I matematici stanno sulle nuvole?
Anche oltre, ma non sempre...

Gianni Gilardi

Università di Pavia

Perché questo testo rispecchi fedelmente, per quanto possibile, la situazione reale del momento della conferenza, nel testo mi riferisco ai lucidi, che chiamo figure. Queste, numerate progressivamente da 1 a 32, sono raccolte a parte. Per completezza aggiungo anche alcune precisazioni che, per ovvie ragioni, non potevano trovare spazio nella conferenza.

Il titolo, illustrato nelle Figure 1 e 2, è chiaramente una metafora e il suo vero significato è spiegato nella Figura 3: semplificando molto, possiamo parlare di matematica pura e di matematica applicata e questa conferenza si propone di mostrare con un'esemplificazione significativa che le due anime della matematica interagiscono in modo proficuo e che risultati anche molto astratti possono essere estremamente utili nello studio di svariati problemi, anche strettamente legati a situazioni reali.

Il piano di lavoro (Figura 4) comprende, accanto al tema che intendo trattare, alcuni titoli: successioni, funzioni, convergenza. Infatti, perché l'argomento risulti accessibile a tutto il pubblico presente, dedico due parole all'introduzione, sia pure in forma approssimativa, di qualche concetto che potrebbe essere nuovo per qualcuno.

Successioni

Nella Figura 5 sono presentate tre successioni numeriche. La prima di esse, denotata con $x_1, x_2, \dots$, è definita dalla formula generale $x_n = 2n - 1$ per $n = 1, 2, \dots$, la quale assegna al *posto* 1 il numero $x_1 = 3$, al posto 2 il numero $x_2 = 5$, eccetera. Nella seconda successione, denotata con $y_0, y_1, \dots$, i posti sono numerati a partire da $n = 0$ anziché da $n = 1$; inoltre la legge che la definisce comporta una distinzione di casi e attribuisce lo stesso numero, 1, a più di un posto. La terza successione è una successione di numeri reali non interi. Tutte e tre le successioni sono successioni di numeri reali, anche interi nel caso delle prime due.

Nelle due Figure 6 e 7 successive, si mostra con due esempi che gli elementi di una successione possono non essere numeri reali: la prima è una successione di coppie di interi, la seconda è una successione di vini (con una motivazione per melomani).

Trasformazioni (funzioni)

L'altro concetto importante è quello di funzione, verosimilmente noto a tutto il pubblico almeno in una forma un po' primitiva. La Figura 8 descrive tre funzioni: ciascuna di esse associa a ogni numero reale un ben determinato numero reale. Siccome sia gli elementi di partenza sia quelli di arrivo sono presi nello stesso insieme, l'insieme dei numeri reali, preferiremo usare il termine *trasformazione* (utilizzato in verità in contesti di tipo geometrico): nei casi considerati abbiamo trasformazioni dell'insieme dei numeri reali.

Ancora, però, è opportuno generalizzare e abbandonare l'idea che le funzioni agiscano necessariamente nell'insieme dei numeri reali. Le due figure successive illustrano estensioni possibili del concetto. Nella Figura 9 abbiamo esempi di trasformazioni del piano, una traslazione e un'omotetia, mentre la Figura 10 pretende di suggerire l'idea di trasformazione di tipo assolutamente generale in un insieme completamente arbitrario (purché non vuoto; questa ipotesi sarà sempre assunta tacitamente nel seguito): se S è l'insieme preso in considerazione, una trasformazione f di S è una *legge di natura qualunque* che a ogni elemento di S associa un ben determinato elemento di S. Se f è il nome della trasformazione e x è un elemento di S, l'elemento di S che f associa a x si deve chiamare $f(x)$.

Due problemi astratti

Il discorso successivo si articola intorno ai due problemi enunciati di seguito e illustrati nella Figura 11. Daremo poi un teorema astratto che fornisce condizioni sufficienti per la loro risolubilità e tre applicazioni a situazioni molto diverse fra loro.

Problema 1. *Sono dati un insieme S e una trasformazione f di S. Trovare le soluzioni x appartenenti a S dell'equazione*

$$f(x) = x. \tag{1}$$

Le soluzioni cercate sono dette *punti fissi di f*. Nella Figura 11 il punto x''' è fisso, mentre gli altri due non lo sono.

Problema 2. *Sono dati un insieme S, una trasformazione f di S e un elemento x_0 di S. Si definiscano, l'uno dopo l'altro, gli elementi $x_1, x_2, ...$ di S mediante le formule*

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \quad \textit{eccetera.} \tag{2}$$

Studiare il comportamento di x_n per n grande in relazione ai punti fissi di f.

Molti problemi matematici possono essere riscritti come problemi di punti fissi. Ecco due problemi algebrici molto semplici.

L'equazione di secondo grado

$$x^2 + x - 1 = 0$$

può essere scritta nella forma (1) ad esempio con la scelta

$$f(x) = 1 - x^2.$$

Nella Figura 12 sono riportate anche alcune delle successioni (2) ottenute con varie scelte di x_0 (si noti che la rappresentazione decimale troncata alla quarta cifra dopo il punto nasconde eventuali cifre significative successive): dall'esame della tabella si evince che queste successioni non hanno legami con i punti fissi di f, cioè con le soluzioni dell'equazione di partenza.

Un secondo problema è quello della radice quadrata (o delle radici quadrate) di un numero reale $a > 0$ assegnato. Fra le molte possibilità, consideriamo la riscrittura dell'equazione

$$x^2 = a \tag{3}$$

nella forma (1) con la scelta

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x} \qquad (x \neq 0). \tag{4}$$

Nella Figura 13 sono riportate anche alcune delle successioni (2) ottenute in corrispondenza al caso $a = 4$ e a varie scelte di x_0 (continua a valere quanto è stato detto a proposito della rappresentazione decimale troncata alla quarta cifra): in questo caso è chiaro il legame fra le successioni (2) e le radici ± 2 di 4, che sono i punti fissi di f, e l'esplicitazione di questo legame è dato dalla nozione di convergenza di una successione numerica.

Nella Figura 14 è illustrata la nozione di convergenza per una successione di punti del piano e le due situazioni delle successioni numeriche e delle successioni di punti del piano possono essere unificate quando i numeri reali vengano pensati come punti di una retta. Riportiamo la *pseudodefinizione* della Figura 15: non la chiamiamo definizione perché essa è carente dal punto di vista del rigore matematico.

Pseudodefinizione 1. *La successione $x_0, x_1, x_2, \ldots$ di numeri reali o di punti del piano converge al numero reale (rispettivamente punto del piano) $\overline{x}$ quando la distanza $d(x_n, \overline{x})$ fra x_n e $\overline{x}$ diventa molto piccola, trascurabile, inapprezzabile per n molto grande.*

La vera definizione di convergenza, scritta su tutti i testi di analisi matematica, è la seguente: la successione considerata converge a $\overline{x}$ quando, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero naturale m tale che la disuguaglianza $d(x_n, \overline{x}) < \varepsilon$ valga almeno per ogni numero naturale $n > m$.

In vista di una generalizzazione del concetto esaminiamo alcune delle proprietà della distanza nel piano o sulla retta (Figura 16). Qualunque siano i punti considerati, valgono le proprietà seguenti:

$$\begin{cases} d(x,x) = 0 \\ d(x,y) > 0 \qquad \text{se } x \neq y \\ d(y,x) = d(x,y) \\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{cases} \tag{5}$$

Spazi metrici

L'idea della generalizzazione è la seguente: perché abbia senso considerare le proprietà (5) è importante che $d(x,x)$, $d(x,y)$, eccetera siano numeri reali, mentre non ha alcuna rilevanza la natura degli oggetti x, y, eccetera. Diamo allora la definizione seguente (Figura 17):

Definizione 1. *Sia S un insieme qualunque (non vuoto) e supponiamo che a ogni coppia di elementi x e y di S sia stato associato, con una legge di natura qualunque, un ben determinato numero reale $d(x,y)$ in modo che valgano le proprietà* (5)*. In tali condizioni diciamo che d è una distanza e che S è uno spazio metrico rispetto alla distanza d.*

A partire da questa definizione si costruisce una teoria astratta molto ricca di risultati importanti sia per ragioni teoriche sia in vista delle applicazioni a problemi concreti. Un momento di questa teoria è la generalizzazione della nozione di convergenza di una successione (Figura 18):

Pseudodefinizione 2. *Siano S uno spazio metrico rispetto alla distanza d e x_0, x_1, x_2,... una successione di elementi di S. Diciamo che la successione considerata converge all'elemento $\overline{x}$ di S quando la distanza $d(x_n, \overline{x})$ fra x_n e $\overline{x}$ diventa molto piccola, trascurabile, inapprezzabile per n molto grande.*

Notiamo che, rispetto al caso dei numeri reali o dei punti, vi è un solo cambiamento: i termini "numeri" e "punti" sono stati sostituiti con "elementi di S". La vera definizione di convergenza si enuncia poi in forma precisa apportando le stesse modifiche nella definizione precisa di convergenza di una successione di numeri reali o di punti del piano.

Il punto importante del discorso che intendiamo sviluppare si basa sulla nozione di contrazione, nozione che può essere data nell'ambito generale degli spazi metrici (Figura 19).

Definizione 2. *Siano S uno spazio metrico rispetto alla distanza d e f una trasformazione di S. Diciamo che f è una contrazione quando esiste un numero reale $\alpha < 1$, detto costante della contrazione, tale che la disuguaglianza*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y) \tag{6}$$

valga per ogni coppia di punti x e y di S.

Il teorema che segue (Figura 20) fornisce una risposta ai Problemi 1 e 2: esso, infatti, assicura sia l'esistenza e l'unicità del punto fisso, sia un preciso legame fra le successioni (2) e il punto fisso. L'ipotesi di completezza che compare nell'enunciato verrà brevemente discussa di seguito.

Teorema di Banach delle contrazioni. *Valgano le condizioni seguenti:*

- HP1 *S sia uno spazio metrico completo rispetto alla distanza d;*
- HP2 *f sia una contrazione di S.*

Allora valgono le conclusioni seguenti:

- TS1 *l'equazione* (1) *ha in S una e una sola soluzione, cioè f ha esattamente un punto fisso;*
- TS1 *fissato ad arbitrio un elemento x_0 di S, la successione $x_1, x_2, ...$ costruita mediante le formule* (2) *converge al punto fisso.*

Nell'ipotesi HP1 compare il termine *completo*. Intuitivamente esso si riferisce a una estensione opportuna della proprietà di completezza dei numeri reali e sta a indicare che lo spazio metrico è sufficientemente ricco. Ad esempio, rispetto alla distanza usuale, la retta reale è uno spazio metrico completo, mentre non costituiscono spazi metrici completi la retta privata di un punto e l'insieme dei soli razionali. Ancora, è completa una semiretta origine compresa (ad esempio l'insieme dei reali non negativi), mentre non è completa la semiretta della quale si escluda l'origine (ad esempio l'insieme dei reali strettamente positivi). Ecco la definizione precisa.

Uno spazio metrico S rispetto alla distanza d è completo quando risultano convergenti tutte le successioni $x_0, x_1, x_2, \ldots$ di elementi di S che verificano la condizione seguente, detta *condizione di Cauchy*: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero naturale m tale che la disuguaglianza $d(x_n, x_p) < \varepsilon$ valga almeno per tutte le coppie di numeri naturali n e p entrambi maggiori di m.

Il Teorema delle contrazioni, nella metafora del titolo della conferenza, sta ben oltre le nuvole. Ora scendiamo a terra dandone qualche applicazione concreta.

Un metodo numerico per la radice quadrata

Riprendiamo l'equazione (3) e, cercandone solo la soluzione positiva, riscriviamola nella forma (1) con la scelta (4) di f. Più precisamente, scegliamo il sottoinsieme della retta da chiamare S e limitiamo l'azione di f, la cui definizione avrebbe senso nell'ambito dei reali non nulli, ai soli elementi di S. La situazione è illustrata nella Figura 21.

Come S prendiamo l'insieme dei numeri reali x verificanti la disuguaglianza $x \geq \sqrt{a}$ munito della distanza usuale. Otteniamo in tal modo uno spazio metrico completo e abbiamo soddisfatto l'ipotesi HP1. Con un semplice calcolo si può poi controllare che la disuguaglianza $f(x) \geq \sqrt{a}$ è soddisfatta per ogni $x > 0$, in particolare per ogni elemento x appartenente a S. Un po' più complicato è verificare con soli strumenti algebrici che f è una contrazione di costante $1/2$, cioè che la (6) vale per ogni scelta di x e y in S con $\alpha = 1/2$ (la verifica più semplice usa infatti strumenti di analisi matematica: si controlla che la derivata f' verifica la disuguaglianza $|f'(x)| \leq 1/2$ almeno per $x \geq \sqrt{a}$ e sia deduce la (6) con $\alpha = 1/2$ applicando il Teorema del valor medio di Lagrange). In modo più o meno complicato, dunque, si verifica la validità dell'ipotesi HP2.

Quindi il Teorema delle contrazioni è applicabile e fornisce, da un lato, l'esistenza e l'unicità della radice quadrata positiva (ma questa è la scoperta dell'acqua calda, dato che tale proprietà è stata sfruttata all'inizio per definire l'insieme S da utilizzare), dall'altro la conclusione TS2, cioè il fatto che la successione (2) costruita a partire da un qualunque numero reale x_0 verificante la disuguaglianza $x_0 \geq \sqrt{a}$ converge a $\sqrt{a}$.

Va notato che la costruzione degli elementi successivi della successione comporta solo l'uso delle quattro operazioni dell'aritmetica (dunque è realizzabile con una calcolatrice rudimentale o addirittura a mano) e che il metodo ottenuto è particolarmente efficiente (vedi Figura 13). Va però detto, per completezza e onestà, che tale efficienza non è di solito garantita dal Teorema delle contrazioni. Questo, infatti, assicura solo la disuguaglianza (non esplicitamente osservata nell'enunciato)

$$d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{\alpha^n \, d(x_1, x_0)}{1 - \alpha}$$

che dal punto di vista numerico è apprezzabile fino a un certo punto. L'efficienza del metodo sta nel fatto che esso coincide (casualmente) con il Metodo di Newton delle tangenti applicato direttamente all'equazione $x^2 - a = 0$.

Frattali autosimili

Quando una trasformazione f di uno spazio metrico non è una contrazione non abbiamo alcuna garanzia che la successione (2) costruita a partire da un elemento x_0 fissato converga. In tali condizioni ha comunque interesse studiarne il comportamento per n grande, comportamento che può variare con la scelta di x_0 . Un semplice esempio è illustrato nella Figura 22 per la trasformazione f dell'insieme dei numeri reali definita dalla formula

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \le 1/2 \\ 3(1-x) & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

L'esame della tabella mostra i due punti fissi 0 e $3/4$, un comportamento periodico per le successioni costruite tramite (2) con le scelte $1/13$ e $1/40$ di x_0 e un comportamento completamente diverso in corrispondenza di $x_0 = 1/2$ e di $x_0 = 5/12$. Come mai succedono queste cose?

La risposta a questa domanda fa intervenire un insieme piuttosto complicato e l'esempio considerato vuole suggerire che l'opportunità di studiare alcuni insiemi, la loro esistenza e le loro proprietà può essere motivata anche da problemi lontanissimi.

L'insieme in questione è il cosiddetto *insieme di Cantor* e la sua costruzione, illustrata nella Figura 23, procede come segue. Si consideri il segmento di retta compreso fra i due valori 0 e 1 , lo si suddivida in tre segmenti di uguale lunghezza e si sopprima il segmento centrale. A ciascuno dei due segmenti rimasti si applichi lo stesso criterio di eliminazione, cioè si suddivida il segmento considerato in tre parti e se ne sopprima quella centrale, e allo stesso modo si immagini di proseguire indefinitamente. L'insieme di Cantor è ciò che rimane "a procedura ultimata" o, se si preferisce, ciò che non verrà mai soppresso in alcuno dei passi della procedura.

Se si esaminano due qualunque passi consecutivi della costruzione si nota che l'insieme del passo successivo si compone di due parti, sinistra e destra, ciascuna delle quali è una versione rimpicciolita dell'insieme del passo precedente; più precisamente, ciascuna di queste due parti è simile all'insieme del passo precedente tramite una similitudine di rapporto $1/3$. Si intuisce che l'insieme di Cantor stesso godrà di questa proprietà: esso è composto da due parti ciascuna delle quali è simile all'intero insieme tramite una similitudine. Per questo motivo esso è classificato fra gli insiemi *autosimili*.

L'insieme di Cantor ha anche un'altra proprietà, che non può essere taciuta: esso è estremamente "sbriciolato" e "bucherellato". Insiemi di questo tipo vengono in generale chiamati *frattali*.

Un altro esempio di insieme (frattale) autosimile è il "tappeto di Sierpiński", la cui costruzione è illustrata nella Figura 24: in questo caso abbiamo un sottoinsieme del piano. Si prenda un quadrato, lo si suddivida in 9 quadrati uguali mediante segmenti paralleli ai lati e si sopprima il quadrato centrale ottenuto. A ciascuno dei quadrati rimasti si applichi lo stesso procedimento di eleminazione e si prosegua indefinitamente. Il tappeto di Sierpiński è ciò che rimane "a procedura ultimata" o, se si preferisce, ciò che non verrà mai soppresso in alcuno dei passi della procedura. In questo caso abbiamo 8 parti simili all'insieme totale: le similitudini sono le omotetie di rapporto $1/3$ che hanno come centri i vertici del quadrato iniziale e i punti medi dei suoi lati.

Il Teorema delle contrazioni consente di dare un risultato di esistenza e di unicità dell'insieme autosimile rispetto a una data famiglia finita di similitudini e di assicurare la convergenza di una procedura di costruzione. Per agevolare chi è abituato a considerare trasformazioni del piano anziché trasformazioni della retta, ci riferiamo al caso del piano.

Siano dunque assegnate N similitudini $f_1, \ldots, f_N$ del piano e supponiamo che esse abbiano, per semplicità, tutte lo stesso rapporto α. Vogliamo studiare l'esistenza o meno di un insieme autosimile rispetto alla famiglia considerata, cioè di un insieme costituito da N parti, simili all'insieme stesso tramite le similitudini $f_1, \ldots, f_N$ rispettivamente. Per questo cerchiamo di applicare il Teorema delle contrazioni scegliendo dapprima l'insieme S e la trasformazione f, successivamente la distanza d.

Gli elementi di S (Figura 25) non saranno i punti del piano ma le figure geometriche. In realtà dovremmo scartare qualcosa. Precisamente sono elementi di S i sottoinsiemi chiusi, limitati e non vuoti del piano.

Come f prendiamo la trasformazione definita come segue (Figura 25). Sia x un elemento di S, cioè una delle figure geometriche prese in considerazione. Ciascuna delle similitudini $f_1, \ldots, f_N$ agisce su x e lo trasforma in una figura nuova, quella costituita dai trasformati dei punti di x. Otteniamo in tal modo N figure e chiamiamo $f(x)$ l'unione di queste. Dunque la figura $f(x)$ è costituita dai punti che si ottengono come trasformati di punti di x tramine almeno una delle similitudini $f_1, \ldots, f_N$. La definizione precisa di $f(x)$ è la seguente

$$f(x) = \bigcup_{i=1}^{N} \{f_i(p) : \ p \in x\}.$$

In tal modo otteniamo, per ogni x di S, ancora un elemento $f(x)$ di S, cioè f è una trasformazione di S, e il problema che ci siamo prefissi di risolvere è quello dei "punti" fissi (virgolette perché gli elementi di S non sono punti nel senso abituale del termine), cioè quello della risolubilità dell'equazione (1).

Introduciamo la distanza d in S procedendo come segue. Siano x e y due elementi di S. Consideriamo i punti di x che più di altri si discostano dall'insieme y e quelli di y che più di altri si discostano da x, immaginiamo di misurare tali scostamenti e prendiamo come $d(x,y)$ il più grande di tutti (Figura 26). Questa è la cosiddetta *distanza di Hausdorff* fra x e y e la sua definizione precisa è la seguente:

$$d(x,y) = \max \left\{ \max_{p \in x} \operatorname{dist}(p,y), \max_{q \in y} \operatorname{dist}(q,x) \right\}$$

ove, se r è un punto del piano e z è un elemento di S, si è posto

$$\operatorname{dist}(r,z) = \min_{s \in z} d_0(r,s)$$

denotando con d_0 la distanza usuale nel piano. Va osservato, se si vuole essere precisi, che tutti i valori massimi e minimi che intervengono nella definizione effettivamente esistono in quanto si stanno considerando solo elementi di S , cioè solo sottoinsiemi del piano chiusi, limitati e non vuoti.

Con tale scelta della distanza d effettivamente S diventa uno spazio metrico completo, per cui è soddisfatta la prima ipotesi del Teorema delle contrazioni. Per quanto riguarda la seconda, vale la disugualgianza

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y)$$

ove α è proprio il rapporto di similitudine comune alle similitudini considerate. Se, dunque, $\alpha < 1$, possiamo applicare il teorema e dedurre sia l'esistenza e l'unicità dell'insieme autosimile fra quelli di S , sia il fatto piuttosto sorprendente che, preso ad arbitrio un elemento x_0 di S e costruite le figure $x_1, x_2, \ldots$ applicando f iterativamente, la successione ottenuta converge nel senso della distanza di Hausdorff all'unico insieme autosimile.

Un'applicazione a modelli matematici

Consideriamo una classe di modelli matematici per fenomeni ad esempio biologici o fisici. Per essere più espliciti, ci riferiamo a due situazioni e consideriamo la crescita di una popolazione (ad esempio di una colonia di batteri) e la caduta di un grave (punto materiale) in presenza di un mezzo che offre resistenza. Nei due casi il significato di ciò che in generale chiamiamo $u(t)$ è diverso. Precisamente abbiamo rispettivamente

$$u(t) = \text{numero di milioni di individui all'istante } t$$
$$u(t) = \text{velocità (scalare con segno) del punto all'istante } t$$

ove $0 \leq t \leq T$ è l'intervallo di tempo in cui si intende descrivere il fenomeno biologico o fisico in termini matematici.

Il modello matematico si basa su una legge, che avrà il suo significato specifico nei singoli modelli. La legge che assumiamo è la seguente: se t' e t'' sono due istanti vicini con $t' < t''$, valga per l'incremento subito da u la proporzionalità (approssimativa) all'intervallo di tempo trascorso espressa dalla formula seguente

$$u(t'') - u(t') \simeq (t'' - t')\, G(u(t')) \tag{7}$$

ove la dipendenza di G da u è nota. La situazione è illustrata nella Figura 27, dove sono tracciati due dei grafici possibili che esprimono questa dipendenza. Ad esempio, in riferimento alla caduta del grave, il secondo grafico è plausibile. Infatti la dimensione fisica della grandezza G si deduce dalla (7) riscritta nella forma

$$\frac{u(t'') - u(t')}{t'' - t'} \simeq G(u(t'))$$

il primo membro della quale è l'accelerazione media del grave nell'intervallo di tempo che intercorre fra di due istanti t' e t'' . Dunque G ha la dimensione fisica di un'accelerazione (forza/massa) e la legge che stiamo imponendo è che la forza che in ogni istante agisce sul grave è nota non appena sia nota la velocità del grave in quell'istante. Allora il secondo dei due grafici della figura esprime che la forza scalare con segno è la somma della costante negativa $G(0)$ che si ha a velocità nulla (gravità) e di una resistenza (offerta dal mezzo) che si oppone alla velocità e che dipende solo dal modulo della velocità e cresce con questo.

Si immagini ora di considerare un generico istante t compreso fra 0 e T. Siccome t può non essere piccolo, si suddivida l'intervallo di estremi 0 e t introducendo un numero adeguato di istanti intermedi. Nella Figura 28 sono assunte le notazioni in modo che risulti

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = t.$$

Se la suddivisione è sufficientemente fitta, si può applicare la legge (7) a ciascuna delle coppie di istanti consecutivi ottenendo

$$\begin{aligned}
&u(t_1) \simeq u(t_0) + G(u(t_0))\,(t_1 - t_0) \\
&u(t_2) \simeq u(t_1) + G(u(t_1))\,(t_2 - t_1) \\
&u(t_3) \simeq u(t_2) + G(u(t_2))\,(t_3 - t_2) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

fino all'esaurimento delle coppie di istanti consecutivi. Si capisce allora che, se $u(0)$ è un valore u_0 noto (ad esempio la numerosità iniziale osservata della popolazione o la velocità iniziale impressa al grave che si lascia poi cadere), e nel seguito effettivamente si suppone u_0 noto, il valore $u(t) = u(t_n)$ è (approssimativamente) deducibile. Esso dipende non solo dall'istante t considerato, ma anche dall'intera *storia* di u, cioè dalla funzione u stessa fino all'istante t. Esprimiamo questo fatto con la formula simbolica

$$u(t) = H(u, t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{8}$$

Questa è un'equazione, detta *equazione di Volterra*, la cui incognita è la curva $y = u(t)$ che descrive nel piano ty l'andamento della popolazione oppure la velocità del grave in dipendenza dal tempo.

Notiamo che la formulazione precisa dell'equazione di Volterra, che è data in termini di integrali e ha sicuramente senso se G e u sono funzioni continue, è la seguente:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t G(u(s))\,ds, \qquad 0 \le t \le T.$$

Tornando al discorso modellistico, il primo problema che naturalmente si pone quando si studia un modello matematico basato su un'equazione è quello dell'esistenza e dell'unicità della soluzione e a questo scopo può tornare utile il Teorema delle contrazioni, che si può cercare di applicare scegliendo opportunamente S, f e d. Nel nostro caso (Figura 29), la curva $y = u(t)$ descrive, fra le curve a priori possibili, l'effettivo andamento della popolazione o della velocità se e solo se u verifica l'equazione (8), cioè se e solo se le due curve di equazioni

$$y = u(t) \qquad \text{e} \qquad y = H(u, t)$$

sono la stessa curva. Allora l'insieme S deve essere l'insieme delle curve che possono a priori descrivere l'andamento della popolazione o della velocità del grave (precisamente

S è l'insieme delle funzioni $y = u(t)$ continue per $0 \le t \le T$, o dei loro grafici) e la trasformazione f deve operare in questo insieme di curve in modo che l'equazione di Volterra (8) equivalga alla condizione

$$u = f(u)$$

di "punto" fisso. Dunque f deve associare alla curva $y = u(t)$ la curva $y = H(u,t)$.

Rimane la scelta della distanza. Questa, illustrata nella Figura 30, viene definita come segue. Date due curve $y = u(t)$ e $y = v(t)$ ammesse, si considerino tutti i segmenti del piano ty paralleli all'asse y e aventi gli estremi sulle due curve considerate e si prenda il più lungo. La sua lunghezza è $d(u,v)$ per definizione.

Notiamo che la definizione precisa della distanza è

$$d(u,v) = \max_{0 \le t \le T} |u(t) - v(t)|$$

e che il valore massimo che la definisce effettivamente esiste dato che le funzioni u e v che stiamo considerando sono continue.

Con queste scelte vale la prima ipotesi, HP1, del Teorema delle contrazioni. La seconda è soddisfatta per molti modelli e con una restrizione. Per molte scelte della funzione G che individua il modello (Figura 31) vale la disuguaglianza

$$d(f(u), f(v)) \le cT\, d(u,v) \tag{9}$$

per ogni coppia di elementi u e v di S, ove c è una costante che dipende dal modello. Il confronto con la (6) dice allora che si può sperare di applicare il Teorema delle contrazioni solo scegliendo $\alpha = cT$ e concludere che il teorema è effettivamente applicabile se si impone la restrizione $\alpha < 1$. Siccome c è un valore legato intrinsecamente al modello, possiamo realizzare la disuguaglianza richiesta solo agendo sul parametro T, che, dunque, dobbiamo supporre abbastanza piccolo. Concludiamo (Figura 32) che, per molti modelli, se T è abbastanza piccolo, vale un risultato di esistenza e di unicità della soluzione (TS1) e che c'è la possibilità (TS2) di approssimare la soluzione a partire da una curva a piacere scelta in S applicando l'azione di f iterativamente. Notiamo tuttavia che gli schemi di approssimazione offerti dal Teorema delle contrazioni sono in generale lontani dalla vera efficienza. A questo scopo provvedono capitoli specialistici dell'analisi numerica.

Terminiamo con qualche precisazione. Una condizione sufficiente per la validità della disuguaglianza (9) è la seguente

$$|G(y) - G(z)| \le c\,|y - z| \qquad \text{per ogni coppia di numeri reali } y \text{ e } z \tag{10}$$

la costante c essendo la stessa che compare in (9). Una condizione sufficiente per la validità della (10) è poi che la funzione G sia derivabile e che la sua derivata verifichi

$$|G'(y)| \le c \qquad \text{per ogni } y \text{ reale}$$

con la stessa costante c, come si vede applicando il Teorema del valor medio di Lagrange. Nell'ipotesi (10) sarebbe poi possibile modificare la scelta della distanza, sostituendo quella definita sopra con una formula meno elementare, in modo da evitare di imporre a T di essere abbastanza piccolo. Si otterrebbe in questo modo un teorema di esistenza e unicità relativo all'intervallo di tempo prefissato all'inizio del discorso.