Errori ricorrenti agli esami (di origine remota...)

Durante gli esami si nota la ricorrenza sistematica di alcuni errori da parte dei candidati, errori che talora rivelano addirittura una cattiva impostazione dello studio. Non si ritengono dunque inutili qualche considerazione di carattere generale e alcune esemplificazioni.

Nota 1. Un errore tipico degli studenti meno preparati consiste nel dire cose insensate, dunque né vere né false: *il primo requisito di una frase è quello di avere significato*; il fatto che poi essa sia vera o meno può essere valutato solo dopo.

Nota 2. Spesso, dopo un'obiezione, non c'è la risposta alla domanda specifica e un errore ricorrente è quello di dire *parole a vanvera*, anche se in qualche modo attinenti alla domanda: il candidato ritiene, erroneamente, che qualunque cosa detta sia meglio del silenzio. Un errore di questo tipo ne comporta spesso altri e la situazione sia reale sia psicologica del candidato peggiora rapidamente.

Frequente è anche il caso di chi, pur non dicendo cose scorrette, non arriva al punto perché (e i commissari se ne accorgono presto) non ha le idee completamente chiare: il candidato sta dunque menando il can per l'aia e l'unico effetto che ottiene è una possibile irritazione di chi lo sta a sentire.

Nota 3. Molti candidati sono imprecisi. Ora, un'imprecisione è certamente un peccato veniale. Tuttavia a ogni imprecisione il candidato viene interrotto e pregato di ridire bene come stanno le cose e, se ciò avviene continuamente, il candidato si viene a trovare in una condizione psicologica decisamente sfavorevole. Troppi studenti hanno buttato il semestre senza imporsi di essere precisi e il giorno dell'esame è troppo tardi.

Nota 4. Ogni definizione e ogni teorema coinvolgono vari oggetti: insiemi, funzioni, punti, numeri, eccetera. Questi vengono contrassegnati da altrettanti simboli, quali A, f, x, ε, eccetera. Nei casi specifici alcuni di questi sono fissati e definiscono il quadro in cui si imposta il discorso. Tutti gli altri *devono essere preceduti da un quantificatore*: $\forall$ oppure $\exists$.

Il mancato quantificatore, infatti, comporta che la variabile in questione denoti in realtà qualcosa di fissato all'inizio, ma tale interpretazione rende di solito errato o insensato o privo di interesse tutto il discorso e, in ogni caso, fornisce qualcosa di completamente diverso da quanto fosse nelle intenzioni (confuse) del candidato.

Nota 5. Conoscere l'argomento $\mathcal{A}$ significa, in primis, essere in grado di raccogliere nella mente le definizioni e i risultati fondamentali (ovviamente con le ipotesi precise) relativi ad $\mathcal{A}$ *in tempi molto rapidi*.

In particolare il saper scegliere la risposta esatta a una domanda di un questionario è legato non tanto a quanti esercizi di quel tipo sono stati risolti quanto piuttosto a quanto bene si conosce la relativa teoria.

Nota 6. La convinzione della validità di un teorema può essere raggiunta in due modi: quello formale della dimostrazione e quello "intimo" in base al quale le cose non possono andare diversamente grazie a una piccola gamma di esempi significativi al riguardo. Questa seconda via, anche se raggiunge uno scopo un po' diverso da quello ottenuto con la prima, spesso convince anche sul fatto che le ipotesi del teorema siano proprio quelle (mentre la via della dimostrazione lascia aperta la possibilità che un ragionamento più sofisticato possa portare alla stessa tesi in ipotesi meno restrittive).

Eppure è molto frequente il caso del candidato che rivela di non aver meditato a sufficienza anche se, spesso, la costruzione di esempi illustrativi o di controesempi relativi all'abolizione di un'ipotesi è estremamente facile: in situazioni semplici, infatti, bastano le funzioni elementari. Così la funzione cubo è un esempio di funzione strettamente crescente la cui derivata non è strettamente positiva. Ma troppo spesso gli studenti commettono i due errori seguenti: primo, *non conoscono quanto è necessario le funzioni elementari*; secondo, e più grave, durante l'intero semestre di studio *non si sono abituati a costruire esempi e controesempi*, nemmeno di tipo grafico anziché analitico, per cui, nella sostanza, hanno buttato il semestre alle ortiche.

Nota 7. Va osservato che molti studenti non sono abituati a un metodo di studio che contempli quanto detto nelle note precedenti. Ciò nonostante, *essi si rifiutano sistematicamente di utilizzare la disponibilità del docente* a dare, nelle ore di ricevimento, non solo spiegazioni sulla materia ma anche indicazioni metodologiche. Alla fine, poi, sbattono malamente la faccia contro il muro (l'esame non superato)!

Ecco ora un piccolo elenco di situazioni tipiche (realmente accadute!).

1. *Si consideri la funzione* $f(x) = \dots$

La frase corretta è invece: *si consideri la funzione* $f : A \to B$ *definita dalla formula* $f(x) = \dots$ (naturalmente specificando di volta in volta chi sono A e B).

In molte situazioni concrete dell'Analisi Matematica elementare è *tollerata* la mancata scelta del codominio, spesso ovvia ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,...), *ma mai quella del dominio*: una stessa formula definisce varie funzioni che differiscono per il dominio.

2. **Professore:** *parliamo del significato geometrico della derivata.* **Studente:** *è la retta tangente...* **Professore:** *la derivata è un numero e la tangente è una retta: impossibile che siano la stessa cosa!* **Studente:** *è la pendenza della tangente.* **Professore:** *giusto, ma in quale punto?* **Studente:** *nel punto* $f(x_0)$ **Professore:** *chi sono* f *e* x_0*?* **Studente:** *la funzione e il punto in cui calcoliamo la derivata* **Professore:** *va bene; immaginiamo di aver detto per bene, cosa che non hai fatto, che* f *è una funzione da un intervallo* I *a valori reali e che* x_0 *è un punto di* I*; allora* $f(x_0)$ *è un numero reale e non ha senso la tangente in* $f(x_0)$ (candidato titubante)

Varie imprecisioni sono evidenti nel ping pong che si è instaurato; l'ultima riguarda la confusione fra il valore $f(x_0)$ e il punto del grafico $(x_0, f(x_0))$. A questo punto il candidato non è a suo agio! Vedi nota 3.

3. **Professore:** *parliamo di successioni monotone.* **Studente:** *una successione* $\{a_k\}$ *è non decrescente se....* **Professore:** *anche una successione di patate?* **Studente:** (stupore) *una successione di elementi di* $\mathbb{R}^n$... (titubanza).

Naturalmente il rimedio non funziona, dato che non ha senso una disuguaglianza del tipo $a_1 \leq a_2$ se, ad esempio, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$. Vedi nota 1.

4. **Professore:** *la funzione esponenziale complessa.* **Studente:** *un numero complesso si può scrivere nella forma* $z = \rho e^{i\theta} \ldots$ **Professore:** *la domanda era un'altra* (viene ripetuta). **Studente:** (parole in libertà).

Vengono confuse la funzione $z \mapsto e^z$, $z \in \mathbb{C}$, e la forma esponenziale dei numeri complessi. Più grave è poi il comportamento del candidato. Vedi nota 2.

5. **Professore:** *Diciamo che cosa significa che una funzione è continua.* **Studente:** *Quando* $\lim_{x\to x_0} f(x) \ldots$ (immediatamente interrotto) **Professore:** *Chi è* f*?* **Studente:** *La funzione.* **Professore:** *Diciamo bene:* **Studente:** *Eh, quando* $f(x)$ *approssima…*

La precisazione è peggiore della prima risposta e già quella era insensata (vedi nota 4). Inoltre, con tutta la tara del caso, lo studente avrebbe parlato non di continuità ma di continuità in un punto. Infine una risposta può iniziare con la parola "quando" sostanzialmente solo se così comincia la domanda. Vedi nota 3.

6. **Professore:** *facciamo un esempio di funzione tale che… e che non….* **Studente:** *basta prendere una funzione tale che….* **Professore:** *prego, prendi….* Candidato nel panico.

Risposte del tipo "basta fare così e così" senza riuscire a farlo davvero sono solo indicazioni perché altri facciano, non risposte concrete! In molti casi specifici è sufficiente esibire una funzione elementare precisa, ma il candidato non ha dimestichezza né con le funzioni elementari né con il fare da solo. Vedi nota 6.

7. *Siccome* $\{a_n\}$ *converge a* ℓ *si ha che* $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Non ha alcun senso se non si dice nulla riguardo a ε e a n. Vedi nota 4.

8. *Consideriamo il limite* $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n \ldots$

Tale limite potrebbe non esistere, ma molti non ne sono davvero consapevoli (almeno nel subconscio tutti i limiti esistono). Vedi nota 6.

9. *Criterio del rapporto delle serie:* …… *se* $\ell < 1$ *allora* a_n *converge.*……

È la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ che converge! Il fatto che la successione $\{a_n\}$ converga (in quelle ipotesi è infinitesima) non ci interessa.

Talora la risposta errata è solo dovuta all'uso errato delle parole. In certi casi, invece, c'è proprio confusione fra la successione data e la successione delle ridotte della serie.

10. *Chiedere di "disegnare con le mani" il grafico di una funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *ad esempio quella definita da* $f(x, y) = xy$, *spesso rende il candidato stupefatto.* Vedi nota 6.

11. **Professore:** *Definizione di spazio elementare di misura.* **Studente:** (dice tutto per bene finché…) *…e vale la proprietà additiva, cioè* $m\bigl(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\bigr) = \sum_{k=1}^{p} m(E_k)$ *per ogni famiglia finita di insiemi* $E_k \in \mathcal{E}$ *a due a due disgiunti.* **Professore:** *Attenzione:* m *è definita solo in* $\mathcal{E}$. **Studente:** (nessun riflesso). **Professore:** *che significano funzione e relativo dominio?* **Studente:** (panico e parole in libertà). Situazione alternativa dopo la prima risposta del candidato: **Professore:** *Qual è un prototipo di spazio elementare* *di misura?* **Studente:** *Quello dei rettangoli.* **Professore:** *E l'unione di due rettangoli è ancora un rettangolo?* **Studente:** *Sì.* **Professore:** ... (omissis).

Sulla famiglia finita $\{E_1, \dots, E_p\}$ occorre richiedere anche $\bigcup_{k=1}^{p} E_k \in \mathcal{E}$, altrimenti la formula non ha senso. Vedi nota 1. Alcuni studenti non richiedono nemmeno che gli E_k siano a due a due disgiunti, dimostrando in tal modo di non avere la più pallidea idea delle cose di cui stanno parlando (eppure ne parlano senza pudore!).

12. **Professore:** *Parliamo dell'integrale di una funzione generica, immaginando di sapere tutto quanto occorre sapere sulle funzioni a scala.* **Studente:** (dopo aver precisato bene il quadro in cui ambientare il discorso) *f è integrabile quando la funzione a scala che sta sopra...* **Professore:** *La* (enfasi sull'articolo) *funzione a scala? Ce nè una sola?* **Studente:** *Quella che meglio approssima f...* **Professore:** *Per caso sei convinto che esiste il più piccolo reale positivo?* **Studente:** (panico e si intuisce come andrà a finire).

Non occorrono commenti particolari sull'argomento specifico. Non è invece inutile ricordare che, anche nel linguaggio corrente (escluse le situazioni in cui, di fatto, il soggetto è sostanzialmente plurale, come avviene ad esempio in una frase del tipo "l'uomo, rispetto agli altri animali,..."), l'articolo determinativo è usato correttamente in situazioni di unicità, altrimenti è d'obbligo l'articolo indeterminativo.

13. **Studente:** *Siano $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.* **Professore:** *Che significato ha la continuità di una funzione definita in un sacco di patate?* **Studente:** (stupore). **Professore:** *Ma sì, sappiamo pesare le patate, per cui ha senso costruirci sopra uno spazio di misura.* **Studente:** (panico)... Vedi nota 1.

14. *Teorema fondamentale del calcolo: vale la formula $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$.* **Professore:** *Diciamo bene. Come deve essere f?* **Studente:** *Continua.* **Professore:** *Ma non vedi che c'è la derivata?* **Studente:** *Differenziabile.*

L'ipotesi corretta (attenuabile solo leggermente) è che f sia di classe C^1, altrimenti nulla garantisce l'integrabilità di f' e il problema della validità della formula non può nemmeno essere posto. Vedi nota 1. Lo studente non si è mai chiesto se la derivata di una funzione differenziabile sia integrabile o meno (questo studente non si è posto nemmeno altri problemi... non ha studiato e non ha capito).

15. *Consideriamo il versore r_0 del gradiente, cioè $r_0 = \nabla f(x_0)/|\nabla f(x_0)|$...*

E se il gradiente si annulla? Spesso ci si dimentica questo caso.