Il prodotto alla Cauchy di due serie

Per definizione, la serie *prodotto alla Cauchy* di due serie complesse $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ il cui termine generale c_n è definito dalla formula

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \,.$$

Si noti che il prodotto è commutativo: lo scambio delle serie date, infatti, fornisce la stessa serie prodotto. Vale il risultato seguente:

Teorema. *Se le due serie complesse $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono e almeno una di esse converge assolutamente, allora la serie prodotto alla Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge e vale la formula*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \,.$$

Dimostrazione. Supponiamo, per fissare le idee, assolutamente convergente la prima delle due serie e poniamo per comodità

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \,, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$
$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,, \quad A' = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \,, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \,, \quad D_n = B_n - B \,, \quad M = \sup_{n \geq 0} |D_n|$$

osservando che M è finito dato che $\{D_n\}$ è infinitesima. Per ogni n risulta

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_i b_j \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i (B + D_{n-i}) = A_n B + \sum_{i=0}^{n} a_i D_{n-i} \,. \end{aligned}$$

Siccome A_n converge ad A, basta dimostrare che è infinitesima per $n \to \infty$ l'ultima somma che compare nella catena precedente. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Ricordando che $\{D_n\}$ è infinitesima e che la prima serie è assolutamente convergente possiamo scegliere $m \geq 1$ tale che

$$|D_j| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } j \geq m \quad \text{e} \quad \sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon \,.$$

Supponiamo ora $n \geq 2m$ (da cui anche $n > m$). Abbiamo

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_i D_{n-i} \right| \leq \sum_{i=0}^{n-m} |a_i| \, |D_{n-i}| + \sum_{i=n-m+1}^{n} |a_i| \, |D_{n-i}| \,.$$

Ora osserviamo che nella prima delle due somme al secondo membro l'indice $n-i$ di D_{n-i} verifica $i \leq n-m$, da cui $n-i \geq m$. Inoltre l'indice i nella seconda somma verifica $i \geq n-m+1 \geq m$ dato che $n \geq 2m$. Possiamo allora continuare come segue

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_i D_{n-i} \right| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-m} |a_i| + M \sum_{i=n-m+1}^{n} |a_i| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| + M \sum_{i=m}^{\infty} |a_i| \leq \varepsilon (A' + M)$$

il che conclude la dimostrazione.