Un problemino (accademico) curioso

Durante una lezione era stato posto il problema seguente:

> *se una funzione reale f di una variabile reale ha in ogni punto del suo dominio un punto di minimo locale è vero che f è differenziabile o addirittura costante?*

Si è visto che la risposta è in generale negativa, e per vari motivi.

la funzione segno ha la proprietà detta ma non è costante in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Il fatto che f sia costante dipende infatti dal dominio. Supponiamo dunque che il dominio di f sia un intervallo I. Nel caso in cui f è differenziabile, siccome l'ipotesi sul minimo locale assicura derivata nulla in ogni punto interno, se l'intervallo I è aperto f deve essere costante. La stessa conclusione è poi corretta anche quando l'intervallo I è chiuso (oppure semiaperto): la restrizione di f al corrispondente intervallo aperto è costante per quanto appena detto e la differenziabilità negli estremi (o nell'unico estremo) implica la continuità, per cui f è costante in tutto l'intervallo I.

Vediamo se la differenziabilità è conseguenza dell'ipotesi. Anche questa risposta è negativa, come mostra il caso delle funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \quad \textit{se} \quad x \le 0 \quad \textit{e} \quad f(x) = 1 \quad \textit{se} \quad x > 0$$

proposto durante la lezione. Osservato che tale funzione è discontinua, ci si chiede se basta l'ipotesi aggiuntiva di continuità per trarre la conclusione correttamente.

Teorema. *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua avente un punto di minimo locale in ogni punto di I. Allora f è costante.*

Dimostrazione. Per assurdo f non sia costante. Allora esistono $a, b \in I$ tali che $a < b$ e $f(a) \neq f(b)$, e possiamo senz'altro supporre $f(a) < f(b)$. Osservato che $[a, b] \subseteq I$ dato che I è un intervallo, definiamo

$$X = \{x \in [a, b],\ f(x) < f(b)\} \quad \text{e} \quad c = \sup X.$$

Siccome $a \in X$ e $X \subseteq [a, b]$, l'insieme X è non vuoto e limitato superiormente, per cui c è ben definito. Inoltre $a \le c \le b$.

Mostriamo che $c \in (a, b)$. Siccome $f(a) < f(b)$ e f è continua in a, esiste $a' \in (a, b)$ tale che $f(x) < f(b)$ per ogni $x \in [a, a']$. Dunque $[a, a'] \subseteq X$ e $c \ge a' > a$. Siccome b è un punto di minimo locale per f, esiste in particolare $b' \in (a, b)$ tale che $f(x) \ge f(b)$ per ogni $x \in [b', b]$. Dunque $X \subseteq [a, b')$ e $c \le b' < b$.

Mostriamo che $f(c) \ge f(b)$ e concludiamo. Per definizione di c, si ha $X \subseteq [a, c]$, da cui $f(x) \ge f(b)$ per ogni $x \in (c, b)$. Siccome f è continua in c, deduciamo che $f(c) = f(c^+) \ge f(b)$. Usiamo ora di nuovo l'ipotesi: anche c è punto di minimo locale. In particolare esiste $a'' \in (a, c)$ tale che $f(x) \ge f(c)$ per ogni $x \in [a'', c]$. Siccome $f(c) \ge f(b)$, deduciamo che $f(x) \ge f(b)$ per ogni $x \in [a'', c]$. Ciò implica che $X \subseteq [a, a'')$ da cui $\sup X \le a'' < c$, assurdo.

Osservazione. Consideriamo il caso in cui il dominio di f sia un generico sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$, ma manteniamo l'ipotesi di continuità su f. Allora è costante la restrizione di f a ogni intervallo $I \subseteq A$. In particolare, se A è un aperto, ogni punto di A ha un intorno in cui f è costante. Segue che in ogni punto di A la funzione è differenziabile con derivata nulla. Naturalmente, di nuovo, ciò implica che f è costante solo se A è un intervallo.