Esempio di studio: un'equazione differenziale di Riccati

In queste pagine discutiamo il problema di Cauchy in avanti

$$u'(t) = u^2(t) - t^2 + 1 \quad \text{e} \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

ove u_0 è un parametro reale. Chiaramente non sussistono problemi di esistenza e unicità: ogni problema di Cauchy per l'equazione data (anche completo e posto in un altro istante temporale) ha una e una sola soluzione massimale u. Non è immediatamente chiaro, tuttavia, se la soluzione massimale del problema (1) sia o meno globale. Se $u_0 = 0$, la funzione definita da $u(t) = t$ per $t \geq 0$ risolve (1) nell'intera semiretta, per cui essa è l'unica soluzione globale. Se $u_0 \neq 0$, abbiamo pertanto che $u(t) > t$ per ogni $t \in \operatorname{dom} u$ o $u(t) < t$ per ogni $t \in \operatorname{dom} u$ a seconda che $u_0 > 0$ o $u_0 < 0$. Ebbene avviene che la soluzione massimale è globale se $u_0 < 0$, mentre non lo è se $u_0 > 0$.

Proposizione 1. *Se $u_0 < 0$ la soluzione è globale; se $u_0 > 0$ la soluzione non è globale.* ∎

Di questo fatto diamo diverse dimostrazioni a titolo esemplificativo. La prima è legata a una strategia di calcolo, che può essere usata per tutte le cosiddette *equazioni di Riccati*, di cui la (1) è un caso particolare:

$$u'(t) = a(t)u''(t) + b(t)u'(t) + c(t)u(t) \tag{2}$$

ove a, b, c sono funzioni reali *continue* in uno stesso intervallo I, purché si conosca un integrale particolare u_* definito in un certo subintervallo $I_* \subseteq I$. Se u è una soluzione definita in un subintervallo $I_0 \subseteq I$ che interseca I_* e se u e u_* sono diverse in un punto di $I_0 \cap I_*$, allora esse sono diverse in ogni punto di tale intersezione e ha senso il reciproco della loro differenza. Dunque si può usare con il cambiamento di incognita

$$u(t) = u_* + \frac{1}{z(t)} \tag{3}$$

e si vede che z risolve in ogni caso un'equazione lineare. Le soluzioni di quest'ultima si possono in qualche modo calcolare, se non completamente almeno in termini di certi integrali. Da z, con qualche attenzione che eviti denominatori nulli, si risale poi a u. Ma torniamo al nostro caso.

Dimostrazione. Possiamo prendere $I = \mathbb{R}$ e $u_*(t) = t$, per cui la (3) diventa

$$u(t) = t + \frac{1}{z(t)}\,. \tag{4}$$

La funzione z data da (4) verifica $z(0) = 1/u_0$ e per ogni $t \in \operatorname{dom} u$

$$1 - \frac{z'(t)}{z^2(t)} = t^2 + \frac{2t}{z(t)} + \frac{1}{z^2(t)} - t^2 + 1, \quad \text{cioè} \quad z'(t) + 2tz(t) = -1.$$

Otteniamo appunto un'equazione lineare. Abbiamo pertanto

$$\frac{d}{dt}\big(e^{t^2} z(t)\big) = -e^{t^2}, \quad e^{t^2} z(t) - \frac{1}{u_0} = -\int_0^t e^{s^2}\,ds, \quad z(t) = e^{-t^2}\Big(\frac{1}{u_0} - \int_0^t e^{s^2}\,ds\Big). \tag{5}$$

Immaginiamo ora di definire $z : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tramite l'ultima formula (5): allora $\operatorname{dom} u$ è dato dall'intervallo $[0, t_*)$ ove $t_* = \sup\{t' > 0 : z(t) \neq 0 \text{ per ogni } t \in [0, t')\}$. D'altra parte $z(t)$ si comporta, per quanto riguarda annullamento e segno, esattamente come il termine dell'ultima parentesi della (5), termine che denotiamo con $p(t)$. Ora, se $u_0 < 0$, abbiamo chiaramente $p(t) < 0$ per ogni $t \geq 0$: dunque $t_* = +\infty$ e (1) ha soluzione globale. Se invece $u_0 > 0$, la funzione $t \mapsto p(t)$ è strettamente decrescente, positiva in 0 e divergente a $-\infty$ per $t \to +\infty$ (in quanto l'esponenziale sotto il segno di integrale è ≥ 1 in ogni punto), per cui si annulla in un certo (unico) punto t_*, e tale t_* è l'estremo destro del dominio di u. In tal caso, dunque, il problema (1) non ha soluzione globale. ∎

Ora, come preannunciato, riotteniamo lo stesso risultato in diversi altri modi. Questi sono tutti basati solo su considerazioni che riguardano il problema di Cauchy e non sul calcolo effettivo. In particolare useremo, naturalmente nel caso $n = 1$, il risultato seguente, che generalizza quello più noto sulle soluzioni massimali limitate:

Teorema 2. *Siano $T \in (0, +\infty]$, $f : [0, T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e $M : [0, T) \to \mathbb{R}$ continua. Se $t_* \in (0, T]$ e $u : [0, t_*) \to \mathbb{R}^n$ è una soluzione massimale dell'equazione differenziale $u'(t) = f(t, u(t))$ per $t \in [0, t_*)$ che verifica $|u(t)| \leq M(t)$ per ogni $t \in [0, t_*)$, allora $t_* = T$.* ∎

Dimostrazione. La diamo per completezza. Per assurdo sia $t_* < T$. In particolare t_* è finito, per cui $|u(t)| \leq R$ ove abbiamo posto $R = \sup\{M(s) : 0 \leq s \leq t_*\}$. Detta B la palla chiusa di $\mathbb{R}^n$ di centro 0 e raggio R, segue che il grafico della funzione $t \mapsto f(t, u(t))$, $t \in [0, t_*)$, è incluso in $[0, t_*] \times B$, che è un compatto del dominio di f, per cui la funzione in esame è limitata. Quindi è limitata anche u' e u è anche lipschitziana, dunque prolungabile per continuità alla chiusura del suo dominio. Pertanto il limite sinistro $u(t_*^-)$ esiste finito. Utilizzato questo come dato di Cauchy all'istante t_* e applicato il Teorema di Peano di esistenza locale, vediamo che u è prolungabile in senso stretto a una soluzione, contro l'ipotesi di massimalità. ∎

Caso $u_0 > 0$: soluzione non globale. Ragionando per assurdo, supponiamo che $\operatorname{dom} u = [0, +\infty)$. Introduciamo la funzione $w : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $w(t) = u(t) - t$. Questa verifica

$$w(t) > 0 \quad \text{e} \quad w'(t) = w^2(t) + 2tw(t) \quad \text{per ogni } t \in [0, +\infty), \quad w(0) = u_0 . \tag{6}$$

Introduciamo ora la soluzione massimale del problema di Cauchy in avanti

$$v'(t) = v^2(t) \quad \text{e} \quad v(0) = \frac{u_0}{2}$$

che è data dalla formula $v(t) = 1/(t_1 - t)$ per $t \in [0, t_1)$, ove $t_1 = 2/u_0$. Siccome $v(t)$ diverge a $+\infty$ per $t \to t_1^-$, per arrivare a una contraddizione è allora sufficiente mostrare che

$$w(t) \geq v(t) \quad \text{per ogni } t \in [0, t_1). \tag{7}$$

Per assurdo la (7) sia falsa. Allora l'insieme $A = \{t \in [0, t_1) : w(t) < v(t)\}$ è non vuoto e ha senso definire $t_0 = \inf A$. Essendo $w(0) > v(0)$, si ha anche $w(t) > v(t)$

per t abbastanza piccolo, per cui $t_0 > 0$. Inoltre $w(t) > v(t)$ per ogni $t \in [0, t_0)$ e $w(t_0) = v(t_0)$. Abbiamo allora $w'(t_0) \le v'(t_0)$. D'altra parte $w'(t_0) = w^2(t_0) + 2\,t_0 w(t_0)$ e $v'(t_0) = v^2(t_0)$. Deduciamo pertanto che $2\,t_0 w(t_0) \le 0$, assurdo. Dunque A è vuoto e la (7) è dimostrata. Ciò mostra che w non è globale, per cui nemmeno u lo è. ∎

Caso $u_0 < 0$: soluzione globale. Ci basiamo sulla monotonia, dunque sul segno della derivata. Per comodità denotiamo indifferentemente con D o con $[0, t_*)$ il dominio $\operatorname{dom} u$ di u. Per $t \in D$ abbiamo $u'(t) > 0$ oppure $u'(t) < 0$ a seconda che $u^2(t) > t^2 - 1$ o $u^2(t) < t^2 - 1$. Siamo pertanto indotti a considerare gli insiemi

$$R^+ = \{(t, y) \in (0, +\infty \times \mathbb{R} : y^2 > t^2 - 1\} \quad \text{e} \quad R^- = \{(t, y) \in (0, +\infty \times \mathbb{R} : y^2 < t^2 - 1\}$$

separati fra loro dalla curva del semipiano $t > 0$ (ramo di iperbole equilatera) di equazione $y^2 = t^2 - 1$: se $(t, u(t)) \in R^+$ allora u cresce in un intorno di t; se $(t, u(t)) \in R^-$ allora u decresce in un intorno di t. Conviene notare che $(0, 1) \times \mathbb{R}$ è incluso in R^+ e che, se $t > 1$, l'appartenenza di (t, y) a R^+ o a R^- equivale, rispettivamente, alle disuguaglianze $|y| > \sqrt{t^2 - 1}$ e $|y| < \sqrt{t^2 - 1}$. Inoltre, se $(t, u(t)) \in \partial R^+ = \partial R^-$, allora $u'(t) = 0$.

Siccome $u(t) < t$ per ogni $t \in D$ e u cresce in $D \cap [0, 1)$, si applica facilmente il Teorema 2 con $T = 1$ e si deduce che $t_* \ge 1$. Ora t_* non può valere proprio 1: in tal caso u' sarebbe limitata e $u(1^-)$ esisterebbe finito, il che implica la prolungabilità di u. Dunque $t_* > 1$ e si danno due casi: nel primo $u(t) \ge \sqrt{t^2 - 1}$ per ogni $t \in [1, t_*)$ e, sapendo che si ha anche $u(t) < t$, possiamo applicare il Teorema 2 con $T = +\infty$ e concludere che $t_* = +\infty$. Nel secondo caso, esiste $t > 1$ tale che $u(t) < \sqrt{t^2 - 1}$. In tal caso il grafico di u ha punti nella regione R^- e, una volta entrato in R^-, vi rimane per tutti gli istanti successivi. Dimostriamo rigorosamente questo fatto. Sia t_0 l'estremo inferiore dell'insieme dei $t > 1$ tali che $(t, u(t)) \in R^-$. Risulta $t_0 > 1$ e $u'(t_0) = 0$ e ora vediamo che $(t, u(t)) \in R^-$ per ogni $t \in D \cap (t_0, +\infty)$. In caso contrario, infatti, esiste il minimo t_1 (inizialmente l'estremo inferiore) dei $t > t_0$ tali che $(t, u(t))$ appartenga al complementare di R^-. Allora $t_1 > t_0$, $(t_1, u(t_1))$ appartiene al grafico di $t \mapsto -\sqrt{t^2 - 1}$ e $(t, u(t)) \in R^+$ per ogni $t \in (t_0, t_1)$. Segue facilmente che $u'(t_1)$ è $\le$ della derivata in t_1 della funzione $t \mapsto -\sqrt{t^2 - 1}$, che è negativa. Dunque $u'(t_1) < 0$ mentre si è notato che la derivata è nulla in ogni t tale che $(t, u(t)) \in \partial R^-$. Dunque, accanto alla disuguaglianza $u(t) < t$, abbiamo anche $u(t) > -\sqrt{t^2 - 1}$ per ogni $t \in D \cap (1, +\infty)$. Pertanto possiamo applicare il Teorema 2 con $T = +\infty$ e concludere che $t_* = +\infty$.

Caso $u_0 < 0$: soluzione globale. Ridimostriamo che la soluzione è globale applicando il Teorema 2: dunque cerchiamo una stima a priori. Poniamo $\operatorname{dom} u = D = [0, t_*)$, con t_* a priori finito o meno. Siccome già sappiamo che $u(t) < t$ per ogni $t \in D$, dobbiamo prestare attenzione alla sola parte negativa u^- di u. Dall'equazione si deduce che

$$u(t)u'(t) = u^3(t) + (1 - t^2)u(t) \quad \text{per ogni } t \in D.$$

Sia ora $t \in D$. Scritta la relazione appena trovata nel generico punto $s \in (0, t)$ e integrando rispetto a s su $(0, t)$ otteniamo

$$\frac{1}{2}\,u^2(t) - \frac{1}{2}u_0^2 = \int_0^t u^3(s)\,ds + \int_0^t (1 - s^2)u(s)\,ds$$

e anche

$$u^2(t) \le u_0^2 + 2\int_0^t u^3(s)\,ds + 2\int_0^t |u(s)|\,|1-s^2|\,ds.$$

Ora ricordiamo la disuguaglianza di Young

$$ab \le \vartheta a^{1/\vartheta} + (1-\vartheta) b^{1/(1-\vartheta)} \quad \text{per ogni } ab \ge 0 \text{ e } \vartheta \in (0,1)$$

e applichiamola alla funzione integranda dell'ultimo integrale con ovvie scelte di a e b e con $\vartheta = 1/3$, così che $1/\vartheta = 3$ fa al caso nostro. Essendo $1/(1-\vartheta) = 3/2$, deduciamo che

$$u^2(t) \le u_0^2 + 2\int_0^t u^3(s)\,ds + 2\int_0^t \Bigl(\frac{1}{3}\,|u(s)|^3 + \frac{2}{3}\,|1-s^2|^{3/2}\Bigr)\,ds.$$

Ricordando che $u^+u^- = 0$, vediamo che i cubi $u^3 = (u^+ - u^-)^3$ e $|u|^3 = (u^+ + u^-)^3$ sono dati semplicemente da $(u^+)^3 \mp (u^-)^3$ rispettivamente. Inoltre da $u(s) \le s$ deduciamo $u^+(s) \le (s)^+ = s$ e quindi $(u^+(s))^3 \le s^3$. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned}
u^2(t) &\le u_0^2 + 2\int_0^t \bigl(s^3 - (u^-(s))^3\bigr)\,ds + 2\int_0^t \Bigl(\frac{1}{3}\,s^3 + \frac{1}{3}\,(u^-(s))^3 + \frac{2}{3}\,|1-s^2|^{3/2}\Bigr)\,ds \\
&= u_0^2 - \frac{4}{3}\int_0^t (u^-(s))^3\,ds + \int_0^t \Bigl(\frac{8}{3}\,s^3 + \frac{4}{3}\,|1-s^2|^{3/2}\Bigr)\,ds \\
&\le u_0^2 + \int_0^t \Bigl(\frac{8}{3}\,s^3 + \frac{4}{3}\,|1-s^2|^{3/2}\Bigr)\,ds = M^2(t)
\end{aligned}$$

con ovvia definizione di $M(t)$. Quindi $t_* = +\infty$ per il Teorema 2 con $T = +\infty$. ∎