \ldots, m$. Allora l'intersezione dei B_{y_i} è un intorno di x disgiunto da K. ∎

Teorema 1.8. *Siano X_1 e X_2 due spazi topologici e $X = X_1 \times X_2$ il loro prodotto, munito della topologia prodotto. Siano inoltre $E_1 \subseteq X_1$ e $E_2 \subseteq X_2$ due sottoinsiemi compatti degli spazi dati. Allora $E_1 \times E_2$ è un sottoinsieme compatto di X. In particolare, se X_1 e X_2 sono compatti, anche X è compatto.* ∎

Risultati perfettamente analoghi valgono per la compattezza per successioni. Del risultato successivo, particolarmente rilevante, diamo le due versioni corrispondenti ai due tipi di compattezza.

Teorema 1.9. *Siano X e Y due spazi topologici, $K \subseteq X$ e $f : E \to Y$. Allora valgono le conclusioni seguenti: (i) se K è un sottoinsieme compatto di X è f è continua, l'immagine $f(K)$ è un sottoinsieme compatto di Y; (ii) se K è un sottoinsieme sequenzialmente compatto di X è f è sequenzialmente continua, l'immagine $f(K)$ è un sottoinsieme sequenzialmente compatto di Y.* ∎

Cenno della dimostrazione. Sia $\mathcal{R}$ un ricoprimento aperto di $f(K)$. Allora è un ricoprimento aperto di K la famiglia costituita dalle controimmagini degli elementi di $\mathcal{R}$. Estratto da questa un ricoprimento finito di K, si arriva facilmente a estrarre da $\mathcal{R}$ un ricoprimento di $f(K)$.

Per la seconda parte, sia $\{y_n\}$ una successione di elementi di $f(K)$. Scelti $x_n \in K$ tali che $f(x_n) = y_n$ ed estratta dalla successione $\{x_n\}$ una sottosuccessione convergente, si conclude facilmente. ∎

Applichiamo il Teorema 1.9 nel caso $Y = \mathbb{R}$, limitandoci per brevità alla sola compattezza, ma considerazioni analoghe valgono per la compattezza per successioni: deduciamo che, se K è un sottoinsieme compatto di X, allora $f(K)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$. Allora $f(K)$ è chiuso per il Teorema 1.7 e limitato per l'Esempio 1.6. Deduciamo che $f(K)$ ha l'elemento massimo e l'elemento minimo e otteniamo il cosiddetto *Teorema di Weierstrass*:

Teorema 1.10. *Se K è un compatto di uno spazio topologico, ogni funzione reale continua in K ha almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo e, se K è un sottoinsieme sequenzialmente compatto, ogni funzione reale sequenzialmente continua in K ha almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo.* ■

Vedremo che come casi particolari di compatti possiamo prendere tutti i sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$, ottenendo in tal modo la versione consueta del Teorema di Weierstrass. ■

Combinando opportunamente il risultato precedente con il Teorema 1.7 non è difficile dimostrare il risultato che segue.

Corollario 1.11. *Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \to Y$ continua e biiettiva. Allora, se X è compatto e Y è di Hausdorff, f è un omeomorfismo.* ■

2. Spazi con strutture più ricche

Consideriamo ad esempio il Teorema 1.9: esso è, ovviamente, di grande importanza e si pone il problema di verificare se l'insieme K al quale lo vogliamo applicare è compatto oppure compatto per successioni. Occorre dunque trovare altre caratterizzazioni della compattezza o almeno condizioni sufficienti.

Come abbiamo già detto, in generale la compattezza e la compattezza per successioni non sono collegate senza ipotesi sullo spazio topologico X. Se X è metrizzabile le cose vanno meglio.

Definizione 2.1. *Siano X uno spazio metrico e $E \subseteq X$. Diciamo che E è totalmente limitato quando, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento finito di E costituito da palle di X di raggio ε.* ■

Teorema 2.2. *Siano X uno spazio topologico metrizzabile e $K \subseteq X$ non vuoto. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: (i) K è compatto; (ii) K è compatto per successioni; (iii) se d è una qualunque delle metriche che inducono la topologia di X, K è completo con la metrica indotta e totalmente limitato.* ■

Cenno della dimostrazione. Da (i) a (ii). Sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di K. Se c'è una successione costante siamo a posto. In caso contrario possiamo supporre $\{x_n\}$ iniettiva e denotare con E l'immagine della successione e con E' l'insieme dei punti di accumulazione per E. Osserviamo preliminarmente che $E' \subseteq K$ e che, se $x \in E'$, allora possiamo estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione convergente a x dato che ogni spazio metrizzabile è a basi numerabili di intorni. Dunque basta trovare un elemento di E'. Se uno degli x_n appartiene a E' siamo a posto. In caso contrario, con un procedimento ricorsivo, si costruisce una successione reale positiva $\{r_n\}$ tale che, per ogni n e $k < n$ le due palle $B_{r_n}(x_n)$ e $B_{r_k}(x_k)$ siano disgiunte. Siccome tutte queste palle costituiscono un ricoprimento aperto di E dal quale non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento finito, E non è compatto. Essendo K compatto, deduciamo che E non è chiuso e, dunque, ha un punto di accumulazione.

Da (ii) a (iii). Se $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy di elementi di K, essa converge in K dato che una sua sottosuccessione converge in K. Dunque K è completo. Vediamo la totale limitatezza ragionando per assurdo. Sia dunque $\varepsilon > 0$ tale che nessuna famiglia finita di palle di raggio ε ricopra K. Allora, con un procedimento ricorsivo, si costruisce una successione $\{x_n\}$ di elementi di K tale che, per ogni n, la palla $B_\varepsilon(x_n)$ non contenga x_k per $k < n$. Allora $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ per $n \neq m$ e $\{x_n\}$ non ha sottosuccessioni di Cauchy. Assurdo.

Da (iii) a (i). Fissiamo un ricoprimento aperto $\mathcal{R}$ di K. Per comodità diciamo che un sottoinsieme K' di K è buono quando esiste una famiglia finita $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$ che ricopre K e che K' è cattivo in caso contrario e dimostriamo che K è buono. Ragionando per assurdo supponiamo K cattivo. Notiamo innanzi tutto che ogni unione finita di sottoinsiemi buoni di K è un sottoinsieme buono di K. Costruiamo, per ogni $n \geq 1$, un ricoprimento finito $\mathcal{R}_n$ di K costituito da palle di raggio $1/n$. Se tutti gli insiemi $B \cap K$ con $B \in \mathcal{R}_1$ fossero buoni, K sarebbe buono mentre esso è cattivo, per cui esiste $B_1 \in \mathcal{R}_1$ tale che l'insieme $K_1 = B_1 \cap K$ è cattivo. Se tutti gli insiemi $B \cap K_1$ con $B \in \mathcal{R}_2$ fossero buoni, K_1 sarebbe buono mentre esso è cattivo, per cui esiste $B_2 \in \mathcal{R}_2$ tale che l'insieme $K_2 = B_2 \cap K_1$ è cattivo. Procedendo, si viene a costruire una successione di palle $\{B_n\}$ tale che $B_n \in \mathcal{R}_n$ per ogni n e tutti gli insiemi

$$K_n = \Bigl(\bigcap_{i=1}^{n} B_n \Bigr) \cap K$$

sono cattivi. Siccome l'insieme vuoto è buono, nessuno dei K_n è vuoto e, per ogni n, possiamo scegliere $x_n \in K_n$. Allora è facile vedere che la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy, dunque convergente a un punto $x \in K$. Deduciamo che $x \in A$ per un certo $A \in \mathcal{R}$ e possiamo scegliere n abbastanza grande in modo che $B_n \subseteq A$. Segue che $K_n \subseteq A$ e che K_n è buono. Assurdo. ■

Notato che ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ è (ovviamente) totalmente limitato, otteniamo immediatamente il risultato seguente, noto come *Teorema di Heine-Borel*:

Corollario 2.3. *Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ è compatto.* ■

In realtà possiamo dire che la condizione del corollario è necessaria e sufficiente per la compattezza, dato che la chiusura segue dal Teorema 1.7 e la limitatezza è banalmente implicata dalla totale limitatezza oppure dall'Osservazione 1.6, e ciò è affermato nel risultato più generale che ora enunciamo. Combinando infatti con il Teorema 1.8 e ancora con il Teorema 1.7, otteniamo la caratterizzazione dei compatti euclidei.

Teorema 2.4. *Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: (i) K è compatto; (ii) K è compatto per successioni; (iii) K è chiuso e limitato.* ■

Ciò si estende per isomorfismo al caso di tutti gli *spazi normati di dimensione finita*, mentre nel caso degli spazi normati di dimensione infinita le cose cambiano radicalmente. Gli esempi che seguono, particolarmente istruttivi, sono in perfetto accordo con il teorema successivo.

Esempio 2.5: spazi di Hilbert di dimensione infinita. Sia V uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Dimostriamo che la palla unitaria chiusa B di V, cioè l'insieme $B = \{v \in V : \|v\| \le 1\}$, che evidentemente è un sottoinsieme chiuso e limitato di V, non è un insieme compatto.

Essendo V di dimensione infinita, possiamo trovare una successione $\{v_n\}$ di vettori linearmente indipendenti. Adattando la consueta procedura di ortonormalizzazione ben nota nel caso euclideo, costruiamo una successione $\{e_n\}$ di vettori ortogonali a due a due e tutti di norma unitaria, in particolare tutti appartenenti a B. Ma la formula (I.3.20) del binomio fornisce $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ per $n \ne m$, per cui nessuna sottosuccessione può essere di Cauchy. Dunque B non è sequenzialmente compatto.

La stessa costruzione mostra che, se $\varepsilon < \sqrt{2}/2$, occorrono infine palle di raggio ε per ricoprire già tutti i punti e_n, per cui B non è totalmente limitato. Ciò è in accordo con il teorema precedente dato che B è completo in quanto chiuso. ∎

Il fatto che la palla unitaria chiusa B non sia un sottoinsieme totalmente limitato non deve stupire se si fa il ragionamento seguente. Il controllo che il cubo $C = [0,1]^n$ di $\mathbb{R}^n$ è totalmente limitato corrisponde grosso modo a saper ricoprire C con un numero finito di cubi di lato arbitrariamente piccolo. Ora, se vogliamo cubi (chiusi per semplicità) di lato $1/m$, servono m^n cubi, e tale numero dipende dalla dimensione e diverge al divergere della dimensione.

Esempio 2.6: lo spazio $C^0[a,b]$ (seguito). La palla unitaria chiusa B di questo spazio non è compatta. Ancora vediamo che essa non è compatta per successioni considerando la successione $\{v_n\}$ degli elementi di B definiti dalle formule $v_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$. Supponiamo che una certa sottosuccessione, che denotiamo per semplicità con $\{u_k\}$, converga a un certo limite $u \in B$. Siccome la convergenza dello spazio è la convergenza uniforme e questa implica la convergenza puntuale, per determinare u basta calcolare il limite puntuale di $\{u_k\}$. Ma $u_k = v_{n_k}$ per certi indici n_k e la successione u_k converge, come la successione data, puntualmente alla funzione v definita dalle formule $v(t) = 0$ se $t \in [0,1)$ e $v(1) = 1$. Dunque $u = v$, il che è assurdo in quanto v è discontinua.

Teorema 2.7. *La palla unitaria chiusa di uno spazio normato V è un sottoinsieme compatto di V se e solo se V ha dimensione finita.* ∎

Al contrario, per gli spazi di Fréchet degli Esempi I.3.28 e I.3.29 la condizione che un sottoinsieme sia chiuso e limitato (con una opportuna definizione di limitatezza adatta al caso vettoriale topologico) implica la sua compattezza. Questo fatto, di dimostrazione non affatto banale, implica che questi spazi non sono normabili. ∎

Tutte le volte che facciamo intervenire insiemi compatti dobbiamo supporre che essi siano chiusi, almeno nel caso (interessante) di topologie di Hausdorff, per il Teorema 1.7.

Conviene allora introdurre una nozione, vicina alla compattezza, che non richiede agli insiemi di essere chiusi.

Definizione 2.8. *Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme $E \subseteq X$ è detto precompatto quando la sua chiusura è compatta ed è detto precompatto per successioni quando da ogni successione di elementi di E si può estrarre una sottosuccessione convergente in X .* ■

Osservazione 2.9. Allora nel caso di un sottosinsieme di uno spazio metrico completo la precompattezza, la precompattezza per successioni e la totale limitatezza sono equivalenti. ■

Il Teorema 2.7 ripropone in modo brutale il problema della verifica della compattezza nel caso degli spazi di Banach di dimensione infinita. Osserviamo che, espresso in termini di precompattezza, il risultato è analogo: la palla unitaria $B_1(0)$ di uno spazio di Banach V è precompatta se e solo se V ha dimensione finita. Segue che, se la dimensione è infinita, nessuna palla $B_r(x)$ può essere precompatta, per cui i sottoinsiemi precompatti hanno interno vuoto. Dunque essi sono insiemi "piccoli".

Il risultato successivo fornisce una caratterizzazione dei sottoinsiemi precompatti di $C^0[a,b]$ e va sotto il nome di *Teorema di Ascoli-Arzelà*. La condizione data nell'enunciato dice sostanzialmente che, fissato comunque $\varepsilon > 0$, possiamo fare in modo che il δ della definizione di continuità (uniforme) di v sia lo stesso per tutte le funzioni v della famiglia $\mathcal{F}$ considerata. Tale condizione si esprime dicendo che $\mathcal{F}$ è *equicontinua* oppure dicendo che sono equicontinue le funzioni $v \in \mathcal{F}$.

Teorema 2.10. *Un sottoinsieme limitato $\mathcal{F}$ di $C^0[a,b]$ è precompatto se e solo se verifica la condizione seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|v(x) - v(y)| \le \varepsilon$ per ogni coppia di punti $x, y \in [a,b]$ tali che $|x - y| \le \delta$ e ogni $v \in \mathcal{F}$.* ■

Cenno della dimostrazione. La precompattezza equivale alla precompattezza sequenziale e noi vediamo solo la parte della sufficienza. Tutto si riduce a dimostrare che, data una successione $\{v_n\}$ limitata in $C^0[a,b]$ che sia anche equicontinua, è possibile estrarne una sottosuccessione uniformemente convergente.

Sia dunque $\{v_n\}$ una tale successione e sia D un sottoinsieme numerabile e denso di $[a,b]$, sottoinsieme che presentiamo come immagine di una successione iniettiva $\{x_i\}$. Per ogni i fissato consideriamo la successione numerica $\{v_n(x_i)\}$: essa è limitata e dunque ha una sottosuccessione convergente. Ma, siccome la scelta degli indici di tale sottosuccessione può dipendere da i , occorre maggiore cautela. Con un procedimento diagonale si riesce a costruire una successione strettamente crescente $\{n_k\}$ di indici tale che, per ogni i , la sottosuccessione $\{v_{n_k}(x_i)\}$ converga. Usando la densità di D e l'ipotesi di equicontinuità, si vede che, per ogni x , è di Cauchy la successione $\{v_{n_k}(x)\}$, per cui è ben definita la funzione $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ limite puntuale. Usando la totale limitatezza di $[a,b]$ si vede che la convergenza è uniforme e si conclude. ■

Il teorema di Ascoli-Arzelà vale in condizioni molto più generali: l'intervallo $[a,b]$ può essere sostituito da uno spazio metrico compatto (con la necessaria generalizzazione del corrispondente spazio C^0), in particolare da un compatto di $\mathbb{R}^n$.

Ritornando al caso dell'intervallo $[a, b]$, diamo una condizione sufficiente per l'equicontinuità della famiglia. Se tutte le funzioni $v \in \mathcal{F}$ verificano le disuguaglianze

$$|v(x) - v(y)| \le L|x - y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in [a, b] \tag{2.1}$$

con una stessa costante $L \ge 0$ e uno stesso esponente $\alpha > 0$, allora $\mathcal{F}$ è equicontinua. Fissato $\varepsilon > 0$, la condizione su δ che serve è infatti $L\delta^\alpha \le \varepsilon$, per cui possiamo prendere ad esempio $\delta = (\varepsilon/L)^{1/\alpha}$.

Cogliamo l'occasione per dire che, fissati la funzione v e i numeri reali L e α, la disuguaglianza (2.1) è detta condizione di Hölder e che viene detta hölderiana di esponente α e di costante di Hölder L una funzione v che la verifica.

Notiamo incidentalmente che la (2.1) implica $|(v(x)-v(y))/(x-y)| \le L|x-y|^{\alpha-1}$, per cui, se $\alpha > 1$, la funzione v ha derivata nulla in ogni punto ed è di conseguenza costante. Per questo motivo si impone la restrizione $\alpha \le 1$ nelle condizioni di Hölder.

Tornando alla (2.1), ribadiamo che stiamo richiedendo che essa valga per tutte le $v \in \mathcal{F}$ con una stessa scelta di L e di α. Di usa esprimere tale condizione dicendo che $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni *equihölderiane*.

Nel caso $\alpha = 1$ si parla più spesso di funzioni *equilipschitziane* e si chiama di Lipschitz la costante L. Grazie al Teorema del valor medio, una condizione sufficiente per l'equilipschitzianità è che tutte le $v \in \mathcal{F}$ siano differenziabili e che le loro derivate verifichino tutte la disuguaglianza $|v'(t)| \le L$ per ogni $t \in [0, 1]$ con una stessa costante L. Abbiamo allora dimostrato il seguente

Corollario 2.11. *Ogni sottoinsieme limitato dello spazio $C^1[a, b]$ è precompatto nello spazio $C^0[a, b]$.* ∎

Più in generale, per quanto abbiamo detto sopra circa l'equihölderianità, è precompatto in $C^0[a, b]$ ogni limitato dello spazio $C^{0,\alpha}[a, b]$ che introduciamo di seguito in un caso più generale. Si può dimostrare che esso è uno spazio di Banach.

Definizione 2.12. *Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in (0, 1]$. Denotiamo con $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ lo spazio delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{R}$ verificanti la condizione*

$$\sup_{x \ne y} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty \tag{2.2}$$

e muniamo $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ della norma definita da

$$\|v\| = \|v\|_\infty + \sup_{x \ne y} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha} . \ \blacksquare$$

Il Teorema di Ascoli ha una variante per gli spazi L^p con $p < \infty$, noto come *Teorema di Riesz-Fréchet-Kolmogorov*. La corrispondente variante del corollario è la seguente: se tutte le $v \in \mathcal{F}$ sono di classe C^1 e se l'insieme delle corrispondenti derivate è limitato in $L^p(a, b)$, allora $\mathcal{F}$ è precompatta in $L^p(a, b)$. Tale enunciato, tuttavia, si generalizza opportunamente in modo da non richiedere che le $v \in \mathcal{F}$ siano di classe C^1. Questa estensione rientra nella teoria degli spazi di Sobolev.

3. Topologia debole e compattezza debole

Ritorniamo al Teorema 1.10 di Weierstrass, il quale fornisce una risposta al problema dell'esistenza dei punti di massimo e di minimo di una funzione reale. Tale problema è molto importante e, se ci limitiamo alla ricerca dei punti di minimo per funzionali, cioè applicazioni aventi per dominio un sottoinsieme di uno spazio più generale di $\mathbb{R}^n$ (spesso formato da funzioni), possiamo dire che esso costituisce il problema fondamentale di una branca della matematica, detta *calcolo delle variazioni*.

Ora il Teorema 1.10 sostanzialmente riconduce il problema alla verifica di due condizioni: una proprietà di continuità della funzione e una proprietà di compattezza del suo dominio. Qui si può far giocare la scelta della topologia nella verifica delle condizioni dette. Ma queste configgono fra loro, come ora mostriamo.

Definizione 3.1. *Siano X un insieme non vuoto e $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ due topologie in X. Diciamo che $\mathcal{I}$ è più fine di $\mathcal{I}'$, oppure che $\mathcal{I}'$ è meno fine o più debole di $\mathcal{I}$, quando, per ogni $x \in X$, risulta $\mathcal{I}(x) \subseteq \mathcal{I}'(x)$.* ∎

Dunque ogni intorno nella prima topologia è anche un intorno nella seconda. Si noti che il caso $\mathcal{I}' = \mathcal{I}$ rientra, per cui ogni topologia è più fine e più debole di se stessa, anche se quando si dice "più fine" si tende spesso ad escludere che le due topologie considerate coincidano.

Ora ci poniamo il problema di vedere che accade di alcuni concetti topologici al cambiare della topologia. Non è difficile vedere che, se raffiniamo la topologia (cioè la sostituiamo con una più fine), aumentano la famiglia degli aperti e quella dei chiusi (e vale anche il viceversa). Al contrario, diminuiscono la famiglia dei compatti, quella delle successioni convergenti e quella dei compatti per successioni, e i due casi estremi della topologia banale e della topologia discreta sono istruttivi. Nel primo abbiamo infatti pochi intorni, pochi aperti, pochi chiusi mentre nel secondo caso, al contrario, abbiamo molti intorni, molti aperti, molti chiusi; in corrispondenza, nel primo caso abbiamo che ogni successione converge e che ogni sottoinsieme è compatto e compatto per successioni, mentre nel secondo una successione converge se e solo se diventa costante a partire da un certo indice e un sottoinsieme è compatto oppure compatto per successioni se e solo se è finito.

Ora ci chiediamo che avviene della continuità delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ al variare della topologia di X, la topologia di $\mathbb{R}$ essendo quella euclidea. Si vede facilmente che, se raffiniamo la topologia di X, la classe delle funzioni continue aumenta, così come aumenta quella delle funzioni sequenzialmente continue, e ancora sono istruttivi i due esempi considerati sopra: se X è munito della topologia banale, solo le costanti sono funzioni continue o sequenzialmente continue; se invece consideriamo in X la topologia discreta, allora tutte le funzioni sono continue e sequenzialmente continue.

Queste considerazioni ci portano alle conclusioni seguenti: (i) per avere molti sottoinsiemi compatti o compatti per successioni di X occorre che la topologia di X sia molto debole; (ii) perché le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ continue o sequenzialmente continue siano molte occorre che la topologia di X sia molto fine. Dunque, effettivamente, vi è dunque il conflitto di cui si diceva. ∎

Nel caso degli spazi normati, un buon compromesso è costituito dalla cosiddetta topologia debole. Essa è una topologia associata a quella indotta dalla norma e costruita in modo canonico come segue:

Definizione 3.2. *Sia V uno spazio normato. Si chiama topologia debole di V la topologia indotta dalla famiglia delle seminorme*

$$|v|_{v'} = |\,\langle v', v\rangle\,|, \quad v \in V, \tag{3.1}$$

che si ottiene al variare di v' nel duale V'. Si chiama poi convergenza debole in V la convergenza indotta dalla topologia debole. ■

Per contrasto, la topologia originaria indotta dalla norma viene chiamata *forte* e lo stesso aggettivo viene usato per la convergenza corrispondente. Segnaliamo che sono in uso le notazioni

$$v_n \to v \qquad \text{e} \qquad v_n \rightharpoonup v$$

per denotare le convergenze forte e debole della successione $\{v_n\}$ all'elemento v.

Conviene esplicitare il significato della convergenza debole. In base alla definizione stessa e tenendo conto dalla Proposizione II.3.5, abbiamo che una successione $\{v_n\}$ di elementi di V converge debolmente all'elemento $v \in V$ se solo se

$$\lim_{n\to\infty} \langle v', v_n\rangle = \langle v', v\rangle \quad \text{per ogni } v' \in V'. \tag{3.2}$$

La topologia e la convergenza debole diventano poi più "concrete" tutte le volte che disponiamo di un teorema di rappresentazione del duale, come mostano gli esempi che presentiamo di seguito.

Esempio 3.3: lo spazio $L^p(\Omega)$ (seguito). Se $1 \le p < \infty$, grazie al Teorema IV.2.2 di Riesz, le seminorme della Definizione 3.2 possono essere parametrizzate mediante gli elementi di $L^{p'}(\Omega)$ come segue

$$|v|_u = \left|\int_\Omega uv\,dx\right|, \quad v \in L^p(\Omega) \tag{3.3}$$

e si lascia variare u in $L^{p'}(\Omega)$ per costruire la famiglia. In particolare abbiamo che una successione $\{v_n\}$ di elementi di $L^p(\Omega)$ converge debolmente all'elemento $v \in L^p(\Omega)$ se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega uv_n\,dx = \int_\Omega uv\,dx \quad \text{per ogni } u \in L^{p'}(\Omega). \tag{3.4}$$

Sfugge, si noti bene, il caso $p = \infty$.

Esempio 3.4: il caso hilbertiano. Grazie all'analogo Teorema IV.2.3 di Riesz, abbiamo che, se V è uno spazio di Hilbert, le seminorme

$$|v|_u = |(u, v)|, \quad v \in V \tag{3.5}$$

costituiscono, al variare u in V, la famiglia che induce la topologia debole. In particolare una successione $\{v_n\}$ di elementi di V converge debolmente all'elemento $v \in V$ se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} (u, v_n) = (u, v) \quad \text{per ogni } u \in V. \ \blacksquare \tag{3.6}$$

Prima di presentare i risultati legati alla compattezza, è opportuno fare qualche considerazione. Innanzi tutto c'è il problema della proprietà di separazione di Hausdorff e della collegata unicità del limite debole. Per la Proposizione II.4.3, la topologia debole è separata se e solo se per ogni $v \in V$ non nullo esiste $v' \in V'$ tale che $\langle v', v\rangle \neq 0$.

Nel caso hilbertiano questa condizione è facile da verificare: dato $v \neq 0$, si prende la seminorma delle (3.5) associata allo stesso v, cioè la seminorma $|\cdot|_v$.

Anche il caso dello spazio $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ non è difficile: dato v, si prende la seminorma data dalla (3.3) corrispondente alla funzione $u = |v|^{p-2}v$ (con la convenzione $|\xi|^{p-2}\xi = 0$ se $\xi = 0$), la quale appartiene a $L^{p'}(\Omega)$.

Il caso generale è dato dal teorema enunciato di seguito. La dimostrazione che diamo si basa sulla versione più semplice (cui accenniamo soltanto) dei non banali *Teoremi di Hahn-Banach*, che citeremo anche in seguito senza tuttavia approfondire.

Teorema 3.5. *La topologia debole di uno spazio di normato è di Hausdorff.* $\blacksquare$

Sia $v \in V$ non nullo. Come è stato detto sopra, occorre trovare $v' \in V'$ tale che $\langle v', v\rangle \neq 0$ e a questo scopo usiamo il Teorema di Hahn-Banach: *se V è uno spazio normato e V_0 è un sottospazio vettoriale di V munito della norma indotta, ogni $L_0 \in V_0'$ ha un prolungamento $L \in V'$ che ha la stessa norma duale di L_0*. Come V_0 e L_0 prendiamo il sottospazio generato da v e, rispettivamente, il funzionale dato dalla formula $L_0 w = t$ se $w = tv$ con $t \in \mathbb{R}$. Prendendo allora come v' il prolungamento di L_0 fornito dal Teorema di Hahn-Banach, abbiamo $\langle v', v\rangle = L_0 v = 1 \neq 0$. $\blacksquare$

Il secondo problema consiste nel confronto fra le topologie debole e forte e fra le rispettive convergenze. Con la notazione (3.1), la (IV.1.7) fornisce

$$|v|_{v'} \leq \|v'\|_* \|v\|$$

e si deduce facilmente che ogni intorno debole dell'origine include un intorno forte, cioè che la topologia forte è più fine della topologia debole. In particolare la convergenza forte implica la convergenza debole allo stesso limite.

Se però V ha dimensione finita, vale anche il viceversa, come ora mostriamo, cioè le due topologie e i relativi concetti di convergenza coincidono. Sia $(e_1, \ldots, e_n)$ una base di V. Rappresentato il generico $v \in V$ nella forma $\sum_{i=1}^n v_i e_i$ con $v_i \in \mathbb{R}$, poniamo $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ e, per $i = 1, \ldots, n$, definiamo $e_i' : V \to \mathbb{R}$ mediante $e_i' : v \mapsto v_i$. Allora $\|\cdot\|_\infty$ è una norma che induce la topologia di V per il Teorema I.3.4 e risulta $e_i' \in V'$ per $i = 1, \ldots, n$. Deduciamo

$$\|v\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |v_i| = \max_{i=1,\ldots,n} |\langle e_i', v\rangle| = \max_{i=1,\ldots,n} |v|_{e_i'}$$

per cui ogni intorno forte dell'origine è anche un intorno debole.

Il caso della dimensione infinita, invece, è completamente diverso. Sia infatti I un intorno debole dell'origine. Allora I contiene un intorno della base naturalmente associata alle seminorme. Esistono cioè un numero finito di elementi $v'_1, \ldots, v'_m \in V'$ e un numero $r > 0$ tali che I includa l'insieme

$$I_0 = \Big\{ v \in V : \ |v|_{v'_i} < r, \ i = 1, \ldots, m \Big\} .$$

Consideriamo ora l'operatore $L : v \mapsto (\langle v'_1, v \rangle, \ldots, \langle v'_m, v \rangle)$ da V in $\mathbb{R}^m$. Esso è lineare (e continuo) e non è difficile vedere che, essendo V di dimensione infinita, anche il nucleo N di L ha dimensione infinita. Ebbene, risulta chiaramente $N \subseteq I_0 \subseteq I$. Dunque ogni intorno debole dell'origine contiene un sottospazio di dimensione infinita, per cui la topologia debole non coincide con quella forte.

Abbiamo dunque dimostrato parte delle affermazioni contenute nel teorema dato di seguito. I punti restanti dell'enunciato sono invece più complessi in quanto la loro dimostrazione richiede la conoscenza di diversi risultati di analisi funzionale.

Teorema 3.6. *Sia V uno spazio normato. Allora: (i) se V ha dimensione finita le topologie debole e forte coincidono; (ii) se V ha dimensione infinita la topologia debole è strettamente più debole della topologia forte e non è metrizzabile; (iii) ogni successione debolmente convergente è limitata.* ■

Si noti che le due nozioni di convergenza debole e forte possono coincidere non solo nel caso della dimensione finita e che un'ipotesi di completezza non aiuta. Ciò, infatti, avviene nel caso dello spazio ℓ^1 dell'Esempio III.3.7, anche se non è facile verificare questo fatto. Le due nozioni di convergenza sono invece diverse in ogni spazio di Hilbert di dimensione infinita, come mostra l'esempio che segue.

Esempio 3.7: il caso hilbertiano (seguito). Sia V uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e sia $\{v_n\}$ una qualunque successione di vettori a due a due ortogonali e tutti di norma unitaria. Allora $\{v_n\}$ non converge fortemente e, anzi, non ha sottosuccessioni convergenti fortemente, come abbiamo osservato nell'Esempio 2.5. Ebbene la successione considerata converge debolmente a 0, come si vede usando la caratterizzazione (3.6). Fissato infatti $u \in V$, applichiamo quanto è contenuto nell'Osservazione IV.3.9 prendendo come V_n il sottospazio generato dal singolo v_n. Allora la proiezione u_n di u su V_n è data da $u_n = (u, v_n)v_n$ per l'Esempio IV.3.8 e la disuguaglianza (IV.3.9) di Bessel implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u, v_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 \le \|u\|^2 < +\infty$$

da cui anche $\lim_{n\to\infty} |(u, v_n)|^2 = 0$ e dunque la (3.6).

Osservazione 3.8. Con l'unica differenza di una costante moltiplicativa, è nelle condizioni dell'esempio precedente la successione $\{v_n\}$ costituita dalle funzioni $v_n(x) = \sin nx$, $x \in (0, \pi)$, nell'ambito dello spazio $L^2(0, \pi)$, il che mostra che la convergenza debole in spazi di tipo L^2 può mediare al limite le oscillazioni. La stessa cosa vale più in generale per la convergenza debole in spazi di tipo L^p con $1 \le p < \infty$.

Osservazione 3.9. L'Esempio 3.7 mostra che la sfera S costituita dai punti x tali che $\|x\| = 1$ non è chiusa nella topologia debole e che 0 appartiene alla sua chiusura. Lo stesso tipo di ragionamento consente di verificare che ogni x verificante $\|x\| < 1$ appartiene alla chiusura di S. Fissato infatti un tale x, esiste uno e un solo $t_n > 0$ tale che, posto $x_n = x + t_n v_n = 1$, risulti $\|x_n\| = 1$. Si vede allora che $x_n \rightharpoonup x$ usando il fatto che la successione $\{t_n\}$ è limitata. Dunque la chiusura della sfera S nella topologia debole include la palla chiusa di raggio 1. Si può in realtà dimostrare che essa coincide con tale palla chiusa.

Osservazione 3.10. Siccome la topologia debole dello spazio normato V è più debole di quella forte, ogni funzione $f : V \to \mathbb{R}$ continua rispetto alla topologia debole è continua anche rispetto alla topologia forte, ma non vi è motivo perché una funzione continua rispetto alla topologia forte sia continua anche rispetto alla topologia debole, se non nel caso della dimensione finita. Se però ci limitiamo ai funzionali $L : V \to \mathbb{R}$ lineari, allora le cose cambiamo, indipendentemente dalla dimensione di V.

Supponiamo infatti che L sia lineare e continuo rispetto alla topologia forte. Allora $L \in V'$, per cui $|\langle L, \cdot \rangle|$ è una delle seminorme della famiglia che induce la topologia debole. Segue allora che, per ogni $u \in V$ e $\varepsilon > 0$, l'insieme dei $v \in V$ tali che $|\langle L, v - u\rangle| < \varepsilon$ è un intorno debole di u, da cui immediatamente la continuità di L anche rispetto alla topologia debole.

Possiamo condensare quanto abbiamo appena dimostrato nella frase: la topologia debole porta allo stesso spazio duale. Naturalmente, se V è uno spazio localmente convesso anziché uno spazio normabile, il suo duale è ancora lo spazio dei funzionali lineari e continui. Addirittura si può dire che (e spesso questa frase è assunta come definizione): la topologia debole è la più debole delle topologie localmente convesse che non cambiano lo spazio duale. ∎

L'importanza della topologia debole è dovuta, in particolare, ai suoi legami con la compattezza. Vale infatti il seguente *Teorema di compattezza debole*:

Teorema 3.11. *Siano V uno spazio di Hilbert e E un sottoinsieme non vuoto di V. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: (i) E è precompatto rispetto alla topologia debole; (ii) E è precompatto per successioni rispetto alla topologia debole; (iii) E è limitato.* ∎

Cenno della dimostrazione. Questo è un teorema complesso e noi ci limitiamo a dimostrare che la (iii) implica la (ii), il che può essere fatto senza eccessive difficoltà. Tutto si riduce a verificare che da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente debolmente.

Siano $\{u_n\}$ una successione limitata e M tale che $\|u_n\| \le M$ per ogni n. Se tutti i vettori u_n appartengono a uno stesso sottospazio di dimensione finita allora la situazione è simile a quella degli spazi euclidei e si banalizza. Supponiamo allora che ciò non avvenga. Pur di estrarre una sottosuccessione possiamo allora supporre che, per ogni n, gli elementi $u_1, \ldots, u_n$ generino un sottospazio V_n di dimensione n. Con un procedimento di ortonormalizzazione costruiamo una successione $\{e_n\}$ di vettori mutuamente ortogonali e di norma unitaria che complessivamente generano l'unione dei V_n. Fissiamo ora un intero i per un attimo e consideriamo la successione numerica $\{c_n\}$ di termine generale $c_n = (u_n, e_i)$. Siccome $|c_n| \le M$ per ogni n, possiamo estrarre da $\{c_n\}$ una sottosuccessione convergente. Tuttavia gli indici scelti nella costruzione della sottosuccessione possono dipendere da i, per cui è opportuna una strategia più cauta. Con un procedimento diagonale troviamo una successione $\{n_k\}$ strettamente crescente di indici tale che, per ogni i, converga la corrispondente sottosuccessione estratta dalla successione $\{c_n\}$ considerata sopra. Possiamo dunque, per ogni i, trovare $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} (u_{n_k}, e_i) = \lambda_i \quad \text{per ogni } i.$$

Costruiamo allora la somma della serie

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i.$$

Naturalmente occorre controllare che la serie converge e ciò può essere fatto applicando la (IV.3.7) ai vettori $\lambda_i e_i$. Il resto della dimostrazione è dedicato alla verifica della convergenza debole di $\{u_{n_k}\}$ a u, cioè all'uguaglianza

$$\lim_{k\to\infty} (u_{n_k}, w) = (u, w) \quad \text{per ogni } w \in V.$$

Ciò richiede un calcolo, che è basato, fissato $w \in V$, sulla decomposizione di Fourier

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} (w, e_i) e_i + z' \quad \text{con } z' \in Z^{\perp}$$

ove Z è la chiusura dell'unione dei V_n. Tenendo conto delle disuguaglianze di Schwarz in V e in ℓ^2 e della disuguaglianza (IV.3.9) di Bessel, abbiamo per ogni k e m

$$\begin{aligned}
&|(u_{n_k}, w) - (u, w)| = |(u_{n_k} - u, w)| = \Big| \sum_{i=1}^{\infty} (u_{n_k} - u, e_i)(w, e_i) \Big| \\
&\le \sum_{i<m} |(u_{n_k} - u, e_i)|\, |(w, e_i)| + \sum_{i=m}^{\infty} |(u_{n_k} - u, e_i)|\, |(w, e_i)| \\
&\le \|w\| \sum_{i<m} |(u_{n_k} - u, e_i)| + \Big(\sum_{i=m}^{\infty} |(u_{n_k} - u, e_i)|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=m}^{\infty} |(w, e_i)|^2 \Big)^{1/2} \\
&\le \|w\| \sum_{i<m} |(u_{n_k}, e_i) - \lambda_i| + \|u_{n_k} - u\| \Big(\sum_{i=m}^{\infty} |(w, e_i)|^2 \Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Allora, fissato $\varepsilon > 0$, essendo $\|u_{n_k} - u\| \le M + \|u\|$, si possono scegliere prima m e poi k^* tali che l'ultimo membro sia $\le \varepsilon$ per ogni $k \ge k^*$. ■

Si pone naturalmente il problema di sapere se un risultato dello stesso tipo è vero anche per spazi di Banach e la risposta è negativa.

Esempio 3.12: lo spazio $C^0[a,b]$ (seguito). Riprendiamo l'Esempio 2.6, nel quale abbiamo mostrato che la palla unitaria chiusa B di $C^0[a,b]$ non è compatta per successioni (nella topologia forte). Vediamo ora che B non è precompatta per successioni nemmeno nella topologia debole. A questo scopo dimostriamo che la convergenza debole di una successione $\{v_n\}$ a una funzione v implica la convergenza puntuale allo stesso limite. Fatto ciò, basta procedere esattamente come nell'esempio citato usando la stessa successione là considerata.

Supponiamo dunque $v_n \rightharpoonup v$ in $C^0[a,b]$ e, fissato $t \in [a,b]$, introduciamo il funzionale $L_t : C^0[a,b] \to \mathbb{R}$ dato dalla formula $\langle L_t, v\rangle = v(t)$, funzionale che effettivamente appartiene a $(C^0[a,b])'$. Allora la (3.2), applicata con $v' = L_t$, implica $\lim_{n\to\infty} \langle L_t, v_n\rangle = \langle L_t, v\rangle$, cioè $\lim_{n\to\infty} v_n(t) = v(t)$. ∎

Gli spazi di Banach per i quali le condizioni del teorema precedente sono fra loro equivalenti sono una categoria particolare, che naturalmente comprende gli spazi di Hilbert ma che non esaurisce la totalità degli spazi di Banach. Gli spazi "buoni" sono *tutti e soli* quelli che soddisfano una proprietà particolare detta riflessività.

Definizione 3.13. *Uno spazio di Banach V è riflessivo quando vale la condizione seguente: per ogni $L : V' \to \mathbb{R}$ lineare e continuo esiste $u \in V$ tale che*

$$\langle L, v'\rangle = \langle v', v\rangle \quad \textit{per ogni } v' \in V'. \ \blacksquare \tag{3.7}$$

Nella definizione precedente interviene implicitamente lo spazio duale di V', spazio che è detto *biduale di V* e che viene denotato con V''. In generale, dato $v \in V$ e assunta la (3.7) come definizione di L, si ottiene un elemento di V''. Infatti, grazie alla (IV.1.7), si può prendere $M = \|v\|$ nella (IV.1.1) applicata agli spazi V' e $\mathbb{R}$ (e i Teoremi di Hahn-Banach assicurano che L e v hanno la stessa norma, la norma in V'' essendo la duale della duale). Allora la condizione data dalla Definizione 3.13 non è altro che un preciso teorema di rappresentazione di V''.

Osservazione 3.14. Siccome la riflessività è importante per quanto appena detto, è utile conoscere categorie di spazi riflessivi. Ad esempio sono riflessivi tutti gli spazi di tipo L^p, ma limitatamente ai valori di $p \in (1,\infty)$ (per cui L^1 e L^∞ sono esclusi), mentre non lo sono gli spazi di tipo C^0 e C^k. Inoltre la riflessività si conserva per mezzo delle operazioni di isomorfismo, di prodotto topologico e di passaggio al sottospazio chiuso. Ad esempio, se $V_1, \ldots, V_m$ sono riflessivi e se W è isomorfo a un sottospazio chiuso del prodotto dei V_i, anche W è riflessivo. Allora sono riflessivi anche i cosiddetti spazi di Sobolev costruiti a partire dagli spazi L^p, sempre con $p \in (1,\infty)$, che sono isomorfi a sottospazi chiusi di prodotti di spazi L^p.

Osservazione 3.15. Se un teorema di compattezza debole fornisce una risposta interessante ai problemi di compattezza, abbiamo il risvolto della medaglia, dovuto al conflitto evidenziato in precedenza: siccome la topologia debole di uno spazio di Banach di dimensione infinita è più debole della topologia forte, la classe delle funzioni reali continue rispetto alla topologia debole è più piccola della classe di quelle continue rispetto alla topologia forte. Tuttavia, se intendiamo solo minimizzare (cioè non ci preoccupiamo del massimo) un funzionale f e se questo è convesso, le cose vanno molto meglio, come ora cerchiamo di spiegare riferendoci, per fissare le idee, alla compattezza e alla continuità sequenziali.

Una dimostrazione della parte del Teorema di Weierstrass relativa all'esistenza del minimo può essere quella che ora illustriamo e che va sotto il nome di *metodo diretto*. Denotato con λ l'estremo inferiore della funzione f da minimizzare, la definizione stessa di estremo inferiore garantisce l'esistenza di una successione $\{x_n\}$ di elementi del dominio K di f con la proprietà seguente:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda = \inf_{x\in K} f(x). \tag{3.8}$$

Notiamo che una qualunque successione in queste condizioni è detta *successione minimizzante*. Supponiamo per un attimo che $\{x_n\}$ converga a un certo elemento $x_* \in K$ e che f sia continua per successioni: allora $\{x_n\}$ converge a $f(x_*)$ e otteniamo $\lambda = f(x_*)$ per l'unicità del limite. Dunque x_* è il punto di minimo cercato.

Tuttavia non vi è motivo perché una successione minimizzante converga, come mostrano esempi banali, ma, siccome ogni sottosuccessione di una successione minimizzante è essa stessa minimizzante, è sufficiente poter estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione convergente. Basta cioè una proprietà di tipo compattezza, accompagnata poi da una proprietà di chiusura di K per garantire che il limite x_* appartenga a K.

Ma torniamo al problema della continuità e cerchiamo di vedere se davvero essa è indispensabile. Osservato che $f(x_*) \geq \lambda$ per definizione di estremo inferiore, per concludere che x_* è un punto di minimo è sufficiente saper dimostrare che $f(x_*) \leq \lambda$, per cui dovrebbe bastare un'ipotesi più debole della continuità (sequenziale). Supponiamo infatti che

$$f(x_*) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Allora, siccome il secondo membro vale λ, deduciamo immediatamente la disuguaglianza $f(x_*) \leq \lambda$ richiesta e concludiamo che x_* è un punto di minimo.

Definizione 3.16. *Siano X uno spazio topologico e $f : X \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è semicontinua inferiormente quando, per ogni $x \in X$, risulta*

$$f(x) \leq \liminf_{y\to x} f(y).$$

Diciamo che f è semicontinua inferiormente per successioni, oppure che è sequenzialmente inforiormente semicontinua, quando, per ogni $x \in X$ e per ogni successione $\{x_n\}$ convergente a x, risulta

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n). \blacksquare$$

La proprietà di semicontinuità inferiore si abbrevia usualmente in s.c.i. Notiamo che, come per la continuità, la s.c.i. implica la s.c.i. sequenziale e che i due concetti coincidono se X è uno spazio a basi numerabili di intorni.

Riprendendo il discorso precedente della ricerca del solo minimo, vediamo che il problema si sposta alla verifica della semicontinuità inferiore.

Se è ancora vero che le due richieste di semicontinuità inferiore rispetto alle due topologie forte e debole sono diverse in generale, nel caso in cui f sia una funzione convessa tali richieste coincidono. Strettamente connesso con questo fatto è la proprietà di chiusura degli insiemi convessi.

Definizione 3.17. *Siano V uno spazio vettoriale e $f : V \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è convessa quando*

$$f(x + t(y - x)) \le f(x) + t\big(f(y) - f(x)\big) \tag{3.9}$$

per ogni $x, y \in V$ e $t \in (0, 1)$. ∎

Proposizione 3.18. *Siano V uno spazio normato e $f : V \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora f è s.c.i. rispetto alla topologia debole se e solo se essa è s.c.i. rispetto alla topologia forte.* ∎

Proposizione 3.19. *Sia C un convesso di uno spazio normato V. Allora C è chiuso rispetto alla topologia debole se e solo se esso è chiuso rispetto alla topologia forte.* ∎

Questi risultati, non banali, sono conseguenze dei teoremi di Hahn-Banach già menzionati. La Proposizione 3.19 si applica, in particolare, ai sottospazi vettoriali.

La Proposizione 3.18 ci consente di verificare la semicontinuità rispetto alla topologia forte anziché rispetto a quella debole, il che è più facile.

Supponiamo ad esempio che la funzione f sia continua rispetto alla topologia forte e convessa: allora f è semicontinua rispetto alla stessa topologia forte, dunque semicontinua rispetto anche alla topologia debole grazie alla convessità. Ciò vale in particolare con $f = \|\cdot\|$, per cui

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \text{implica} \qquad \|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| .$$

Notiamo infine che le nozioni di semicontinuità inferiore e di convessità di una funzione si estendono in modo naturale al caso di funzioni a valori in $(-\infty, +\infty]$. Tale estensione è utile perché consente spesso di formulare certi problemi di minimo in modo più semplice.

4. Spazi separabili

Abbandoniamo per un attimo il discorso sulle topologie deboli (lo riprendiamo successivamente) per parlare di spazi separabili.

Definizione 4.1. *Uno spazio topologico è separabile se contiene un sottoinsieme denso al più numerabile.* ∎

Sono separabili tutti gli spazi topologici compatti per successioni, in particolare tutti gli spazi metrici compatti, e, più in generale, tutti gli spazi topologici che possono essere presentati come unioni di famiglie numerabili di sottoinsiemi compatti per successioni. Rientrano in questa categoria tutti gli spazi euclidei.

Esempio 4.2: lo spazio euclideo (seguito). Indipendentemente da quanto abbiamo appena detto, vediamo direttamente dalla definizione che lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è separabile: infatti $\mathbb{Q}^n$ è contemporaneamente numerabile e denso. Deduciamo che è separabile ogni spazio normato di dimensione finita, dato che esso è omeomorfo a uno spazio euclideo e la separabilità si trasporta mediante omeomorfismi.

Esempio 4.3: lo spazio $L^\infty(\Omega)$ (seguito). Le cose cambiano invece in dimensione infinita. Ad esempio, si dimostra che $L^\infty(\Omega)$ non è separabile e possiamo controllare questa affermazione nel caso $\Omega = \mathbb{R}$. Denotiamo per semplicità con V lo spazio $L^\infty(\mathbb{R})$. Per ogni $s \in \mathbb{R}$ consideriamo la funzione $v_s \in V$ definita q.o. dalle formule $v_s(x) = 2$ se $x < s$ e $v_s(x) = 0$ se $x > s$. Sia ora E un qualunque sottoinsieme denso in V. Allora, per ogni $s \in \mathbb{R}$, l'insieme E deve avere almeno un punto $u_s \in B_1(v_s)$. D'altra parte, se $r \neq s$, risulta $\|v_r - v_s\|_\infty = 2$, per cui le palle $B_1(v_r)$ e $B_1(v_s)$ sono disgiunte e i due punti u_r e u_s sono distinti. Dunque E contiene un'infinità non numerabile di punti. ∎

Teorema 4.4. *Uno spazio normato V è separabile se e solo se esiste una successione non decrescente $\{V_n\}$ di sottospazi di dimensione finita la cui unione è densa.* ∎

Cenno della dimostrazione. Se V è separabile, considerato un suo sottoinsieme denso che sia l'immagine di una successione $\{x_n\}$ si può prendere come V_n il sottospazio generato da $x_1, \ldots, x_n$ e verificare quanto è affermato nell'enunciato.

Viceversa, se $\{V_n\}$ è come nell'enunciato, scelto per ogni n un sottoinsieme D_n al più numerabile e denso in V_n, l'unione dei D_n è al più numerabile e densa in V. ∎

Esempio 4.5: lo spazio $L^p(\Omega)$ (seguito). Se $1 \leq p < \infty$ lo spazio $L^p(\Omega)$ è separabile. Consideriamo per semplicità il caso $\Omega = (0,1)$ e poniamo $V = L^p(0,1)$. Per ogni n suddividiamo l'intervallo $(0,1)$ in 2^n intervalli uguali e denotiamo con V_n il sottospazio di V costituito dalle funzioni che sono costanti in ciascuno degli intervallini della suddivisione. Allora V_n ha dimensione 2^n e $V_n \subseteq V_{n+1}$ per ogni n. D'altra parte, siccome le funzioni a scala costituiscono un sottoinsieme denso di V e ogni funzione a scala può a sua volta essere approssimata nella norma di V con funzioni a scala che hanno salti solo in punti del tipo $k\,2^n$, cioè con funzioni che appartengono all'unione dei V_n, tale unione è densa e V è separabile.

Osservazione 4.6. Non è difficile vedere che, già nell'ambito di spazi topologici generici, la separabità si conserva per mezzo delle operazioni di omeomorfismo, di prodotto topologico e di passaggio al sottospazio topologico. Così, se $X_1, \ldots, X_m$ sono spazi topologici separabili e se Y è omeomorfo a un sottoinsieme del prodotto degli X_i, anche Y è separabile. Allora sono separabili anche i già menzionati spazi di Sobolev con $p \in [1, \infty)$, che sono omeomorfi a sottoinsiemi di prodotti di spazi L^p.

5. Topologia debole* nel duale

Consideriamo uno spazio di Banach V e il suo duale V'. Allora anche V' è uno spazio di Banach rispetto alla norma duale. Sebbene si possa parlare, come in ogni spazio di

Banach, di topologia debole, è utile introdurre un'altra topologia localmente convessa, detta topologia debole* (si legge "debole star" oppure "debole con asterisco").

Definizione 5.1. *Sia V uno spazio normato. Si chiama topologia debole* di V' la topologia indotta dalla famiglia delle seminorme*

$$|v'|_v = |\langle v', v\rangle|, \quad v' \in V', \tag{5.1}$$

che si ottiene al variare di v nello spazio dato V. Si chiama poi convergenza debole in V' la convergenza indotta dalla topologia debole*.* ■

Anche in questo caso conviene esplicitare il significato. In base alla definizione stessa e tenendo conto dalla Proposizione II.3.5, abbiamo che una successione $\{v'_n\}$ di elementi di V' converge debolmente* all'elemento $v' \in V'$ se solo se

$$\lim_{n\to\infty} \langle v'_n, v\rangle = \langle v', v\rangle \quad \text{per ogni } v \in V. \tag{5.2}$$

Segnaliamo che si usa spesso la notazione

$$v'_n \overset{*}{\rightharpoonup} v' .$$

Il ruolo della topologia debole* e della convergenza debole* è particolarmente significativo in corrispondenza di un teorema di rappresentazione di V'. Supponiamo dunque di avere stabilito, con una formula concreta, un isomorfismo I fra lo spazio di Banach V' e un certo spazio di Banach W, pure concreto. Allora l'applicazione I trasporta la topologia debole* di V' in una topologia su W, quell'unica topologia che rende I omeomorfismo. Possiamo chiamare debole* tale topologia di W, anche se W non è, letteralmente, il duale di uno spazio di Banach.

Esempio 5.2: lo spazio $L^\infty(\Omega)$ (seguito). Un caso interessante si ottiene prendendo $V = L^1(\Omega)$ e $W = L^\infty(\Omega)$, l'isomorfismo essendo quello dato dal Teorema IV.2.2 di Riesz. Vi è dunque una e una sola topologia in $L^\infty(\Omega)$ che rende omeomorfismo la corrispondenza stabilita dalla formula (IV.2.3) fra il duale di $L^1(\Omega)$ e lo stesso $L^\infty(\Omega)$. Esattamente in questo senso si parla di topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$ e di relativa convergenza. Abbiamo allora che una successione $\{v_n\}$ di elementi di $L^\infty(\Omega)$ converge debolmente* alla funzione $v \in L^\infty(\Omega)$ se e solo se la cosa avviene per i corrispondenti elementi del duale di $L^1(\Omega)$, cioè se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u v_n \, dx = \int_\Omega uv \, dx \quad \text{per ogni } u \in L^1(\Omega). \tag{5.3}$$

Ad esempio, nel caso $\Omega = (-1,1)$, la successione $\{v_n\}$ di funzioni continue data dalle formule $v_n(x) = \tanh nx$ converge alla funzione segno debolmente* in $L^\infty(-1,1)$. Segue che $C^0[-1,1]$ non è chiuso in $L^\infty(-1,1)$ debole*. ■

La topologia debole* di V' ha molto in comune con la topologia debole di uno spazio di Banach: ad esempio essa è di Hausdorff (ora il controllo è banale), coincide con la topologia forte di V' quando V ha dimensione finita, mentre, nel caso opposto, non è nemmeno metrizzabile. La sua introduzione, tuttavia, è ben giustificata se valgono risultati significativi che fanno intervenire questi concetti. Abbiamo in proposito il seguente *Teorema di compattezza debole**:

Teorema 5.3. *Siano V uno spazio di Banach e E un sottoinsieme non vuoto dello spazio duale V'. Allora sono equivalenti le condizioni seguenti: (i) E è precompatto rispetto alla topologia debole*; (ii) E è limitato.*

Inoltre, se V è separabile, dette condizioni equivalgono alla seguente: (iii) E è precompatto per successioni rispetto alla topologia debole.* ∎

L'ultima parte del teorema è dovuta al fatto che ora cerchiamo di spiegare. Se D è un sottoinsieme di V, possiamo considerare la famiglia $\mathcal{F}_D$ costituita dalle seminorme (5.1) ottenuta al variare di v in D anziché in tutto V. Sia $\mathcal{I}_D$ la topologia in V' indotta da $\mathcal{F}_D$. Supponiamo ora D denso in V. Allora si vede facilmente che la famiglia $\mathcal{F}_D$ è anche separata per cui $\mathcal{I}_D$ è di Hausdorff. Supponiamo ora D anche numerabile. Allora è numerabile anche $\mathcal{F}_D$, per cui la topologia $\mathcal{I}_D$ è metrizzabile. Tuttavia si può dimostrare che, se V ha dimensione infinita, $\mathcal{I}_D$ non coincide con la topologia debole* di V'. Ciò nonostante non è particolarmente difficile vedere che, se E è un sottoinsieme limitato di V', la topologia debole* e $\mathcal{I}_D$ inducono su E la stessa topologia, per cui la topologia indotta su E dalla topologia debole* è metrizzabile e il punto (iii) segue dal Teorema 2.2.

Si noti che non vi è nulla di strano nel fatto che due diverse topologie in un insieme X possano indurre la stessa topologia su tutti i sottoinsiemi di X di un certo tipo. Consideriamo ad esempio la semiretta $X = [0, +\infty)$ con le due topologie che ora illustriamo. La prima è la topologia euclidea, mentre la seconda ha le seguenti definizioni di intorno: se $x > 0$ gli intorni di x sono quelli euclidei, mentre 0 ha X come unico intorno. Allora le due topologie, anche se sono diverse, inducono la topologia euclidea su ogni sottoinsieme $E \subseteq X$ che non contiene 0.

Esempio 5.4: lo spazio $L^\infty(\Omega)$ (seguito). Ricordando l'Esempio 5.2, possiamo applicare senz'altro la prima parte del teorema. D'altra parte, siccome $L^1(\Omega)$ è separabile (vedi Esempio 4.5) possiamo applicare anche la seconda e ottenere l'equivalenza delle tre condizioni. In particolare da ogni successione $\{v_n\}$ di elementi di $L^\infty(\Omega)$ limitata, in particolare da una successione limitata in $C^0(\overline{\Omega})$, si può estrarre una sottosuccessione convergente debolmente* in $L^\infty(\Omega)$, cioè esiste $v \in L^\infty(\Omega)$ alla quale una certa sottosuccessione della successione data converge debolmente*.

Capitolo VI

Primi problemi ellittici variazionali

Diamo qualche cenno su certi problemi relativi a una classe di equazioni alle derivate parziali, dette appunto di tipo ellittico, prendendo in considerazione problemi che consistono nella ricerca delle soluzioni dell'equazione che verificano condizioni aggiuntive dette *condizioni al contorno* oppure *condizioni ai limiti*. Nel caso delle equazioni del secondo ordine queste consistono nell'imporre alle soluzioni u dell'equazione ellittica considerata una condizione in ogni punto del bordo dell'aperto Ω in cui il problema stesso è posto. Si noti che, nel caso monodimensionale in cui Ω è un intervallo limitato (a,b) e sempre nel caso del secondo ordine, l'equazione alle derivate parziali diventa un'equazione differenziale ordinaria e le condizioni ai limiti per u consistono in una condizione relativa al punto a e in una relativa al punto b, il che lascia sperare in risultati di esistenza e unicità.

1. Motivazioni per nuovi spazi funzionali

Molti problemi ellittici costituiscono modelli matematici di fenomeni stazionari e molti di questi sono connessi con problemi di minimo. Consideriamo come problema-modello un tipico problema di calcolo delle variazioni: minimizzare l'integrale

$$J(v) = \int_\Omega F(x, v(x), \nabla v(x))\, dx \tag{1.1}$$

fra le funzioni $v : \Omega \to \mathbb{R}$ che hanno una certa regolarità e che si annullano in ogni punto del bordo Γ di Ω, cioè, che verificano la cosiddetta *condizione di Dirichlet*. Nella (1.1) Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e F è una funzione reale definita nel prodotto cartesiano $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Il caso più semplice è quello in cui F è dato dalla formula $F(x,s,\xi) = (1/2)|\xi|^2 - f(x)s$, ove $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione assegnata e il coefficiente $1/2$ non ha nulla di essenziale. La (1.1) diventa l'integrale

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int_\Omega f v\, dx \tag{1.2}$$

detto *integrale di Dirichlet*. La nostra intenzione è quella di usare i metodi di analisi funzionale dei capitoli precedenti per studiare questioni di esistenza e di unicità del minimo dei funzionali (1.1) e (1.2). Naturalmente siamo disposti a pagare facendo ipotesi sul dominio Ω e sulle funzioni F e f.

Ebbene, se confrontiamo il funzionale (1.2) con quello dato dalla formula (IV.2.5), notiamo una profonda analogia. Anzi essi formalmente coincidono se la norma e il funzionale che compaiono nella (IV.2.5) sono quelli dati dalle formule

$$\|v\| = \|\nabla v\|_2 \qquad \text{e} \qquad \langle L, v\rangle = \int_\Omega f v \, dx. \tag{1.3}$$

Si noti che la norma considerata è effettivamente una norma in un qualunque spazio V ragionevole di funzioni nulle sul bordo Γ. Infatti l'unico problema lo potrebbe offrire la (I.3.2), ma la condizione $\|v\| = 0$ implica (ragionevolmente) che v sia costante su ciascuna delle componenti connesse di Ω e la condizione di annullamento al bordo garantisce allora che $v = 0$. Tale norma, inoltre, è indotta dal prodotto scalare

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \tag{1.4}$$

D'altra parte la disuguaglianza (I.3.19) di Schwarz in $L^2(\Omega)$, che coincide con la disuguaglianza (IV.2.2) di Hölder con $p = 2$, garantisce che

$$|\langle L, v\rangle| \le \|f\|_2 \, \|v\|_2$$

non appena supponiamo $f \in L^2(\Omega)$, e la condizione (IV.1.1) (con $W = \mathbb{R}$) è soddisfatta con $M = c\,\|f\|_2$ se lo spazio V che dobbiamo scegliere e la sua norma verificano

$$V \subseteq L^2(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \|v\|_2 \le c\,\|v\| \quad \text{per ogni } v \in V.$$

Allora tutto sembra andare nella giusta direzione, purché riusciamo a soddisfare l'ipotesi fondamentale del Teorema IV.2.4 che intendiamo applicare: la completezza.

Ecco dunque l'esigenza di costruire uno sottospazio V di $L^2(\Omega)$ che sia uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare (1.4). Ora il problema vero è quello di definire rigorosamente la regolarità delle funzioni che dovranno appartenere a V e la regolarità C^1 non funziona perché non garantisce la completezza.

Più in generale, se si vuole che i risultati del Capitolo 5 siano applicabili a problemi di minimizzazione di funzionali di tipo (1.1), occorre costruire spazi la cui definizione fa intervenire le derivate e che siano riflessivi, e ancora gli spazi di tipo C^1 sono inadeguati: occorre imitare, per quanto possibile, la costruzione di C^1 ma a partire da L^p con $p \in (1, \infty)$ anziché da C^0.

2. Spazi di Sobolev

Questi sono gli spazi che rispondono allo scopo. La loro definizione che diamo ha senso per $p \in [1, \infty]$ ma le proprietà migliori dal punto di vista dell'analisi funzionale si hanno se $p \in (1, \infty)$ o addirittura nel caso $p = 2$, che è quello hilbertiano.

La definizione di spazio di Sobolev si basa su di una nuova definizione di derivata parziale, detta *derivata debole* o anche *derivata nel senso delle distribuzioni* e adatta a funzioni definite solo q.o., come quelle dello spazio $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ introdotto nell'Esempio III.3.14. Osserviamo infatti che la definizione classica di derivata di una funzione u

in un punto x_0 fa intervenire $u(x_0)$ e perde di significato quando è applicata a classi di funzioni misurabili, per le quali il valore nel punto ha perso di significato.

Nella definizione che segue usiamo l'espressione *funzione a supporto compatto* per una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ con il significato seguente: esiste un compatto $K \subset \Omega$ (che dipende dalla v fissata di volta in volta) tale che v è nulla in $\Omega \setminus K$.

Definizione 2.1. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Diciamo che u ha derivata debole rispetto alla i-esima variabile quando esiste una funzione $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ che verifica la formula di integrazione per parti*

$$\int_\Omega wv\,dx = -\int_\Omega u\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \tag{2.1}$$

per tutte le funzioni $v \in C^1(\Omega)$ a supporto compatto. ∎

Si noti che i due integrali che compaiono nella (2.1) hanno senso. Infatti, fissata v di classe C^1 a supporto compatto e considerato il compatto K fuori del quale v è nulla, ciascuno dei due integrandi è il prodotto di una funzione integrabile in K per una funzione limitata in K.

Osservazione 2.2. Si noti che, se u è di classe C^1, allora $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e come w possiamo prendere proprio la derivata classica $\partial u/\partial x_i$, che pure appartiene a $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Invece, se u è un generico elemento di $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, in generale u non ha derivata debole, cioè non esiste alcuna $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ nelle condizioni della definizione (ad esempio, nessuna funzione a scala non costante su un intervallo ha derivata debole). Tuttavia si riesce a dimostrare che, se una tale w esiste, allora essa è unica. In tal caso l'unica w ammissibile è detta *la derivata debole* e viene denotata con il simbolo consueto $\partial u/\partial x_i$. Pertanto, per la definizione stessa, vale la formula

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\,dx = -\int_\Omega u\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx \tag{2.2}$$

per ogni $v \in C^1(\Omega)$ a supporto compatto. ∎

Definiamo ora lo *spazio di Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$. La definizione ha senso in quanto $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per ogni $p \in [1,\infty]$, come conseguenza del Teorema IV.2.1.

Definizione 2.3. *Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $p \in [1,\infty]$ denotiamo con $W^{1,p}(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $v \in L^p(\Omega)$ verificanti la condizione seguente: per $i = 1,\dots,n$ esiste la derivata debole di u rispetto alla i-esima variabile e questa appartiene a $L^p(\Omega)$. Muniamo poi $W^{1,p}(\Omega)$ della norma*

$$\|v\|_{1,p} = \Bigl(\int_\Omega \bigl(|v|^p + |\nabla v|^p\bigr)\Bigr)^{1/p} \quad \textit{oppure} \quad \|v\|_{1,\infty} = \max\{\|v\|_\infty, \|\nabla v\|_\infty\} \tag{2.3}$$

rispettivamente nei due casi $p < \infty$ e $p = \infty$. ∎

Naturalmente il gradiente che compare nelle (2.3) è il vettore delle derivate parziali, ora intese in senso debole.

Osservazione 2.4. Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è analogo allo spazio $C^1(\overline{\Omega})$ (Esempio I.3.9): lo "spazio di riferimento" $C^0(\overline{\Omega})$ è qui sostituito da $L^p(\Omega)$ e le derivate sono intese in senso debole (si noti incidentalmente che non sorgono le difficoltà segnalate nell'esempio citato, per cui non è necessario imporre ipotesi particolari su Ω). Allora, come è stato possibile generalizzare e passare da $C^1(\overline{\Omega})$ a $C^k(\overline{\Omega})$, qui si può generalizzare arrivando agli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ con $k > 1$. Ad esempio, dire che una funzione v appartiene a $W^{2,p}(\Omega)$ significa dire che $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e che tutte le sue derivate parziali (deboli) appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$. La norma si definisce poi in modo naturale. Tuttavia, per semplicità, ci limiteremo al caso $k = 1$ e tratteremo solo gli spazi $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 2.5. *Per ogni $p \in [1, \infty]$ lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach. Esso è poi separabile se e solo se $p \in [1, \infty)$, riflessivo se e solo se $p \in (1, \infty)$ e di Hilbert se e solo se $p = 2$, nel qual caso il prodotto scalare è dato dalla formula*

$$(u, v)_1 = \int_\Omega \bigl(uv + \nabla u \cdot \nabla v\bigr)\, dx. \ \blacksquare \tag{2.4}$$

Cenno della dimostrazione. Molte delle affermazioni del teorema possono essere dimostrate senza eccessive difficoltà osservando preliminarmente che la formula

$$Lv = \bigl(v, \partial v/\partial x_1, \ldots, \partial v/\partial x_n\bigr)$$

definisce un'applicazione da $W^{1,p}(\Omega)$ in $(L^p(\Omega))^{n+1}$ lineare e isometrica e che il sottospazio immagine di L è chiuso. Ad esempio la completezza per ogni $p \in [1, \infty]$ segue dai Teoremi III.1.6 e III.1.8 e dalla (III.1.2) e la separabilità per $p \in [1, \infty)$ e la riflessività per $p \in (1, \infty)$ seguono da quanto affermato nelle Osservazioni V.4.6 e V.3.14 rispettivamente. La necessità delle condizioni imposte a p per le varie tesi, invece, è più delicata. Precisiamo poi che, se $p \neq 2$, nessuna norma equivalente è indotta da un prodotto scalare. $\blacksquare$

Osservazione 2.6. Il caso $p = \infty$ conduce a uno spazio che è simile a quello delle funzioni lipschitziane e che coincide con questo se Ω è un aperto limitato lipschitziano. Ricordiamo la definizione di aperto lipschitziano, dato che questa ipotesi sarà usata anche in seguito. Un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ di bordo Γ è lipschitziano quando, per ogni punto $x \in \Gamma$ esistono un sistema di coordinate ortogonali $y_1, \ldots, y_n$, un aperto $\omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, una funzione $\varphi : \omega \to \mathbb{R}$ lipschitziana e un numero reale $\delta > 0$ tali che i punti $(y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ verificanti $y' \in \omega$ e $|y_n - \varphi(y')| < \delta$ costituiscano un intorno di x nelle nuove coordinate e, per tali punti, le condizioni $y \in \Gamma$ e $y \in \Omega$ equivalgano rispettivamente alle condizioni $y_n = \varphi(y')$ e $y_n > \varphi(y')$.

Supponiamo allora $1 \le p < \infty$. In tal caso vi è un altro spazio che ragionevolmente svolge un ruolo ugualmente buono, anzi, si direbbe, migliore: il completamento di $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ rispetto alla prima delle norme (2.3). Tale spazio è stato effettivamente introdotto ed è stato denotato con $H^{1,p}(\Omega)$. Si è naturalmente posto il problema del confronto fra $H^{1,p}(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$, eventualmente in ipotesi opportune su Ω . Ebbene, un celebre teorema, chiamato " $H = W$ " e dovuto a Meyers-Serrin, afferma che i due spazi sono isomorfi. Precisamente, *senza ipotesi alcuna su Ω* , esso assicura che $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$. Notiamo incidentalmente che, al contrario, un risultato di densità in $W^{1,p}(\Omega)$ di sottospazi di funzioni regolari fino al bordo richiede ipotesi di regolarità su Ω.

Dunque le due notazioni H e W sono perfettamente intercambiabili. Segnaliamo che nel caso $p = 2$, al posto delle due possibili notazioni $H^{1,2}(\Omega)$ e $W^{1,2}(\Omega)$, si usa più spesso quella più snella $H^1(\Omega)$. ∎

Le funzioni che hanno le derivate parziali in senso debole, in particolare le funzioni di Sobolev, sono per certi versi simili a quelle di classe C^1, in quanto godono di varie proprietà analoghe. Ad esempio, una funzione di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ con gradiente (debole) nullo è costante su ogni componente connessa di Ω. Ma per questo rimandiamo a testi specializzati. Tuttavia qualche osservazione merita di essere fatta anche in questa sede.

La prima riguarda il fatto che le funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ possono essere molto irregolari se p ha un valore basso. Precisamente si dimostrano alcuni fatti positivi e altri negativi in dipendenza dal valore di p e dalla dimensione n dell'aperto Ω:

se Ω è un aperto limitato lipschitziano e $p > n \geq 1$ oppure $p = n = 1$, ogni $v \in W^{1,p}(\Omega)$ ha un rappresentante continuo fino al bordo; (2.5)

se $n > 1$ e $p \in [1, n]$ esiste $v \in W^{1,p}(\Omega)$ non limitata in alcun aperto $\omega \subset \Omega$ non vuoto. (2.6)

Si noti che si parla comunque di derivate parziali, ma che nel secondo caso si è ben lontani dal caso classico delle funzioni differenziabili ovunque. Notiamo che l'importante spazio $H^1(\Omega)$ cade nel secondo caso se $n > 1$. Ad esempio, una funzione $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ non limitata in alcun aperto non vuoto è data dalla formula

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left| \ln |x - x_k| \right|^{\lambda} \zeta(|x - x_k|) \quad \text{per q.o. } x$$

ove $\{x_k\}$ è una successione che descrive un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}^2$, $\lambda \in (0, 1/2)$ e $\zeta \in C^1[0, +\infty)$ verifica $\zeta = 1$ in $[0, 1/3]$ e $\zeta = 0$ in $[1/2, +\infty)$.

La seconda osservazione è strettamente legata alla prima. Consideriamo il caso della minimizzazione di un integrale di tipo (1.1): la scelta dello spazio in cui ambientare l'applicazione dei risultati astratti è dettato dalla funzione F e in molti casi occorre prendere come ambiente uno spazio di Sobolev, scelto in modo che il funzionale "assomigli il più possibile" a una funzione della norma. Ad esempio nel caso del funzionale (1.2) occorre scegliere $p = 2$. Ma il problema che avevamo posto consiste nella minimizzazione del funzionale (1.1) su una classe di funzioni nulle sul bordo Γ di Ω, e qui sorge un problema.

Infatti, se la forma della funzione F conduce a un valore di p che rientra nel caso (2.6), come nel caso (1.2) con $n = 2$, le funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ possono essere molto irregolari e non è chiaro che cosa significhi "nulle al bordo". Occorre dunque una definizione precisa. Si noti che questa necessità si presenterebbe, a maggior ragione, per funzionali che fanno intervenire anche integrali su Γ, per interpretare i quali occorre poter parlare di $v|_\Gamma$. Ma ciò non ha significato come restrizione a Γ nel senso letterale, dato che Γ ha misura nulla nei casi migliori e v non ha un rappresentante qualificato.

Questo inconveniente è eliminato dal risultato che presentiamo di seguito, il quale attribuisce in generale un significato alla scrittura $v|_\Gamma$ per ogni $v \in W^{1,p}(\Omega)$ e per ogni $p \in (1, \infty)$, in particolare anche nel caso $1 < p \le n$.

I valori estremi $p = 1$ e $p = \infty$, che pure potrebbeno essere considerati, sono esclusi qui e nel seguito per semplicità, cioè per evitare distinzioni e complicazioni.

Precisiamo che $C^1(\overline{\Omega})$ denota lo spazio delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{R}$ che hanno un prolungamento di classe C^1 definito in tutto $\mathbb{R}^n$ e nullo fuori di un compatto. Per tali funzioni v il significato di $v|_\Gamma$ è il seguente:

$$v|_\Gamma(x) = \lim_{y \to x} v(y) \quad \text{per ogni } x \in \Gamma. \tag{2.7}$$

Teorema 2.7. *Siano $p \in (1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato lipschitziano oppure un semispazio aperto di $\mathbb{R}^n$ e Γ il bordo di Ω. Allora esiste uno e un solo operatore lineare e continuo*

$$v \mapsto v|_\Gamma, \quad v \in W^{1,p}(\Omega), \tag{2.8}$$

da $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Gamma)$ tale che, per ogni $v \in C^1(\overline{\Omega})$, $v|_\Gamma$ coincide con la funzione (2.7). *Vale inoltre la formula di integrazione per parti*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v\, dx = -\int_\Omega u\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_\Gamma u\, v\, n_i\, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{2.9}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W^{1,p'}(\Omega)$, ove n_i è l'i-esima componente del versore normale a Γ diretto verso l'esterno di Ω. ■

L'operatore di cui si parla nel teorema è chiamato *operatore di traccia* e il teorema stesso viene detto *Teorema di traccia* per questo motivo. Notiamo poi che tutti gli integrali che compaiono nella (2.9) hanno senso grazie alla disuguaglianza di Hölder.

Cenno della dimostrazione. Il procedimento non è banale e si fonda sui passi seguenti: (i) il sottospazio $C^1(\overline{\Omega})$, che momentaneamente denotiamo con V per comodità, è denso in $W^{1,p}(\Omega)$; (ii) l'operatore lineare $v \mapsto v|_\Gamma$ da V in $L^p(\Gamma)$ è continuo se V è munito della topologia indotta da quella di $W^{1,p}(\Omega)$; (iii) tale operatore si può prolungare in uno e un solo modo a un operatore lineare e continuo da $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Gamma)$; (iv) si scrive la formula di integrazione per parti su approssimanti di classe C^1 delle funzioni u e v e si passa al limite.

Particolarmente delicati, almeno se $n > 1$, sono i primi due punti. Qui ci limitiamo a dimostrare il punto (ii) nel caso particolare in cui Ω è il semispazio. Fissiamo $v \in C^1(\overline{\Omega})$, scriviamo il generico punto $x \in \mathbb{R}^n$ come $x = (x', x_n)$ ove $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ e, per semplicità, denotiamo con ∂_n la derivazione parziale rispetto a x_n. Conserviamo la notazione $\|\cdot\|_p$ per la norma in $L^p(\Omega)$ ma, per evitare confusioni, denotiamo con $\|\cdot\|_{p,\Gamma}$ la norma in $L^p(\Gamma)$. Osservato che la funzione $y \mapsto |y|^p$, $y \in \mathbb{R}$, è differenziabile ovunque dato che $p > 1$ e che la sua derivata vale $|y|^{p-2}y$ in ogni punto y pur di convenire che $|y|^{p-2}y = 0$ se $y = 0$, per ogni $x \in \Omega$ abbiamo

$$|v(x', 0)|^p = |v(x', x_n)|^p - p \int_0^{x_n} |v(x', t)|^{p-2} v(x', t)\, \partial_n v(x', t)\, dt.$$

Imponendo la restrizione $x_n \le 1$ deduciamo

$$|v(x',0)|^p \le |v(x',x_n)|^p + p\int_0^1 |v(x',t)|^{p-1}\,|\partial_n v(x',t)|\,dt$$

e integrando in $\mathbb{R}^{n-1}$ rispetto a x' e in $(0,1)$ rispetto a x_n otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x',0)|^p\,dx' \le \int_\Omega |v(x',x_n)|^p\,dx'\,dx_n + p\int_\Omega |v(x',t)|^{p-1}\,|\partial_n v(x',t)|\,dx'\,dt.$$

Usiamo la disuguaglianza (IV.2.2) di Hölder. Notato che $(p-1)p' = p$ abbiamo

$$\|v|_\Gamma\|_{p,\Gamma}^p \le \|v\|_p^p + p\,\|v\|_p^{p/p'}\,\|\partial_n v\|_p\,.$$

Applichiamo ora la disuguaglianza di Young $ab \le (1/p)a^p + (1/p')b^{p'}$, che vale per ogni $a,b \ge 0$, con le scelte $a = \|\partial_n v\|_p$ e $b = \|v\|_p$. Essendo $1 + (p/p') = p$ otteniamo

$$\|v|_\Gamma\|_{p,\Gamma}^p \le p\,\|v\|_p^p + \|\partial_n v\|_p^p \le p\,\|v\|_{1,p}^p$$

e la (IV.1.1) vale con $M = p^{1/p}$. ■

Risolto così il problema delle tracce, ha senso parlare di funzioni nulle al bordo e possiamo dare la definizione seguente:

Definizione 2.8. *Siano $p \in (1,\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato lipschitziano e Γ il bordo di Ω. Poniamo*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{v \in W^{1,p}(\Omega):\ v|_\Gamma = 0\right\}. \tag{2.10}$$

Poniamo inoltre $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$. ■

Osservazione 2.9. Si osservi che $W_0^{1,p}(\Omega)$ è definito come il nucleo di un operatore lineare e continuo. Dunque esso è un sottospazio chiuso di $W^{1,p}(\Omega)$, in particolare esso è completo rispetto alla norma indotta. Valgono poi per $W_0^{1,p}(\Omega)$ le stesse proprietà che il Teorema 2.5 attribuisce a $W^{1,p}(\Omega)$.

Avvertiamo però che più spesso il sottospazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è definito come la chiusura in $W^{1,p}(\Omega)$ del sottospazio costituito dalle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto. Questa definizione si presta al caso di un aperto Ω completamente generico e coincide con quella data sopra nel caso dell'aperto limitato lipschitziano.

Segnaliamo infine che il duale dello spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ si denota con $W^{-1,p'}(\Omega)$, con la scrittura abbreviata $H^{-1}(\Omega)$ nel caso $p = 2$. Tali spazi vengono pure annoverati fra gli spazi di Sobolev. In casi come questi si parla di spazi a esponente negativo. ■

Riprendiamo il discorso della minimizzazione del funzionale (1.2). Allora lo spazio che dobbiamo prendere come ambiente non è tanto $H^1(\Omega)$ quanto piuttosto $H_0^1(\Omega)$, e sorge un altro problema: la norma che $H^1(\Omega)$ induce su $H_0^1(\Omega)$ non è la stessa che compare nel funzionale quando vogliamo identificare (1.2) con (IV.2.5). Tuttavia le norme sono equivalenti grazie al risultato dato di seguito.

Teorema 2.10. *Siano* $p \in (1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato lipschitziano e* Γ *il bordo di* Ω. *Allora esiste una costante* $c > 0$ *tale che valga la disuguaglianza*

$$\|v\|_p \leq c \, \|\nabla v\|_p \quad \textit{per ogni } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.11}$$

detta disuguaglianza di Poincaré e il secondo membro della (2.11) *definisce una norma in* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *equivalente a quella indotta dalla norma di* $W^{1,p}(\Omega)$. ∎

Avvertiamo che, con la definizione di $W_0^{1,p}(\Omega)$ più generale cui si è accennato sopra, si potrebbe evitare di fare l'ipotesi che Ω sia lipschitziano e ottenere il Teorema 2.10 per ogni aperto Ω *limitato*. L'ipotesi di limitatezza può poi essere attenuata (basta la limitatezza "in una direzione") ma non completamente soppressa. Per semplicità, tuttavia, non indaghiamo oltre su questo punto.

3. Qualche semplice problema ellittico

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per studiare compiutamente il problema del minimo del funzionale (1.2) sullo spazio $H_0^1(\Omega)$: si può applicare infatti il Teorema IV.2.4 e ottenere il risultato enunciato di seguito.

Teorema 3.1. *Siano* Ω *un aperto limitato lipschitziano e* $f \in L^2(\Omega)$. *Allora esiste una e una sola funzione* $u \in H_0^1(\Omega)$ *che minimizza il funzionale* (1.2) *su* $H_0^1(\Omega)$. *Inoltre tale* u *è anche l'unico elemento di* $H_0^1(\Omega)$ *che verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \textit{per ogni } v \in H_0^1(\Omega). \; ∎ \tag{3.1}$$

Le funzioni v che intervengono nella (3.1) sono dette *funzioni test*, intendendo con questo termine il ruolo che esse svolgono nella (3.1) stessa. La stessa espressione è usata in contesti simili.

Osservazione 3.2. Supponiamo ora che u sia regolare quanto basta, lasciando vago il significato della parola "regolare", e integriamo per parti nella (3.1). Deduciamo

$$\int_\Omega (-\Delta u) \, v = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{per ogni } \; v \in H_0^1(\Omega) \, . \tag{3.2}$$

ove $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ è *l'operatore di Laplace* e, viceversa, dalla (3.2) si può risalire alla (3.1). Ora, si può dimostrare che la condizione (3.2) equivale all'equazione alle derivate parziali $-\Delta u = f$, detta *equazione di Poisson*, per cui u è l'unica soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson, vale a dire del problema ai limiti

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \, , \qquad u = 0 \quad \text{su } \Gamma \, . \tag{3.3}$$

Se u non è regolare, tuttavia, rimane il risultato dato dal Teorema 3.1 e il problema (3.3) non ha soluzioni classiche. Si usa dire che la (3.1) è la *formulazione variazionale* del problema (3.3), oppure che noi abbiamo risolto il problema (3.3) in forma debole.

Segnaliamo incidentalmente che l'equazione di Poisson cui siamo pervenuti, e che è condizione sostanzialmente necessaria perché u sia un punto di minimo del funzionale considerato, è detta *equazione di Eulero* (o di Eulero-Lagrange) del problema di minimo stesso. La stessa terminologia viene usata in connessione con altri problemi di minimo analoghi (l'equazione di Eulero essendo naturalmente diversa di volta in volta), o addirittura in situazioni astratte. Così, nel caso della minimizzazione del funzionale quadratico (IV.2.5), possiamo dire che l'equazione di Eulero è costituita dalla (IV.2.4).

Osservazione 3.3. Si noti che, mentre il problema (3.3) è del secondo ordine, nella (3.1) agiscono sulla soluzione solo derivazioni del primo ordine. Dunque, considerando la formulazione variazionale, stiamo implicitamente parlando di derivate seconde senza farle intervenire esplicitamente.

Sottolineiamo infine una conseguenza dell'uguaglianza $\|u\| = \|L\|^*$ data dal Teorema IV.2.3 (ma sfruttiamo, di fatto, solo la disuguaglianza). Tenendo conto del Teorema 2.10, otteniamo $\|u\|_{1,2} \le c\,\|L\|_*$ per una certa costante c. Ma la seconda delle (1.3) fornisce $\|L\|_* \le \|f\|_2$, per cui concludiamo che vale la disuguaglianza $\|u\|_{1,2} \le c\,\|f\|_2$ per una certa costante c. Ciò assicura che l'applicazione lineare che alla generica $f \in L^2(\Omega)$ associa la soluzione u del problema considerato è continua da $L^2(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$. Considerazioni analoghe si possono fare in casi più generali, come quello dell'osservazione che segue.

Osservazione 3.4. Si sarebbe dovuto parlare di problemi ellittici, dati i titoli del capitolo e del paragrafo. In effetti, quello appena considerato è, per certi versi, il prototipo dei problemi ellittici del secondo ordine e la sua prima generalizzazione è quella che ora illustriamo e che fa intervenire il termine "ellittico" in modo esplicito. Se consideriamo, in luogo di (1.4), l'integrale

$$(u, v) = \int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v \, dx \tag{3.4}$$

ove A è una matrice di funzioni $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, nulla sostanzialmente cambia purché la (3.4) definisca in $H^1_0(\Omega)$ un prodotto scalare e che questo sia topologicamente equivalente a quello dato dalla (1.4). Richiediamo allora le condizioni seguenti: $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ per ogni i, j, la matrice A sia simmetrica ed esista una costante $\alpha_0 > 0$ tale che

$$(A(x)\xi) \cdot \xi \ge \alpha_0 |\xi|^2 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e per q.o } x \in \Omega\,. \tag{3.5}$$

L'ultima condizione è detta *condizione di ellitticità uniforme* ed esprime che la matrice $A(x)$ è definita positiva uniformemente rispetto al punto. Si noti che il caso trattato sopra corrispondere a scegliere come A la matrice unità. Allora, se tutte queste condizioni sono soddisfatte, basta munire $H^1_0(\Omega)$ del nuovo prodotto scalare e applicare il Teorema IV.2.4 al funzionale relativo alla norma indotta per generalizzare quanto è stato fatto. In condizioni di regolarità (non tanto su u quanto piuttosto su $A\nabla u$) resta risolto il problema ellittico più generale (equazione di Eulero del problema di minimo considerato)

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{su } \Gamma\,. \tag{3.6}$$

Questa osservazione sarà comunque ripresa in seguito. ■

I problemi (3.3) e (3.6) sono lineari, così come è lineare il problema astratto dato dalla (IV.2.4) e legato al funzionale quadratico (IV.2.5). Dunque il quadro hilbertiano degli spazi $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ è adatto soprattutto alla risoluzione di problemi del tipo detto. Se invece si considera un funzionale di tipo (1.1) relativo a una funzione F che non ha un compartamento di tipo quadratico, allora possono essere utili gli spazi più generali $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ con $p \in (1,\infty)$ e i risultati del Capitolo 5. Vediamo come questi possano essere applicati supponendo che la funzione F abbia, per semplicità, la forma

$$F(x,s,\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p - f(x)\,s$$

ove $p \in (1,\infty)$ e $f \in L^{p'}(\Omega)$. Allora il funzionale (1.1) diventa

$$J(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \int_\Omega f\,v\,dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.7}$$

e si vede che esso è ben definito per la disuguaglianza (IV.2.2) di Hölder. Cerchiamo allora di applicare il metodo diretto illustrato nell'Osservazione V.3.15. Siano λ l'estremo inferiore di J e $\{v_n\}$ una successione minimizzante. Dimostriamo che $\{v_n\}$ è limitata. Possiamo supporre $J(v_n) \le \lambda'$ per ogni n e per un certo $\lambda' > \lambda$. Applicando allora la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\frac{1}{p}\,\|\nabla v_n\|_p^p = J(v_n) + \int_\Omega f\,v\,dx \le \lambda' + \|f\|_{p'}\,\|v_n\|_p \le \lambda' + \|f\|_{p'}\,\|v_n\|_{1,p}\,.$$

Grazie al Teorema 2.10, esiste una costante $c > 0$ tale che $\|v\|_{1,p} \le c\,\|\nabla v\|_p$ per ogni $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Abbiamo allora

$$\|v_n\|_{1,p}^p \le c^p\,\|\nabla v_n\|_{1,p}^p \le p\lambda' c^p + pc^p\,\|f\|_{p'}\,\|v_n\|_{1,p}\,.$$

Abbiamo dunque ottenuto la disuguaglianza

$$\varphi(\|v_n\|_{1,p}) \le C \tag{3.8}$$

ove $C = p\lambda' c^p$ e $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è la funzione definita dalla formula

$$\varphi(t) = t^p - at, \qquad \text{con} \quad a = pc^p\,\|f\|_{p'}\,.$$

Ma $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = +\infty$ dato che $p > 1$, per cui la condizione $\varphi(t) \le C$ implica l'appartenenza di t a un certo intervallo limitato $[0,M]$. Deduciamo che $\|v_n\|_{1,p} \le M$ per ogni n e concludiamo che la successione $\{v_n\}$ è limitata nello spazio $W^{1,p}(\Omega)$. Allora, grazie al Teorema 2.5, possiamo estrarre una successione convergente debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ a un certo limite $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Ma siccome la sottosuccessione estratta conserva anche tutte le proprietà della successione originaria, possiamo denotarla ancora con $\{v_n\}$ senza complicare le notazioni. Preparato così il materiale necessario, cerchiamo di dimostrare che u è un punto di minimo per J.

Il primo controllo riguarda l'appartenenza di u a $W_0^{1,p}(\Omega)$. L'Osservazione 2.9 assicura che $W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,p}(\Omega)$. Allora, per la Proposizione V.3.19, $W_0^{1,p}(\Omega)$ è chiuso anche rispetto alla topologia debole, per cui effettivamente $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Ora dobbiamo controllare che $J(u) = \lambda$ e per questo basta dimostrare la semicontinuità inferiore di J rispetto alla topologia debole. Ma, come si verifica facilmente usando la convessità della funzione $\xi \mapsto |\xi|^p$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, il funzionale J è convesso. Inoltre è immediato vedere che esso è continuo rispetto alla topologia forte. Dunque esso è semicontinuo rispetto alla topologia debole per la Proposizione V.3.18. Abbiamo dunque dimostrato il teorema seguente:

Teorema 3.5. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato lipschitziano, $p \in (1,\infty)$ e $f \in L^{p'}(\Omega)$. Allora il funzionale* (3.7) *ha almeno un punto di minimo in $W_0^{1,p}(\Omega)$.* ∎

In realtà si vede che il punto di minimo è unico sfruttando il fatto che la funzione $\xi \mapsto |\xi|^p$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, è strettamente convessa dato che $p > 1$.

Osservazione 3.6. Anche per questo problema di minimo vale una caratterizzazione in termini variazionali. Presa infatti $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ad arbitrio e posto $\varphi(t) = J(u + tv)$ per $t \in \mathbb{R}$ come al punto *(ii)* della dimostrazione del Teorema IV.2.4, si scrive la condizione di minimalità $\varphi'(0) = 0$. Per il calcolo di $\varphi'(0)$ occorre eseguire una derivazione sotto il segno di integrale e questa è lecita per i seguenti motivi: da un lato, essendo $p > 1$, si ha $\nabla_\xi |\xi|^p = |\xi|^{p-2}\xi$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ pur di convenire $|\xi|^{p-2}\xi = 0$ per $\xi = 0$; d'altra parte $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$ e $|\nabla u|^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ dato che $(p-1)p' = p$. Si arriva allora a concludere che la funzione u verifica la condizione

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx \quad \text{per ogni } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.9}$$

Anche questo problema ha soluzione unica in $W_0^{1,p}(\Omega)$, come si può dimostrare sfruttando ancora la stretta convessità della funzione $\xi \mapsto |\xi|^p$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Infine, ancora, la (3.9) è la formulazione variazionale di un problema ai limiti, precisamente del problema di Dirichlet per un operatore non lineare

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \Gamma \tag{3.10}$$

come si vede integrando per parti in ipotesi di regolarità. Vale cioè quanto segue: se u è regolare, allora u è anche soluzione del problema (3.10); se u non è regolare il problema (3.10) non ha soluzioni classiche. Segnaliamo che l'operatore che compare al primo membro della (3.10) si chiama p-laplaciano e osserviamo che esso coincide con Δ se $p = 2$. ∎

Vediamo ora un terzo problema ellittico, partendo direttamente dall'applicazione di un risultato astratto e cercando successivamente l'interpretazione concreta di quanto abbiamo ottenuto. Il risultato che consideriamo è il Teorema IV.3.4 di proiezione su un convesso e lo applichiamo nella situazione particolare che ora descriviamo.

Consideriamo un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e di classe C^1 e, fissata una funzione misurabile $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, definiamo

$$C = \bigl\{ v \in H^1_0(\Omega) : \ v(x) \geq \psi(x) \text{ q.o.} \bigr\} . \tag{3.11}$$

Allora, come si vede facilmente, C è un convesso chiuso di $H^1_0(\Omega)$. Applichiamo allora il Teorema IV.3.4 allo spazio di Hilbert $V = H^1_0(\Omega)$ munito del prodotto scalare (1.4) e al suo elemento $w = 0$: se C non è vuoto, esiste una e una sola funzione u nelle condizioni dell'enunciato, in particolare una e una sola u verificante

$$u \in C \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (u - v) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in C. \tag{3.12}$$

Notiamo subito che C può essere vuoto in situazioni che nulla hanno di patologico: ad esempio, se ψ è la costante 1, nessun elemento $v \in H^1_0(\Omega)$, essendo nullo al bordo, può verificare la disuguaglianza $v \geq \psi$. Occorrono dunque ipotesi su ψ, ma non insistiamo oltre su questo punto e vediamo invece di interpretare il problema (3.12). Al di là della regolarità della soluzione u, la prima condizione significa

$$u(x) \geq \psi(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega \qquad \text{e} \qquad u = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

mentre la seconda non è di interpretazione immediata. Supponendo al solito u regolare e integrando per parti nella (3.12), deduciamo

$$\int_\Omega (-\Delta u)(u - v) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in C . \tag{3.13}$$

Allora, fra la possibili funzioni test v, sono ammesse tutte quelle della forma $v = u + \varphi$ con $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ non negativa, il che conduce a

$$\int_\Omega (-\Delta u) \varphi \geq 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in H^1_0(\Omega) \text{ non negativa.}$$

Si può dimostrare che questa condizione equivale a $-\Delta u \geq 0$ q.o. Denotiamo ora con ω l'insieme dei punti $x \in \Omega$ tali che $u(x) > \psi(x)$, insieme che è aperto se u e ψ sono almeno continue. In tali ipotesi, per ogni compatto $K \subset \omega$, la funzione $u - \psi$ ha minimo positivo per cui, se φ è regolare in $\overline{\Omega}$ e nulla fuori di un compatto $K \subset \omega$ (il che implica l'annullamento su Γ), sono ammesse, fra le $v \in C$, anche le due funzioni $v = u \pm \varepsilon\varphi$ ove $\varepsilon > 0$ è scelto abbastanza piccolo. Dalla (3.13) deduciamo allora

$$\int_\Omega (-\Delta u)(\mp \varepsilon \varphi) \leq 0 \qquad \text{da cui} \qquad \int_\Omega (-\Delta u) \varphi = 0$$

per tutte le funzioni φ di cui abbiamo appena detto. Si può dimostrare che questa condizione equivale a $-\Delta u = 0$ q.o. in ω. Riassumendo, in condizioni di regolarità abbiamo risolto il problema seguente:

$$u \geq \psi \quad \text{e} \quad -\Delta u \geq 0 \quad \text{in } \Omega , \qquad -\Delta u = 0 \quad \text{ove } u > \psi , \qquad u = 0 \quad \text{su } \Gamma . \tag{3.14}$$

D'altra parte, se u è sufficientemente regolare, dalle (3.14) si può risalire alla (3.12), per cui la (3.12) è detta formulazione debole o variazionale del problema (3.14).

Il problema che abbiamo discusso è detto usualmente *problema dell'ostacolo* per il laplaciano e ha l'interpretazione seguente nei casi $n = 1, 2$: se il grafico di u rappresenta la configurazione di un filo elastico o di una membrana elastica non sottoposta a forze esterne, stiamo imponendo al filo, o alla membrana, di essere fissato al bordo Γ in modo compatibile con lo stato di riposo e di stare in ogni punto sopra un ostacolo fissato, rappresentato dal grafico di ψ . Allora sono giustificate le espressioni "regione di contatto" e "regione di distacco" per gli insiemi dei punti $x \in \Omega$ tali che $u(x) = \psi(x)$ e $u(x) > \psi(x)$ rispettivamente.

Considerando il caso $n = 1$, che è più semplice, vediamo che il filo è concavo in ogni intervallo di contatto e rettilineo in ogni intervallo di distacco. Allora si capisce come, in generale, non ci possano essere soluzioni regolari del problema senza ipotesi forti su ψ e che, anche supponendo ψ di classe C^∞ , la soluzione u non può essere più regolare di tanto: la regolarità massima che si può ottenere è quella della derivata lipschitziana e non la regolarità C^2 , dato che la derivata seconda avrà, di solito, una discontinuità nei punti che separano la regione di contatto da quella di distacco. Ciò nonostante, la formulazione debole (3.12) del problema dell'ostacolo ha una e una sola soluzione u non appena il convesso C è non vuoto. Ma in tali condizioni nulla assicura che si possa parlare del laplaciano di u inteso come funzione di qualche spazio $L^p(\Omega)$.

4. Il Teorema di Lax-Milgram

Consideriamo il problema variazionale astratto (IV.2.4) e immaginiamo di sostituire nell'equazione (IV.2.4) di incognita u il prodotto scalare con una forma bilineare più generale. Supponiamo che $a : V^2 \to \mathbb{R}$ sia bilineare e, dato $L \in V'$, consideriamo il problema di trovare $u \in V$ tale che

$$a(u, v) = \langle L, v \rangle \quad \text{per ogni } v \in V. \tag{4.1}$$

Naturalmente, per quanto riguarda l'esistenza e l'unicità della soluzione, non ci sono speranze senza ipotesi su a , nemmeno se V ha dimensione finita. Supponiamo innanzi tutto che esistano due costanti $M, \alpha > 0$ tali che

$$|a(u, v)| \le M \|u\| \|v\| \quad \text{e} \quad a(v, v) \ge \alpha \|v\|^2 \quad \text{per ogni } u, v \in V. \tag{4.2}$$

La prima delle (4.2), unita alla bilinearità, garantisce che a è continua da V^2 in $\mathbb{R}$ ed è quindi detta condizione di continuità della forma bilineare data. La seconda si esprime dicendo che a verifica una condizione di *coercività* oppure che a è V *-ellittica* con costante α di V -ellitticità. Come vedremo nell'esempio successivo che riprende l'Osservazione 3.4, questo uso del termine "ellitticità" è connesso con la condizione (3.5) e ne costituisce sostanzialmente una versione astratta.

Si noti che nel caso $V = \mathbb{R}^n$ la prima delle (4.2) è soddisfatta automaticamente, mentre la seconda corrisponde al caso della forma a definita positiva.

Supponiamo ora che a sia anche simmetrica: allora a ha tutte le proprietà di un prodotto scalare. Preso poi $u = v$ nelle (4.2), deduciamo $\alpha \|v\|^2 \le a(v, v) \le M \|v\|^2$

per ogni $v \in V$, il che assicura che la norma indotta dal prodotto scalare a è equivalente a quella preesistente. Allora si ottiene immediatamente un teorema di esistenza e unicità per il problema (4.1) semplicemente applicando il Teorema IV.2.4 di Riesz allo spazio di Hilbert V con il nuovo prodotto scalare. La soluzione, inoltre, è anche l'unico punto di minimo del funzionale associato.

Lasciamo ora cadere l'ipotesi di simmetria di a. Allora non possediamo ancora strumenti per la risoluzione del problema posto. Inoltre, come si può vedere, il problema non equivale nemmeno a quello della minimizzazione di un funzionale. Il risultato che segue, noto come *Lemma di Lax-Milgram*, fornisce invece una risposta positiva.

Teorema 4.1. *Siano V uno spazio di Hilbert e $a : V^2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineare e si supponga che esistano $M, \alpha > 0$ tali che valgano le* (4.2). *Allora, per ogni $L \in V'$, esiste uno e un solo elemento $u \in V$ che verifica la* (4.1) *e vale la disuguaglianza*

$$\|u\| \le \frac{1}{\alpha} \|L\|_* \tag{4.3}$$

di dipendenza continua di u da L. ∎

Cenno della dimostrazione. La (4.3), che implica anche l'unicità, di ottiene prendendo $v = u$ nella (4.1) e usando la V-ellitticità di a e la (IV.1.7) per L. Molto meno immediata è l'esistenza della soluzione. Ne diamo un cenno usando il metodo detto del prolungamento rispetto al parametro. IN questo caso il metodo fornisce anche l'unicità già dimostrata. Introduciamo le forme bilineari $a_\pm, a_\lambda : V^2 \to \mathbb{R}$ definite da

$$a_\pm(u,v) = \frac{1}{2}\bigl(a(u,v) \pm a(v,u)\bigr) \qquad \text{e} \qquad a_\lambda(u,v) = a_+(u,v) + \lambda a_-(u,v)$$

ove $\lambda \in \mathbb{R}$. Notiamo che a_+ e a_- sono dette rispettivamente parte simmetrica e parte antisimmetrica di a. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $L \in V'$ denotiamo con $P(\lambda, L)$ il problema di trovare $u \in V$ verificante

$$a_\lambda(u,v) = \langle L, v\rangle \quad \text{per ogni } v \in V \tag{4.4}$$

e diciamo che λ è buono se per ogni $L \in V'$ il problema $P(\lambda, L)$ ha una e una sola soluzione. Osservato che $a = a_1$, noi dobbiamo dimostrare che il valore $\lambda = 1$ è buono. D'altra parte, essendo $a_0 = a_+$ ed essendo verificate da a_+ le proprietà imposte ad a e la simmetria, il valore $\lambda = 0$ è buono. Per concludere è sufficiente trovare $\delta > 0$ verificante la condizione seguente: se un valore λ_0 è buono allora è buono anche ogni valore λ verificante $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$. Mostriamo che il numero reale $\delta = \alpha/(2M)$ risponde allo scopo, ove $M > 0$ e $\alpha > 0$ sono le due costanti della (4.2).

Fissiamo dunque un valore buono λ_0, un $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ e un funzionale $L \in V'$ e cerchiamo di dimostrare che il problema $P(\lambda, L)$ ha una e una sola soluzione. Scritta la (4.4) nella forma

$$a_{\lambda_0}(u,v) = \langle L, v\rangle + (\lambda_0 - \lambda) a_-(u,v) \quad \text{per ogni } v \in V$$

vediamo che le soluzioni u di $P(\lambda, L)$ sono tutti e soli i punti fissi dell'applicazione $f : V \to V$ che a ogni elemento $w \in V$ associa l'unica soluzione u del problema

$P(\lambda_0, L + (\lambda_0 - \lambda)L_w)$, ove $L_w \in V'$ è definito dalla formula $\langle L_w, v\rangle = a_-(w, v)$ per $v \in V$. Si dimostra allora che f è una contrazione e, applicando il Teorema III.1.9 delle contrazioni, si conclude. ∎

Esempio 4.2: altri problemi ellittici. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ limitato lipschitziano. Costruiamo un esempio abbastanza generale di forma a nelle condizioni del Teorema 4.1 relativamente al caso in cui V è spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$. Poniamo

$$a(u, v) = \int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega buv \, dx \tag{4.5}$$

ove $A = (a_{ij})$ è una matrice $n \times n$ di funzioni reali $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$ e $b : \Omega \to \mathbb{R}$. Perché la forma a sia ben definita e bilineare su V^2 è sufficiente supporre $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ per ogni i, j e $b \in L^\infty(\Omega)$. Queste condizioni assicurano anche la prima delle (4.2) per una costante M opportuna. Per avere la seconda con una certa costante $\alpha > 0$, supponiamo che valgano la condizione (3.5) di ellitticità con una certa costante $\alpha_0 > 0$ e la disuguaglianza $\inf_\Omega b > 0$. Se come $L \in V'$ prendiamo il funzionale dato dalla formula

$$\langle L, v\rangle = \int_\Omega f \, v \, dx + \int_\Gamma g \, v \, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{4.6}$$

ove Γ è il bordo dell'aperto, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Gamma)$, il problema (4.1) si interpreta come la formulazione variazionale di un problema ai limiti. In condizioni opportune di regolarità, infatti, possiamo integrare per parti e vedere che il problema (4.1) equivale a quello di trovare $u \in V$ verificante

$$\int_\Omega \big(-\operatorname{div}(A\nabla u) + bu\big) v \, dx + \int_\Gamma (A\nabla u) \cdot \mathbf{n} v \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_\Omega f \, v \, dx + \int_\Gamma g \, v \, d\mathcal{H}^{n-1}$$
$$\text{per ogni } v \in V \tag{4.7}$$

ove $\mathbf{n}$ è il versore normale a Γ diretto verso l'esterno di Ω . Ebbene si dimostra che la (4.7) equivale a

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + bu = f \quad \text{in } \Omega \,, \qquad (A\nabla u) \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{su } \Gamma \,. \tag{4.8}$$

La condizione al bordo che compare nella (4.8) e che era “nascosta” nella (4.1) è detta *condizione di Neumann*.

Notiamo poi che nelle ipotesi fatte su A e b il Teorema 4.1 si applica prendendo come V un sottospazio chiuso qualunque di $H^1(\Omega)$ e che in condizioni di regolarità abbiamo ancora la (4.7). Se V include $H^1_0(\Omega)$ si ha ancora un'interpretazione in termini di problema ai limiti per lo stesso operatore ellittico che compare nella (4.8), ma la condizione al bordo non è sempre di facile scrittura dato che può essere contenuta in parte nella condizione $u \in V$ e in parte nella (4.1). Nel caso estremo $V = H^1_0(\Omega)$ la condizione ai limiti è la condizione di Dirichlet $u = 0$ su Γ ed è tutta contenuta nell'appartenenza di u a $H^1_0(\Omega)$, mentre nell'altro caso estremo $V = H^1(\Omega)$ essa è la condizione di Neumann di cui abbiamo detto ed è tutta contenuta nella (4.7). Un caso intermedio si ottiene invece prendendo come V il sottospazio di $H^1(\Omega)$ costituito dalle funzioni v la cui traccia su Γ si annulla su una parte prefissata Γ_0 (occorrerebbe precisare le ipotesi su Γ_0, ma soprassediamo). In tal caso le condizioni al bordo diventano la condizione di Dirichlet $u = 0$ su Γ_0 e la condizione di Neumann $(A\nabla u) \cdot \mathbf{n} = g$ su $\Gamma \setminus \Gamma_0$ e si parla di condizioni ai limiti di tipo misto. ∎

Nel caso particolare in cui lo spazio di Hilbert V è separabile si può dare una approssimazione della soluzione u data dal Teorema 4.1. La procedura che presentiamo è detta *metodo di Faedo-Galerkin* e ha risvolti numerici interessanti.

Grazie al Teorema V.4.4, esiste una successione non decrescente $\{V_n\}$ di sottospazi di dimensione finita la cui unione è densa. Fissiamo una tale successione e, per ogni n, consideriamo il seguente "problema approssimato":

$$\textit{trovare } u_n \in V_n \textit{ tale che} \quad a(u_n, v) = \langle L, v\rangle \quad \textit{per ogni } v \in V_n. \tag{4.9}$$

Come si vede facilmente, anche a questo problema è applicabile il Teorema 4.1, per cui la soluzione u_n esiste ed è unica. Inoltre, fissata una base per V_n e assunte come incognite i coefficienti della combinazione lineare che esprime u_n in termini della base stessa, si vede che il problema si traduce in un sistema lineare. Ebbene, vale il seguente risultato di convergenza e di stima ottimale dell'errore:

Teorema 4.3. *Nelle ipotesi del Teorema 4.1 si supponga V separabile e sia $\{V_n\}$ una successione di sottospazi di dimensione finita di V la cui unione è densa. Allora, per le soluzioni u_n e u dei problemi* (4.9) *e* (4.1) *vale la stima dell'errore*

$$\|u - u_n\| \le \frac{M}{\alpha}\, \|u - v\| \quad \textit{per ogni } v \in V_n \tag{4.10}$$

e la successione $\{u_n\}$ converge fortemente a u. ∎

Cenno della dimostrazione. Si osserva che $a(u - u_n, v) = 0$ per ogni $v \in V_n$. Allora, per ogni $v \in V_n$, si ha

$$\alpha\, \|u - u_n\|^2 \le a(u - u_n, u - u_n) = a(u - u_n, u - v) \le M\, \|u - u_n\|\, \|u - v\|$$

e si ottiene la (4.10). Per vedere che $\{u_n\}$ converge a u basta dimostrare che, detta v_n la proiezione ortogonale di u su V_n, è infinitesima la successione reale $\{\varepsilon_n\}$ di termine generale $\varepsilon_n = \|u - v_n\|$. In caso contrario, notato che $\{\varepsilon_n\}$ decresce, si arriverebbe a concludere che u è esterno all'unione dei V_n, contro l'ipotesi di densità. ∎

Osservazione 4.4. Nella dimostrazione si è sfruttata l'esistenza della soluzione u del problema (4.1), ma un ragionamento diverso consente di dimostrare l'esistenza di u a partire dai problemi (4.9). Si ottiene dunque una dimostrazione alternativa del Teorema di Lax-Milgram, almeno per quanto riguarda la parte dell'esistenza e nell'ipotesi ulteriore di separabilità di V. Vediamo come si può procedere.

Osservato che l'esistenza (e l'unicità) della soluzione u_n del problema (4.9) può essere dimostrata con considerazioni elementari di algebra lineare, si ottiene facilmente la stima $\|u_n\| \le (1/\alpha)\, \|L\|_*$ e si può applicare il Teorema V.3.11 di compattezza debole.

Estratta una sottosuccessione debolmente convergente, si dimostra che il suo limite è una soluzione del problema (4.1). ∎

Per quanto si è detto sopra, in molti casi concreti il problema approssimato può essere risolto per via numerica. Naturalmente, dal punto di vista numerico, la sua risolubilità effettiva dipenderà dalla scelta degli spazi V_n e di quella delle loro basi. Per quanto riguarda la stima dell'errore, la (4.10) fornisce delle stime concrete tutte le volte che si dispone di un operatore $P_n : V \to V_n$ effettivamente noto e di una stima concreta della norma $\|v - P_n v\|$ per $v \in V$, ad esempio del tipo

$$\|v - P_n v\| \leq c n^{-\lambda} \|v\|'$$

ove c e λ sono certe costanti positive e $\| \cdot \|'$ è una certa norma. In tali condizioni la (4.10) implica

$$\|u - u_n\| \leq \frac{cM}{\alpha} n^{-\lambda} \|u\|' \tag{4.11}$$

e può essere applicata se l'ultima norma è finita. La verifica di questa condizione corrisponde, nei casi concreti, a dimostrare un risultato di regolarità per la soluzione u.

Senza entrare in ulteriori dattagli e considerato solo casi corrispondenti alla forma (4.5) e al funzionale (4.6), risultati di regolarità per u dipendono sia da ipotesi di regolarità sui coeffienti a_{ij} e b, sui dati f e g e sull'aperto Ω, sia dalla scelta del sottospazio V di $H^1(\Omega)$, scelta che stabilisce il tipo di condizioni ai limiti e che può costituire un ostacolo alla regolarità, come avviene nei problemi di tipo misto.

Osservazione 4.5. Le stesse idee possono essere utilizzate quando il sottospazio V_n "approssimante" è parametrizzato da un parametro di natura diversa e una situazione tipica si riscontra della *teoria degli elementi finiti*: il parametro, denotato usualmente con h, è reale e misura quanto fine sia la procedura di discretizzazione.

Supponiamo per semplicità che Ω sia un poligono di $\mathbb{R}^2$ e ci proponiamo di approssimare la soluzione u del problema di Dirichlet (3.3). Consideriamo allora una *triangolazione* $\mathcal{T}_h$ *di* Ω, cioè una famiglia finita di triangoli chiusi la cui unione sia la chiusura $\overline{\Omega}$ di Ω e verificanti le condizioni seguenti: (i) se $T', T'' \in \mathcal{T}_h$, allora l'intersezione $T' \cap T''$ è vuota, oppure è ridotta a un vertice comune o a un lato comune ai due triangoli considerati; (ii) tutti i lati di ogni triangolo di $\mathcal{T}_h$ hanno lunghezza $\leq h$. Denotiamo allora on V_h il sottospazio di $H_0^1(\Omega)$ costituito dalle funzioni $v \in H_0^1(\Omega)$ le cui restrizioni a ogni triangolo $T \in \mathcal{T}_h$ siano polinomi di grado ≤ 1. Ciò equivale a dire che $v \in V_h$ se e solo se v è continua in $\overline{\Omega}$, nulla su Γ e coincidente con un polinomio di grado ≤ 1 in ogni triangolo.

Allora valgono un risultato analogo a quello dato dal Teorema 4.3, ora relativamente a una famiglia $\{\mathcal{T}_h\}$ di triangolazioni e al tendere di h a 0, e la stima $\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \|u\|_{H_2}$, sotto le due ipotesi seguenti. La prima è che il poligono Ω sia convesso, altrimenti è falso che la soluzione u appartenga ad $H^2(\Omega)$; la seconda, che possiamo chiamare condizione di "non appiattimento" dei triangoli, è che esista una costante c tale che, per ogni triangolo T di ognuna delle triangolazioni considerate, valga la disuguaglianza $R(T) \leq c\, r(T)$, ove $R(T)$ e $r(T)$ denotano i raggi dei triangoli circoscritto a T e inscritto in T rispettivamente.

Indice