Gianni A. Pozzi

APPUNTI
PER IL CORSO DI ANALISI FUNZIONALE

Anno Accademico 2007-8

David Hilbert

Stefan Banach

Versione del 23/8/2007

Indice

Capitolo 1

SPAZI DI HILBERT

In (quasi tutto) questo Capitolo, gli spazi vettoriali considerati saranno *complessi*. La scelta di utilizzare $\mathbb{C}$ (e non $\mathbb{R}$) come campo degli scalari è motivata anche dal fatto che alcune tra le più notevoli applicazioni della teoria degli spazi di Hilbert (ad esempio, alla Meccanica Quantistica) richiedono *necessariamente* l'ambito complesso. La maggior parte di quanto esporremo vale tuttavia (con le ovvie modifiche) anche nel caso di spazi *reali*; sono stati comunque messi in evidenza i risultati che richiedono trattazioni diverse nei due casi (si veda ad esempio la **Proposizione 1.2.2**).

1.1 Prodotto scalare. Esempi.

Definizione **1.1.1** *Un* **prodotto scalare** *in H è un'applicazione da $H \times H$ in $\mathbb{C}$, indicata con (x, y), che verifica le seguenti proprietà:*

i) $\forall x, y \in H, \quad (y, x) = \overline{(x, y)}$;

ii) $\forall x \in H, \quad (x, x) \geq 0$;[1] *inoltre,* $(x, x) = 0 \iff x = 0$;

iii) $\forall (x, y, z \in H,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}), \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$.

Uno spazio vettoriale munito di un prodotto scalare si dice **spazio prehilbertiano**. ■

È evidente che la *iii)* è *equivalente* alle due richieste

$iii)_1$ $\forall x, y, z \in H, \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

e$iii)_2$ $\forall (x, y \in H,\ \alpha \in \mathbb{C}), \quad (\alpha x, y) = \alpha\,(x, y)$:

dalla *iii)* discendono infatti sia la $iii)_1$ (scegliendo $\alpha = \beta = 1$), sia la $iii)_2$ (scegliendo $\beta = 0$); d'altra parte, $iii)_1$ e $iii)_2$ implicano che, $\forall x, y, z \in H$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x, z) + (\beta y, z) = \alpha\,(x, z) + \beta\,(y, z)$.

Risulta inoltre

$$\forall (x, y, z \in H,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}), \quad (x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z);$$

si ha infatti, dalle *ii)* e *iii)* della **Definizione 1.1.1**,

$$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{\alpha}\,\overline{(y, x)} + \overline{\beta}\,\overline{(z, x)} = \overline{\alpha}\,(x, y) + \overline{\beta}\,(x, z).$$

[1] la richiesta $(x, x) \geq 0$ ha senso perché, per la *i)*, (x, x) è un numero *reale*.

In Meccanica Quantistica, nella quale gli spazi di HILBERT hanno un ruolo fondamentale, il prodotto scalare di solito è definito in modo da essere lineare nel *secondo* argomento, e spesso indicato, con le notazioni di DIRAC, con $\langle x|y\rangle$ anziché con (x, y); si assumono cioè le proprietà seguenti:

i′) $\forall x, y \in H, \quad \langle y|x\rangle = \overline{\langle x|y\rangle}$;

ii′) $\forall x \in H, \quad \langle x|x\rangle \geq 0$, e $\langle x|x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

iii′) $\forall (x, y, z \in H,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}), \quad \langle x|\alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x|z\rangle + \beta\langle y|z\rangle$.

Naturalmente, questa scelta non comporta nessun cambiamento –se non formale– nei risultati: basta utilizzare la corrispondenza $\langle x|y\rangle \leftrightarrow (y, x)$.

Osserviamo esplicitamente che una notazione più corretta per indicare uno spazio prehilbertiano sarebbe $(H; (\,.\,,.))$, e non semplicemente H (che è il **sostegno** dello spazio): sullo stesso spazio vettoriale è infatti possibile definire *più* prodotti scalari, che possono dar luogo a spazi prehilbertiani *"sostanzialmente" diversi* (il significato di questa affermazione verrà chiarito più avanti; si veda l'**Osservazione 1.4.1**). Per brevità, useremo tuttavia la più semplice notazione H, quando il contesto è tale che non possano sorgere equivoci.

Esempi ben noti di spazi prehilbertiani sono, per ogni $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}^d$ (oppure $\mathbb{R}^d$ nel caso di spazi reali), con l'usuale prodotto scalare di vettori. Qualche altro esempio significativo:

1 • sia $\ell_c := \bigcup_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{C}^d$; se si identifica il generico vettore $\{x_1, \ldots, x_d\} \in \mathbb{C}^d$ con la successione $\{x_1, \ldots, x_d, 0, 0, \ldots\}$, ℓ_c viene identificato, di conseguenza, allo spazio delle successioni a termini *definitivamente nulli*:

$$x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_c \iff \exists \overline{n} = \overline{n}(x) : \ x_n = 0 \ \ \forall n > \overline{n}.$$

Posto, $\forall (x = \{x_n\},\ y = \{y_n\} \in \ell_c)$,

$$(x, y) := \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\, \overline{y}_n,$$

si verifica facilmente che $\ell^2_c := (\ell_c; (\,.\,,.))$ è uno spazio prehilbertiano. Si osservi che la serie che compare nella definizione di (x, y) è in realtà una *somma finita*, perché $x_n\, \overline{y}_n = 0$ per tutti gli n tali che $n > \min\{\overline{n}(x); \overline{n}(y)\}$.

2 • Sia ℓ^2 l'insieme delle successioni *"di quadrato sommabile"*:

$$x = \{x_n\} \in \ell^2 \overset{def}{\iff} \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty.$$

Dall'ovvia disuguaglianza[2] $2ab \leq a^2+b^2$, valida $\forall a, b \in \mathbb{R}$, discende che, $\forall N \in \mathbb{N}$, si ha $\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^2 \leq 2\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2$. Se ne deduce che se $x, y \in \ell^2$ allora anche $x + y \in \ell^2$; è poi immediato verificare che se $x \in \ell^2$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ allora $\alpha x \in \ell^2$: in conclusione, ℓ^2 è uno *spazio vettoriale*.
In modo del tutto analogo, si verifica che se $x = \{x_n\},\ y = \{y_n\} \in \ell^2$, allora la serie di termine generale $x_n\, \overline{y}_n$ è *assolutamente convergente*; è quindi lecito porre, $\forall x, y \in \ell^2$,

$$(x, y) := (x, y)_2 = \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} x_k\, \overline{y}_k\,,$$

e si verifica senza difficoltà che (x, y) è un prodotto scalare in ℓ^2.

3 • Sia $\mathfrak{X}$ l'insieme delle funzioni $x : [0, 1] \to \mathbb{C}$ che verificano le seguenti proprietà:

i): posto $D(x) := \{t \in [0, 1] \mid x(t) \neq 0\}$, $D(x)$ è (vuoto o) *al più numerabile*;

ii): $\sum_t |x(t)|^2 < +\infty$.

[2] si noti che risulta anzi, per ogni $\varepsilon > 0$, $2ab \leq \varepsilon\, a^2 + b^2/\varepsilon$.

Il significato della *ii*) è evidente, grazie alla proprietà *i*): la somma è estesa ai soli t per i quali $x(t) \neq 0$, quindi all'insieme $D(x)$, che è al più numerabile. Si tratta quindi di una *somma finita*, o di una *serie* (a termini positivi).[3]
Procedendo in modo analogo a quanto visto sopra per ℓ^2, si controlla facilmente che $\mathfrak{X}$ è uno spazio vettoriale, e che ponendo

$$(x, y) := \sum_t x(t)\,\overline{y(t)}$$

si definisce un prodotto scalare in $\mathfrak{X}$ (si osservi che la somma è estesa in realtà a $D(x) \cap D(y)$, che è al più numerabile).

4 • Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, sia $C^0([a, b])$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue da $[a, b]$ in $\mathbb{C}$. È immediata la verifica che ponendo, $\forall x, y \in C^0([a, b])$,

$$(x, y) := \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$$

si definisce un prodotto scalare in $C^0([a, b])$.

5 • Sia Ω un sottoinsieme misurabile secondo LEBESGUE di $\mathbb{R}^d$, e sia $L^2(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle *classi di equivalenza*[4] di funzioni misurabili x da Ω in $\mathbb{C}$ tali che la funzione $t \mapsto |x(t)|^2$ sia *integrabile secondo* LEBESGUE (o *sommabile*) in Ω; ancora grazie alla disuguaglianza elementare $2ab \leq a^2 + b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, si verifica che $L^2(\Omega)$ è uno spazio vettoriale, e che la posizione

$$(x, y) := \int_\Omega x(t)\,\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t \qquad\qquad (m\text{= misura di LEBESGUE})$$

definisce un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$.

Nell'ultimo esempio, è evidente la necessità di definire $L^2(\Omega)$ *non* come uno spazio di *funzioni* (misurabili e con modulo di quadrato sommabile), bensì come uno spazio di *classi di equivalenza* di funzioni di questo tipo. In caso contrario, non sarebbe verificata la seconda proprietà della **Definizione 1.1.1**, *i*): sapere che la *funzione* x è misurabile in Ω e che $\int_\Omega |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0$ permette *soltanto* di concludere che $x(t) = 0$ q.o. in Ω, ma non che x è *identicamente nulla*.

La definizione ora data si può evidentemente estendere al caso dello spazio $L^2(A, \mathcal{E}, \mu)$ costruito a partire da uno spazio di misura $\sigma-$finito $(A, \mathcal{E}, \mu)$ (con μ misura non negativa). È ovvio che $L^2(\Omega)$ è un caso (molto) particolare di $L^2(A, \mathcal{E}, \mu)$; ma lo stesso vale anche per ℓ^2: basta infatti scegliere[5] $A := \mathbb{R}$, $\mathcal{E} := \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, $\mu := \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_{(k)}$, dove $\delta_{(k)}$ è la misura associata alla *massa unitaria* (misura di DIRAC) concentrata nel punto k. Lo spazio $\mathfrak{X}$ dell'esempio **3** *non* rientra invece nello schema precedente: $([0, 1], \mathfrak{P}([0, 1]), \mu)$, dove μ è la *misura "che conta"*, non è $\sigma-$finito.

Si ha il seguente risultato *fondamentale*:

Teorema 1.1.1 *In ogni spazio prehilbertiano H, vale la* **disuguaglianza di Schwarz**[6]

$$\forall x, y \in H, \quad |(x, y)|^2 \leq (x, x)\,(y, y)\,;$$

inoltre, il segno di uguaglianza *vale se e solo se x, y sono* linearmente dipendenti.

[3] le *i*), *ii*) esprimono il fatto che $\{|x(t)|^2\}_{t\in[0,1]}$ è una **famiglia sommabile.**
[4] due funzioni x, y sono *equivalenti* se l'insieme $\{t \in \Omega \mid x(t) \neq y(t)\}$ è misurabile ed ha misura nulla.
[5] $\mathfrak{P}(A)$ è l'*insieme delle parti* dell'insieme A.
[6] detta anche *disuguaglianza di* CAUCHY-SCHWARZ-BUNJAKOWSKY.

Dim.: il risultato è ovvio se $y = 0$ (si osservi che $(x, 0) = (x, 0 + 0) = (x, 0) + (x, 0)$, quindi $(x, 0) = 0$). Se $y \neq 0$, posto $z := (y, y)\,x - (x, y)\,y$, grazie alle proprietà $i) - iii)$ della **Definizione 1.1.1** si ottiene che

$$\begin{aligned} 0 &\le (z, z) = ((y, y)x - (x, y)y, (y, y)x - (x, y)y) = \\ &= (y, y)^2\,(x, x) - (y, y)\,\overline{(x, y)}\,(x, y) - (x, y)\,(y, y)\,(y, x) + (x, y)\,\overline{(x, y)}\,(y, y) = \\ &= (y, y)\,\left[(x, x)\,(y, y) - |(x, y)|^2\right], \end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza. Inoltre, l'uguaglianza $(z, z) = 0$ vale se e solo se risulta $z = (y, y)\,x - (x, y)\,y = 0$; ciò conclude la dimostrazione. ∎

1.2 Norma e distanza indotte.

Poniamo la seguente

Definizione **1.2.1** *Sia E uno spazio vettoriale; una* **norma** *su E è un'applicazione da E in $\mathbb{R}$, indicata con $x \mapsto \|x\|$, che verifica le seguenti proprietà:*

$i)$: $\forall x \in E$, $\|x\| \ge 0$; inoltre, $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

$ii)$: $\forall (x \in E,\ \alpha \in \mathbb{C})$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$;

$iii)$: $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ **(disuguaglianza triangolare).**

Uno **spazio normato** *è uno spazio vettoriale E munito di una norma.* ∎

Una semplice conseguenza della $iii)$ è la seguente disuguaglianza:

$$\forall x, y \in E, \quad \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x - y\|. \tag{1.1}$$

Valgono evidentemente considerazioni analoghe a quelle svolte in precedenza a proposito degli spazi prehilbertiani: la notazione E che abbiamo utilizzato è in realtà un'abbreviazione della notazione più completa $(E; \|\,.\,\|)$.

È importante osservare che *ogni* spazio prehilbertiano può essere considerato, in modo naturale, anche uno spazio normato, come risulta dalla seguente

Proposizione **1.2.1** *Dato lo spazio prehilbertiano $(H; (\,.\,,.))$, indichiamo con $\|x\|$ la radice quadrata* aritmetica *del numero reale non negativo (x, x). Allora, $\|x\|$ è una norma su H, detta* **norma indotta** *dal prodotto scalare.*

Dim.: la $i)$ della **Definizione 1.2.1** è conseguenza immediata della **Definizione 1.1.1**, $ii)$; per la $ii)$, basta osservare che $\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \alpha\overline{\alpha}\,(x, x) = |\alpha|^2\,\|x\|^2$; la $iii)$ è conseguenza della *disuguaglianza di* Schwarz:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + 2\Re(x, y) + \|y\|^2 \le \\ &\le \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Si osservi che, con questa definizione, la *disuguaglianza di* SCHWARZ si scrive

$$\forall x, y \in H, \quad |(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|. \tag{1.2}$$

Nel caso di uno spazio prehilbertiano *reale*, la disuguaglianza di SCHWARZ permette di estendere la definizione data in $\mathbb{R}^d$ di coseno dell'angolo formato dai due vettori non nulli x, y, mediante la relazione $(x,y) = \|x\| \, \|y\| \cos \widehat{xy}$; in tal caso, si ha infatti che $\cos \widehat{xy} \in [-1, 1]$ (proprietà che ovviamente *non* vale se lo spazio è sul corpo complesso). Anche nel caso complesso, è però possibile introdurre la nozione di *vettori ortogonali*:

Definizione **1.2.2** *I vettori $x, y \in H$ si dicono* **ortogonali**[7] *se risulta $(x,y) = 0$. Per indicare l'ortogonalità tra x e y, si scrive $x \perp y$.* ■

La norma di un vettore è stata definita in H a partire dal prodotto scalare; a sua volta, quest'ultimo può essere espresso in termini della norma:

Proposizione **1.2.2 (identità di polarizzazione)** *Sia H uno spazio prehilbertiano:*

se H è reale*, si ha, $\forall x, y \in H$:*

$$(x,y) = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right); \tag{1.3}$$

se H è complesso*, si ha, $\forall x, y \in H$,*

$$(x,y) = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \right). \tag{1.4}$$

Dim.: basta osservare che, come si è visto più sopra, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(x,y) + \|y\|^2$, e che, analogamente, $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\Re(x,y) + \|y\|^2$; nel caso di uno spazio *reale*, ciò fornisce direttamente l'uguaglianza voluta. Nel caso *complesso*, si ha poi $\|x+iy\|^2 = (x+iy, x+iy) = \|x\|^2 - i(x,y) + i(y,x) + \|y\|^2$, e $\|x-iy\|^2 = (x-iy, x-iy) = \|x\|^2 + i(x,y) - i(y,x) + \|y\|^2$; se ne ricava subito la formula cercata. ■

Vediamo alcune altre proprietà di natura "*geometrica*":

Proposizione **1.2.3** *Sia H uno spazio prehilbertiano; allora:*

i) Se x ed y sono ortogonali*, vale il* **Teorema di Pitagora***:*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2; \tag{1.5}$$

*ii) $\forall x, y \in H$, vale l'***identità del parallelogrammo***:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2. \tag{1.6}$$

[7] per la proprietà *i)* del prodotto scalare, la relazione di ortogonalità è *simmetrica*: x è ortogonale ad y se e solo se y è ortogonale ad x.

Dim.: *i*): evidente: se $(x,y)=0$ si ha $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Si noti anzi che la (1.5) vale *se e solo se* risulta $\Re(x,y) = 0$ (condizione che nel caso complesso è più generale dell'ortogonalità).

ii): sommando le due uguaglianze $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2$ e $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2$ si ottiene il risultato voluto. ■

Si osservi che le identità (1.5) e (1.6) fanno intervenire in modo esplicito *solo* la norma, *non* il prodotto scalare; tuttavia, esse dipendono in modo *essenziale* dal fatto che si tratti della norma *indotta da un prodotto scalare*. Per quanto riguarda la prima uguaglianza, ciò è ovvio, dato che l'ipotesi richiede l'*ortogonalità* dei vettori x, y; per la seconda, osserviamo che la (1.6) *non è* conseguenza delle sole proprietà $i) - iii)$ della **Definizione 1.2.1**, come mostra l'esempio seguente. Sia $E := C^0([0,1])$ lo spazio vettoriale delle funzioni (a valori reali o complessi) *continue* nell'intervallo $[0,1]$, e si definisca, $\forall f \in E,\ \|f\| := \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$. È immediato controllare che $(E; \|\,.\,\|)$ è uno spazio normato; tuttavia, scelte ad esempio $f(t) := t,\ g(t) := 1-t$, si ha che $\|f\| = \|g\| = \|f-g\| = \|f+g\| = 1$, cosicché la (1.6) *non è verificata*.

Diciamo che lo spazio normato $(E; \|\,.\,\|)$ è **hilbertizzabile** se è possibile definire in E un prodotto scalare $(.\,,.)$ che induce la norma di E, cioè tale che $\|x\| = (x,x)^{1/2} \quad \forall x \in E$. L'esempio precedente mostra che *non ogni spazio normato è hilbertizzabile*. Una condizione *necessaria* è evidentemente che la norma verifichi la (1.6); mostriamo che la condizione è anche *sufficiente*:

Proposizione 1.2.4 *Sia $(E; \|\,.\,\|)$ uno spazio normato; è possibile definire in E un prodotto scalare $(.\,,.)$ che induce la norma $\|\,.\,\|$ se e solo se quest'ultima verifica l'identità del parallelogrammo.*

Dim.: supponiamo che $\|\,.\,\|$ verifichi la (1.6), e costruiamo un prodotto scalare su E che induce la norma di partenza.

Supponiamo dapprima E *reale*; il prodotto scalare cercato –se esiste– deve necessariamente essere dato dalla (1.3). È ovvio che l'applicazione da $H \times H$ in $\mathbb{R}$ definita dalla (1.3) verifica la *i*) (che in questo caso si scrive $(y,x) = (x,y)\ \forall x,y \in E$) e la *ii*) della **Definizione 1.1.1**. Per verificare anche la *iii*), osserviamo intanto che si ha, $\forall x,y,z \in E$,

$$\begin{aligned}(x,z)+(y,z) &= \frac{1}{4}\left[(\|x+z\|^2+\|y+z\|^2)-(\|x-z\|^2+\|y-z\|^2)\right] = \\ &= \frac{1}{8}\left[\|x+y+2z\|^2+\|x-y\|^2-\|x+y-2z\|^2-\|x-y\|^2\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left\|\frac{1}{2}(x+y)+z\right\|^2-\left\|\frac{1}{2}(x+y)-z\right\|^2\right] = 2\left(\frac{1}{2}(x+y),z\right).\end{aligned}$$

In particolare (per $y=0$) si ottiene $(x,z) = 2\left(\frac{1}{2}x,z\right)$, da cui anche $(x,z)+(y,z) = (x+y,z)$, cioè la $iii)_1$. Se ne deduce facilmente che, $\forall h,k \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{h}{k}x,z\right) = \frac{h}{k}(x,z)$; inoltre, da $0 = (0,z) = \left(\frac{h}{k}x - \frac{h}{k}x, z\right) = \frac{h}{k}(x,z) + \left(-\frac{h}{k}x,z\right)$ si ottiene che $(\alpha x, z) = \alpha\,(x,z) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Q}$; per dimostrare che la stessa uguaglianza vale $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ fissato, sia $\{\alpha_n\}$ una successione di numeri razionali tale che $\alpha_n \to \alpha$. Per quanto visto sopra, si ha $(\alpha_n x, y) = \alpha_n\,(x,y) \to \alpha\,(x,y)$. D'altra parte, dalle relazioni $|\,\|\alpha_n x \mp y\| - \|\,\alpha x \mp y\|\,| \leq \|\alpha_n x - \alpha x\| \leq |\alpha_n - \alpha|\,\|x\|$ discende che $\|\alpha_n x \mp y\|^2 \to \|\alpha x \mp y\|^2$, da cui $(\alpha_n x, y) \to (\alpha x, y)$, quindi la $iii)_2$.

Supponiamo ora che E sia uno spazio normato *complesso*, definiamo (x, y) tramite la (1.4), e poniamo $((x, y)) := \Re\,(x, y)$. Poiché $((x, y))$ verifica la (1.3), si è appena mostrato che allora $((x, y))$ verifica per ogni $x, y \in E$ le $i)$, $ii)$ della **Definizione 1.1.1**, nonché la $iii)_1$, e la $iii)_2$ per ogni α *reale*; inoltre, si ha (verifica immediata):

$$((ix, iy)) = ((x, y)) \quad \forall x, y \in E.$$

Essendo poi $(x, y) = ((x, y)) + i\,((x, iy))$, ne viene che

$$\begin{aligned}(y, x) &= ((y, x)) + i\,((y, ix)) = ((x, y)) + i\,((ix, y)) = \\ &= ((x, y)) + i\,((-x, iy)) = ((x, y)) - i\,((x, iy)) = \overline{(x, y)}.\end{aligned}$$

Analogamente, dato che

$$(ix, y) = ((ix, y)) + i\,((ix, iy)) = -((x, iy)) + i\,((x, y)) = i\,(x, y),$$

si ottiene, $\forall \alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha\, x, y) = (\alpha_1\, x, y) + (i\alpha_2\, x, y) = \alpha_1\,(x, y) + i\,\alpha_2\,(x, y) = \alpha\,(x, y),$$

cioè la $iii)_2$ per ogni α *complesso*, e ciò conclude la dimostrazione. ∎

È ovvio che ogni spazio normato (in particolare, prehilbertiano) risulta essere uno *spazio metrico*, se la distanza è definita da $d(x, y) := \|x - y\|$. Dato uno spazio vettoriale che sia anche uno spazio metrico, non è però detto che la distanza sia indotta da una norma (basta pensare alla metrica *discreta*). Il seguente risultato caratterizza le distanze che provengono da una norma:

Proposizione **1.2.5** *Sia E uno spazio vettoriale, e sia d una distanza definita su E. È possibile definire nello spazio metrico $(E; d)$ una norma che induce la distanza d se e solo se quest'ultima verifica le seguenti proprietà:*

$i)$ $\forall (x, y \in E,\ \alpha \in \mathbb{C})$, $\quad d(\alpha x, \alpha y) := |\alpha|\, d(x, y)$;

$ii)$ $\forall x, y, x_0 \in E$, $\quad d(x + x_0, y + x_0) = d(x, y)$ **(invarianza per traslazioni).**

Dim.: supponiamo che esista in E una norma $\|\,.\,\|$ tale che $d(x, y) = \|x - y\|$; le $i)$ e $ii)$ sono conseguenze immediate delle proprietà della norma.

Inversamente, se d è una distanza che verifica $i), ii)$, definiamo $\|x\| := d(x, 0)$. La $i)$ della **Definizione 1.2.1** è soddisfatta da *ogni* distanza in E (senza ipotesi aggiuntive su d): quanto alle altre proprietà della norma, è sufficiente osservare che

$$\begin{aligned}\forall (x \in E,\ \alpha \in \mathbb{C}),\quad \|\alpha x\| &= d(\alpha x, 0) = d(\alpha x, \alpha\, 0) = |\alpha|\, d(x, 0) = |\alpha|\, \|x\|; \\ \forall x, y \in E,\quad \|x + y\| &= d(x + y, 0) \le d(x + y, y) + d(y, 0) = \\ &= d(x, 0) + d(y, 0) = \|x\| + \|y\|. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Agli spazi normati (in particolare, agli spazi prehilbertiani) si trasportano quindi tutte le nozioni di natura topologica note negli spazi metrici: **intorno** di un punto (si indicherà spesso con $\Sigma(x_0, \varrho) := \{x \mid \|x - x_0\| < \varrho\}$ la **sfera aperta** di centro x_0 e raggio ϱ); insieme **aperto** o **chiuso**; **interno, esterno** e **chiusura** di un sottoinsieme, e così via. In particolare,

Definizione **1.2.3** *Se $(E; \|\,.\,\|)$ è uno spazio normato, si dice che la successione $\{x_n\}$ tende* **fortemente**,[8] *o* **in norma**, *ad x, e si scrive $x_n \to x$, o $\lim_n x_n = x$, o s-$\lim_n x_n = x$, se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \; \forall n > n_\varepsilon, \quad \|x - x_n\| < \varepsilon;$$

si dice che $\{x_n\}$ è di Cauchy *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \; \forall (n > n_\varepsilon, \; r \in \mathbb{N}), \quad \|x_{n+r} - x_n\| < \varepsilon. \;\blacksquare$$

Ricordiamo i seguenti risultati:

Proposizione **1.2.6** *In ogni spazio metrico M:*

i) ogni successione di Cauchy *è limitata;*

ii) ogni successione convergente è di Cauchy*;*

iii) se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, allora $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

iv) Se E è uno spazio normato, da $x_n \to x$ segue che $\|x_n\| \to \|x\|$.

Dim.: *i*): se $\{x_n\}$ è di Cauchy, esiste n_1 tale che $\forall (n \geq n_1, \; r \in \mathbb{N})$ sia $d(x_{n+r}, x_n) < 1$. In particolare, si ha $d(x_{n_1+r}, 0) \leq d(x_{n_1+r}, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, 0) < 1 + d(x_{n_1}, 0) \;\; \forall r \in \mathbb{N}$; posto $c := \max\{d(x_1, 0), \ldots, d(x_{n_1-1}, 0), 1 + d(x_{n_1}, 0)\}$, risulta $d(x_n, 0) \leq c \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

ii): se $x_n \to x$, si ha $d(x_{n+r}, x_n) \leq d(x_{n+r}, x) + d(x, x_n)$; se ne deduce facilmente che $\{x_n\}$ è di Cauchy.

iii): basta osservare che $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$, e che $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$, da cui si ricava che

$$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x, x_n) + d(y_n, y).$$

iv): è una conseguenza immediata della (1.1). $\blacksquare$

Un ulteriore risultato, che illustra il comportamento del prodotto scalare rispetto alla convergenza: [9]

Proposizione **1.2.7** *Siano $\{x_n\}, \{y_n\}$ due successioni nello spazio pre-hilbertiano H; se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, allora $(x_n, y_n) \to (x, y)$.*

Dim.: basta osservare che

$$0 \leq |(x_n, y_n) - (x, y)| \leq |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x, y)| \leq$$
$$\leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\|.$$

Grazie alla **Proposizione 1.2.6**, *ii*) e *i*), $\{x_n\}$ è limitata, da cui la tesi. $\blacksquare$

[8] il motivo dell'avverbio sarà chiaro più avanti.
[9] un risultato più generale verrà dato nella **Proposizione 1.7.4**.

1.3 Esempi di spazi normati non hilbertizzabili.

1 • *Spazi di successioni.*

Osserviamo anzitutto che, fissato $p \in [1, +\infty[$, per l'ovvia disuguaglianza

$$|a+b|^p \le 2^p\ (\max\{|a|; |b|\})^p \le 2^p\ (|a|^p + |b|^p),$$

valida $\forall a, b \in \mathbb{C}$, se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono due successioni tali che $\sum_n |x_n|^p$ e $\sum_n |y_n|^p$ sono convergenti, allora lo è anche $\sum_n |x_n + y_n|^p$; ciò permette di porre la seguente

Definizione 1.3.1 *Per ogni p con $1 \le p < +\infty$, si indica con ℓ^p lo spazio vettoriale delle successioni $x := \{x_n\}$ "**di potenza p-esima sommabile**", cioè tali che $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$, e si pone $\|x\|_p := (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$.*
Si indica poi con ℓ^∞ lo spazio vettoriale delle successioni limitate, *e si pone $\|x\|_\infty := \sup_n |x_n|$.* ■

Per mostrare che le quantità $\|\,.\,\|_p$ e $\|\,.\,\|_\infty$ ora introdotte sono delle *norme*, è sufficiente verificare la disuguaglianza triangolare (le altre proprietà sono immediate), e per questo servono alcune altre notevoli disuguaglianze. Poniamo intanto la

Definizione 1.3.2 *L'**esponente coniugato** di $p \in [1, +\infty]$ è dato da*

$$q := \begin{cases} +\infty & \text{se } p = 1; \\ p/(p-1) & \text{se } 1 < p < +\infty; \\ 1 & \text{se } p = +\infty. \end{cases}$$ ■

La relazione ora definita è *simmetrica* tra p e q; si ha sempre $1 \le q \le +\infty$, e $q = p$ se e solo se $p = 2$. (Se $1 < p < +\infty$, risulta $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; formulazioni equivalenti sono date da $p + q = pq$ e da $(p-1)(q-1) = 1$). Dimostriamo intanto la seguente disuguaglianza:

Lemma 1.3.1 (disuguaglianza di Young) *Se $1 < p < +\infty$ e q è il coniugato di p, vale la relazione*

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \forall a, b \ge 0; \tag{1.7}$$

il segno di uguaglianza vale se e solo se $a^p = b^q$.

Dim.: fissato $\alpha \in]0, 1[$, è immediato verificare che la funzione f_α data da $f_\alpha(\lambda) := \lambda^\alpha - \alpha\lambda$ $(\lambda \ge 0)$ ha massimo per $\lambda = 1$, cosicché $\lambda^\alpha - \alpha\lambda \le 1 - \alpha$ per ogni $\lambda \ge 0$. Poiché la disuguaglianza cercata è ovvia per $b = 0$, supponiamo $b > 0$, e poniamo $\lambda := a^p\, b^{-q}$ e $\alpha := 1/p$; ne viene che

$$a\, b^{-q/p} - \tfrac{1}{p}\, a^p\, b^{-q} \le \tfrac{1}{q},$$

da cui, moltiplicando per b^q, la disuguaglianza. È poi evidente che l'uguaglianza vale se e solo se $\lambda = 1$, cioè $a^p = b^q$. ■

Ne discendono alcuni risultati fondamentali:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.3.1 (disuguaglianza di Hölder)** $\forall p \in [1, +\infty]$, *sia* q *il suo esponente coniugato. Fissati ad arbitrio* $x = \{x_n\} \in \ell^p$, $y = \{y_n\} \in \ell^q$, *si ha* $\{x_n\, y_n\} \in \ell^1$; *inoltre*

$$\|\{x_n\, y_n\}\|_1 = \sum_n |x_n\, y_n| \leq \|x\|_p\, \|y\|_q. \tag{1.8}$$

Dim.: se $p = 1$ o $p = +\infty$, il risultato è ovvio. Sia allora $1 < p < +\infty$; il risultato è immediato se $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$, perché, per la disuguaglianza di Young, si ha

$$\textstyle\sum_n |x_n\, y_n| \leq \sum_n \left(\frac{1}{p}\,|x_n|^p + \frac{1}{q}\,|y_n|^q\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p\, \|y\|_q.$$

Veniamo al caso generale. Se $x = 0$ o $y = 0$, non c'é nulla da dimostrare; se $x, y \neq 0$, posto $\xi := x/\|x\|_p$, $\eta := y/\|y\|_q$ si ha che $\|\xi\|_p = \|\eta\|_q = 1$, quindi, per quanto appena dimostrato,

$$\textstyle\sum_n |x_n\, y_n| = \|x\|_p\, \|y\|_q \sum_n |\xi_n\, \eta_n| \leq \|x\|_p\, \|y\|_q. \ \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.3.2 (disuguaglianza di Minkowski)** *Sia dato* p *con* $1 \leq p \leq +\infty$; *per ogni* $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ *in* ℓ^p, *si ha* $x + y \in \ell^p$, *e*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{1.9}$$

Dim.: per $p = 1$ e per $p = +\infty$ l'enunciato è evidente. Sia allora $1 < p < +\infty$, e sia q l'esponente coniugato di p; non è limitativo supporre che $x, y \neq 0$. Si ha allora, per ogni $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^p &= \sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|\, |x_n + y_n|^{p-1} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} |x_n|\, |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{N} |y_n|\, |x_n + y_n|^{p-1}.\end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Hölder (si osservi che $|x_n + y_n|^{p-1} \in \ell^q$, dato che $(|x_n + y_n|^{p-1})^q = |x_n + y_n|^p$), si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|\, |x_n + y_n|^{p-1} &\leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n + y_n|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \\ &= \|x\|_p\, \|x + y\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

Una disuguaglianza analoga vale per $\sum |y_n|\, |x_n + y_n|^{p-1}$; pertanto, passando al limite per $N \to +\infty$, si ha che $x + y \in \ell^p$, ed inoltre

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\, \|x + y\|_p^{p-1},$$

da cui, dividendo per $\|x + y\|_p^{p-1}$, il risultato cercato. $\blacksquare$

Abbiamo così dimostrato che:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.3.3** *Per ogni* p *con* $1 \leq p \leq +\infty$, $(\ell^p; \|\,.\,\|_p)$ *è uno spazio normato.* $\blacksquare$

In particolare, $\| \,.\, \|_p$ è una norma anche sullo spazio ℓ_c introdotto nel Paragrafo precedente: anche gli spazi $\ell_c^p := (\ell_c; \| \,.\, \|_p)$ sono, per $1 \le p \le +\infty$, *spazi normati.*

Si noti che per $p \neq 2$ gli spazi ℓ^p ed ℓ_c^p *non sono hilbertizzabili*: detto, $\forall k \in \mathbb{N}$, $e^{(k)}$ il k-esimo **versore**, cioè la successione che ha tutti i termini *nulli*, tranne il k-esimo che vale 1, si ha infatti che, posto $x := e^{(1)} + e^{(2)}$, $y := e^{(1)} - e^{(2)}$, risulta:

$$\|x\|_\infty^2 = \|y\|_\infty^2 = 1, \text{ mentre } \|x \mp y\|_\infty^2 = 4;$$
$$\text{per } 1 \le p < +\infty,\ \|x\|_p^2 = \|y\|_p^2 = 2^{2/p}, \text{ mentre } \|x \mp y\|_p^2 = 4.$$

In nessun caso, tranne che per $p = 2$, è quindi verificata l'identità del parallelogrammo.

2 • Procedendo in analogia all'**Esempio 3** del **Paragrafo 1.1**, si possono definire gli spazi $\mathfrak{X}_p$ sostituendo la *ii*) dell'esempio citato con la condizione:

$$\begin{cases} \sum_t |x(t)|^p < +\infty & \text{se } p \in [1, +\infty[, \\ \sup_t |x(t)| < +\infty & \text{se } p = +\infty. \end{cases}$$

Si controlla facilmente che, ponendo

$$\|x\|_{\mathfrak{X}_p} := \begin{cases} \left(\sum |x(t)|^p\right)^{1/p} & \text{se } 1 \le p < +\infty, \\ \sup_t |x(t)| & \text{se } p = +\infty, \end{cases}$$

gli $(\mathfrak{X}_p; \| \,.\, \|_{\mathfrak{X}_p})$ sono *spazi normati.*

Anche gli $\mathfrak{X}_p$ *non* sono hilbertizzabili per $p \neq 2$: se, $\forall \lambda \in [0,1]$, si definisce e_λ ponendo $e_\lambda(\lambda) := 1$, e $e_\lambda(t) := 0$ se $t \neq \lambda$, si vede subito che per $t_1 \neq t_2$ i vettori $x := e_{t_1} + e_{t_2}$ e $y := e_{t_1} - e_{t_2}$ non verificano l'identità del parallelogrammo.

3 • ***Spazi di funzioni continue.***

È immediato verificare che sullo spazio vettoriale $C^0([a,b])$ delle funzioni x *continue* su $[a,b]$ l'espressione $\max_{a \le t \le b} |x(t)|$ definisce una *norma*, che però non può essere indotta da un prodotto scalare: infatti, le funzioni x, y date da $x(t) := (t-a)(b-a)^{-1}$ e $y(t) := 1 - x(t)$ sono in $C^0([a,b])$ ma non verificano la (1.6).

Più in generale, se K è un sottoinsieme *compatto* di uno spazio topologico di Hausdorff Ω, si indica con $C^0(K)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni x continue da K in $\mathbb{C}$, munito della *norma del massimo*

$$\|x\|_{C^0(K)} := \max_{t \in K} |x(t)| := \|x\|_\infty. \tag{1.10}$$

Si indica poi con $C_c^0(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni x continue da Ω in $\mathbb{C}$ e tali che[10] $\operatorname{supp} x$ sia un sottoinsieme *compatto* di Ω. L'espressione (1.10) è ancora una *norma* in $C_c^0(\Omega)$; anche gli spazi ora introdotti non sono hilbertizzabili.

Ancora per a, b fissati in $\mathbb{R}$ con $a < b$, poniamo ora la seguente

[10] $\operatorname{supp} x$ indica il **supporto** di x, cioè la chiusura dell'insieme $\{t \in \Omega \mid x(t) \neq 0\}$.

Definizione **1.3.3** *La funzione* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ *si dice* **hölderiana di ordine** $\alpha \in]0,1[$ *se*

$$\text{(1.11)} \qquad \exists L \geq 0 : \ \forall t_1, t_2 \in [a,b], \quad |x(t_1) - x(t_2)| \leq L\,|t_1 - t_2|^\alpha;$$

lo spazio vettoriale delle funzioni che verificano la (1.11) *si indica con* $C^{0,\alpha}(a,b)$*, e per ogni* $x \in C^{0,\alpha}(a,b)$ *si pone*

$$\text{(1.12)} \qquad \|x\|_{0,\alpha} := \|x\|_\infty + \sup\{|x(t_1) - x(t_2)|\,|t_1 - t_2|^{-\alpha}\},$$

il sup *essendo calcolato per* $t_1, t_2 \in [a,b], \quad t_1 \neq t_2$*. Se vale la* (1.11) *con* $\alpha = 1$*, la funzione si dice* **lipschitziana***; lo spazio delle funzioni lipschitziane su* $[a,b]$ *si indica con* $\mathrm{Lip}(a,b)$*.* ■

La definizione ha senso perché, evidentemente, se x è in $C^{0,\alpha}(a,b)$ oppure in $\mathrm{Lip}(a,b)$, allora x è *continua* su $[a,b]$ (ma è ovvio che una funzione continua può non essere nè hölderiana nè lipschitziana).

È anche facile vedere che la quantità definita nella (1.12) è una norma su $C^{0,\alpha}(a,b)$ per ogni $\alpha \in]0,1[$; la (1.12) con $\alpha = 1$ fornisce una norma su $\mathrm{Lip}(a,b)$. Si noti che

$$\|x\|_{0,1} = \|x\|_\infty + \inf\{L > 0 \mid |x(t_1) - x(t_2)| \leq L\,|t_1 - t_2| \ \ \forall t_1, t_2 \in [a,b]\};$$

l'estremo inferiore che compare nell'uguaglianza precedente è anche detto **costante di Lipschitz** della funzione x.

Anche gli spazi $C^{0,\alpha}(a,b)$ e $\mathrm{Lip}(a,b)$ evidentemente non sono hilbertizzabili.

4 • ***Spazi di funzioni misurabili.***

Sia Ω un sottoinsieme *misurabile* (secondo LEBESGUE) di $\mathbb{R}^d$; sull'insieme $\mathcal{F}(\Omega)$ delle funzioni misurabili in Ω è *essenziale* introdurre intanto una *relazione di equivalenza*, ponendo

$$x \equiv y \overset{def}{\iff} m(\{t \in \Omega \mid x(t) \neq y(t)\}) = 0.$$

Identificheremo due funzioni equivalenti, quindi, nel seguito, il termine "funzione" verrà usato (impropriamente, ma per brevità) nel senso di "*classe di equivalenza* di funzioni" (si ricordi l'analoga osservazione fatta nell'**Esempio 5** del **§1.1**). Con questa convenzione, definiamo

$$\text{(1.13)} \qquad L^p(\Omega) := \{x : \Omega \to \mathbb{C} \mid |x|^p \textit{ è sommabile in } \Omega \ \ (1 \leq p < +\infty)\},$$

$$\text{(1.14)} \qquad L^\infty(\Omega) := \{x : \Omega \to \mathbb{C} \mid \exists c \geq 0 : \ \ |x(t)| \leq c \ \ \textit{q.o. in } \Omega.\}$$

Le "funzioni" di $L^p(\Omega)$ con $1 < p < +\infty$ si dicono **di potenza p-esima sommabile**; le funzioni di $L^\infty(\Omega)$ si dicono **essenzialmente limitate** in Ω.

Consideriamo le espressioni

$$\text{(1.15)} \qquad \begin{cases} \|x\|_p := \left(\int_\Omega |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < +\infty, \\ \|x\|_\infty := \inf\{c > 0 \mid |x(t)| \leq c \ \ \textit{q.o. in } \Omega\} & \text{se } p = +\infty \end{cases}$$

che sono *coerenti* con la convenzione che abbiamo adottato, in quanto rimangono immutate se si sostituisce x con una funzione ad essa equivalente; si noti altresì che

$$\|x\|_\infty = \inf\{c > 0 \mid m(\{t \in \Omega \mid |x(t)| > c\}) = 0\},$$

e che se, ad esempio, Ω è compatto e x è continua in Ω, la definizione di $\| \,.\, \|_\infty$ ora data coincide con quella della (1.10).

Anche grazie alla convenzione che abbiamo adottato, $\|x\|_p$ e $\|x\|_\infty$ sono una norma in $L^p(\Omega)$ ed in $L^\infty(\Omega)$ rispettivamente; per mostrarlo, avremo bisogno di estendere alcune disuguaglianze che nell'**Esempio 1** sono state dimostrate nell'ambito delle successioni.

Proposizione 1.3.4 (disuguaglianza di Hölder) *Sia $p \in [1, +\infty]$, e sia q il suo esponente coniugato. Fissati ad arbitrio x in $L^p(\Omega)$, y in $L^q(\Omega)$, si ha $xy \in L^1(\Omega)$, ed inoltre*

$$\|xy\|_1 = \int_\Omega |x(t)\, y(t)| \,\mathrm{d}t \le \|x\|_p \, \|y\|_q \tag{1.16}$$

Dim.: del tutto analoga a quella della **Proposizione 1.3.1**. ■

Ne discende facilmente il seguente risultato (si veda la **Proposizione 1.3.2**):

Proposizione 1.3.5 (disuguaglianza di Minkowski) *Sia dato p con $1 \le p \le +\infty$; per ogni coppia di funzioni x, y in $L^p(\Omega)$, risulta $x + y \in L^p(\Omega)$, ed inoltre*

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p. \tag{1.17}$$ ■

Dato che se $\|x\|_p = 0$ oppure $\|x\|_\infty = 0$ si deduce che x è nulla quasi ovunque, cioè, per la convenzione adottata, che $x = 0$, possiamo concludere che

Proposizione 1.3.6 *Gli spazi $(L^p(\Omega); \| \,.\, \|_p)$, con $1 \le p \le +\infty$, sono* spazi normati. ■

Anche gli spazi $L^p(\Omega)$, per $p \ne 2$, non sono hilbertizzabili. Se, ad esempio, si scelgono[11] $\Omega :=]-1, 1[$, $x := \chi_{[0,1[}$, $y = \chi_{]-1,0[}$, si ha che, per $1 \le p < +\infty$, $\|x\|_p^2 = \|y\|_p^2 = 1$, $\|x + y\|_p^2 = \|x - y\|_p^2 = 2^{2/p}$, mentre $\|x\|_\infty^2 = \|y\|_\infty^2 = \|x \mp y\|_\infty^2 = 1$; quindi, la (1.6) *non* è verificata , *tranne che* nel caso $p = 2$.

Si noti che in particolare (poiché $C_c^0(\Omega) \subset L^p(\Omega)$), gli spazi $(C_c^0(\Omega); \| \,.\, \|_p)$ sono anch'essi spazi normati.

Le definizioni ed i risultati visti per $L^p(\Omega)$ si estendono in modo ovvio a spazi del tipo $L^p(A)$ costruiti a partire da uno spazio di misura σ-finito $(A, \mathcal{E}, \mu)$, con $\mu \ge 0$.

[11] se $A \subset B$, la **funzione caratteristica** χ_A di A in B è definita ponendo $\chi(t) := 1$ se $t \in A$, $\chi(t) := 0$ se $t \in B \setminus A$.

1.4 Completezza.

Si è visto (**Proposizione 1.2.6**, *ii*)) che in uno spazio prehilbertiano ogni successione convergente è di CAUCHY. Il viceversa è vero, *ad esempio*, in $\mathbb{C}^d$ (ed in $\mathbb{R}^d$), ma *non* in *ogni* spazio prehilbertiano. Si pone allora la seguente

Definizione **1.4.1** *Lo spazio prehilbertiano H si dice* **spazio di Hilbert** *se lo spazio metrico associato è* completo*, cioè se ogni successione di* CAUCHY $\{x_n\}$ *in H converge ad un elemento $x \in H$.*

Uno spazio normato tale che lo spazio metrico associato sia completo *si dice* **spazio di Banach**. ∎

Per $1 \le p \le +\infty$, gli spazi ℓ^p_c introdotti nel Paragrafo precedente *non sono completi*. Infatti, si definisca

$$x^{(n)} := \left\{1, 2^{-2}, \ldots, n^{-2}, 0, 0, \ldots\right\} (\in \ell_c \quad \forall n \in \mathbb{N});$$

se $1 \le p < +\infty$, poiché $\forall n, r \in \mathbb{N}$ risulta $\|x^{(n+r)} - x^{(n)}\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{n+r} k^{-2p}$, e la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2p}$ è convergente, ne viene facilmente che $\{x^{(n)}\}$ è di CAUCHY in ℓ^p. Tuttavia, $\{x^{(n)}\}$ non è convergente in ℓ^p_c: se, per assurdo, esistesse $x = \{x_k\} \in \ell^p_c$ tale che $\lim_n x^{(n)} = x$, si dovrebbe avere, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall n > k$,

$$\left|x_k - k^{-2}\right|^p = \left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p \le \sum_{k=1}^{+\infty} \left|x_k - x_k^{(n)}\right|^p = \left\|x - x^{(n)}\right\|_p^p ,$$

da cui, per $n \to +\infty$, $x_k = k^{-2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, impossibile perché $x = \left\{k^{-2}\right\} \notin \ell_c$.

Se poi $p = +\infty$, si ha $\|x^{(n+r)} - x^{(n)}\|_\infty = (n+1)^{-2}$, quindi $\{x^{(n)}\}$ è di CAUCHY in ℓ^∞; se esistesse $x = \{x_k\} \in \ell^\infty_c$ tale che $x^{(n)} \to x$, essendo, $\forall n > k$, $\left|x_k - n^{-2}\right| = \left|x_k - x_k^{(n)}\right| \le \|x - x^{(n)}\|_\infty$, si dovrebbe avere ancora $x_k = k^{-2}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, assurdo.

Anche gli spazi $C^0_p := (C^0([a,b]); \|\,.\,\|_p)$, questa volta però per $1 \le p < +\infty$, *non sono completi*, . Se, ad esempio, $a = 0$, $b = 2$, e definiamo, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_n(t) := \begin{cases} t^n & \text{se } 0 \le t \le 1, \\ 1 & \text{se } 1 < t \le 2, \end{cases}$$

si ha $x_n \in C^0([a,b])$. Poiché, $\forall n, r \in \mathbb{N}$ e $\forall p \in [1, +\infty[$, risulta

$$\|x_{n+r} - x_n\|_p^p = \int_0^1 t^{np}(1 - t^r)^p \, dt \le \int_0^1 t^{np} \, dt = \tfrac{1}{np+1} ,$$

la successione $\{x_n\}$ è di CAUCHY in C^0_p per $1 \le p < +\infty$. Se. Ma non può esistere una funzione x *continua* su $[0,2]$ tale che $\|x_n - x\|_p \to 0$. Se così fosse, si avrebbe intanto che

$$\int_1^2 |1 - x(t)|^p \, dt = \int_1^2 |x_n(t) - x(t)|^p \, dt \le \|x_n - x\|_p^p \to 0,$$

quindi $x(t) = 1$ q.o. in $[1,2]$, da cui, per la continuità di x, $x(t) = 1$ per *ogni* $t \in [1,2]$, ed in particolare $x(1) = 1$. D'altra parte, analogamente,

$$\int_0^1 |t^n - x(t)|^p \, dt \le \|x_n - x\|_p^p \to 0,$$

quindi, passando al limite sotto il segno di integrale (come è lecito: in $[0,1]$ si ha $0 \le t^n \le 1$), si ottiene $x(t) = 0$ q.o. in $[0,1]$, e, per continuità, $x(1) = 0$, assurdo.

Se K è un rettangolo (limitato) di $\mathbb{R}^d$, in modo del tutto analogo si dimostra che, *quando* $1 \le p < +\infty$, anche gli spazi $C^0_p := (C^0(K); \|\,.\,\|_p)$ non sono completi.

Si ha invece che, quando K è un compatto di $\mathbb{R}^d$,

Teorema **1.4.1** *Lo spazio $(C^0(K); \|\,.\,\|_\infty)$ è completo.*

Dim.: il risultato è ben noto: si osservi soltanto che la convergenza nella norma $\|\,.\,\|_\infty$ è la *convergenza uniforme* in K. ∎

Anche gli spazi $(C^0_c(\Omega); \|\,.\,\|_p)$ *non sono completi*, ma per $1 \leq p \leq +\infty$: si scelga ad esempio $\Omega :=]-1,1[$ e $x_n(t) := \left(1 - \frac{n+1}{n}|t|\right)^+$. Poichè, $\forall t \in \Omega$, la successione $\{x_n(t)\}$ è non decrescente e tende a $x(t) := 1 - |t|$, è facile verificare che $x_n \to x$ in $L^p(\Omega)$ (quindi è di Cauchy in $(C^0_c(\Omega); \|\,.\,\|_p)$), e d'altra parte $x \notin C^0_c(\Omega)$.

Come ora mostriamo, sono invece *completi* gli spazi ℓ^p, $\mathfrak{X}_p$ ed $L^p(\Omega)$ (con $1 \leq p \leq +\infty$).

Teorema **1.4.2** *ℓ^p è uno spazio di* Banach *per ogni p con $1 \leq p \leq +\infty$ (quindi di* Hilbert *per $p = 2$).*

Dim.: sia $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in ℓ^p $(1 \leq p \leq +\infty)$, dove $x^{(n)} := \{x^{(n)}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. La successione $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata (si ricordi la **Proposizione 1.2.6**, *i)*):

$$\exists c > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \|x^{(n)}\|_p \leq c.$$

È evidente che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $|y_k| \leq \|y\|_p$ $\forall y = \{y_k\} \in \ell^p$; in particolare, risulta $|x^{(n+r)}_k - x^{(n)}_k| \leq \|x^{(n+r)} - x^{(n)}\|_p$, quindi la successione *numerica* $\{x^{(n)}_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy $\forall k \in \mathbb{N}$, dunque converge (per $n \to +\infty$) ad un limite, che indichiamo con x_k. Resta da mostrare che $x := \{x_k\} \in \ell^p$, e che $x^{(n)} \to x$ in ℓ^p.

La prima proprietà è ovvia se $p = +\infty$: da $|x^{(n)}_k| \leq \|x^{(n)}\|_\infty \leq c$ si ricava infatti che $|x_k| \leq c$ $\forall k \in \mathbb{N}$, cioè $x \in \ell^\infty$. Se $1 \leq p < +\infty$, fissato $N \in \mathbb{N}$ risulta $\sum_{k=1}^N |x^{(n)}_k|^p \leq \|x^{(n)}\|^p_p \leq c^p$, da cui $\sum_{k=1}^N |x_k|^p \leq c^p$: ne viene che $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \leq c^p$, cioè $x \in \ell^p$.

Mostriamo che $x^{(n)} \to x$ in ℓ^p. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|x^{(n+r)} - x^{(n)}\|_p < \varepsilon, \quad \forall (n > n_\varepsilon, \ r \in \mathbb{N}),$$

da cui, in particolare, $|x^{(n+r)}_k - x^{(n)}_k| < \varepsilon$. Se $p = +\infty$, se ne ricava (al limite per $r \to +\infty$) che $|x_k - x^{(n)}_k| \leq \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$, quindi che $\|x - x^{(n)}\|_\infty \leq \varepsilon$ $\forall n > n_\varepsilon$, dunque che $x^{(n)} \to x$ in ℓ^∞. Se $1 \leq p < +\infty$, si ha, ancora $\forall N \in \mathbb{N}$, che $\sum_{k=1}^N |x^{(n+r)}_k - x^{(n)}_k|^p \leq \|x^{(n+r)} - x^{(n)}\|^p_p < \varepsilon^p$, da cui, al limite per $r \to +\infty$, $\sum_{k=1}^N |x_k - x^{(n)}_k|^p \leq \varepsilon^p$ $\forall N \in \mathbb{N}$; allora si ha $\|x - x^{(n)}\|_p \leq \varepsilon$ $\ \forall n > n_\varepsilon$, cioè $x^{(n)} \to x$ in ℓ^2. ∎

Osservazione **1.4.1** Indichiamo con V l'insieme definito come segue:

$$V := \{x = \{x_k\} \mid \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2|x_k|^2 < +\infty\};$$

quindi, $\{x_k\} \in V \iff \{kx_k\} \in \ell^2$. Ne viene facilmente che V è uno spazio vettoriale, contenuto in ℓ^2; di conseguenza, $(V; (.\,,.)_2)$, dove $(.\,,.)_2$ indica il prodotto scalare in ℓ^2, è uno *spazio prehilbertiano*, che indichiamo con V_0. Poniamo, $\forall x, y \in V$, $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x_k \overline{y_k} = (\{kx_k\}, \{ky_k\})_2$; è evidente che anche $(V; \langle .\,,.\rangle)$ è uno *spazio prehilbertiano*, che indichiamo con V_1. Tuttavia, tra i due spazi c'è una differenza *strutturale*: V_0 *non è completo*, mentre V_1 è di Hilbert.

Per verificare che V_0 non è completo, è sufficiente osservare che la successione $\{x^{(n)}\}$, dove $x^{(n)} := \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\}$ converge ad $\{\frac{1}{n}\}$ in ℓ^2; è evidentemente in V, quindi è di CAUCHY, ma *non convergente*, in V_0.

Invece, V_1 è *completo*: se $\{x^{(n)}\}$ è una successione di CAUCHY in V_1, la successione $\{\xi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove $\xi^{(n)} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $\xi_k^{(n)} := kx_k^{(n)}$, è di CAUCHY in ℓ^2, quindi converge in ℓ^2 ad un vettore $\xi := \{\xi_k\}$, cosicché, posto $x := \{\xi_k/k\}$, si ha $x \in V$. In particolare,[12] $\xi_k = \lim_n \xi_k^{(n)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, quindi $\lim_n x_k^{(n)} = \xi_k/k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Inoltre, $\langle x - x^{(n)}, x - x^{(n)}\rangle = \|\xi - \xi^{(n)}\|_2^2 \to 0$ per $n \to +\infty$, cioè $x^{(n)} \to x$ in V_1. ∎

Corollario 1.4.1 *$\mathfrak{X}_p$ è uno spazio di* BANACH *$\forall p \in [1, +\infty]$ (quindi di* HILBERT *per $p = 2$).*

Dim.: sia $\{x_n\}$ una successione di CAUCHY in $\mathfrak{X}_p$. Posto $D := \bigcup_{n=1}^{+\infty} D(x_n)$, si osservi che D è al più *numerabile*; sia allora $D = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$. Associamo ad ogni x_n della successione la *successione complessa* $z^{(n)} := \{x_n(t_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$; è immediato verificare che

$$z^{(n)} \in \ell^p, \quad \text{e} \quad \|z^{(n)}\|_{\ell^p} = \|x_n\|_{\mathfrak{X}_p}.$$

In particolare, $\|z^{(n)} - z^{(m)}\|_{\ell^p}^p = \|x_n - x_m\|_{\mathfrak{X}_p}^p$, quindi $\{z^{(n)}\}$ è di CAUCHY in ℓ^p, dunque $\exists z = \{z_k\} \in \ell^p : \; z^{(n)} \to z$ in ℓ^p; allora, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_n z_k^{(n)} = \lim_n x_n(t_k) \to z_k$. Posto

$$x(t) := \begin{cases} z_k & \text{se } t = t_k, \\ 0 & \text{se } t \notin D, \end{cases}$$

si ha subito che $x \in \mathfrak{X}_p$, e $x_n \to x$ in $\mathfrak{X}_p$. ∎

Prima di dimostrare la completezza di $L^p(\Omega)$, stabiliamo il seguente

Lemma 1.4.1 *Sia $\{x_n\}$ una successione di* CAUCHY *nello spazio metrico M, e sia $\{c_n\}$ una successione di numeri* strettamente positivi*; è possibile estrarre da $\{x_n\}$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \le c_k$.*

Dim.: la sottosuccessione richiesta può ad esempio essere costruita, per induzione, nel modo seguente: per definizione di successione di CAUCHY, esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n, m \ge n_1$ risulti $d(x_n, x_m) < c_1$; scegliamo x_{n_1} come primo elemento della sottosuccessione. Esiste poi $n_2 \in \mathbb{N} : \; \forall n, m \ge n_2$ sia $d(x_n, x_m) < c_2$; evidentemente, è possibile imporre che $n_2 > n_1$: scegliendo x_{n_2} come secondo elemento della sottosuccessione, si ha $d(x_{n_2}, x_{n_1}) < c_1$. Supponendo di aver costruito i primi k elementi $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ della sottosuccessione, quindi tali che $d(x_{n_{r+1}}, x_{n_r}) < c_r$ per $r = 1, \ldots, k-1$, osserviamo che $\exists n_{k+1} \in \mathbb{N}$ con $n_{k+1} > n_k$ tale che $\forall n, m \ge n_{k+1}$ si abbia $d(x_n, x_m) < c_{k+1}$, e scegliamo $x_{n_{k+1}}$ come $(k+1)$-esimo vettore, cosicché $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < c_k$. La sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ così costruita verifica la condizione richiesta. ∎

Possiamo ora mostrare la completezza di $L^p(\Omega)$.

---

[12] se $e^{(k)}$ è il k-esimo versore di ℓ^2, da $\xi^{(n)} \to \xi$ discende, per la **Proposizione 1.2.7**, che $\lim_n \xi_k^{(n)} = \lim_n (\xi^{(n)}, e^{(k)}) = (\xi, e^{(k)}) = \xi_k$.

Teorema **1.4.3** *$L^p(\Omega)$ è uno spazio di* BANACH *$\forall p \in [1, +\infty]$; per $p = 2$, è uno spazio di* HILBERT.

Dim.: fissato p con $1 \leq p \leq +\infty$, sia $\{x_n\}$ una successione di CAUCHY in $L^p(\Omega)$. Supponiamo dapprima che sia $p = +\infty$. Poiché $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k \in \mathbb{N}$: $\|x_{n+r} - x_n\|_\infty < k^{-1}$ per ogni ($n > n_k$, $r \in \mathbb{N}$), si deduce facilmente che $|x_{n+r}(t) - x_n(t)| < k^{-1}$ q.o. in Ω; quindi, sempre q.o. in Ω, la successione $\{x_n(t)\}$ è di CAUCHY, dunque converge ad un numero $x(t)$. Passando al limite per $r \to +\infty$ nella disuguaglianza precedente, si ottiene che $|x(t) - x_n(t)| \leq k^{-1}$ q.o. in Ω, ed è facile concludere che $x \in L^\infty(\Omega)$ e che $x_n \to x$ in $L^\infty(\Omega)$.

Sia ora $1 \leq p < +\infty$, e supponiamo dapprima che le funzioni x_n assumano valori *reali* e *non negativi* (q.o. in Ω); per il Lemma precedente, è possibile estrarne una sottosuccessione $\{x_{n_k} := y_k\}$ tale che, per ogni k in $\mathbb{N}$, risulti $\|y_{k+1} - y_k\|_p = \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_p < 2^{-k}$. Poniamo

$$\varphi_n(t) := \sum_{k=1}^{n} |y_{k+1}(t) - y_k(t)|; \tag{1.18}$$

è evidente che $\varphi_n \in L^p(\Omega)$, che, q.o. in Ω, la successione $\{\varphi_n(t)\}$ è non decrescente, e che $\|\varphi_n\|_p \leq \sum_{k=1}^n 2^{-k} < 1$; quindi anche $\{\varphi_n^p\}$ è non decrescente e tale che $\|\varphi_n\|_p^p = \int_\Omega \varphi_n^p \,\mathrm{d}m < 1$. Per il Teorema di BEPPO LEVI, esiste una funzione ψ sommabile in Ω tale che $\varphi_n^p(t) \to \psi(t)$ q.o. in Ω; poniamo $\varphi(t) := (\psi(t))^{1/p}$. Allora si ha che $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ q.o., ed inoltre $(\varphi_n(t) - \varphi(t))^p \leq 2^p\,[(\varphi_n(t))^p + (\varphi(t))^p] \leq 2^{p+1}\,\psi(t)$; si noti che è anche $\varphi_n(t) \leq \varphi(t)$. Grazie al Teorema di LEBESGUE, si conclude che $\lim_n \int_\Omega |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^p\, dm = 0$, cioè che $\lim_n \|\varphi_n - \varphi\|_p = 0$.
D'altra parte, q.o. in Ω si ha

$$\begin{aligned} |y_{n+r}(t) - y_n(t)| &\leq |y_{n+r}(t) - y_{n+r-1}(t)| + |y_{n+r-1}(t) - y_{n+r-2}(t)| + \\ &+ \ldots + |y_{n+1}(t) - y_n(t)| = \varphi_{n+r-1}(t) - \varphi_{n-1}(t) \leq \\ &\leq \varphi(t) - \varphi_{n-1}(t), \end{aligned}$$

quindi $\{y_n(t)\}$ è, q.o. in Ω, di CAUCHY, e tende ad $x(t)$ (con x misurabile). Si ha poi, al limite per $r \to +\infty$, che $|x(t) - y_n(t)|^p \leq \varphi^p(t) = \psi(t)$. Dato che $x^p(t) \leq 2^p\,(\psi(t) + (y_n(t))^p)$, si ha che $x \in L^p(\Omega)$; ancora per il Teorema di LEBESGUE, si ha $\lim_n \int_\Omega |x(t) - y_n(t)|^p \,\mathrm{d}m = 0$, cioè $\lim_n \|x - y_n\|_p = 0$.

Abbiamo così dimostrato che la sottosuccessione $\{x_{n_k} = y_k\}$ di $\{x_n\}$ converge in $L^p(\Omega)$ ad x; ma in realtà *l'intera* successione $\{x_n\}$ converge ad x, come si vede facilmente dato che $\|x - x_n\|_p \leq \|x - x_{n_k}\|_p + \|x_{n_k} - x_n\|_p$.

Infine, il caso generale (x a valori complessi) si ottiene subito dall'usuale decomposizione $x = (\Re x)^+ - (\Re x)^- + i((\Im x)^+ - (\Im x)^-)$. ∎

Si pone in modo naturale il problema di sapere se un assegnato spazio prehilbertiano non completo possa essere "completato", cioè immerso in un opportuno spazio di HILBERT (o, più in generale, se si possa "completare" ogni spazio normato non completo). Naturalmente, la formulazione del problema deve essere precisata; per questo, cominciamo a porre alcune definizioni.

Definizione **1.4.2** *i) Due spazi metrici* $(M_1; d_1), (M_2; d_2)$ *si dicono* **isometrici** *se esiste un'applicazione* f *di* M_1 su M_2 *che conserva le distanze:*[13]

$$\forall x, y \in M_1, \quad d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y);$$

ii) due spazi normati $(E_1; \| \, . \, \|_1), (E_2; \| \, . \, \|_2)$*, entrambi complessi (o entrambi reali) si dicono* **isometricamente isomorfi** *se esiste un'applicazione* lineare f *di* E_1 su E_2 *che conserva le norme:*[14]

$$\forall x \in E_1, \quad \|f(x)\|_2 = \|x\|_1;$$

iii) due spazi prehilbertiani $(H_1; (\, . \, , \,)_1), (H_2; (\, . \, , .)_2)$*, entrambi complessi (o entrambi reali) si dicono* **isometricamente isomorfi** *se esiste un'applicazione* lineare f *di* H_1 su H_2 *che conserva i prodotti scalari:*

$$\forall x, y \in H_1, \quad (f(x), f(y))_2 = (x, y)_1. \ \blacksquare$$

È evidente che nella *ii*), per la **Proposizione 1.2.5**, è equivalente richiedere che la biiezione lineare f conservi le *distanze indotte*; nella *iii*), per la **Proposizione 1.2.4**, che f conservi le *norme* (o le *distanze*) indotte. È poi chiaro che

ogni spazio isometricamente isomorfo
ad uno spazio completo è completo.

Cominciamo con un risultato relativo agli spazi metrici; ricordiamo che un sottoinsieme M_0 dello spazio metrico $(M; d)$ si dice **denso in** M, od anche **ovunque denso**, se $\overline{M_0} = M$.

Definizione **1.4.3** *Un* **completamento** *dello spazio metrico* $(M; d)$ *è uno spazio metrico* completo $(\widetilde{M}; \tilde{d})$ *che contiene un sottoinsieme* $\widetilde{M}_0$ ovunque denso, isometrico *a* $(M; d)$*.*

Teorema **1.4.4** *Ogni spazio metrico* $(M; d)$ *(non completo) ammette un completamento, che è* unico a meno di isometrie*.*

Dim.: sia X l'insieme di tutte le successioni $\{x_n\}$ di Cauchy in M. Osserviamo intanto che se $\{x_n\}, \{y_n\} \in X$, allora esiste il $\lim_n d(x_n, y_n)$: si ha infatti

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$

e, scambiando tra loro m ed n,

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m),$$

cosicché $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$; perciò, la successione $\{d(x_n, y_n)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, quindi converge.

In X, introduciamo la relazione binaria

$$\{x_n\} \mathcal{R} \{x'_n\} \overset{def}{\iff} \lim_n d(x_n, x'_n) = 0.$$

[13] ne viene che f è una biiezione.
[14] in particolare, f è un isomorfismo tra spazi vettoriali.

È ovvio che $\mathcal{R}$ è una *relazione di equivalenza* in X; poniamo $\widetilde{M} := X/\mathcal{R}$. Dati $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{M}$, siano $\{x_n\}, \{y_n\} \in X$ tali che $\{x_n\} \in \tilde{x}, \{y_n\} \in \tilde{y}$; come si è visto, esiste il $\lim_n d(x_n, y_n)$, ed è facile verificare che tale limite *è indipendente* dai particolari rappresentanti scelti in $\tilde{x}, \tilde{y}$ (infatti, se $\{x'_n\} \in \tilde{x}$, $\{y'_n\} \in \tilde{y}$, si ha, procedendo come sopra, che $|d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y_n)| \leq d(x'_n, x_n) + d(y_n, y'_n)$). È quindi lecito indicare tale limite con $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \lim_n d(x_n, y_n) \qquad \forall \{x_n\} \in \tilde{x},\ \forall \{y_n\} \in \tilde{y}. \tag{1.19}$$

La verifica che $\tilde{d}$ è una *distanza* su $\widetilde{M}$ è banale. Si osservi inoltre che se, per ogni $x \in M$, si definisce $f(x)$ come la classe d'equivalenza che contiene la successione *costante* $\{x, x, \ldots\}$, l'applicazione f è evidentemente un'*isometria* di M in $\widetilde{M}$: si ha infatti

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) = \lim_n d(x, y) = d(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Inoltre, fissati $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ ed una successione di Cauchy $\{x_n\} \in \tilde{x}$, si ha, per ogni k fissato, che $\tilde{d}(\tilde{x}, f(x_k)) = \lim_n d(x_n, x_k)$, e se ne deduce facilmente che $f(x_k) \to \tilde{x}$, cioé che $\widetilde{M}_0 := f(M)$ è *denso* in $\widetilde{M}$.

Mostriamo che $(\widetilde{M}; \tilde{d})$ è *completo*. Sia $\{\tilde{x}^{(k)}\}$ una successione di Cauchy in $\widetilde{M}$, e, per ogni $k \in \mathbb{N}$, fissiamo $\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{x}^{(k)}$; poiché $\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, $\exists n_k :\ \forall n, m \geq n_k$ si ha $d(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}) < k^{-1}$, dunque, in particolare, $d(x_m^{(k)}, x_{n_k}^{(k)}) < k^{-1}$ per ogni $m \geq n_k$. Vogliamo dimostrare che, posto per semplicità $y_k := x_{n_k}^{(k)}$, la successione $\{y_k\}$ è di Cauchy in M. Si ha infatti, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{d}\left(\tilde{x}^{(k)}, f(y_k)\right) = \lim_m d\left(x_m^{(k)}, y_k\right) \leq k^{-1},$$

quindi

$$\begin{aligned} d(y_k, y_m) &= \tilde{d}\Big(f(y_k), f(y_m)\Big) \leq \\ &\leq \tilde{d}\left(f(y_k), \tilde{x}^{(k)}\right) + \tilde{d}\left(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{x}^{(m)}\right) + \tilde{d}\left(\tilde{x}^{(m)}, f(y_m)\right) \\ &\leq k^{-1} + \tilde{d}\left(\tilde{x}^{(k)}, \tilde{x}^{(m)}\right) + m^{-1}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, $\{y_k\}$ è di Cauchy in M: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon :\ \forall k, m \geq n_\varepsilon$ risulta $d(y_k, y_m) < \varepsilon$. Indichiamo con $\tilde{x}$ l'elemento di $\widetilde{M}$ individuato da $\{y_k\}$, e mostriamo che $\tilde{x}$ è il limite di $\tilde{x}^{(k)}$. Si ha infatti, $\forall k \geq n_\varepsilon$, $\tilde{d}\left(\tilde{x}, f(y_k)\right) = \lim_m d(y_m, y_k) \leq \varepsilon$, quindi $\tilde{d}\left(\tilde{x}, \tilde{x}^{(k)}\right) \leq \tilde{d}\left(\tilde{x}, f(y_k)\right) + \tilde{d}\left(f(y_k), \tilde{x}^{(k)}\right) \leq \varepsilon + k^{-1}$. Per l'arbitrarietà di ε, si deduce che $\lim_k \tilde{d}\left(\tilde{x}, \tilde{x}^{(k)}\right) = 0$.

Resta da mostrare l'unicità, a meno di isometrie, di $(\widetilde{M}; \tilde{d})$. Siano $(M_1; d_1)$ uno spazio metrico *completo* ed f_1 un'applicazione di M in M_1 tale che $D_0 := f_1(M)$ sia isometrico a M e *denso* in M_1. L'applicazione $\varphi := f_1 \circ f^{-1}$ è evidentemente un'isometria di $\widetilde{M}_0$ (denso in $\widetilde{M}$) su D_0 (denso in M_1); verifichiamo che si può estendere ad un'isometria Φ di $\widetilde{M}$ su M_1. Fissato $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, sia $\{\tilde{x}_n\}$ tale che $\tilde{x}_n \in \widetilde{M}_0$ e $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$; in particolare, sono allora di Cauchy le successioni

$$\{\tilde{x}_n\}\ (\textit{in } \widetilde{M}); \quad \{\varphi(\tilde{x}_n)\}\ (\textit{in } M_1).$$

Dunque esiste in M_1 il $\lim_n \varphi(\tilde{x}_n)$, ed è facile vedere che tale limite dipende solo da $\tilde{x}$, e non dalla particolare successione $\{\tilde{x}_n\}$ scelta in $\widetilde{M}_0$. È perciò lecito definire

$$\Phi(\tilde{x}) := \lim_n \varphi(\tilde{x}_n), \quad \forall \tilde{x} \in \widetilde{M}, \quad \forall \{\tilde{x}_n\} \subset \widetilde{M}_0 \textit{ tale che } \lim_n \tilde{x}_n = \tilde{x},$$

(il primo limite è in M_1, il secondo in $\widetilde{M}$), ed è evidente che, $\forall \tilde{x} \in \widetilde{M}_0$, si ha $\Phi(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x})$.

È immediato verificare che Φ è un'*isometria*: se $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{M}$ ed $\{\tilde{x}_n\}$, $\{\tilde{y}_n\}$ sono successioni in $\widetilde{M}_0$ tali che $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$ e $\tilde{y}_n \to \tilde{y}$, si ha

$$d_1(\Phi(\tilde{x}), \Phi(\tilde{y})) = \lim_n d_1(\varphi(\tilde{x}_n), \varphi(\tilde{y}_n)) = \lim_n \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Per concludere, rimane solo da verificare che Φ è suriettiva. Fissato $\xi \in M_1$, sia $\{\xi_n\}$ una successione in D_0 tale che $\xi_n \to \xi$ in M_1; allora $\{\xi_n\}$ è di Cauchy in M_1, quindi, posto $\tilde{x}_n := \varphi^{-1}(\xi_n)$, $\{\tilde{x}_n\} \subset \widetilde{M}_0$ è di Cauchy in $\widetilde{M}$, dunque converge ad un elemento $\tilde{x} \in \widetilde{M}$. Ne viene che, per definizione, $\Phi(\tilde{x}) = \lim_n \varphi(\tilde{x}_n)$ in M_1; poiché $\varphi(\tilde{x}_n) = \xi_n \to \xi$ in M_1, ne segue che $\Phi(\tilde{x}) = \xi$, da cui la suriettività di Φ, che conclude la dimostrazione. ∎

Come ora mostreremo, risultati analoghi valgono anche nel caso degli spazi normati e degli spazi prehilbertiani. Ricordiamo che una **varietà lineare** di uno spazio vettoriale E è un sottoinsieme non vuoto V che risulta esso stesso uno spazio vettoriale (sullo stesso campo, rispetto alle operazioni indotte da quelle in E): $\forall x, y \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), $\alpha x + \beta y \in V$.

Definizione **1.4.4** *Un* **completamento** *dello spazio normato* $(E; \|\,.\,\|)$ *è uno spazio di* Banach $(\widetilde{E}; \|\,.\,\|_0)$ *che contiene una varietà lineare* $\widetilde{E}_0$ ovunque densa, isometricamente isomorfa *ad* $(E; \|\,.\,\|)$.

Teorema **1.4.5** *Ogni spazio normato* $(E; \|\,.\,\|)$ *ammette un completamento, che è* unico a meno di isomorfismi isometrici.

Dim.: supponiamo –solo per fissare le idee– che E sia *complesso.* Sia d la distanza indotta su E dalla norma; procedendo come nella dimostrazione del **Teorema 1.4.4**, immergiamo $(E; d)$, tramite l'isometria f, nello spazio metrico *completo* $(\widetilde{E}; \tilde{d})$; sappiamo che $f(E)$ è *denso* in $\widetilde{E}$. Fissati $\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{E}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, siano $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ due successioni di Cauchy in E tali $\{x_n\} \in \tilde{x}$, $\{y_n\} \in \tilde{y}$. Se $\{x'_n\}\mathcal{R}\{x_n\}$ e $\{y'_n\}\mathcal{R}\{y_n\}$, si ha evidentemente che $\{\alpha x'_n + \beta y'_n\}\mathcal{R}\{\alpha x_n + \beta y_n\}$; è quindi lecito definire $\alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y}$ come la classe d'equivalenza che contiene la successione (ovviamente di Cauchy) $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$. In questo modo, $\widetilde{E}$ risulta uno spazio vettoriale complesso; si noti altresì che, chiaramente, l'isometria f è *lineare.* Data $\alpha \in \mathbb{C}$, si ha

$$\tilde{d}(\alpha\tilde{x}, \alpha\tilde{y}) = \lim_n d(\alpha x_n, \alpha y_n) = |\alpha| \lim_n d(x_n, y_n) = |\alpha|\, \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

e, dato $\tilde{x}_0 \in \widetilde{E}$, e fissata una successione $\{\xi_n\}$ di Cauchy in E tale che $\{\xi_n\}$ sia in $\tilde{x}_0$, risulta

$$\tilde{d}(\tilde{x} + \tilde{x}_0, \tilde{y} + \tilde{y}_0) = \lim_n d(x_n + \xi_n, y_n + \xi_n) = \lim_n d(x_n, y_n) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Dunque, per la **Proposizione 1.2.5**, esiste su $\widetilde{E}$ una norma $\|\,.\,\|_0$ che induce la distanza $\tilde{d}$; in particolare, per ogni $x \in E$ si ha $\|f(x)\|_0 = \tilde{d}(f(x), 0) = d(x, 0) = \|x\|$; ed è già noto che $f(E)$ è *denso* in $\widetilde{E}$.

Infine, l'*unicità* del prolungamento a meno di isomorfismi isometrici è conseguenza dell'unicità dimostrata nel caso degli spazi metrici: è immediato verificare che l'isometria Φ che prolunga $f_1 \circ f^{-1}$ è *lineare.* ∎

Definizione **1.4.5** *Si dice* **completamento** *dello spazio prehilbertiano* $(H;(\,.\,,.))$ *ogni spazio di* HILBERT $(\widetilde{H};(\,.\,,.)_0)$ *che contiene una varietà lineare* $\widetilde{H}_0$ ovunque densa, isometricamente isomorfa *ad* $(H;(\,.\,,.))$.

Teorema **1.4.6** *Ogni spazio prehilbertiano* $(H;(\,.\,,.))$ *ammette un completamento, che è* unico a meno di isomorfismi isometrici.

Dim.: in particolare, H è uno spazio normato; grazie al Teorema precedente, può essere immerso, mediante una biiezione lineare che conserva le norme, e con immagine densa, in uno spazio di BANACH $(\widetilde{H};\|\,.\,\|_0)$. Mostriamo che $\widetilde{H}$ è hilbertizzabile: in effetti, $\forall \tilde{x},\tilde{y}\in\widetilde{H}$, scelte due successioni di CAUCHY $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ in H tali che $\{x_n\}\in\tilde{x}$, $\{y_n\}\in\tilde{y}$, si ha

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_0^2+\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_0^2 &= \lim_n \|x_n+y_n\|^2+\lim_n \|x_n-y_n\|^2 = \\ &= 2\lim_n \|x_n\|^2+2\lim_n \|y_n\|^2 = 2\|\tilde{x}\|_0^2+2\|\tilde{y}\|_0^2;\end{aligned}$$

ne viene, per la **Proposizione 1.2.4**, che su $\widetilde{H}$ è possibile definire un prodotto scalare che induce la norma $\|\,.\,\|_0$. L'unicità del completamento –a meno di isomorfismi isometrici– è immediata. ■

1.5 Proiezioni. Sottospazi. Ortogonalità.

Definizione **1.5.1** *Sia E uno spazio di* BANACH.

Dato un sottoinsieme $S\neq\emptyset$ di E, si indica con $\operatorname{span}S$ *la* varietà lineare **generata da** S (*intersezione di tutte le varietà lineari che contengono S*).

Un **sottospazio** (**chiuso**) *di E è una varietà lineare che sia anche* chiusa (*rispetto alla metrica indotta*). *Il sottospazio chiuso generato da S si indica con* $\overline{\operatorname{span}}\,S$. ■

Si osservi che in molti testi il termine "sottospazio", o "sottospazio vettoriale", viene usato nel senso qui dato a "varietà lineare"; in altri testi, invece, "sottospazio" significa "varietà lineare chiusa". Con la terminologia adottata non dovrebbero esserci possibilità di equivoci.

È evidente che *la chiusura di una varietà lineare è ancora una varietà lineare*, quindi è un *sottospazio chiuso*; anzi, risulta $\overline{\operatorname{span}}\,S=\overline{\operatorname{span}\,S}$.

La distinzione tra *varietà lineare* e *sottospazio chiuso* è essenziale perché, contrariamente a quanto accade quando $E=\mathbb{C}^d$ o $E=\mathbb{R}^d$, una varietà lineare di un *generico* spazio di BANACH non è necessariamente chiusa: un esempio è contenuto nell'**Osservazione 1.4.1**. Un altro esempio è fornito da ℓ^p_c, considerato come varietà lineare di ℓ^p; in generale, è evidente che se $(E;\|\,.\,\|)$ è uno spazio di BANACH e V è una sua varietà lineare, la *restrizione* della norma a V rende $(V;\|\,.\,\|)$ uno spazio normato, che è di BANACH se e solo se V è un sottospazio chiuso. Le stesse considerazioni valgono, in particolare, per lo spazio prehilbertiano $(V;(\,.\,,.))$, dove V è una varietà lineare dello spazio di HILBERT $(H;(\,.\,,.))$.

Definizione **1.5.2** *Sia (M, d) uno spazio metrico; dati il punto $x_0 \in M$ ed il sottoinsieme non vuoto K di M, la* **distanza di** x_0 **da** K *è definita da*

$$d(x_0, K) := \inf_{k \in K} d(x_0, k). \blacksquare$$

È ovvio che, senza opportune ipotesi su K, l'estremo inferiore che compare nella definizione di $d(x_0, K)$ non è, in generale, un *minimo*: non è detto cioè che esista $k_0 \in K$ tale che $d(x_0, k_0) = d(x_0, K)$ (esempi banali sono immediati già per $M = \mathbb{R}$). Ad esempio, una condizione *necessaria* è che K sia *chiuso*: in caso contrario, se $x \in \overline{K} \setminus K$ si ha $d(x, K) = 0$, ma $d(x, k) > 0 \ \ \forall k \in K$.

Come vedremo, negli spazi di Hilbert è sufficiente richiedere che K sia non vuoto, chiuso e *convesso*. (Ricordiamo che K è **convesso** se ogni **combinazione convessa** di due qualsiasi elementi di K è ancora in K: $\forall (x, y \in K,\ t \in [0, 1])$, si ha che $tx + (1 - t)y \in K$). Prima di dimostrare un teorema di esistenza (ed unicità), premettiamo però un risultato che lega il problema dell'esistenza in K di un *punto di minima distanza* da x_0 ed il problema di risolvere in K una **disequazione** con "dato" x_0:

Proposizione **1.5.1** *Sia $K \neq \emptyset$ un sottoinsieme* convesso *dello spazio prehilbertiano H, e sia x_0 un elemento fissato in H; i due problemi:*

Pb.1: *trovare $k_0 \in K$ tale che*

$$\|x_0 - k_0\| = \min_{k \in K} \|x_0 - k\|; \tag{1.20}$$

Pb.2: *trovare $k_0 \in K$ tale che*

$$\forall k \in K, \quad \Re\,(x_0 - k_0, k - k_0) \leq 0 \tag{1.21}$$

sono equivalenti*: k_0 è soluzione di* **Pb.1** *se e solo se è soluzione di* **Pb.2**.

Inoltre, la soluzione comune (se *esiste*) *è* unica.

Dim.: se k_0 è soluzione del problema **Pb.1**, per ogni fissato $k \in K$ ed ogni $t \in]0, 1]$, posto $z_t := tk + (1 - t)k_0$, risulta

$$\begin{aligned} \|x_0 - k_0\|^2 \leq \|x_0 - z_t\|^2 &= \|(x_0 - k_0) - t(k - k_0)\|^2 = \\ &= \|x_0 - k_0\|^2 - 2t\Re(x_0 - k_0, k - k_0) + t^2\|k - k_0\|^2, \end{aligned}$$

da cui $2\Re(x_0 - k_0, k - k_0) \leq t\|k - k_0\|$; passando al limite per $t \to 0+$ si ottiene che k_0 verifica la (1.21). Se poi k_0 è soluzione del problema **Pb.2**, si ha che, $\forall k \in K$,

$$\begin{aligned} \|x_0 - k\|^2 &= \|(x_0 - k_0) - (k - k_0)\|^2 = \\ &= \|x_0 - k_0\|^2 - 2\Re(x_0 - k_0, k - k_0) + \|k - k_0\|^2 \geq \|x_0 - k_0\|^2, \end{aligned}$$

quindi k_0 risolve il problema **Pb.1**.

Supponiamo ora che $k_1, k_2 \in K$ siano tali che $\|k_1 - x_0\| = \|k_2 - x_0\| = d(x_0, K)$; per l'identità del parallelogrammo, si ha

$$\|k_1 - k_2\|^2 = 2\|k_1 - x_0\|^2 + 2\|x_0 - k_2\|^2 - 4\left\|\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) - x_0\right\|^2 \leq 0,$$

(perché $\frac{1}{2}(k_1 + k_2) \in K$ dato che K è *convesso*), cioè $k_2 = k_1$. ∎

Si noti che se, in particolare, K è una varietà lineare V, la disequazione (1.21) è equivalente all'*equazione*

$$k_0 \in V; \quad \forall z \in V, \quad (x_0 - k_0, z) = 0; \tag{1.22}$$

basta scegliere $k := k_0 \mp z$ (e $k := k_0 \mp iz$ se H è complesso) nella (1.21).

Dimostriamo ora un risultato di esistenza (ed unicità): il **Teorema di proiezione su un convesso chiuso**, che quindi fornisce anche un risultato di esistenza ed unicità per la soluzione di una *disequazione* su un convesso:

Teorema **1.5.1** *Sia $K \neq \emptyset$ un sottoinsieme* convesso *e* chiuso *dello spazio di* Hilbert *H; per ogni $x_0 \in H$, i problemi (equivalenti)* **Pb.1** *e* **Pb.2** *hanno una (ed una sola) soluzione.*

Dim.: sia $\{k_n\} \subset K$ una successione minimizzante la distanza di x_0 da K, cioè tale che $d := d(x_0, K) \leq \|x_0 - k_n\| \leq d_n := d + \frac{1}{n}$. Per l'identità del parallelogrammo, si ha che

$$\begin{aligned}\|k_n - k_m\|^2 &= \|(k_n - x_0) - (k_m - x_0)\|^2 = \\ &= 2\|k_n - x_0\|^2 + 2\|k_m - x_0\|^2 - \|k_n + k_m - 2x_0\|^2 \leq \\ &\leq 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4\left\|((k_n + k_m)/2) - x_0\right\|^2 \leq 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4d^2,\end{aligned}$$

(perché $(k_n + k_m)/2$ è nel convesso K). Se ne deduce che $\{k_n\}$ è una successione di Cauchy, dunque tende ad un limite k_0, che è in K dato che quest'ultimo è *chiuso*. Inoltre, si ha $d \leq \|x_0 - k_0\| \leq \|x_0 - k_n\| + \|k_n - k_0\| \leq d_n + \|k_n - k_0\| \to 0$, cioè $\|x_0 - k_0\| = d$. ∎

Definizione **1.5.3** *La soluzione del problema* **Pb.1***, che indicheremo con la notazione $P_K x_0$, si chiama* **proiezione di x_0 sul convesso** *K.* ∎

Corollario **1.5.1** *Siano $K \neq \emptyset$ un convesso chiuso dello spazio di* Hilbert *H, x_1, x_2 due elementi qualsiasi di H: si ha*

$$\|P_K\, x_1 - P_K\, x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|. \tag{1.23}$$

Dim.: per definizione, si ha, $\forall k \in K$,

$$\Re\,(x_1 - P_K\, x_1, k - P_K\, x_1) \leq 0,$$
$$\Re\,(x_2 - P_K\, x_2, k - P_K\, x_2) \leq 0.$$

Scegliendo $k = P_K\, x_2$ nella prima e $k = P_K\, x_1$ nella seconda disequazione e sommando, si ottiene

$$\|P_K\, x_2 - P_K\, x_1\|^2 \leq \Re\,(x_2 - x_1, P_K\, x_2 - P_K\, x_1) \leq \|x_2 - x_1\|\,\|P_k\, x_2 - P_K\, x_1\|,$$

da cui la tesi. ∎

Osservazione **1.5.1** In uno spazio di Banach *generico* (si veda però la successiva **Proposizione 2.9.3**), il problema **Pb.1** *può non essere risolubile*, anche quando K è un *sottospazio chiuso*. Sia E lo spazio di Banach $(C^0([0,1]); \| \,.\, \|_\infty)$, e sia

$$K := \left\{ x \in E \;\middle|\; x(0) = 0\,, \int_0^1 x(t)\,dt = 0 \right\}$$

(è un sottospazio chiuso di E). Fissato un elemento x_0 in $E \setminus K$, ma con $x_0(0) = 0$, mostriamo intanto che $d(x_0, K) = \left| \int_0^1 x_0(t)\,dt \right|$. Infatti, da un lato si ha, $\forall x \in K$, che $\left| \int_0^1 x_0(t)\,dt \right| = \left| \int_0^1 \{x_0(t) - x(t)\}\,dt \right| \leq \|x - x_0\|$, da cui $d(x_0, K) \geq \left| \int_0^1 x_0(t)\,dt \right|$; inoltre, posto, $\forall \alpha > 0$, $w_\alpha(t) := x_0(t) - (1+\alpha)t^\alpha \int_0^1 x_0(\tau)\,d\tau$, si ha evidentemente che $w_\alpha \in K$, quindi

$$d(x_0, K) \leq \|w_\alpha - x_0\| = (1+\alpha) \left| \int_0^1 x_0(t)\,dt \right|,$$

da cui, per l'arbitrarietà di α, l'uguaglianza cercata. Mostriamo che in K non c'è nessun punto che abbia distanza minima da x_0. Infatti, se, per assurdo, $\exists k_0 \in K$ tale che $\|k_0 - x_0\| = d(x_0, K)$, allora $\max_{0 \leq t \leq 1} |k_0(t) - x_0(t)| = d(x_0, K) = \left| \int_0^1 x_0(t)\,dt \right| = \left| \int_0^1 \{k_0(t) - x_0(t)\}\,dt \right|$, il che è possibile solo se $k_0(t) - x_0(t)$ è costante. Poiché $k_0(0) - x_0(0) = 0$, ciò implica $x_0(t) = k_0(t)$; ma questo è contrario all'ipotesi che $x_0 \notin K$. Quindi, *non è possibile definire la proiezione di x_0 su K.* ∎

Negli spazi di Hilbert, il **Teorema 1.5.1** vale, in particolare, quando K è un *sottospazio chiuso*. Per dedurne alcune importanti conseguenze, premettiamo alcuni risultati sui sottospazi ortogonali.

Definizione **1.5.4** *Dato il sottoinsieme non vuoto S dello spazio di Hilbert H, si dice* **ortogonale di** *S l'insieme*

$$S^\perp = \{x \mid x \perp S\} := \{x \in H \mid \forall y \in S, \quad (x,y) = 0\}. \;\blacksquare$$

Alcune proprietà elementari:

Proposizione **1.5.2** *Per ogni sottoinsieme $S \neq \emptyset$ di H,*

i): $S \subset S_1 \implies S^\perp \supset S_1^\perp$;

ii): $S^\perp$ è un sottospazio chiuso; $S^\perp = (\overline{S})^\perp = (\operatorname{span} S)^\perp = (\overline{\operatorname{span}}\, S)^\perp$;

iii): $S \cap S^\perp \subset \{0\}$;

iv): $S \subset (S^\perp)^\perp$.

Dim.: *i)*: se $x \in S_1^\perp$, si ha $x \perp y \;\; \forall y \in S_1$, dunque anche $\forall y \in S$;
ii): evidente, per le proprietà di linearità e di continuità del prodotto scalare;
iii): sia $x \in S \cap S^\perp$; dato che $x \in S^\perp$, si ha $(y, x) = 0 \;\; \forall y \in S$, in particolare $(x,x) = 0$;
iv): se $x \in S$, allora $x \perp y \;\; \forall y \in S^\perp$, quindi $x \in (S^\perp)^\perp$. ∎

Dimostriamo ora seguente

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **1.5.2 (di decomposizione)** *Sia V un* sottospazio chiuso *dello spazio di* HILBERT *H, e sia $V^\perp$ il suo sottospazio ortogonale. Ogni $x \in H$ ammette un'*unica *decomposizione $x = v + w$, dove $v \in V$ e $w \in V^\perp$, il che si esprime dicendo che H è* **somma diretta (ortogonale)** *di V e $V^\perp$:*

$$H = V \oplus V^\perp;$$

più precisamente, risulta

$$x = P_V\, x + P_{V^\perp}\, x. \tag{1.24}$$

Inoltre, $V = (V^\perp)^\perp$.

Dim.: l'unicità della decomposizione è ovvia: siano $v, v' \in V$ e $w, w' \in V^\perp$ tali che $v + w = v' + w'$; si ha allora $v - v' = w' - w \in V \cap V^\perp$, da cui, per la **Proposizione 1.5.2**, *iii*), $v' = v,\ w' = w$.

Dato ora $x \in H$, poiché $x = P_V\, x + (x - P_V\, x)$, e $P_V\, x \in V$, è sufficiente mostrare che $x - P_V\, x$ è in $V^\perp$: ma questo è assicurato dalla (1.22).
Si è così mostrato che, fissato ad arbitrio un sottospazio chiuso V, per ogni $x \in H$ risulta $x = P_V\, x + w$, con $w \in V^\perp$; si ha allora anche $x = P_{V^\perp}\, x + z$, con $z \in (V^\perp)^\perp$. Quindi, $x = w + P_V\, x = P_{V^\perp}\, x + z$, con $w, P_{V^\perp}\, x \in V^\perp$ e, per la **Proposizione 1.5.2**, *iv*), $P_V\, x, z \in (V^\perp)^\perp$; l'unicità della decomposizione permette di concludere che $w = P_{V^\perp}\, x$ e $z = P_V\, x = P_{(V^\perp)^\perp}\, x$, e ne viene che $V = (V^\perp)^\perp$. ∎

$\boxed{\textbf{Corollario}}$ **1.5.2** *i*) *Se S è un sottoinsieme non vuoto dello spazio di* HILBERT *H, si ha*

$$(S^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}}\, S;$$

ii) *in particolare, se V è un sottospazio chiuso di H, si ha*

$$P_V(\alpha x + \beta y) = \alpha P_V\, x + \beta P_V\, y, \qquad \forall (x, y \in H,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C});$$

$$\|P_V\, x\| \le \|x\|, \qquad \forall x \in H.$$

Dim.: *i*): per il Teorema precedente, $(S^\perp)^\perp = ((\overline{\operatorname{span}}\, S)^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}}\, S$.

ii): Dalle relazioni $x = P_V\, x + w,\ \ y = P_V\, y + w',\ \ \alpha x + \beta y = P_V(\alpha x + \beta y) + w''$, con $w, w', w'' \perp V$, e dall'unicità della decomposizione $x = P_V\, x + P_{V^\perp}\, x$, segue la *linearità* di P_V. Infine, per il **Corollario 1.5.1**,

$$\|P_V\, x\| = \|P_V\, x - P_V\, 0\| \le \|x - 0\| = \|x\|. \ ∎$$

$\boxed{\textbf{Corollario}}$ **1.5.3** *Se $S \neq \emptyset$ è un sottoinsieme dello spazio di* HILBERT *H,* span *S è denso in H se e solo se $S^\perp = \{0\}$. In particolare, una varietà lineare V è densa in H se e solo se l'unico vettore ortogonale a V è il vettore nullo.*

Dim.: sia $y \in S^\perp = (\operatorname{span} S)^\perp$; se $\operatorname{span} S$ è denso in H, esiste una successione $\{x_n\} \subset \operatorname{span} S$ che tende ad y. Quindi $(y, x_n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, da cui $\|y\|^2 = \lim_n (y, x_n) = 0$, cioè $y = 0$.

Supponiamo ora che $S^\perp = \{0\}$. Posto $V := \overline{\operatorname{span}}\, S = \overline{\operatorname{span} S}$, si ha $V^\perp = S^\perp = \{0\}$ (per la **Proposizione 1.5.2**, *i*)), quindi, per il Teorema di decomposizione, $H = V \oplus V^\perp = V = \overline{\operatorname{span}}\, S$. ∎

1.6 Funzionali lineari e continui.

Sia X uno spazio *vettoriale* complesso (o reale).

Definizione **1.6.1** *Un* **funzionale** f *di* **dominio** $\operatorname{dom} f := V \subset X$ *è un'applicazione di* V *in* $\mathbb{C}$ *(o in* $\mathbb{R}$*);* f *si dice* **lineare** *se:*
i) V *è una varietà lineare;*
ii) $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y), \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (o $\in \mathbb{R}$);
f *si dice* **antilineare**[15] *se vale la i), ed inoltre*
ii)' $f(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha} f(x) + \overline{\beta} f(y), \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$
Si dice **nucleo** *del funzionale lineare* f *definito sulla varietà lineare* V *l'insieme*

$$\ker f := \{x \in V \mid f(x) = 0\};$$

$N \subset X$ *si dice* **iperpiano (vettoriale)** *se esiste un funzionale lineare* f *definito su* tutto X *e* non identicamente nullo*, tale che* $N = \ker f$. ■

È evidente che ogni iperpiano è una varietà lineare; inoltre:

Lemma **1.6.1** *Sia* N *un iperpiano dello spazio vettoriale* X*; fissato ad arbitrio* y_0 *in* $X \setminus N$ *(cioè con* $f(y_0) \neq 0$*), ogni* $x \in X$ *si decompone, in modo* unico*, nella somma* $x = v + \lambda y_0$*, con* $v \in N, \quad \lambda \in \mathbb{C}$.

Dim.: l'unicità della decomposizione è evidente: se $x = v + \lambda y_0 = v' + \lambda' y_0$, con $v, v' \in N$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$, si ha $v - v' = (\lambda' - \lambda) y_0 \in N$, quindi $f(v - v') = 0 = (\lambda' - \lambda) f(y_0)$, il che è possibile solo se $\lambda' = \lambda$, quindi $v' = v$. L'identità

$$\forall x \in X, \quad x = \left(x - \frac{f(x)}{f(y_0)}\, y_0 \right) + \frac{f(x)}{f(y_0)}\, y_0 \tag{1.25}$$

fornisce la decomposizione cercata. ■

Corollario **1.6.1** *Una varietà lineare* N *dello spazio vettoriale* X *è un iperpiano se e solo se è un elemento massimale nella famiglia* $\mathcal{V}$ *delle varietà lineari* proprie *di* X*, ordinata per inclusione.*

Dim.: sia $N = \ker f$, con f funzionale lineare non identicamente nullo, e sia M una varietà lineare che contiene *strettamente* N. Allora $\exists y_0 \in M \setminus N$, e, per il Lemma precedente, ogni $x \in X$ si scrive nella forma (1.25); quindi $x \in M$, cioè $M = X$, dunque N è massimale.
Inversamente, se N è un elemento massimale in $\mathcal{V}$, fissato $y_0 \in X \setminus N$ si ha che $\operatorname{span}\{N; \{y_0\}\}$ è una varietà lineare che contiene strettamente N, quindi coincide con X. Ogni $x \in X$ si scrive allora in modo unico nella forma $x = v + \lambda y_0$ con $v \in N$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ed il funzionale f definito da $f(x) = f(v + \lambda y_0) := \lambda$ verifica $f(y_0) = 1$ (quindi non è identicamente nullo), e $N = \ker f$. ■

15 o *semilineare*, oppure *pseudolineare*; è evidente peraltro che g è antilineare se e solo se f dato da $f(x) := \overline{g(x)}$ è lineare. Naturalmente, se X è reale non c'è distinzione tra funzionali lineari e antilineari.

Corollario **1.6.2** *Se E è uno spazio normato, ogni iperpiano vettoriale N è chiuso o denso in E.*

Dim.: poiché anche $\overline{N}$ è una varietà lineare, e $N \subset \overline{N} \subset E$, se N è massimale deve essere $\overline{N} = N$ oppure $\overline{N} = E$. ∎

Nel caso degli spazi *normati*, hanno ovviamente interesse proprietà di *continuità*, che, come vedremo tra poco, si può formulare in termini di *limitatezza*:

Definizione **1.6.2** *Il funzionale lineare f, definito sulla varietà lineare $\operatorname{dom} f$ dello spazio normato E, si dice* **limitato** (*nel suo dominio*) *se esiste $c > 0$ tale che, $\forall x \in \operatorname{dom} f$, risulti $|f(x)| \le c\,\|x\|$.* ∎

Valgono le seguenti importanti proprietà:

Proposizione **1.6.1** *Siano E uno spazio normato, f un funzionale* lineare *di dominio $V := \operatorname{dom} f \subset E$; le seguenti proprietà si equivalgono:*

i) f è continuo in V;

ii) f è continuo nell'origine;

iii) f è limitato in V.

Dim.: è evidente che *i)* $\Rightarrow$ *ii)*; per mostrare che *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*, osserviamo che, in particolare, $\exists \delta > 0 : \quad \|y\| \le \delta \Rightarrow |f(y)| \le 1$. Fissato un qualunque x in $E \setminus \{0\}$, e posto $y := \delta x/\|x\|$, si ha allora $|f(y)| = \delta |f(x)|/\|x\| \le 1$, da cui $|f(x)| \le (1/\delta)\|x\|$, disuguaglianza che vale ovviamente anche per $x = 0$. Infine, è evidente che *iii)* $\Rightarrow$ *i)*: fissati ad arbitrio x_0 in $\operatorname{dom} f$, $\varepsilon > 0$, e posto $\delta := \varepsilon/c$, se $x \in \operatorname{dom} f$ è tale che $\|x - x_0\| \le \delta$ si ha infatti che $|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \le c\|x - x_0\| \le c\delta = \varepsilon$. ∎

Un esempio di funzionale lineare ma non continuo: sia $H = L^2(-1, 1)$, e definiamo la varietà lineare V di H nel modo seguente: $x \in V$ se e solo se in x esiste un *rappresentante continuo* x_0 (necessariamente unico). Per ogni $x \in V$, poniamo $f(x) := x_0(0)$, dove x_0 è il rappresentante continuo in x. È chiaro che f è un funzionale lineare, di dominio V, ma che f *non è limitato* in V: basta osservare che, detta x_n la classe d'equivalenza che contiene la funzione $\xi_n(t) := (1 - n|t|)^+$, si ha $x_n \to 0$ in H, mentre $f(x_n) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione **1.6.3** *Sia f un funzionale lineare e continuo di dominio $V \subset E$ (E = spazio normato); la* **norma**, *o* **modulo**, *di f su V è definita nel modo seguente:*

$$\mu_V(f) := \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Se $V = E$, si scrive $\mu(f)$, oppure $\|f\|_*$, anziché $\mu_E(f)$. ∎

Si osservi che risulta (verifica immediata):

$$\begin{aligned} \mu_V(f) &= \sup\{|f(x)| \mid x \in V \cap \Sigma(0,1)\} = \sup\{|f(x)| \mid x \in V,\ \|x\| = 1\} = \\ &= \inf\{c > 0 \mid |f(x)| \le c\,\|x\| \quad \forall x \in V\} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Osservazione}}$ **1.6.1** Dalle proprietà del prodotto scalare, si ha che, per ogni y fissato nello spazio prehilbertiano H, le applicazioni f_y, g_y definite da $f_y(x) := (x, y)$, $g_y(x) := (y, x)$ sono due funzionali, rispettivamente lineare ed antilineare, definiti su H. La disuguaglianza di SCHWARZ mostra che $\|f_y\|_* \leq \|y\|$ e $\|g_y\|_* \leq \|y\|$. Anzi, si vede subito che $\|f_y\|_* = \|g_y\|_* = \|y\|$: se $y = 0$, ciò è ovvio, perché f_y, g_y sono identicamente nulli; se $y \neq 0$, basta osservare che $\|f_y\|_* \geq f_y(y)/\|y\| = \|y\|$ (analogamente per g_y). ∎

Una conseguenza immediata:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.6.2** *Per ogni x dello spazio prehilbertiano H, risulta*

$$\|x\| = \max_{f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|_*},$$

il massimo essendo calcolato su tutti i funzionali f lineari e continui su H (eccettuato quello identicamente nullo).

Dim.: se $x = 0$, l'uguaglianza è ovvia. Se $x \neq 0$, per ogni funzionale lineare e continuo f su H si ha $|f(x)| \leq \|f\|_* \|x\|$, dunque $\sup_{f \neq 0} |f(x)|/\|f\|_* \leq \|x\|$; d'altra parte, posto $y := x/\|x\|$, e considerato il funzionale f_y definito da $f_y(z) := (z, y)\ \ \forall z \in H$, si ha $\|x\| \geq \sup_{f \neq 0} |f(x)|/\|f\|_* \geq |f_y(x)|/\|f_y\|_* = \|x\|$, da cui l'uguaglianza ed il fatto che il sup è in realtà un massimo. ∎

Premettiamo la seguente

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **1.6.4** *Siano X uno spazio vettoriale, f un funzionale lineare con* $\operatorname{dom} f \neq X$. *Un* **prolungamento (lineare)** *g di f è un funzionale lineare definito su* $\operatorname{dom} g$ *tale che:*

i) $\operatorname{dom} f \subset \operatorname{dom} g$*;*

ii) $\forall x \in \operatorname{dom} f$*, si ha* $g(x) = f(x)$. ∎

Vale il seguente

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **1.6.1 (Hahn-Banach)** *Sia f un funzionale lineare e continuo definito sulla varietà lineare V dello spazio prehilbertiano H; esiste ed è* unico *il prolungamento lineare e continuo F di f, con* $\operatorname{dom} F = H$*, che verifica la condizione* $\|F\|_* = \mu_V(f)$.

Dim.: supponiamo dapprima che H sia *completo*. Mostriamo intanto che f si può prolungare, in modo *unico*, ad un funzionale $\tilde{f}$ lineare e continuo, definito su $\overline{V}$, e con $\mu_{\overline{V}}(\tilde{f}) = \mu_V(f)$: in effetti, $\forall x \in \overline{V}$, scelta una successione $\{x_n\} \subset V$ tale che $x_n \to x$, la successione $\{f(x_n)\}$ è di CAUCHY (perché $|f(x_n) - f(x_m)| = |f(x_n - x_m)| \leq \mu_V(f) \|x_n - x_m\|$), quindi converge ad un limite, che è lecito indicare con $\tilde{f}(x)$ perché dipende da x ma non dalla particolare scelta di $\{x_n\}$. Il funzionale $\tilde{f}$ è lineare, e verifica evidentemente le proprietà di prolungamento richieste (l'unicità di $\tilde{f}$ è ovvia).

Per prolungare f a tutto H, è allora sufficiente porre $F(x) := \tilde{f}(P_{\overline{V}} x)$. Si osservi intanto che se $x \in V$, si ha $P_{\overline{V}} x = x$, quindi

$$F(x) = \tilde{f}(P_{\overline{V}} x) = \tilde{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in V;$$

inoltre, ricordando il **Corollario 1.5.2**, $\forall(x, y \in H,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C})$ risulta

$$F(\alpha x + \beta y) = \tilde{f}(P_{\overline{V}}(\alpha x + \beta y)) = \tilde{f}(\alpha\, P_{\overline{V}}\, x + \beta\, P_{\overline{V}}\, y) = \alpha F(x) + \beta F(y),$$

dunque F è lineare. Sempre per il **Corollario 1.5.2**,

$$|F(x)| = |\tilde{f}(P_{\overline{V}}\, x)| \le \mu_{\overline{V}}(\tilde{f})\, \|P_{\overline{V}}\, x\| \le \mu_V(f)\, \|x\|,$$

che dà la limitatezza di F, nonché la maggiorazione $\|F\|_* \le \mu_V(f)$; poiché però $\|F\|_* \ge \mu_V(F) = \mu_V(f)$, ne viene l'uguaglianza richiesta.

Sia ora H *non completo*. Per il **Teorema 1.4.6**, possiamo identificare H ad una varietà lineare densa nel suo completamento $\widetilde{H}$; anche V è di conseguenza identificata ad una varietà lineare di $\widetilde{H}$. Se $\widetilde{F}$ è un prolungamento di f a tutto $\widetilde{H}$ che verifica $\|\widetilde{F}\|_{\widetilde{H}^*} = \mu_V(f)$, la restrizione F di $\widetilde{F}$ ad H verifica evidentemente le proprietà richieste.

L'unicità del prolungamento che verifica $\|F\|_* = \mu_V(f)$ verrà mostrata più avanti (si veda il **Corollario 1.6.4**). ∎

Grazie al Teorema di Hahn-Banach, *non è limitativo* supporre (come faremo spesso nel seguito) che ogni funzionale lineare e *continuo* f sia definito sull'intero spazio.

Come si è visto, il prolungamento ora costruito (e che è caratterizzato dal fatto di annullarsi su $(\operatorname{dom} f)^\perp$) verifica la condizione $\|F\|_* = \mu_V(f)$. Esistono tuttavia *altri* prolungamenti lineari e continui di f a tutto H: se G è uno di questi, detta g la restrizione di G a $V^\perp$ ($V := \operatorname{dom} f$), è evidente che g è un funzionale lineare e continuo sul dominio $V^\perp$, e

$$G(x) = \tilde{f}(P_{\overline{V}}\, x) + g(P_{V^\perp}\, x). \tag{1.26}$$

Reciprocamente, se è assegnato un *qualunque* funzionale lineare e continuo g di dominio $V^\perp$, la (1.26), assunta come definizione di G, fornisce un funzionale lineare e continuo, definito su tutto H, che prolunga f.

Va osservato che, contrariamente a quanto accade nel caso di $\mathbb{R}^d$ e di $\mathbb{C}^d$, la *limitatezza* (o, equivalentemente, la *continuità*) di un funzionale *non* è, in generale, conseguenza della sua linearità. Per precisare questa affermazione, premettiamo alcune definizioni.

Definizione **1.6.5** *Sia V uno spazio vettoriale; si dice che*

i) V ha **dimensione** n ($\dim V = n$) *se in V esistono n vettori linearmente indipendenti, mentre, comunque si scelgano $(n+1)$ vettori, questi sono sempre linearmente dipendenti;*

ii) V ha **dimensione infinita** ($\dim V = \infty$) *se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono n vettori di V linearmente indipendenti.* ∎

Definizione **1.6.6** *Un* **sistema fondamentale** *nello spazio vettoriale V è un sottoinsieme costituito da vettori linearmente indipendenti; una* **base algebrica** (*o* base di Hamel) *è un sistema fondamentale S tale che si abbia* $\operatorname{span} S = V$. ∎

Si ha il seguente risultato:

Proposizione **1.6.3** *Ogni spazio vettoriale V ammette una base algebrica.*

Dim.: consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ di tutti i sistemi fondamentali di V; in $\mathcal{F}$, definiamo l'inclusione (in senso largo) come relazione d'ordine parziale. È chiaro che $(\mathcal{F}; \subset)$ è un insieme *induttivo*: se $\{A_\lambda\}$ è una catena di elementi di $\mathcal{F}$, l'unione $\bigcup A_\lambda$ è un maggiorante per $\{A_\lambda\}$. Per il Lemma di Zorn, $\mathcal{F}$ ha almeno un elemento massimale $\tilde{A} = \{x_\mu\}_{\mu \in M}$, che è una base algebrica: infatti, se esistesse in V un elemento $x \notin \operatorname{span} \tilde{A}$, l'insieme $\{x\} \cup \tilde{A}$ sarebbe un sistema fondamentale, quindi un elemento di $\mathcal{F}$, che *segue strettamente* $\tilde{A}$ nella relazione d'ordine su $\mathcal{F}$, contraddicendo la massimalità di $\tilde{A}$. ∎

Corollario **1.6.3** *Se E è uno spazio normato di dimensione infinita, esiste un funzionale lineare definito su tutto E e non continuo.*

Dim.: sia $\tilde{A} = \{x_\mu\}_{\mu \in M}$ una base algebrica per E; non è limitativo supporre che, $\forall \mu \in M$, sia $\|x_\mu\| = 1$. Dato che $\dim E = \infty$, $\tilde{A}$ contiene almeno una successione di elementi *distinti* $\{x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_n}, \ldots\}$. Definiamo un funzionale f su $\tilde{A}$ nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{se } \exists n \in \mathbb{N} : \ x = x_{\mu_n}, \\ 0 & \text{se } x \notin \{x_{\mu_n}\}. \end{cases}$$

Dato che ogni $x \in E$ si scrive, in modo *unico*, come combinazione lineare *finita* di elementi di $\tilde{A}$, è possibile estendere la definizione di f, per linearità, a tutto E; ed è evidente che tale estensione è lineare, ma non limitata. ∎

Nel caso degli spazi di Hilbert, si ha la seguente interessante caratterizzazione della continuità di un funzionale lineare (si veda anche la successiva **Proposizione 2.2.4**):

Proposizione **1.6.4** *Il funzionale lineare f sullo spazio di* Hilbert *H è continuo se e solo se $N := \ker f$ è chiuso; in questo caso, e se f non è identicamente nullo, fissato ad arbitrio $y_0 \in N^\perp \setminus \{0\}$ si ha*

$$N^\perp = \{\lambda y_0 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}; \quad P_{N^\perp}\, x = \frac{(x, y_0)}{\|y_0\|^2}\, y_0.$$

Dim.: poniamo $N := \ker f$. Se f è continuo, N, come immagine inversa del chiuso $\{0\}$, è chiuso. Viceversa, sia N chiuso; se $N = H$, f è identicamente nullo, quindi continuo. Se $N \neq H$, per il **Corollario 1.5.3**, $N^\perp \neq \{0\}$, e nella (1.25) si può scegliere $0 \neq y_0 \in N^\perp$: si ha infatti $f(y_0) \neq 0$, altrimenti, per la **Proposizione 1.5.2**, *iii*), si avrebbe $y_0 \in N \cap N^\perp = \{0\}$. Per il **Lemma 1.6.1**, ogni $x \in H$ si decompone nella forma $x = v + \lambda y_0$, con $v \in N$, $\lambda \in \mathbb{C}$; grazie al **Teorema 1.5.2**, si ha $v = P_N\, x$ e $\lambda y_0 = P_{N^\perp}\, x$. Risulta allora $(x, y_0) = \lambda \|y_0\|^2$, quindi $P_{N^\perp}\, x = \frac{(x, y_0)}{\|y_0\|^2}\, y_0$. Si ha pertanto

$$|f(x)| = |f(P_{N^\perp}\, x)| = \frac{|(x, y_0)|}{\|y_0\|^2}\, |f(y_0)| \leq \frac{|f(y_0)|}{\|y_0\|}\, \|x\|, \tag{1.27}$$

da cui la continuità di f. ∎

Ne discende il fondamentale Teorema di RIESZ sulla **rappresentazione dei funzionali lineari e continui** su uno spazio di HILBERT, che mostra come il funzionale $f_y(x) = (x, y)$ dell'**Osservazione 1.6.1** sia ben più di un semplice *esempio*: rappresenta infatti la forma *più generale* di un funzionale lineare e continuo su uno spazio di HILBERT.

Teorema 1.6.2 (Riesz) *Sia f un funzionale lineare e continuo definito sullo spazio di* HILBERT *H; esiste uno ed un solo $y \in H$ tale che*

$$\forall x \in H, \quad f(x) = (x, y); \tag{1.28}$$

inoltre, risulta $\|f\|_* = \|y\|$.

Dim.: l'unicità è evidente, perché se $y_1, y_2 \in H$ sono tali che $(x, y_1) = (x, y_2)$ per ogni $x \in H$, si ha $(x, y_1 - y_2) = 0$; per $x = y_1 - y_2$, ne viene che $y_1 = y_2$.

Indichiamo con N il nucleo di f; se $N = H$, il funzionale è identicamente nullo, e nella (1.28) basta scegliere $y = 0$. Se $N \neq H$, fissiamo un vettore non nullo $y_0 \in N^\perp$ (quindi con $f(y_0) \neq 0$); per la **Proposizione 1.6.4**, $\forall x \in H$ risulta $f(x) = f(P_{N^\perp}\, x) = \dfrac{(x, y_0)}{\|y_0\|^2}\, f(y_0)$, quindi, posto $y := \dfrac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2}\, y_0$, ne viene che $f(x) = (x, y)$. ∎

Siamo ora in grado di completare la dimostrazione del Teorema di HAHN-BANACH:

Corollario 1.6.4 *Ipotesi e notazioni del* **Teorema 1.6.1***; è* unico *il prolungamento F di f che verifica $\|F\|_* = \mu_V(f)$.*

Dim.: cominciamo a supporre H *completo*; poiché il prolungamento di f a $\overline{V}$ è unico, non è restrittivo assumere che V sia *chiusa*. Sia G un prolungamento lineare e continuo di f a tutto H, tale che $\|G\|_* = \mu_V(f)$, e sia $y \in H$ tale che $G(x) = (x, y)\ \forall x \in H$; si ha $\|G\|_* = \|y\|$, quindi

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|G\|_* = \mu_V(f) = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|(v, y)|}{\|v\|} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|(v, P_V\, y + P_{V^\perp}\, y)|}{\|v\|} = \\ &= \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|(v, P_V\, y)|}{\|v\|} \leq \|P_V\, y\| \leq \|y\|. \end{aligned}$$

Ne viene che $\|y\| = \|P_V\, y\|$; dato che, per il Teorema di PITAGORA, $\|y\|^2 = \|P_V y\|^2 + \|P_{V^\perp} y\|^2$, si deve avere $P_{V^\perp}\, y = 0$; quindi la restrizione di G a $V^\perp$ è nulla, cioè G coincide con il prolungamento F costruito nella dimostrazione del Teorema di HAHN-BANACH.

Se H non è completo, possiamo identificarlo ad una varietà lineare densa nel suo completamento $\widetilde{H}$; anche V è di conseguenza identificata ad una varietà lineare di $\widetilde{H}$. Se ora G è un prolungamento di f a tutto H che verifica $\|G\|_{H^*} = \mu_V(f)$, possiamo prolungare G per continuità, in modo unico, ad un funzionale lineare $\widetilde{G}$ su $\widetilde{H}$, che verifica $\|\widetilde{G}\|_{(\widetilde{H})^*} = \|G\|_{H^*} = \mu_V(f)$. Per quanto visto nella prima parte della dimostrazione, $\widetilde{G}$ è nullo sull'ortogonale in $\widetilde{H}$ di V; in particolare, la restrizione di $\widetilde{G}$ all'ortogonale $V^\perp$ di V in H, che coincide con la restrizione a $V^\perp$ di G, è nulla, quindi G coincide con il prolungamento F costruito nel **Teorema 1.6.1**. ∎

Consideriamo ora l'insieme E^* dei funzionali antilineari e continui sullo spazio normato E; è possibile munire E^* di una struttura di *spazio normato*:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.6.5** *Sia E uno spazio normato complesso; fissati ad arbitrio $f, g \in E^*$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, il funzionale $\lambda f + \mu g$ definito su E da $(\lambda f + \mu g)(x) := \lambda f(x) + \mu g(x)$ è antilineare e continuo; sullo spazio vettoriale complesso E^* così definito, l'applicazione $f \mapsto \|f\|_*$ è una norma.*

Dim.: con la definizione posta, $\lambda f + \mu g$ è un funzionale *antilineare*:

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(\alpha x + \beta y) &= \lambda f(\alpha x + \beta y) + \mu g(\alpha x + \beta y) = \\ &= \lambda[\overline{\alpha} f(x) + \overline{\beta} f(y)] + \mu[\overline{\alpha} g(x) + \overline{\beta} g(y)] = \\ &= \overline{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) + \overline{\beta}(\lambda f + \mu g)(y).\end{aligned}$$

Inoltre, $\lambda f + \mu g$ è *limitato*, quindi continuo, dato che

$$|(\lambda f + \mu g)(x)| \leq (|\lambda| \, \|f\|_* + |\mu| \, \|g\|_*) \, \|x\|;$$

è facile verificare che $\|\alpha f\|_* = |\alpha| \, \|f\|_*$, e che $\|f + g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$; di conseguenza, $(E^*; \| \, . \, \|_*)$ è uno spazio *normato*. ∎

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **1.6.7** *Lo spazio normato $(E^*; \| \, . \, \|_*)$ è detto l'***antiduale** *dello spazio normato $(E; \| \, . \, \|)$. In modo analogo si definisce il* **duale** *di E (spazio dei funzionali* lineari *e continui su E).* ∎

Va messo in evidenza che l'antiduale di uno spazio *normato* è sempre *completo*, come conseguenza della completezza di $\mathbb{C}$ (o di $\mathbb{R}$ se lo spazio è reale):

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **1.6.3** *L'antiduale $(E^*; \| \, . \, \|_*)$ dello spazio* normato *$(E; \| \, . \, \|)$ è sempre uno spazio di* Banach.

Dim.: per mostrare che E^* è completo, sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in E^*; è immediato verificare che, $\forall x \in E$, la successione *numerica* $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy (si ha infatti $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_* \, \|x\|$), quindi converge ad un numero $f(x)$. Il funzionale f così definito è evidentemente *antilineare*, ed è anche *limitato*: la successione $\{f_n\}$ è limitata (perché di Cauchy), e se c è tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_* \leq c$, risulta anche $|f(x)| \leq c \, \|x\| \;\; \forall x \in E$. Dunque $f \in E^*$; mostriamo che $\|f_n - f\|_* \to 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia n_ε tale che $\forall (n > n_\varepsilon, \; r \in \mathbb{N})$ sia $\|f_{n+r} - f_n\|_* < \varepsilon$; per ogni $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$ si ha allora $|f_{n+r}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, da cui, al limite per $r \to +\infty$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$; ne segue facilmente la conclusione. ∎

Combinando il Teorema di Riesz con il **Teorema 1.6.3** si ottiene la seguente

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.6.6** *Sia H uno spazio di* Hilbert*; il suo antiduale H^* è uno spazio di* Hilbert*, e l'applicazione J data dal Teorema di* Riesz*, e definita da*

$$(Jf, x) := f(x) \quad \forall f \in H^*, \quad \forall x \in H,$$

è un isomorfismo isometrico (**isomorfismo di** RIESZ) *di* H^* *su* H. *L'isomorfismo* inverso *da* H *su* H^* *è dato da*

$$(J^{-1}y)(x) = (y, x) \quad \forall x, y \in H.$$

Dim.: per il **Teorema 1.6.3**, H^* è intanto uno spazio di BANACH. Mostriamo che J è *lineare*: $\forall f, g \in H^*$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ si ha infatti

$$\begin{aligned}(J(\lambda f + \mu g), x) &= (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \\ &= \lambda(Jf, x) + \mu(Jg, x) = (\lambda Jf + \mu Jg, x).\end{aligned}$$

Inoltre, dato che J è un'isometria, si ha

$$\begin{aligned}\|f+g\|_*^2 + \|f-g\|_*^2 &= \|Jf + Jg\|^2 + \|Jf - Jg\|^2 = 2\|Jf\|^2 + 2\|Jg\|^2 = \\ &= 2\|f\|_*^2 + 2\|g\|_*^2,\end{aligned}$$

quindi la norma in H^* è indotta da un prodotto scalare, H^* è uno spazio di HILBERT, e J è un isomorfismo di H^* su H. ∎

$\boxed{\textbf{Osservazione}}$ **1.6.2** Occorre porre attenzione al fatto che l'identificazione tra H ed H^* resa possibile dall'isomorfismo di RIESZ può risultare *incompatibile* con altre identificazioni, ad esempio quella collegata all'*immersione* di uno spazio in un altro. Ci limitiamo ad un esempio significativo di questa situazione. Sia $\ell^2 = (\ell^2; (\,.\,,.)_2)$ lo spazio di HILBERT delle successioni di quadrato sommabile, e sia $V_1 = (V; \langle\,.\,,.\rangle)$ lo spazio di HILBERT introdotto nell'**Osservazione 1.4.1**. Si ha $V_1 \subset \ell^2$ anche topologicamente, dato che, detta I l'immersione di V in ℓ^2, risulta $\|Ix\|_2^2 \leq \langle x, x\rangle$ per ogni $x \in V_1$. Si osservi che per ogni $f \in (\ell^2)^*$ la restrizione I^*f di f a V (data da $(I^*f)(x) := f(Ix)\ \forall x \in V$) è in $V_1^* := (V_1)^*$, dato che $\forall x \in V$ si ha $|(I^*f)(x)| = |f(Ix)| \leq \|f\|_* \,(Ix, Ix)_2^{1/2} \leq \|f\|_* \,\langle x, x\rangle^{1/2}$. L'applicazione lineare I^* così definita da $(\ell^2)^*$ in V_1^* è iniettiva, grazie alla densità di V in ℓ^2 (si noti che V contiene tutte le successioni a termini definitivamente nulli), e, $\forall f \in (\ell^2)^*$, la norma di I^*f in V_1^* è minore o uguale della norma $\|f\|_*$ di f in $(\ell^2)^*$.
Se si indica con J l'isomorfismo di RIESZ tra $(\ell^2)^*$ ed ℓ^2, e con J_1 l'isomorfismo di RIESZ tra V_1^* e V_1, si ha lo schema

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "I"] \arrow[d, "J_1^{-1}"'] & \ell^2 \arrow[d, "J^{-1}"] \\ V_1^* & (\ell^2)^* \arrow[l, "I^*"] \end{tikzcd}$$

Il diagramma a sinistra *non è commutativo*: l'applicazione $I_1 := I^* \circ J^{-1} \circ I$ è infatti *incompatibile* con J_1^{-1}, dato che, $\forall x, y \in V_1$, si ha $(I_1\, y)(x) = (y, x)_2$, mentre $(J_1^{-1}\, y)(x) = \langle y, x\rangle$. ∎

1.7 Convergenza debole.

Finora abbiamo munito ogni spazio prehilbertiano H (più in generale, ogni spazio normato E) della topologia *forte*, cioè quella determinata dalla metrica indotta dalla norma. È però possibile definire su E anche un'altra topologia, la topologia *debole*, sulla quale torneremo in seguito; per il momento, ci limitiamo ad introdurre la nozione di *convergenza debole per successioni*:

Definizione **1.7.1** *Sia* $\{x_n\}$ *una successione nello spazio normato* E*; si dice che* $\{x_n\}$ **tende debolmente** *ad* $x \in E$*, e si scrive* $x_n \rightharpoonup x$*, o* $w\text{-}\lim x_n = x$*, se* $\lim f(x_n) = f(x), \quad \forall f \in E^*$*.* ∎

Negli spazi prehilbertiani, grazie al Teorema di RIESZ si può porre la definizione *equivalente*

Definizione **1.7.2** *Sia* $\{x_n\}$ *una successione nello spazio prehilbertiano* H*; si dice che* $\{x_n\}$ **tende debolmente** *ad* $x \in H$*, e si scrive* $x_n \rightharpoonup x$*, o* $w\text{-}\lim x_n = x$*, se* $\lim_n (x_n, y) = (x, y), \quad \forall y \in H$*.* ∎

Sono ovvie l'*unicità* dell'(eventuale) limite debole di una successione, nonché la *linearità* del limite debole. È anche chiaro che esistono successioni che convergono *debolmente ma non fortemente*: ad esempio, la successione $\{e^{(n)}\}$ dei versori di ℓ^2 converge debolmente a 0, dato che $\forall y \in \ell^2$ si ha $\sum_n |y_n|^2 = \sum_n |(e^{(n)}, y)|^2 < +\infty$, quindi $\lim_n (e^{(n)}, y) \to 0$, mentre, essendo $\|e^{(n)} - e^{(m)}\| = \sqrt{2}$ quando $m \neq n$, $\{e^{(n)}\}$ (anzi, ogni sottosuccessione estratta da $\{e^{(n)}\}$) non verifica la condizione di CAUCHY per la convergenza forte.

I collegamenti tra le due nozioni di convergenza sono illustrati dalla seguente

Proposizione **1.7.1** *Sia* $\{x_n\}$ *una successione nello spazio prehilbertiano* H*; si ha che* $s\text{-}\lim_n x_n = x$ *se e solo se valgono* entrambe *le proprietà:*
i) $w\text{-}\lim_n x_n = x$,
ii) $\lim_n \|x_n\| = \|x\|$.

Dim.: se $x_n \to x$, le *i)*, *ii)* seguono dalle **Proposizioni 1.2.7 e 1.2.6**. Viceversa, se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$, si ha che

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - 2\Re(x, x_n) + \|x_n\|^2 \to 0. \ \blacksquare$$

Non è detto che se $x_n \rightharpoonup x$ esista il limite di $\|x_n\|$: se, ad esempio, si considera in ℓ^2 la successione di termine generale $x_n := (1 + (-1)^n)\, e^{(n)}$, si ha $x_n \rightharpoonup 0$, mentre $\|x_n\| = 1 + (-1)^n$. Vale tuttavia la proprietà seguente:

Proposizione **1.7.2** *In uno spazio prehilbertiano* H*, se* $x_n \rightharpoonup x$ *allora*

$$\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|.$$

Dim.: se $x = 0$, il risultato è ovvio. Se invece $x \neq 0$, basta osservare che $|(x_n, x)| \leq \|x_n\|\,\|x\|$, da cui

$$\|x\|^2 = \lim_n |(x_n, x)| = \liminf_n |(x_n, x)| \leq \|x\| \liminf_n \|x_n\| \,. \ \blacksquare$$

Vale anche la seguente proprietà, che dimostreremo più avanti, in un contesto più generale (si vedano i **Corollari 1.9.1** e **2.3.2**):

Proposizione **1.7.3** *Sia* H *uno spazio prehilbertiano; ogni successione debolmente convergente in* H *è* limitata*:*

$$(x_n \rightharpoonup x) \Longrightarrow (\exists c : \ \|x_n\| \leq c \ \ \forall n \in \mathbb{N}). \ \blacksquare$$

Ne discende il seguente risultato, che generalizza la **Proposizione 1.2.7**:

Proposizione **1.7.4** *Siano* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *due successioni nello spazio prehilbertiano* H*; se* $x_n \to x$ *e* $y_n \rightharpoonup y$*, allora* $(x_n, y_n) \to (x, y)$*.*

Dim.: per la Proposizione precedente, $\exists c : \ \|y_n\| \leq c$; dunque si ha

$$\begin{aligned}|(x_n, y_n) - (x, y)| &\leq |(x_n, y_n) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x, y)| \leq \\ &\leq c\,\|x_n - x\| + |(x, y_n - y)| \to 0\,. \ \blacksquare\end{aligned}$$

A differenza di quanto accade in $\mathbb{C}^d$ ed in $\mathbb{R}^d$, in uno spazio di Hilbert gli insiemi limitati non sono, in generale, relativamente compatti nella topologia forte; vale invece il seguente **Teorema di compattezza debole**:

Teorema **1.7.1** *Se* $\{x_n\}$ *è una qualunque successione* limitata *nello spazio di* Hilbert H*, esistono un vettore* $x \in H$ *ed una sottosuccessione di* $\{x_n\}$ *che converge debolmente ad* x*.*

Dim.: sia c tale che $\|x_n\| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la successione numerica $\{(x_1, x_n)\}$; è *limitata* (perchè $|(x_1, x_n)| \leq \|x_1\|\,\|x_n\| \leq c^2$), quindi se ne può estrarre una sottosuccessione *convergente* $\{(x_1, x_{1,n})\}$. Analogamente, dalla successione numerica limitata $\{(x_2, x_{1,n})\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{(x_2, x_{2,n})\}$ *convergente*; si noti che anche $\{(x_1, x_{2,n})\}$ converge perché è una sottosuccessione di $\{(x_1, x_{1,n})\}$ Per induzione, si costruisce per ogni k *fissato* una sottosuccessione $\{x_{k+1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $\{x_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che convergono le successioni

$$\{(x_1, x_{k+1,n})\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{(x_2, x_{k+1,n})\}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \{(x_{k+1}, x_{k+1,n})\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Consideriamo allora la successione $\{x_{k,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, e la corrispondente successione $\{f_k\}$ di funzionali lineari e continui, dove $f_k(x) := (x, x_{k,k})$. Per costruzione, $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists \lim_k f_k(x_n)$, dunque $\exists \lim_k f_k(x) \quad \forall x \in V := \mathrm{span}\{x_n\}$. Sia $x \in \overline{V}$; per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $x_\varepsilon \in V : \ \ \|x - x_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{4c}$; di conseguenza, risulta

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_\varepsilon)| + |f_n(x_\varepsilon) - f_m(x_\varepsilon)| + |f_m(x_\varepsilon) - f_m(x)| \leq \\ &\leq c\,\|x - x_\varepsilon\| + |f_n(x_\varepsilon) - f_m(x_\varepsilon)| + c\,\|x_\varepsilon - x\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |f_n(x_\varepsilon) - f_m(x_\varepsilon)|,\end{aligned}$$

e poiché in V la successione $\{f_k\}$ converge si avrà, per n, m maggiori di un opportuno n_ε, $|f_n(x_\varepsilon) - f_m(x_\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{2}$. In definitiva, si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon,$$

cioè $\{f_k\}$ converge in $\overline{V}$. Infine, dato che per ogni $x \in H$ si ha

$$f_k(x) = f_k(P_{\overline{V}}\,x) + f_k(P_{V^\perp}\,x) = f_k(P_{\overline{V}}\,x)\,,$$

ne viene che $\{f_k\}$ converge in tutto H. Posto $f(x) := \lim_k f_k(x)$, si vede facilmente che f è un funzionale lineare e continuo; dunque esiste $y \in H$ tale che $f(x) = (x, y)$; per tale y si ha che

$$\lim_k\,(x, x_{k,k}) = (x, y) \quad \forall x \in H,$$

quindi la successione $\{x_{k,k}\}$, estratta da $\{x_n\}$, converge debolmente ad y. $\blacksquare$

1.8 Sistemi ortonormali. Basi hilbertiane.

Negli spazi normati, ancor più della nozione di base algebrica è significativa quella di base topologica (o, semplicemente, *base*):

Definizione 1.8.1 *Una* **base (topologica)** *dello spazio normato E è un sistema fondamentale S tale che $\overline{\operatorname{span}}\, S = E$.*

Uno spazio metrico M si dice **separabile** *se esiste un suo sottoinsieme* numerabile M_0 *che sia* ovunque denso. ∎

Una prima proprietà:

Proposizione 1.8.1 *Ogni sottoinsieme M_0 di uno spazio metrico separabile M è separabile.*

Dim.: siano $\{x_n\}$ un sottoinsieme ovunque denso di M, e $\{\varrho_n\}$ una successione infinitesima di numeri positivi. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ tali che risulti non vuoto l'insieme $\Sigma(x_n, \varrho_m) \cap M_0$, scegliamo $y_{n,m}$ in tale insieme. È chiaro che $\{y_{n,m}\}$ è un insieme (al più) numerabile; mostriamo che è denso in M_0. In effetti, $\forall y_0 \in M_0$ e $\forall \varrho > 0\ \exists n :\ x_n \in \Sigma(y_0, \varrho/2)$, ed $\exists m :\ \varrho_m < \varrho/2$; ne viene che $d(y_0, y_{n,m}) \leq d(y_0, x_n) + d(x_n, y_{n,m}) \leq \varrho$, cioè $y_{n,m} \in \Sigma(y_0, \varrho)$. ∎

Corollario 1.8.1 *Ogni varietà lineare di uno spazio normato separabile è separabile.* ∎

È importante il collegamento tra la separabilità di uno spazio normato E e l'esistenza in E di una base numerabile:

Proposizione 1.8.2 *Lo spazio normato E è separabile se e solo se ammette una base numerabile.*

Dim.: supponiamo E separabile, e sia $E_0 = \{x_n\}$ un sottoinsieme numerabile ovunque denso. Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ di tutti i sistemi fondamentali di elementi in E_0, munita della relazione d'ordine parziale data dall'inclusione. Grazie al Lemma di Zorn, procedendo come nella dimostrazione della **Proposizione 1.6.3**, si può costruire un sistema fondamentale $\widetilde{A} \subset E_0$ tale che ogni $x \in E_0$ è combinazione lineare finita di elementi di $\widetilde{A}$; poiché $E_0 \subset \operatorname{span} \widetilde{A}$, ne viene che $E = \overline{E_0} = \overline{\operatorname{span}}\, \widetilde{A}$, cioè $\widetilde{A}$ è una base numerabile per E.

Viceversa, sia $Y := \{y_n\}$ una base numerabile per E; non è limitativo supporre che $\|y_n\| = 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Consideriamo l'insieme $\widetilde{Y}$ di tutte le combinazioni lineari *finite* $\sum_{k=1}^n (p_k + iq_k) y_{n_k}$, con $y_{n_k} \in Y$ e p_k, q_k *razionali.* È evidente che $\widetilde{Y}$ è numerabile. Dato che, per ipotesi, $\overline{\operatorname{span}}\, Y = E$, fissati ad arbitrio $x \in E$ ed $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in \operatorname{span} Y :\ \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon/2$; se $x_\varepsilon = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) y_k\ \ (\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R})$, scegliamo $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k \in \mathbb{Q}$ in modo che sia $|\alpha_k - \tilde{\alpha}_k| < \varepsilon/(4n)$, $|\beta_k - \tilde{\beta}_k| < \varepsilon/(4n)$, e poniamo $y_\varepsilon := \sum_{k=1}^n (\tilde{\alpha}_k + i\tilde{\beta}_k) y_k \in \widetilde{Y}$; risulta allora

$$\|x - y_\varepsilon\| \leq \|x - x_\varepsilon\| + \textstyle\sum_{k=1}^n \Big[|\alpha_k - \tilde{\alpha}_k| + |\beta_k - \tilde{\beta}_k| \Big] < \varepsilon,$$

quindi $\widetilde{Y}$ è un insieme numerabile ovunque denso. ∎

Nel **Capitolo 2** riprenderemo la nozione di separabilità nell'ambito più generale degli spazi normati. Limitandoci per ora agli spazi prehilbertiani, un esempio di spazio di HILBERT separabile è dato dallo spazio ℓ^2: la successione $\{e^{(n)}\}$ dei *versori* è evidentemente una base in ℓ^2. La stessa proprietà di separabilità vale per $L^2(\Omega)$:

Proposizione 1.8.3 *Per ogni sottoinsieme misurabile Ω di $\mathbb{R}^d$, lo spazio di* HILBERT *$L^2(\Omega)$ è separabile.*

Dim.: $L^2(\Omega)$ può essere identificato al sottospazio di $L^2(\mathbb{R}^d)$ costituito dalla funzioni di $L^2(\mathbb{R}^d)$ nulle fuori da Ω. Grazie alla **Proposizione 1.8.1**, è quindi sufficiente mostrare la separabilità di $L^2(\mathbb{R}^d)$; possiamo anche evidentemente limitarci al caso di uno spazio *reale*.

Sia $\mathcal{F}$ la famiglia (numerabile) dei parallelepipedi R in $\mathbb{R}^d$ con vertici a coordinate razionali e facce parallele ai piani coordinati:

$$\mathcal{F} := \{R = \textstyle\prod_{k=1}^{d}]a_k, b_k] \mid a_k, b_k \in \mathbb{Q}, \quad a_k < b_k\}.$$

Indichiamo con χ_R la *funzione caratteristica* di R, e poniamo $\mathcal{G} := \{\chi_R \mid R \in \mathcal{F}\}$. Non è difficile mostrare (ad esempio, utilizzando il **Corollario 1.5.3**) che span $\mathcal{G}$ è denso in H; poiché $\mathcal{G}$ è numerabile, ne discende la separabilità di $L^2(\mathbb{R}^d)$. ∎

Per quanto riguarda lo spazio $\mathfrak{X}_2 = (\mathfrak{X}; (\,.\,,.\,))$ introdotto nel **§ 1.1**, si ha invece che

Proposizione 1.8.4 *Lo spazio $\mathfrak{X}_2$ non è separabile.*

Dim.: per assurdo, si supponga che $S = \{x_n\}$ sia denso in $\mathfrak{X}_2$. Allora, $\forall\lambda \in [0,1]$, si potrebbe scegliere $x_\lambda \in S \cap \Sigma(e_\lambda, \frac{1}{2})$. Dato che per $\lambda \neq \mu$ si ha $d(e_\lambda, e_\mu) = \sqrt{2}$, quindi $\Sigma(e_\lambda, \frac{1}{2}) \cap \Sigma(e_\mu, \frac{1}{2}) = \emptyset$, l'applicazione $\lambda \mapsto x_\lambda$ così costruita sarebbe iniettiva da $[0,1]$ in S, assurdo. ∎

Hanno particolare rilevanza le successioni costituite da vettori di norma uguale ad 1, e a due a due ortogonali:

Definizione 1.8.2 *Un* **sistema ortogonale** *nello spazio di* HILBERT *H è una successione $\{e_n\}$ di vettori non nulli tali che se $n \neq m$ allora $(e_n, e_m) = 0$; se, inoltre, si ha $\|e_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, il sistema si dice* **ortonormale**. ∎

È ovvio che ogni sistema ortogonale $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale (numerabile): se $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k = 0$, moltiplicando scalarmente per e_h si ottiene infatti $0 = \sum_k \alpha_k(e_k, e_h) = \alpha_h\, \|e_h\|^2$ per $h = 1, \ldots, n$, da cui $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. D'altra parte, dato un sistema fondamentale numerabile, ci si può sempre ricondurre ad un sistema ortonormale, ad esempio con il **procedimento di ortonormalizzazione di** GRAM-SCHMIDT:

Proposizione 1.8.5 *Dato un sistema fondamentale numerabile $\{x_n\}$, è possibile costruire un sistema ortonormale $\{e_n\}$ tale che, per ogni n,*

$$\text{span}\,\{x_1, \ldots, x_n\} = \text{span}\,\{e_1, \ldots, e_n\}.$$

Dim.: costruiamo intanto, per ricorrenza, un sistema *ortogonale* di vettori non nulli $\{y_n\}$ tale che, per ogni n, risulti $y_n \in \text{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Scelto ad esempio $y_1 := x_1$ ($\neq 0$ perché $\{x_n\}$ è un sistema fondamentale), supponiamo di aver costruito i primi n vettori $y_1, \ldots, y_n$ del sistema cercato, e definiamo

$$y_{n+1} := x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_{n+1}, y_k)}{\|y_k\|^2}\, y_k.$$

Per l'ipotesi di induzione, per ogni $k = 1, \ldots, n$, y_k è combinazione lineare di $x_1, \ldots, x_k$, quindi y_{n+1} è in $\text{span}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$. Inoltre, dalla definizione si ha che $(y_{n+1}, y_k) = 0$ per $k = 1, \ldots, n$, e che $x_n \in \text{span}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Si noti che, poiché $\{x_k\}$ è un sistema fondamentale, ogni y_k è $\neq 0$. Ponendo $e_k := y_k/\|y_k\|$ si ha il sistema ortonormale cercato. ∎

Anche nel caso di uno spazio di Banach si può dare la definizione di *serie*:

Definizione **1.8.3** *Data la successione $\{z_n\}$ nello spazio di* Banach *E, si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$* **converge (fortemente)** *se converge (fortemente) la successione $\{\sum_{k=1}^{n} z_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle sue ridotte.* ∎

Nel caso degli spazi di Hilbert, si ha la seguente proprietà:

Proposizione **1.8.6** *Siano H uno spazio di* Hilbert*, ed $\{e_n\}$ un sistema ortonormale in H; la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n\, e_n$ è convergente se e solo se lo è la serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2$.*

Dim.: posto $s_n := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$, la serie $\sum_n \alpha_n e_n$ converge se e solo se la successione $\{s_n\}$ verifica la condizione di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \;\; \forall (n > n_\varepsilon,\; r \in \mathbb{N}), \;\; \|s_{n+r} - s_n\| < \varepsilon. \tag{1.29}$$

Per concludere, basta osservare che

$$\|s_{n+r} - s_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+r} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+r} |\alpha_k|^2\,,$$

quindi la (1.29) coincide con la condizione di Cauchy per la serie $\sum_n |\alpha_n|^2$. ∎

Dato il sistema ortonormale $\{e_n\}$, indichiamo con V_n il sottospazio generato dai primi n vettori del sistema. La *proiezione* su V_n del generico vettore $x \in H$ ha la forma $P_{V_n}\, x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$; poiché $x - P_{V_n}\, x \in V_n^{\perp}$, deve essere $\alpha_k = (x, e_k)$ per $k = 1, \ldots, n$, quindi

$$P_{V_n}\, x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k.$$

Definizione **1.8.4** *Dato il sistema ortonormale $\{e_n\}$ nello spazio di* Hilbert *H, i numeri $\{(x, e_n)\}$ si dicono* **coefficienti di Fourier** *del vettore x* rispetto al sistema $\{e_n\}$. ∎

Poiché (**Corollario 1.5.2**) $\|P_{V_n}x\| \leq \|x\|$, ne viene che $\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2$; più precisamente:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.8.7** *Siano H uno spazio di* Hilbert*, ed $\{e_n\}$ un sistema ortonormale in H; per ogni vettore $x \in H$,*

i): la serie $\sum_n |(x, e_n)|^2$ è convergente *(in $\mathbb{R}$) (ne viene, in particolare, che $\lim_n (x, e_n) = 0$), e vale la* **disuguaglianza di Bessel**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{1.30}$$

ii): la serie $\sum_n (x, e_n)\, e_n$ è convergente *in H; inoltre, la sua somma x' è tale che $(x - x') \perp e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

Dim.: conseguenza immediata di quanto esposto più sopra, e della **Proposizione 1.8.6**. ∎

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **1.8.5** *Dato il sistema ortonormale $\{e_n\}$ nello spazio di* Hilbert *H, la serie $\sum_n (x, e_n)\, e_n$ si chiama* **serie di Fourier** *del vettore x rispetto al sistema $\{e_n\}$.* ∎

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **1.8.6** *Il sistema ortonormale $\{e_n\}$ nello spazio di* Hilbert *H si dice* **completo** *se è una base per H, cioè se $\overline{\mathrm{span}}\{e_n\} = H$. Un sistema ortonormale completo si dice anche* **base hilbertiana** *per H.* ∎

I risultati precedenti permettono di caratterizzare la completezza di un sistema ortonormale nel modo seguente:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.8.8** *Dati uno spazio di* Hilbert *H ed un sistema ortonormale $\{e_n\}$, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

i) $\{e_n\}$ è completo;

ii) l'unico vettore ortogonale a tutti gli e_n è il vettore nullo;

iii) ogni vettore x è **sviluppabile in serie di Fourier** *rispetto ad $\{e_n\}$:*

$$\forall x \in H, \quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} (x, e_n)\, e_n;$$

*iv) vale l'***identità di Parseval**

$$\forall x, y \in H, \quad (x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x, e_n)\, (e_n, y) \tag{1.31}$$

*v) vale l'***identità di Bessel**

$$\forall x \in H, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2. \tag{1.32}$$

Dim.: grazie al **Corollario 1.5.3**, *i*) è anzi *equivalente* a *ii*);

ii) $\Rightarrow$ *iii*): per la **Proposizione 1.8.7**, *ii*), si ha $(x - \sum_k (x, e_k)\, e_k) \perp e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; dunque se vale la *ii*) deve essere $x - \sum_n (x, e_n)\, e_n = 0 \quad \forall x \in H$;

iii) $\Rightarrow$ *iv*): per la **Proposizione 1.2.7**,

$$\begin{aligned}(x, y) &= \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k, \sum_{h=1}^{n} (y, e_h)\, e_h \right) = \sum_n (x, e_n)\overline{(y, e_n)} = \\ &= \sum_n (x, e_n)\,(e_n, y);\end{aligned}$$

iv) $\Rightarrow$ *v*): basta scegliere $y = x$;

v) $\Rightarrow$ *i*): se x è ortogonale a tutti gli e_n e vale l'identità di Bessel, si ha evidentemente $x = 0$, da cui la *ii*) (quindi la *i*)). ∎

Si noti che l'*unico* sviluppo in serie di un vettore x rispetto ad un sistema ortonormale $\{e_n\}$ è la serie di Fourier: se $x = \sum_n \alpha_n\, e_n$, si ha infatti, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x, e_n) = \lim_r \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k e_k, e_n\right) = \alpha_n$.

Ricordiamo ora il **problema di** Fischer-Riesz: assegnati un sistema fondamentale $\{y_n\}$ nello spazio di Hilbert H, ed una successione numerica $\{\beta_n\}$, studiare la risolubilità del sistema, nell'incognita $x \in H$:

$$(x, y_n) = \beta_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.33}$$

Indichiamo con $\{e_n\}$ un sistema ortonormale tale ogni e_n appartenga a $\mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_n\}$, ed inoltre y_n sia in $\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ad esempio, si può utilizzare il procedimento di Gram-Schmidt); risulterà quindi

$$e_n = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n,$$

da cui, $\forall x \in H$, $(x, e_n) = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{nk}}\,(x, y_k)$. Pertanto, se x risolve la (1.33), posto $\alpha_n := \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{nk}}\,\beta_k$ si ha che x è soluzione di

$$(x, e_n) = \alpha_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

quindi, per la disuguaglianza di Bessel, si deve avere

$$\sum_n |\alpha_n|^2 = \sum_n |(x, e_n)|^2 \le \|x\|^2 < +\infty,$$

cioè $\{\alpha_n\} \in \ell^2$; se questa condizione è soddisfatta, il problema ammette la soluzione particolare $x_0 = \sum_n (x, e_n)\, e_n$, e la soluzione generale è data da $x = x_0 + x'$, dove x' è un qualunque vettore ortogonale a tutti gli e_n. In particolare, se il sistema $\{y_n\}$ è una base, il sistema $\{e_n\}$ è *completo*, quindi il problema di Fischer-Riesz ha *una sola* soluzione.

È notevole la proprietà che uno spazio di Hilbert separabile è *caratterizzato*, a meno di isomorfismi isometrici, dalla sua *dimensione*: [16] si ha infatti il seguente **Teorema di isomorfismo**:

Teorema 1.8.1 *Sia H uno spazio di* Hilbert separabile *complesso (o reale);*

i) se $\dim H = n$, *H è isometricamente isomorfo a* $\mathbb{C}^n$ *(o a* $\mathbb{R}^n$*);*

ii) se $\dim H = \infty$, *H è isometricamente isomorfo a* ℓ^2.

[16] in realtà, questo vale per *ogni* spazio di Hilbert, definendone la dimensione come cardinalità di una sua base hilbertiana (si dimostra che la definizione ha senso).

Dim.: per brevità, supponiamo H complesso e di dimensione infinita. Esiste allora in H una base numerabile $\{e_n\}$, che, per la **Proposizione 1.8.5**, possiamo supporre *ortonormale*. Consideriamo l'applicazione Λ che ad $x \in H$ fa corrispondere la successione dei coefficienti di FOURIER di x rispetto ad $\{e_n\}$: $\Lambda\, x := \{(x, e_n)\}$. Per l'identità di BESSEL, $\Lambda\, x \in \ell^2$, anzi Λ è un'*isometria* di H in ℓ^2; inoltre, Λ è evidentemente *lineare*; per quanto ora visto a proposito del problema di FISCHER-RIESZ, è anche *suriettiva*; quindi è un isomorfismo isometrico tra gli spazi di HILBERT H ed ℓ^2. ∎

Sia ora assegnata una successione $\{(H_n; (\,.\,,\,.\,)_n)\}$ di spazi di HILBERT, tutti complessi (o tutti reali):

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **1.8.7** *Poniamo*

$$H := \{\{x_n\} \mid x_n \in H_n \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_n^2 < +\infty\}\,.$$

Se $(x, y) := \sum_n (x_n, y_n)_n$, *lo spazio* $(H; (\,.\,,\,.\,))$ *si dice* **somma diretta (esterna)** *degli spazi* H_n, *e si scrive* $H = \bigoplus_n H_n$. ∎

Si dimostra che H è uno spazio vettoriale, che $(\,.\,,\,.\,)$ è un prodotto scalare in H, e che $(H; (\,.\,,\,.\,))$ è uno spazio di HILBERT; le dimostrazioni non differiscono da quelle viste a suo tempo per ℓ^2 (che è un caso particolare della definizione ora data, con $H_n = \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) $\forall n \in \mathbb{N}$).

Data ora una successione $\{S_n\}$ di sottospazi chiusi dello spazio di HILBERT H, a due a due ortogonali ($(x_n, x_m) = 0 \quad \forall (n \neq m, \quad x_n \in S_n, \quad x_m \in S_m)$), e tali che $\overline{\text{span}}\{S_n\} = H$, si pone la seguente

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **1.8.8** H *si dice* **somma diretta (interna)** *dei sottospazi* S_n, *e si scrive* $H = \bigoplus_n S_n$. ∎

1.9 Operatori lineari.

Cercheremo ora di stabilire cosa sia possibile estendere, della teoria svolta nel **§1.6**, al caso di applicazioni lineari definite tra due spazi di HILBERT. Premettiamo alcune considerazioni di natura più generale.

Siano E, F due spazi normati, entrambi complessi (o entrambi reali).

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **1.9.1** *i) Un* **operatore lineare** *da* $D(T) \subset E$ *in* F *è un'applicazione* T *della* varietà lineare $D(T) \subset E$ (*detta* **dominio** *di* T) *in* F *tale che*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y \quad \forall x, y \in D(T), \ \forall \alpha, \beta \text{ in } \mathbb{C} \text{ (o in } \mathbb{R}).$$

ii) **Nucleo** $N(T)$ *(o* $\ker T$*),* **immagine** *(o* **range***)* $R(T)$ *e* **grafico** $G(T)$ *di* T *sono le varietà lineari*

$$N(T) := \{x \in D(T) \mid Tx = 0\} \subset E;$$
$$R(T) := \{Tx \mid x \in D(T)\} \subset F;$$
$$G(T) := \{\{x; Tx\} \mid x \in D(T)\} \subset E \times F.$$

iii) L'operatore si dice **limitato** *in* $D(T)$ *se*
$$\exists c \geq 0 : \ \forall x \in D(T), \quad \|Tx\|_F \leq c\,\|x\|_E. \blacksquare$$

Dati due operatori lineari

$$T_1 : D(T_1) \to F, \ \ T_2 : D(T_2) \to F \text{ (con } D(T_1), D(T_2) \subset E),$$

si pone la seguente

Definizione **1.9.2** *i) I due operatori lineari si dicono* **uguali** *se hanno lo* stesso *dominio* ($D(T_1) = D(T_2) := D$)*, e* $\forall x \in D$ *si ha* $T_1x = T_2x$*; se, più in generale,* $D(T_1) \subset D(T_2)$*, e* $T_2x = T_1x \ \ \forall x \in D(T_1)$*, si dice che* T_2 *è un* **prolungamento di** T_1.

ii) L'operatore $T := \alpha T_1 + \beta T_2$ *è definito da:*

$D(T) := D(T_1) \cap D(T_2); \quad Tx := \alpha T_1 x + \beta T_2 x \ \ \forall x \in D(T). \blacksquare$

È evidente che anche $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ è un operatore lineare, che è anche continuo se lo sono T_1 e T_2.

Molti dei risultati visti nel § **1.6** possono essere estesi, con modifiche solo formali, al caso degli operatori lineari; ad esempio,

Proposizione **1.9.1** *Sia* T *un operatore lineare da* $D(T) \subset E$ *in* F*; le seguenti proprietà si equivalgono:*

i) T *è continuo in* $D(T)$*;*

ii) T *è continuo nell'origine;*

iii) T *è limitato in* $D(T)$.

Dim.: si veda la dimostrazione della **Proposizione 1.6.1**. $\blacksquare$

Generalizzando la definizione data nel caso dei funzionali lineari e continui, se T è un operatore lineare e continuo da $D(T)$ in F, il **modulo** $\mu(T; D(T))$ di T in $D(T)$ è definito da

$$\mu(T; D(T)) := \sup_{x \in D(T) \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

È immediato verificare che

Proposizione **1.9.2** *Se T è un operatore lineare e continuo dalla varietà lineare $D(T)$ dello spazio normato E nello spazio di* BANACH *F, è possibile prolungare (in modo unico) T ad un operatore $\widetilde{T}$ lineare e continuo da $\overline{D(T)}$ in F, tale che $\mu\left(\widetilde{T};\overline{D(T)}\right) = \mu(T;D(T))$.*

Dim.: se $x \in \overline{D(T)}$, sia $\{x_n\} \subset D(T)$ tale che $x_n \to x$ in E; allora $\{Tx_n\}$ è di CAUCHY in F, dunque converge ad un vettore che dipende da x, ma non da $\{x_n\}$, e che è quindi lecito indicare con $\widetilde{T}\,x$; è facile vedere che $\widetilde{T}$ verifica le richieste; l'unicità del prolungamento è evidente. ∎

Quando E è uno spazio di HILBERT (*ma non* quando E è un *generico* spazio di BANACH), è possibile estendere (*parzialmente*) il Teorema di HAHN-BANACH al caso di un operatore lineare e continuo:

Proposizione **1.9.3** *Siano H uno spazio di* HILBERT*, F uno spazio di* BANACH*, $T : H \to F$ un operatore lineare e continuo, di dominio $D(T) \subset H$; esiste* almeno[17] *un operatore lineare e continuo $\widetilde{T}$ da* tutto *H in F che prolunga T ed è tale che $\mu(\widetilde{T};H) = \mu(T;D(T))$.*

Dim.: per la **Proposizione 1.9.2**, possiamo supporre che $V := D(T)$ sia un sottospazio chiuso. Basta allora definire $\widetilde{T}\,x := T(P_V x)$ per avere un prolungamento con le proprietà richieste (la verifica è immediata). ∎

Si controlla facilmente che, nello spazio vettoriale degli operatori T lineari e continui da tutto lo spazio normato E nello spazio normato F, il modulo $\mu(T;E)$ ha le proprietà di una norma; si pone allora la

Definizione **1.9.3** *Lo spazio vettoriale degli operatori lineari e continui T da E in F, munito della norma data da $\mu(T;E)$, si indica con $\mathcal{L}(E,F)$, e si scrive $\|T\| := \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \mu(T;E)$; si pone poi $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$. Se T_n tende a T in $\mathcal{L}(E,F)$, cioè se $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$, si dice che T_n tende* **uniformemente** *a T (e a volte si scrive $T_n \rightrightarrows T$).* ∎

Vale la seguente proprietà:

Proposizione **1.9.4** *Se F è uno spazio di* BANACH*, anche lo spazio normato $\mathcal{L}(E,F)$ è* completo. [18]

Dim.: si veda la dimostrazione del **Teorema 1.6.3**. ∎

Per le successioni $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E,F)$ si possono introdurre due altri tipi di convergenza:

[17] in generale, tale prolungamento *non è unico*: se $F = H$, $V \neq \{0\}$ è una varietà *non densa* in H, e si pone $Tx := x\ \forall x \in V$, sia l'identità su H sia l'operatore di proiezione su $\overline{V}$ sono prolungamenti di T a tutto H, con $\mu(I;H) = \mu(P_{\overline{V}};H) = \mu(T;V) = 1$.

[18] si noti che *non si richiede* la completezza di E.

Definizione **1.9.4** *Si dice che la successione* $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(E,F)$ *tende*
fortemente *a* T *(*$T_n \to T$*) se* $s\text{-}\lim_n T_n\, x = Tx \in F$ *per ogni* $x \in E$*;*
debolmente *a* T *(*$T_n \rightharpoonup T$*) se* $w\text{-}\lim_n T_n x = Tx \in F$ *per ogni* $x \in E$*.* ∎

È evidente che la convergenza uniforme implica la convergenza forte, e quest'ultima implica la convergenza debole. Si osservi inoltre che, in ogni caso, l'operatore limite T è ovviamente *lineare*.

Quando F è uno spazio di Hilbert con dimensione infinita, esistono sempre successioni di operatori in $\mathcal{L}(E,F)$ che convergono debolmente ma non fortemente. Un esempio: dati uno spazio di Banach *qualsiasi* $E \neq \{0\}$, un funzionale lineare e continuo non identicamente nullo f su E ed un sistema ortonormale $\{e'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in F, si ponga $T_n\, x := f(x)\, e'_n$: si ha allora che $T_n \rightharpoonup 0$, ma $T_n \not\to 0$. Se poi E, F sono entrambi spazi di Hilbert con dimensione infinita, fissati due sistemi ortonormali $\{e_n\}$, $\{e'_n\}$ in E, F rispettivamente, e posto $T_n\, x := \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e'_k$, si ha che la successione $\{T_n\}$ è in $\mathcal{L}(E,F)$, converge *fortemente* (dato che, $\forall x \in E$, $\|T_{n+r}x - T_n x\|_F^2 = \sum_{k=n+1}^{n+r} |(x, e_k)_E|^2$, e la serie $\sum_n |(x, e_n)_E|^2$ è convergente, grazie alla disuguaglianza di Bessel), ma *non uniformemente*: si ha infatti $\|(T_{n+r} - T_n)\, e_{n+1}\|_F = 1 \quad \forall (n, r \in \mathbb{N})$.

Enunciamo ora, nell'ambito hilbertiano, alcuni teoremi fondamentali dell'analisi funzionale che dimostreremo nel **Capitolo 2** nel contesto più generale degli spazi di Banach.

Iniziamo dal **Teorema di** Banach-Steinhaus, o **Teorema di limitatezza uniforme**:

Teorema **1.9.1 (Banach-Steinhaus)** *Siano* H_1, H_2 *spazi di* Hilbert, *e* $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *una famiglia*[19] *di operatori in* $\mathcal{L}(H_1, H_2)$*. Se* $\{T_\lambda\}$ *è* **puntualmente limitata**, *cioè*

$$\forall x \in H_1, \quad \exists c(x) \geq 0 : \ \forall \lambda \in \Lambda, \quad \|T_\lambda\, x\|_{H_2} \leq c(x),$$

allora è **uniformemente limitata***:*

$$\exists c \geq 0 : \quad \forall \lambda \in \Lambda, \quad \|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} \leq c. \ \blacksquare$$

Ne discendono le seguenti notevoli conseguenze:

Corollario **1.9.1** *Il sottoinsieme* Y *dello spazio di* Hilbert H *è* limitato *se e solo se, per ogni* $x \in H$*, l'insieme* $\{(x, y) \mid y \in Y\}$ *è limitato in* $\mathbb{C}$*. In particolare,* ogni successione debolmente convergente in H è limitata.

Dim.: è evidente che se Y è limitato in H, anche $\{(x,y) \mid y \in Y\}$ è limitato in $\mathbb{C}$, $\forall x \in H$. L'implicazione reciproca è conseguenza immediata del Teorema di Banach-Steinhaus, scegliendo $H_1 := H$, $H_2 = \mathbb{C}$, $\Lambda := Y$, $T_y\, x := (x, y)$ per ogni $y \in Y$. Per ipotesi, $\{T_y\}_{y\in Y}$ è puntualmente limitata: $\forall x \in H$, $\exists c(x)$: $|T_y\, x| \leq c(x)$, $\forall y \in Y$. Per il Teorema precedente, $\exists c :\ \forall y \in Y$, $\|T_y\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{C})} \leq c$. Poiché $\|T_y\|_{\mathcal{L}(H,\mathbb{C})} = \|y\|_H$, ne viene che Y è limitato in H.

[19] non necessariamente *numerabile*

In particolare, se $\{y_n\}$ è una successione debolmente convergente, allora per ogni $x \in H$ la successione $\{(x, y_n)\}$ è convergente, quindi limitata in $\mathbb{C}$, e ne viene che allora $\{y_n\}$ è limitata in H. ■

Corollario **1.9.2** *Siano* H_1, H_2 *due spazi di* HILBERT, $\{T_n\}$ *una successione in* $\mathcal{L}(H_1, H_2)$*. Se* T_n converge debolmente *a* T*, allora:*

$$\sup_n \|T_n\| < +\infty; \quad T \in \mathcal{L}(H_1, H_2); \quad \|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|.$$

Dim.: $\forall x \in H_1$, la successione $\{T_n x\}$ è *limitata* in H_2, per il Corollario precedente; per il **Teorema 1.9.1**, $\exists c > 0$ tale che, $\forall (n \in \mathbb{N},\ x \in H_1)$, sia $\|T_n x\|_{H_2} \leq c\,\|x\|_{H_1}$. Poiché $\|Tx\|_{H_2} \leq \liminf_n \|T_n x\|_{H_2} \leq \|x\|_{H_1} \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$, ne viene che l'operatore lineare T è limitato, quindi continuo, e $\|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$. ■

Un altro risultato fondamentale (si veda il **Teorema 2.3.2**) è il **Teorema dell'applicazione aperta**:

Teorema **1.9.2** *Siano* $(H_1; (.\,,\,.)_1)$, $(H_2; (.\,,\,.)_2)$ *due spazi di* HILBERT*; l'operatore* $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *è* suriettivo *se e solo se*

$$\exists \varrho > 0 : \quad \Sigma_{H_2}(0, \varrho) \subset T(\Sigma_{H_1}(0, 1)). \tag{1.34}$$ ■

Osservazione **1.9.1** Se $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ è un'applicazione (*non necessariamente suriettiva*) che verifica la (1.34), allora T è un'*applicazione aperta* (cioè, per ogni aperto $A \subset H_1$ l'immagine $T(A)$ è aperta in H_2), il che giustifica il nome attribuito al **Teorema 1.9.2**. Infatti, sia $y_0 \in T(A)$; allora esiste $x_0 \in A$ tale che $y_0 = Tx_0$, e, dato che A è aperto, esiste $\varrho_0 > 0$ tale che $\Sigma_{H_1}(x_0, \varrho_0) = x_0 + \varrho_0\, \Sigma_{H_1}(0, 1) \subset A$. Quindi $T\,(\Sigma_{H_1}(x_0, \varrho_0)) = y_0 + \varrho_0\, T\,(\Sigma_{H_1}(0, 1)) \subset T(A)$; se vale la (1.34), si conclude che $\Sigma_{H_2}(y_0, \varrho_0\, \varrho) = y_0 + \varrho_0 \Sigma_{H_2}(0, \varrho) \subset T(A)$, quindi che $T(A)$ è aperto. ■

In termini più espliciti, la (1.34) si scrive

$$\exists \varrho > 0 : \ \forall y \in \Sigma_{H_2}(0, \varrho), \ \ \exists x \in \Sigma_{H_1}(0, 1) : \ y = Tx\,. \tag{1.35}$$

(Nella (1.35), è *equivalente* prendere le *chiusure* di $\Sigma_{H_2}(0, \varrho)$ e di $\Sigma_{H_1}(0, 1)$). Si vede poi facilmente che un altro modo (equivalente) di scrivere la (1.35) è il seguente:

$$\exists c > 0 : \ \forall y \in H_2, \ \exists x \in H_1 : \ \ y = Tx \ \ e \ \ \|x\|_1 \leq c\,\|Tx\|_2. \tag{1.36}$$

(Per $y = 0$, il risultato è ovvio (basta prendere $x = 0$). Se vale la (1.35) e $y \in H_2 \setminus \{0\}$, definiamo $y' := \varrho'\, y/\|y\|_2$; esiste allora $x' \in H_1$ con $\|x'\|_1 \leq 1$ e $y' = Tx'$. Posto $x := \|y\|_2\, x'/\varrho'$, si ha $y = Tx$ e $\|x\|_1 = (\|y\|_2\, \|x'\|_1/\varrho') \leq (\|y\|_2/\varrho') = (\|Tx\|_2/\varrho')$, cioè la (1.36) (con $c = 1/\varrho'$). Infine, se vale la (1.36), per ogni $y \in H_2$ con $\|y\|_2 \leq \varrho' := c^{-1}$ esiste $x \in H_1$ con $y = Tx$ e $\|x\|_1 \leq c\|Tx\|_2 = c\|y\|_2 = 1$, cioè la (1.35)).

Ne discendono le seguenti notevoli conseguenze:

Corollario **1.9.3** *Siano* $(H_1;(.\,,\,.)_1)$, $(H_2 : (.\,,\,.)_2)$ *spazi di* HILBERT, *e sia* $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$*;*

i) se T *è* biiettiva *da* H_1 su tutto H_2*, allora* $T^{-1} \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$*;*

ii) T *è* iniettivo *e con* immagine chiusa *se e solo se*

$$\exists \alpha > 0 : \quad \forall x \in H_1, \quad \|Tx\|_2 \geq \alpha \|x\|_1. \tag{1.37}$$

Dim.: *i*): è intanto evidente che T^{-1} è (ben definito e) *lineare*. Inoltre, dato che in questo caso l'unica x tale che $y = Tx$ è data da $x = T^{-1}y$, dalla (1.36) si ha che esiste $c > 0$ tale che $\|T^{-1}y\|_1 \leq c\,\|y\|_2$, da cui la continuità di T^{-1}.

ii): se $R(T)$ è chiuso, $\widetilde{H}_2 := (R(T), (.\,,\,.)_2)$ è uno spazio di HILBERT; posto $\widetilde{T}\,x := Tx \quad \forall x \in H_1$, si ha che $\widetilde{T}$ è una biiezione lineare e continua di H_1 su $\widetilde{H}_2$; per la *i*), $\widetilde{T}^{-1}$ è continuo, quindi limitato. Ne viene che per ogni $x \in H_1$, risulta $\|x\|_1 = \|\widetilde{T}^{-1}(\widetilde{T}x)\|_1 \leq \|\widetilde{T}^{-1}\|\,\|\widetilde{T}x\|_2 = \|\widetilde{T}^{-1}\|\,\|Tx\|_2$, cioè la (1.37) con $\alpha = \|\widetilde{T}^{-1}\|^{-1}$.

Reciprocamente, se è verificata la (1.37) è evidente che T è *iniettivo*. Se poi $\{y_n\} \subset R(T)$ è tale che $y_n \to y$, esiste $\{x_n\} \subset H_1$ tale che $y_n = Tx_n$; la successione $\{Tx_n\}$ è di CAUCHY in H_2, quindi, per la (1.37), lo è anche $\{x_n\}$ in H_1. Perciò, $\exists x \in H_1 : \quad x_n \to x$, e allora $Tx_n = y_n \to Tx$; per l'unicità del limite, si ha dunque $y = Tx \in R(T)$. ∎

Un'altra conseguenza fondamentale del **Teorema 1.9.2** è il **Teorema del grafico chiuso**:

Teorema **1.9.3** *Siano* $(H_1;(.\,,\,.)_1)$, $(H_2 : (.\,,\,.)_2)$ *spazi di* HILBERT, *e sia* T *un operatore* lineare *da tutto* H_1 *in* H_2*; se il grafico* $G(T)$ *di* T *è chiuso in* $H_1 \times H_2$*, allora* T *è in* $\mathcal{L}(H_1, H_2)$*.* ∎

Dim.: rispetto al prodotto scalare definito da

$$(\{x_1; y_1\}, \{x_2; y_2\})_{H_1 \times H_2} := (x_1, x_2)_1 + (y_1, y_2)_2,$$

$H_1 \times H_2$ è uno spazio di HILBERT, quindi lo è anche il suo sottospazio chiuso $G(T)$. L'applicazione $\mathcal{T}x := \{x; Tx\}$ è una biiezione lineare da H_1 su $G(T)$; la sua applicazione inversa $\mathcal{T}^{-1}$ è una biiezione lineare da $G(T)$ su H_1, ed è continua dato che, $\forall x \in H_1, \quad \|\mathcal{T}^{-1}\{x; Tx\}\|_1 = \|x\|_1 \leq (\|x\|_1^2 + \|Tx\|_2^2)^{1/2} = \|\{x; Tx\}\|_{G(T)}$. Grazie al **Corollario 1.9.3**, $\mathcal{T} = (\mathcal{T}^{-1})^{-1}$ è continuo, ed è facile concluderne che lo è anche T da H_1 in H_2. ∎

Veniamo ora alla definizione di *operatore aggiunto*. Siano dati due spazi di HILBERT $(H_1;(.\,,.)_1)$, $(H_2;(.\,,.)_2)$, ed un operatore in $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Fissato ad arbitrio $y \in H_2$, l'applicazione $x \mapsto (Tx, y)_2$ è un funzionale lineare su H_1; è anche continuo, perché $|(Tx, y)_2| \leq \|Tx\|_2\|y\|_2 \leq (\|T\|\|y\|_2)\|x\|_1$. Per il Teorema di RIESZ, esiste $y^* \in H_1$ tale che $(Tx, y)_2 = (x, y^*)_1 \ \forall x \in H_1$. Inoltre, il vettore y^* è univocamente individuato da $y \in H_2$, ed è quindi lecita la

Definizione **1.9.5** *Dato* $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$*, l'***aggiunto** T^* *di* T *è l'operatore da* H_2 *in* H_1 *che verifica la* **relazione di reciprocità***:*

$$(Tx, y)_2 = (x, T^*y)_1 \quad \forall x \in H_1, \quad \forall y \in H_2. \tag{1.38}$$ ∎

È immediato verificare che

Proposizione 1.9.5 *Siano H_1, H_2, H_3 spazi di* HILBERT*; per ogni T in $\mathcal{L}(H_1, H_2)$,*

i) $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1); T^{**} := (T^*)^* = T; \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$*;*

ii) $N(T^*) = R(T)^\perp; \qquad N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}$*;*

iii) $\forall (T_1 \in \mathcal{L}(H_1, H_2),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}), \quad (\alpha T + \beta T_1)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T_1^*$*;*

iv) $\forall T_2 \in \mathcal{L}(H_2, H_3), \quad (T_2 \circ T)^* = T^* \circ T_2^*$*.*

Dim.: *i)*: per la relazione di reciprocità, $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)$ è definito da

$$\begin{aligned}(x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2))_1 &= (Tx, \alpha y_1 + \beta y_2)_2 = \overline{\alpha}(Tx, y_1)_2 + \overline{\beta}(Tx, y_2)_2 = \\ &= \overline{\alpha}(x, T^* y_1)_1 + \overline{\beta}(x, T^* y_2)_1 = (x, \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2)_1,\end{aligned}$$

da cui la linearità di T^*. Sempre dalla (1.38), si ha che

$$|(x, T^*y)_1| = |(Tx, y)_2| \le \|T\| \, \|x\|_1 \, \|y\|_2 \quad \forall (x \in H_1,\ y \in H_2);$$

in particolare, se $x := T^*y$, si ha $\|T^*y\|_1^2 \le \|T\| \, \|T^*y\|_1 \, \|y\|_2$. Di conseguenza, T^* è in $\mathcal{L}(H_2, H_1)$, e $\|T^*\| \le \|T\|$. Ancora per la (1.38), scritta per T^*, T^{**}, si ha poi che, per ogni $x \in H_1$, $y \in H_2$,

$$(y, T^{**}x)_2 = (T^*y, x)_1 = \overline{(x, T^*y)_1} = \overline{(Tx, y)_2} = (y, Tx)_2,$$

da cui $T^{**}x = Tx \ \ \forall x \in H_1$, cioè $T^{**} = T$. Ne viene altresì che $\|T\| = \|T^{**}\| \le \|T^*\|$, che, grazie alla disuguaglianza $\|T^*\| \le \|T\|$ già verificata, mostra che $\|T^*\| = \|T\|$.

ii): $y \in N(T^*)$ se e solo se, per ogni $x \in H_1$, si ha $0 = (x, T^*y)_1 = (Tx, y)_2$, cioè se e solo se $y \in R(T)^\perp$; per il **Corollario 1.5.2**, *i)*, ne segue che $N(T^*)^\perp = (R(T)^\perp)^\perp = \overline{R(T)}$.

iii): per ogni $x \in H_1$, $y \in H_2$ si ha per definizione

$$\begin{aligned}(x, (\alpha T + \beta T_1)^* y)_1 &= ((\alpha T + \beta T_1)x, y)_2 = \alpha(Tx, y)_2 + \beta(T_1 x, y)_2 = \\ &= \alpha(x, T^*y)_1 + \beta(x, T_!^* y)_1 = (x, (\overline{\alpha} T + \overline{\beta} T_1)y)_1,\end{aligned}$$

da cui la tesi.

iv): per ogni $x \in H_1$, $z \in H_3$ si ha

$$(x, (T_2 \circ T)^* z)_1 = (T_2(Tx), z)_3 = (Tx, T_2^* z)_2 = (x, (T^*(T_2^* z))_1,$$

quindi $(T_2 \circ T)^* = T^* \circ T_2^*$. ∎

Indichiamo una notevole proprietà di invarianza rispetto alle basi, che verrà utilizzata più avanti (si veda la **Definizione 1.12.3**):

Proposizione 1.9.6 *Siano: $(H_1; (.\,,.)_1)$, $(H_2 : (.\,,.)_2)$ due spazi di* HILBERT *(separabili), T un operatore in $\mathcal{L}(H_1, H_2)$, $\{e_n\}$, $\{e'_n\}$ due basi hilbertiane in H_1, H_2 rispettivamente; si ha allora*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Te_n\|_2^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|T^* e'_n\|_1^2 \le +\infty; \tag{1.39}$$

in particolare, le quantità $\sum_n \|Te_n\|_2^2$ e $\sum_n \|T^* e'_n\|_2^2$ sono indipendenti *dalle basi scelte.*

Dim.: per l'identità di Bessel, si ha che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|Te_n\|_2^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} |(Te_n, e'_m)_2|^2.$$

Di conseguenza, la serie doppia $\sum_{m,n} |(Te_n, e'_m)_2|^2$ è convergente o divergente a seconda che lo sia la serie $\sum_n \|Te_n\|_2^2$; ancora per l'identità di Bessel e dalla definizione di aggiunto, si ha in ogni caso che

$$\begin{aligned} +\infty \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \|Te_n\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} |(Te_n, e'_m)_2|^2 \right) = \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |(e_n, T^*e'_m)_1|^2 \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \|T^*e'_n\|_1^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Dimostriamo ora il **Teorema di** Banach **sulle immagini chiuse**:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **1.9.4** *Siano $(H_1; (\,.\,,\,.\,)_1)$, $(H_2 : (\,.\,,\,.\,)_2)$ due spazi di* Hilbert, *e sia $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$; le proprietà seguenti si equivalgono:*

i) $R(T)$ è chiuso; *ii) $R(T^*)$ è chiuso;*
iii) $R(T) = N(T^*)^\perp$; *iv) $R(T^*) = N(T)^\perp$.*

Dim.: per la **Proposizione 1.9.5**, si ha che: *i*) è equivalente a *iii*); poiché $T^{**} = T$ e $\overline{R(T^*)} = N(T^{**})^\perp = N(T)^\perp$, *ii*) è equivalente a *iv*). Resta da mostrare l'equivalenza tra *i*) e *ii*). In realtà, basta anzi verificare che $(R(T)$ *chiuso*$) \Longrightarrow (R(T^*)$ *chiuso*$)$; ne viene infatti che allora $(R(T^*)$ *chiuso*$) \Longrightarrow (R(T^{**})$ *chiuso*$)$, da cui discende l'implicazione inversa $(R(T^*)$ *chiuso*$) \Longrightarrow (R(T)$ *chiuso*$)$.

Se $R(T)$ è chiuso, $\widetilde{H}_2 := (R(T); (\,.\,,\,.\,)_2)$ è uno spazio di Hilbert; per il Teorema di decomposizione e la **Proposizione 1.9.5**, $H_2 = R(T) \oplus N(T^*)$. L'operatore $\widetilde{T} : H_1 \to \widetilde{H}_2$ definito da $\widetilde{T} := P_{R(T)} \circ T$ è allora lineare, continuo e *suriettivo* da H_1 su $\widetilde{H}_2$. Per la (1.36), esiste $c > 0$ tale che

$$(1.40) \quad \forall y \in \widetilde{H}_2,\ \exists x \in H_1 :\ y = \widetilde{T}x = Tx \ e\ \|x\|_1 \leq c\,\|\widetilde{T}x\|_{\widetilde{H}_2} = c\,\|Tx\|_2.$$

L'aggiunto $\widetilde{T}^*$ di $\widetilde{T}$ verifica

$$(1.41) \qquad (x, \widetilde{T}^*y)_1 = (\widetilde{T}x, y)_{\widetilde{H}_2} = (Tx, y)_2 = (x, T^*y)_1 \ \forall (x \in H_1,\ y \in \widetilde{H}_2),$$

quindi $\widetilde{T}^*\,y = T^*\,y$, $\forall y \in R(T)$: dunque $\widetilde{T}^*$ coincide con la restrizione di T^* ad $R(T)$. Poiché però la restrizione di T^* all'*ortogonale* di $R(T)$ (che è il *nucleo* di T^*) è nulla, ne viene che $R(T^*) = R(\widetilde{T}^*)$. Mostriamo che $R(\widetilde{T}^*)$ è chiuso. Se nella (1.41), fissato $y \in \widetilde{H}_2$, si sceglie $x \in H_1$ dato dalla (1.40), si ottiene

$$\|y\|_2^2 = (\widetilde{T}\,x, y)_2 = (x, \widetilde{T}^*\,y)_1 \leq \|x\|_1\,\|\widetilde{T}^*\,y\|_1 \leq c\,\|y\|_2\,\|\widetilde{T}^*\,y\|_1,$$

quindi $\|\widetilde{T}^*\,y\|_1 \geq c^{-1}\,\|y\|_2 \quad \forall y \in \widetilde{H}_2$. Per il **Corollario 1.9.3**, *ii*), $R(\widetilde{T}^*)$ è chiuso. $\blacksquare$

$\boxed{\textbf{Osservazione}}$ **1.9.2** Il Teorema precedente implica, in particolare, che per *ogni* coppia di spazi di HILBERT H_1, H_2 e per *ogni* $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ si ha

se T è suriettivo, T^* è iniettivo.

Infatti, in questo caso $R(T) = H_2$ è *chiuso*, quindi, per la *iii*) del Teorema sulle immagini chiuse, $N(T^*) = R(T)^\perp = H_2^\perp = \{0\}$.

Tuttavia, se gli spazi H_1, H_2 sono entrambi di dimensione infinita, per un *generico* operatore $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ le immagini $R(T)$, $R(T^*)$ possono *non essere chiuse*, nel qual caso può accadere che T^* sia iniettivo, mentre $R(T) \neq H_2$. Ad esempio, se $H_1 = H_2 = \ell^2$, e $T\{x_n\} := \{x_n/n\}$, si ha $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$, $T = T^*$, ma $R(T)$ è la varietà lineare definita da $V = \{\{x_n\} \in \ell^2 \mid \{n\, x_n\} \in \ell^2\}$ (si riveda l'**Osservazione 1.4.1**), *densa* ma *non chiusa* in ℓ^2: in questo caso, $T^* = T$ è *iniettivo*, mentre T *non è suriettivo.*

Invece, se *almeno uno* degli spazi H_1, H_2 ha dimensione *finita*, una delle ipotesi *i*), *ii*) della Proposizione precedente è sempre verificata, quindi lo sono anche le restanti; in particolare, la *iii*) implica che

T è suriettivo se e solo se T^* è iniettivo.

Inoltre, quando $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$ si ha altresì che

T è iniettivo se e solo se è suriettivo:

in effetti, sia T iniettivo, e, detti e_n $(n = 1, \ldots, d)$ i versori di $\mathbb{C}^d$, si ponga $f_n := Te_n$. I vettori f_n sono linearmente indipendenti, dato che se $\sum_{n=1}^d \alpha_n\, f_n = 0$ si ha $0 = \sum_{n=1}^d \alpha_n\, Te_n = T\left(\sum_{n=1}^d \alpha_n\, e_n\right)$, da cui, per l'iniettività di T, $\sum_{n=1}^d \alpha_n\, e_n = 0$, quindi $\alpha_n = 0$ per $n = 1, \ldots, d$; ne viene che $\dim R(T) = d$, cioè che $R(T) = \mathbb{C}^d$. Reciprocamente, se T è *suriettivo* si ha che $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$ è iniettivo, dunque, per quanto ora visto, T^* è suriettivo; ma allora ne viene che $T = T^{**}$ è iniettivo.

Nell'esempio **3** del prossimo Paragrafo introdurremo un operatore lineare e continuo da ℓ^2 in sè, iniettivo ma non suriettivo, il cui aggiunto è suriettivo ma non iniettivo. ∎

Combinando i Teoremi dell'applicazione aperta e delle immagini chiuse si deduce la seguente fondamentale caratterizzazione degli operatori suriettivi, su cui si basa il *metodo delle maggiorazioni a priori*:

$\boxed{\textbf{Corollario}}$ **1.9.4** *Sia $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$;*

i) T *è* suriettivo *se e solo se*

$$\exists \alpha > 0 : \ \forall y \in H_2, \quad \|T^*\, y\|_1 \geq \alpha\, \|y\|_2; \tag{1.42}$$

ii) T *è* iniettivo e suriettivo *se e solo se valgono entrambe le maggiorazioni (1.37) e (1.42).*

Dim.: *i*): se T è suriettivo, sappiamo intanto che T^* è iniettivo. Inoltre, per il **Teorema 1.9.4**, $R(T^*)$ è chiuso (perché lo è $R(T)$); grazie al **Corollario 1.9.3**, *ii*), (applicato a T^*), vale allora la (1.42).

Se poi è verificata la (1.42), è ovvio che T^* è iniettivo, e, sempre per il **Corollario 1.9.3**, *ii*) applicato a T^*, $R(T^*)$ è chiuso; per il **Teorema 1.9.4**, si ha $R(T) = N(T^*)^\perp = H_2$.

ii): evidente. ∎

Osservazione **1.9.3** Nella **Definizione 1.9.5**, che è quella abitualmente adottata nel caso hilbertiano, si è fatto ricorso al Teorema di RIESZ. È tuttavia possibile una definizione alternativa, che prescinde dall'isomorfismo di RIESZ, ed è quindi applicabile a casi più generali; questa formulazione consiste nel presentare l'aggiunto di $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ come un operatore lineare e continuo da H_2^* in H_1^*, per il quale useremo il simbolo $T^\dagger$. Fissato $h_2^* \in H_2^*$, si consideri l'applicazione definita su H_1 nel modo seguente:

$$h_1 \mapsto h_2^*(Th_1). \tag{1.43}$$

Si tratta evidentemente di un funzionale antilineare su H_1, continuo, dato che

$$|h_2^*(Th_1)| \le \|h_2^*\|_{H_2^*} \|Th_1\|_{H_2} \le \left(\|h_2^*\|_{H_2^*} \|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}\right) \|h_1\|_{H_1};$$

quindi, è un elemento di H_1^*, che indichiamo con $T^\dagger h_2^*$. Per definizione, si ha dunque

$$(T^\dagger h_2^*)(h_1) := h_2^*(T\, h_1), \qquad \forall (h_1 \in H_1,\ h_2^* \in H_2^*), \tag{1.44}$$

e ne viene che $T^\dagger \in \mathcal{L}(H_2^*, H_1^*)$; d'altronde, indicati con J_1, J_2 gli isomorfismi di RIESZ di H_1^* su H_1 e di H_2^* su H_2, si ha, per ogni $h_1 \in H_1$, $h_2^* \in H_2^*$,

$$\begin{aligned} ((J_1 \circ T^\dagger)h_2^*, h_1)_{H_1} &= (T^\dagger h_2^*)(h_1) = h_2^*(Th_1) = (J_2 h_2^*, Th_1)_{H_2} = \\ &= ((T^* \circ J_2)h_2^*, h_1)_{H_1}, \end{aligned}$$

da cui la relazione tra T^* e $T^\dagger$:

$$J_1 \circ T^\dagger = T^* \circ J_2. \ \blacksquare$$

1.10 Operatori in H.

In questo Paragrafo, esamineremo alcune proprietà degli operatori lineari e continui T da uno spazio di HILBERT H in sè, che chiameremo brevemente **operatori in** H. Si osservi che, dai risultati visti in precedenza, risulta che $\mathcal{L}(H)$ è un'*algebra* (*non commutativa*) con unità (l'operatore identità I su H); useremo allora la notazione T_1T_2 per indicare $T_1 \circ T_2$; T^n è l'operatore definito per ricorrenza da $T^0 := I$, $\ T^{n+1} := T\,T^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dato un polinomio $p(z)$ nella variabile complessa z, è quindi definito il corrispondente polinomio $p(T)$ dell'operatore $T \in \mathcal{L}(H)$.

$(\mathcal{L}(H); \|\,.\,\|_{\mathcal{L}(H)})$ è un'*algebra di* BANACH (cioè, la norma verifica $\|T_1\, T_2\| \le \|T_1\|\, \|T_2\|$, e lo spazio $\mathcal{L}(H)$ è completo); anzi, è una C^*-*algebra*: l'applicazione $T \mapsto T^*$ è un antiautomorfismo antilineare involutivo di $\mathcal{L}(H)$ in sè, cioè

$$\begin{cases} (\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \overline{\alpha} T_1^* + \overline{\beta} T_2^*; \quad (T_1T_2)^* = T_2^* T_1^*; \\ T^{**} = T; \quad \|TT^*\| = \|T\|\, \|T^*\|\,; \end{cases}$$

si veda la **Proposizione 1.10.3**.

QUALCHE ESEMPIO.

1. Se $H = L^2(\Omega)$, fissata una funzione $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ l'applicazione T_φ definita da $(T_\varphi\, x)(t) := \varphi(t)\, x(t)$ (q.o. in Ω) è evidentemente un operatore in H (**operatore di moltiplicazione** associato a φ). Per ogni $x, y \in L^2(\Omega)$, si ha

$$(T_\varphi\, x, y) = (\varphi x, y) = (x, \overline{\varphi} y),$$

quindi $((T_\varphi)^*\, y)(t) = \overline{\varphi(t)} y(t)$ q.o. in Ω, cioè l'aggiunto di T_φ è l'operatore $T_{\overline{\varphi}}$ di moltiplicazione associato a $\overline{\varphi}$.

2. Sempre se $H = L^2(\Omega)$, fissiamo $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$; mostriamo intanto che è lecito porre, per ogni $x \in L^2(\Omega)$,

$$(Kx)(t) := \int_\Omega k(t, \tau) x(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{1.45}$$

e che in questo modo si definisce una funzione $Kx \in L^2(\Omega)$. Infatti, per il Teorema di Fubini si ha che la funzione $\tau \mapsto k(t, \tau)$ è in $L^2(\Omega)$ per quasi ogni t in Ω, quindi, $\forall x \in L^2(\Omega)$, la funzione $\tau \mapsto k(t, \tau)\, x(\tau)$ è sommabile in Ω per q.o. t in Ω, e, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha, sempre q.o. in Ω,

$$\textstyle\int_\Omega |k(t, \tau)|\, |x(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \le \left(\int_\Omega |k(t, \tau)|^2\, \mathrm{d}\tau\right)^{1/2} \|x\|.$$

Di conseguenza, la funzione Kx definita nella (1.45) verifica

$$\textstyle|(Kx)(t)|^2 \le \left(\int_\Omega |k(t, \tau)|^2\, \mathrm{d}\tau\right) \|x\|^2, \quad \text{q.o. in } \Omega,$$

quindi $Kx \in L^2(\Omega)$; inoltre, per il Teorema di Tonelli,

$$\|Kx\| \le \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\, \|x\|.$$

L'**operatore integrale di nucleo** $k(t, \tau) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ definito dalla (1.45) è quindi *lineare e continuo* da $L^2(\Omega)$ in sè, con $\|K\|_{\mathcal{L}(H)} \le \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$. Poiché

$$\begin{aligned}(Kx, y) &= \int_\Omega \left(\int_\Omega k(t, \tau) x(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) \overline{y(t)}\, \mathrm{d}t = \\ &= \int_\Omega x(t) \left(\int_\Omega k(\tau, t) \overline{y(\tau)}\, \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ne viene che $(K^*\, y)(t) = \int_\Omega \overline{k(\tau, t)} y(\tau)\, \mathrm{d}\tau$; quindi l'aggiunto di K è l'operatore integrale di nucleo $k^*(t, \tau) = \overline{k(\tau, t)}$.

3. In ℓ^2, definiamo $\mathfrak{T}_s$ (operatore di **traslazione a sinistra**, o operatore di **distruzione**) nel modo seguente:

$$\mathfrak{T}_s\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} := \{x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots\},$$

o, equivalentemente,

$$\textstyle\mathfrak{T}_s \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\, e^{(n)}\right) := \sum_{n=1}^{+\infty} x_{n+1}\, e^{(n)},$$

dove $x = \{x_n\} = \sum_n x_n\, e^{(n)}$ è il generico vettore di ℓ^2; si osservi che

$$(\mathfrak{T}_s\, x)_n = x_{n+1}; \quad \mathfrak{T}_s\, e^{(1)} = 0; \quad \mathfrak{T}_s\, e^{(n+1)} := e^{(n)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

È chiaro che $\mathfrak{T}_s \in \mathcal{L}(\ell^2)$ (e che $\|\mathfrak{T}_s\| = 1$); per determinarne l'aggiunto, si osservi che, dato $y = \{y_n\}$ in ℓ^2 e posto $\eta := \mathfrak{T}_s^*\, y$, risulta

$$(\mathfrak{T}_s\, x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{n+1}\, \overline{y_n} = (x, \eta) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\,\overline{\eta_n} = x_1\,\overline{\eta_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} x_{n+1}\,\overline{\eta_{n+1}}, \quad \forall x \in \ell^2. \tag{1.46}$$

Ne viene (per $x = e^{(1)}$) che $\eta_1 = 0$, quindi la (1.46) diventa $\sum_n x_{n+1}\,\overline{y_n} = \sum_n x_{n+1}\,\overline{\eta_{n+1}}$, da cui $\eta_{n+1} = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza, $\mathfrak{T}_s^*$ è l'operatore $\mathfrak{T}_d$ **di traslazione a destra**, o operatore **di creazione**, dato da

$$\mathfrak{T}_d\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} := \{0, y_1, \ldots, y_{n-1}, \ldots\},$$

o, equivalentemente,

$$\mathfrak{T}_d\left(\sum_{n=1}^{+\infty} y_n\, e^{(n)}\right) := \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\, e^{(n+1)};$$

si noti che

$$(\mathfrak{T}_d\, y)_1 = 0; \quad (\mathfrak{T}_d\, y)_{n+1} = y_n; \quad \mathfrak{T}_d\, e^{(n)} = e^{(n+1)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

È evidente che, detto V_1 il sottospazio generato da $e^{(1)}$, si ha

$$N(\mathfrak{T}_d) = \{0\}, \text{ mentre } R(\mathfrak{T}_d) = V_1^{\perp}; \quad R(\mathfrak{T}_s) = H, \text{ mentre } N(\mathfrak{T}_s) = V_1. \ \blacksquare$$

Una proprietà interessante, che estende la **Proposizione 1.2.2** (si veda anche la successiva **Proposizione 1.11.1**):

Proposizione **1.10.1** *Siano H uno spazio di* HILBERT, *T, T_1 operatori arbitrari in $\mathcal{L}(H)$.*

*i) Vale l'***identità di polarizzazione**

$$\forall x, y \in H, \quad (Tx, y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (T(x + i^k y), x + i^k y); \tag{1.47}$$

ii) $\qquad T = T_1 \iff (Tx, x) = (T_1 x, x) \quad \forall x \in H;$

Dim.: per la *i*), basta svolgere il secondo membro dell'uguaglianza da dimostrare. La *ii*) è conseguenza immediata della *i*). ■

Una prima osservazione riguardante il **Corollario 1.9.3**: se $T \in \mathcal{L}(H)$ è iniettivo e suriettivo, allora ammette in $\mathcal{L}(H)$ l'operatore inverso T^{-1}, che evidentemente verifica $T^{-1}T = TT^{-1} = I$. Reciprocamente, se $T \in \mathcal{L}(H)$ è tale che esista un operatore, a priori solo *lineare*, $\widetilde{T}$ tale che $\widetilde{T}T = T\widetilde{T} = I$, allora T è invertibile, e $\widetilde{T} = T^{-1}$. Infatti, se $x \in N(T)$ si ha $x = (\widetilde{T}T)x = \widetilde{T}(Tx) = \widetilde{T}0 = 0$, quindi T è iniettivo; inoltre, per ogni $y \in H$, posto $x := \widetilde{T}y$ si ha $Tx = T(\widetilde{T}y) = (T\widetilde{T})y = y$, cioè T è suriettivo. Dunque esiste $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, e $\widetilde{T} = \widetilde{T}(TT^{-1}) = (\widetilde{T}T)T^{-1} = T^{-1}$.

Si ha anzi, più in generale:

Proposizione **1.10.2** *L'operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ è invertibile se e solo se esistono un* **inverso destro** *T'_d ed un* **inverso sinistro** *T'_s di T, cioè due operatori* lineari *da H in sè tali rispettivamente che $TT'_d = I$ e $T'_sT = I$; in tal caso, si ha $T'_d = T'_s = T^{-1}$.*

Dim.: è ovvio che se T^{-1} esiste, è inverso sia destro sia sinistro; se poi esistono operatori lineari T'_s, T'_d tali che $T'_s T = T\,T'_d = I$, si ha $T'_s = T'_s(T\,T'_d) = (T'_s T)\,T'_d = T'_d$; per quanto visto sopra, T è invertibile, e $T'_s = T'_d = T^{-1}$. ∎

Si ha inoltre che

Proposizione **1.10.3** *Per* ogni $T \in \mathcal{L}(H)$, *si ha* $\|T^* T\| = \|T\|^2$. *Se* T *è invertibile, lo è anche* T^*, *e risulta* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Dim.: poiché, dalla **Proposizione 1.9.5**, si ha $\|T^*\| = \|T\|$, ne viene che $\|T^* T\| \le \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$; d'altra parte, $\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^* Tx) \le \|T^* T\|\,\|x\|^2$, da cui $\|T\|^2 \le \|T^* T\|$.

Le relazioni $T^{-1}T = T\,T^{-1} = I$ danno $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^* T^* = I$; perciò, T^* è invertibile, e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. ∎

Proposizione **1.10.4** *Se* T *è un operatore invertibile, ed* $\{e_n\}$ *è una base (topologica) in* H, *anche* $\{e'_n = T\,e_n\}$ *è una base in* H.

Dim.: mostriamo che $\{e'_n\}$ è un sistema fondamentale: se $\sum_{k=1}^n \alpha_k e'_k = 0$, si ha $T(\sum_k \alpha_k e_k) = 0$, quindi, per l'iniettività di T, $\sum_k \alpha_k e_k = 0$, da cui, dato che $\{e_n\}$ è una base, $\alpha_k = 0$ per $k = 1, \ldots, n$.
Mostriamo ora che span$\{e'_n\}$ è denso in H. Fissati ad arbitrio $x \in H$ ed $\varepsilon > 0$, poniamo $y := T^{-1}x$; esiste una combinazione lineare finita $y_\varepsilon = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k$ degli $\{e_n\}$ tale che $\|y - y_\varepsilon\| < \varepsilon/\|T\|$; ma allora risulta $\|x - \sum_{k=1}^N \alpha_k e'_k\| = \|T(y - \sum_{k+1}^N \alpha_k e_k)\| = \|T(y - y_\varepsilon)\| < \varepsilon$. ∎

Vediamo brevemente qualche risultato relativo agli inversi destri o sinistri, definiti nella **Proposizione 1.10.2**.

Proposizione **1.10.5** *In* $\mathcal{L}(H)$, *esiste un inverso* destro T'_d *di* T *se e solo se* T *è* suriettivo*; gli altri inversi destri di* T *in* $\mathcal{L}(H)$ *sono allora tutti e soli gli operatori della forma* $\widetilde{T} = T'_d + T_0$, *con* $T_0 \in \mathcal{L}(H)$ *tale che* $R(T_0) \subset N(T)$.

Dim.: se T'_d è un inverso destro di T, fissato ad arbitrio $y \in H$ e posto $x := T'_d\,y$, si ha $y = T(T'_d\,y) = Tx$, quindi $y \in R(T)$, dunque $R(T) = H$.

Sia ora $T \in \mathcal{L}(H)$ suriettivo: $\forall y \in H,\ \exists x \in H :\ y = Tx$. Se x' è tale che $Tx' = y$, si ha $x' - x \in N(T)$, quindi la proiezione $P_{N(T)^\perp}\,x$ di x su $N(T)^\perp$ è individuata *univocamente* da y, ed è lecito definire

$$T'_d\,y := P_{N(T)^\perp}\,x, \text{ dove } x \text{ è tale che } Tx = y,$$

cosicché $T\,T'_d\,y = T P_{N(T)^\perp}\,x = Tx = y$ (mentre $T'_d T = P_{N(T)^\perp}$). È evidente che T'_d è lineare; mostriamo che $G(T'_d)$ è *chiuso*. Verifichiamo che se $y_n \to y$ e $T'_d\,y_n \to x$, allora $x = T'_d\,y$. In effetti, da $T'_d\,y_n \to x$ segue che $y_n = T\,T'_d\,y_n$ tende a Tx, da cui, per l'unicità del limite, $y = Tx$; per definizione, e dato che $x \in N(T)^\perp$, si ha allora $T'_d\,y = x$. Per il Teorema del grafico chiuso, ne viene che $T'_d \in \mathcal{L}(H)$.

È chiaro che se $R(T_0) \subset N(T)$, si ha $T(T'_d + T_0)y = y\ \ \forall y \in H$, quindi $T'_d + T_0$ è un inverso destro; se poi $\widetilde{T}$ è tale che $T\,\widetilde{T}y = y\ \ \forall y \in H$, posto $T_0 := \widetilde{T} - T'_d$ si deve avere $T(T_0\,y) = 0\ \ \forall y \in H$, quindi $R(T_0) \subset N(T)$. ∎

Proposizione **1.10.6** *In $\mathcal{L}(H)$, esiste un inverso* sinistro *T_s' di T se e solo se $R(T)$ è* chiuso *e T è* iniettivo*; gli altri inversi sinistri di T in $\mathcal{L}(H)$ sono allora tutti e soli gli operatori della forma $\widetilde{T} = T_s' + T_0$, con $T_0 \in \mathcal{L}(H)$ tale che $R(T) \subset N(T_0)$.*

Dim.: per la **Proposizione 1.9.5**, *ii*), T_s' è un inverso sinistro di T se e solo se $(T_s')^*$ è un inverso destro di T^*. Per la Proposizione precedente, un inverso sinistro di T esiste allora se e solo se T^* è suriettivo; per il **Teorema 1.9.4**, ciò equivale a $R(T)$ chiuso e $N(T) = \{0\}$.

È chiaro che se $\widetilde{T} = T_s' + T_0$, con $N(T_0) \supset R(T)$, si ha $\widetilde{T}(Tx) = x + T_0(Tx) = x$, quindi $T_s' + T_0$ è un inverso sinistro. Se poi $\widetilde{T}$ è un inverso sinistro di T, posto $T_0 := \widetilde{T} - T_s'$ si deve avere $T_0(Tx) = 0 \ \ \forall x \in H$, quindi $N(T_0) \supset R(T)$. ■

Fissato un sottospazio chiuso V di H, la *restrizione* di $T \in \mathcal{L}(H)$ a V non è, almeno in generale, un operatore in V (non è detto che se $v \in V$ allora Tv sia in V); si pone allora la seguente

Definizione **1.10.1** *Si dice che il sottospazio chiuso V di H*
è invariante *per l'operatore T se $T(V) \subset V$;*
riduce *T se $T(V) \subset V$ e $T(V^\perp) \subset V^\perp$.* ■

Proposizione **1.10.7** *V è invariante per T se e solo se $V^\perp$ è invariante per T^*; quindi, V riduce T se e solo se riduce T^*.*

Dim.: se V è invariante per T, si ha, $\forall v \in V$ e $\forall w \in V^\perp$, $0 = (Tv, w) = (v, T^* w)$, quindi $T^* w \in V^\perp$, cioè $V^\perp$ è invariante per T^*. Se poi $V^\perp$ è invariante per T^*, allora $(V^\perp)^\perp = V$ è invariante per $T^{**} = T$. ■

Per illustrare le nozioni fin qui introdotte, riprendiamo l'esempio **3** dato all'inizio di questo Paragrafo. Si ha, dalle definizioni,

$$\mathfrak{T}_s(\mathfrak{T}_d\, x) = \mathfrak{T}_s(\textstyle\sum_n x_n\, e^{(n+1)}) = \sum_n x_n\, \mathfrak{T}_s\, e^{(n+1)} = \sum_n x_n\, e^{(n)} = x;$$

$$\mathfrak{T}_d(\mathfrak{T}_s\, x) = \mathfrak{T}_d(\textstyle\sum_n x_{n+1}\, e^{(n)}) = \sum_n x_{n+1}\, \mathfrak{T}_d\, e^{(n)} = \sum_n x_{n+1}\, e^{(n+1)} = P_{V_1^\perp}\, x,$$

dove V_1 è il sottospazio generato da $e^{(1)}$. Quindi, $\mathfrak{T}_d = \mathfrak{T}_s^*$ è *un* inverso destro di $\mathfrak{T}_s$. Ne viene che, fissato $y \in \ell^2$, l'operatore T_y definito da $T_y\, x := \mathfrak{T}_d x + (x, y)\, e_1$ è pure un inverso destro di $\mathfrak{T}_s$. Inversamente, se T è un inverso destro di $\mathfrak{T}_s$, si deve avere, per ogni $x \in H$, $\mathfrak{T}_s(T - \mathfrak{T}_d)x = 0$, cioè $Tx = \mathfrak{T}_d x + f(x)\, e^{(1)}$; ne viene che $(Tx, e^{(1)}) = (\mathfrak{T}_d x, e^{(1)}) + f(x) = f(x)$ (perché $\mathfrak{T}_d x \perp e^{(1)}$), quindi $Tx = \mathfrak{T}_d x + (x, y)\, e^{(1)}$, con y fissato ad arbitrio in ℓ^2. Invece, $\mathfrak{T}_s$ non ammette inversi sinistri.

Equivalentemente, $\mathfrak{T}_s = \mathfrak{T}_d^*$ è un inverso sinistro di $\mathfrak{T}_d$, e gli inversi sinistri di $\mathfrak{T}_d$ sono tutti e soli gli operatori T della forma $Tx = \mathfrak{T}_s\, x + (x, e^{(1)})\, y$, con y scelto ad arbitrio in ℓ^2; $\mathfrak{T}_d$ non ha invece inversi destri.

Determiniamo ora una famiglia di sottospazi chiusi invarianti per $\mathfrak{T}_s$ o per $\mathfrak{T}_d$. Per ogni fissato $k \in \mathbb{N}$, sia $V_k := \operatorname{span}\{e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}\}$; se $x \in V_k$, si ha $x = \sum_{n=1}^k x_n\, e^{(n)}$, quindi $\mathfrak{T}_s\, x = \sum_{n=1}^{k-1} x_{n+1}\, e^{(n)} \in V_{k-1} \subset V_k$; in particolare,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_k \ \ \textit{è invariante per } \mathfrak{T}_s.$$

Per la **Proposizione 1.10.7**, ne viene che

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_k^\perp \ \ \textit{è invariante per } \mathfrak{T}_d;$$

si noti che $V_k^\perp = \{x \in H \mid x = \sum_n x_{n+k}\, e^{(n+k)}\}$.

Mostriamo che invece non esiste alcun sottospazio *non banale* (cioè diverso da $\{0\}$ e da ℓ^2) che riduca $\mathfrak{T}_d$ (lo stesso vale quindi per $\mathfrak{T}_s$); per questo, facciamo vedere che se $V \neq \{0\}$ riduce $\mathfrak{T}_d$, allora $V = \ell^2$. Infatti, fissiamo $x \in V \setminus \{0\}$, e sia k il *minimo* intero positivo tale che $x_k \neq 0$, cosicché $x = \sum_n x_{n+k-1}\, e^{(n+k-1)}$ è in $V_{k-1}^\perp \setminus V_k^\perp$. Si ha allora

$$\mathfrak{T}_s^k\, \{x_1, x_2, \ldots\} = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\} = \sum_n x_{n+k}\, e_n,$$

cosicché $y := \mathfrak{T}_d^k(\mathfrak{T}_s^k\, x) = \sum_n x_{n+k}\, e^{(n+k)} = x - x_k\, e^{(k)}$. Dall'ipotesi che V riduca $\mathfrak{T}_d$, quindi $\mathfrak{T}_s = \mathfrak{T}_d^*$, risulta che $x_k\, e^{(k)} = x - y \in V$, quindi $e^{(k)} \in V$; ma allora si ha che

$$\mathfrak{T}_d^{n-1}\left(\mathfrak{T}_s^{k-1}\, e^{(k)}\right) = \mathfrak{T}_d^{n-1}\, e^{(1)} = e^{(n)} \in V, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e ció implica evidentemente $V = H$.

Poniamo ora la seguente

Definizione **1.10.2** *$T \in \mathcal{L}(H)$ si dice* **hermitiano** *se $T^* = T$.* ∎

È chiaro che, se T è hermitiano, allora il sottospazio chiuso V è invariante per T se e solo se riduce T.

Definizione **1.10.3** *Se $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$ sono tali che $T_1 T_2 = T_2 T_1$, si dice che T_1, T_2* **commutano***, e si scrive $T_1 \leftrightarrow T_2$.* ∎

Proposizione **1.10.8** *i) Ogni combinazione lineare a coefficienti* reali *di operatori hermitiani è un operatore hermitiano;*

ii) il prodotto $T_1\, T_2$ di due operatori hermitiani è hermitiano se e solo se $T_1 \leftrightarrow T_2$;

iii) $T \in \mathcal{L}(H)$ è hermitiano se e solo se $(Tx, x) \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in H$.

Dim.: *i*), *ii*) sono conseguenze immediate della definizione. Per la *iii*), basta osservare che (Tx, x) è reale se e solo se $(T^* x, x) = \overline{(x, T^* x)} = \overline{(Tx, x)} = (Tx, x)$ per ogni $x \in H$, quindi, per la *ii*) della **Proposizione 1.10.1**, se e solo se $T^* = T$. ∎

Poiché se $T = T^*$ allora $T^n = (T^n)^* \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, ne viene che, per ogni polinomio $p(x)$ a coefficienti *reali*, se T è hermitiano lo è anche $p(T)$.

È utile osservare che:

Proposizione **1.10.9** *Ogni operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ si può scrivere,* in modo unico*, nella forma $T = T_1 + iT_2$, con T_1, T_2 hermitiani. Inoltre,*

$$(T \leftrightarrow T^*) \iff (T_1 \leftrightarrow T_2).$$

Dim.: è evidente che $T = \frac{1}{2}(T+T^*) + i\left[\frac{1}{2}(iT^* - iT)\right]$, con gli operatori $\frac{1}{2}(T+T^*)$ e $\frac{1}{2}(iT^*-iT)$ hermitiani. L'unicità è pure immediata, dato che $T = T_1+iT_2$ con T_1, T_2 hermitiani implica $T^* = T_1-iT_2$, quindi $2T_1 = T+T^*$ e $2iT_2 = T-T^*$. Un semplice calcolo mostra poi che risulta $TT^* - T^*T = 2i(T_2T_1 - T_1T_2)$, e ciò conclude la dimostrazione. ∎

Nell'insieme degli operatori hermitiani in H si può introdurre una relazione d'ordine parziale:

Definizione **1.10.4** *Dati due operatori hermitiani T_1, T_2, si pone*

$$T_1 \leq T_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} (T_2x - T_1x, x) \geq 0 \quad \forall x \in H. \;\blacksquare$$

In effetti, le proprietà riflessiva e transitiva sono di verifica banale; la proprietà antisimmetrica è conseguenza della **Proposizione 1.10.1**, *ii*). In particolare, l'operatore hermitiano T si dice **non negativo**, o **semidefinito positivo**, se $(Tx, x) \geq 0 \;\; \forall x \in H$.

Definizione **1.10.5** *$T \in \mathcal{L}(H)$ si dice* **normale** *se $T \leftrightarrow T^*$.* ∎

Come si è visto, per ogni $T \in \mathcal{L}(H)$ si ha $\|T^*\| = \|T\|$; gli operatori normali sono caratterizzati da una relazione più precisa:

Proposizione **1.10.10** *(T è normale)$\Longleftrightarrow$($\|T^*x\| = \|Tx\| \quad \forall x \in H$).*

Dim.: basta osservare che $\|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x)$, e $\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x)$; quindi, $\|T^*x\| = \|Tx\| \Longleftrightarrow (TT^*x, x) = (T^*Tx, x)$, e, per la **Proposizione 1.10.1**, *ii*), ciò è vero $\forall x \in H$ se e solo se $TT^* = T^*T$. ∎

Un'importante categoria di operatori normali è data dagli operatori unitari:

Definizione **1.10.6** *$U \in \mathcal{L}(H)$ si dice* **unitario** *se $UU^* = U^*U = I$.* ∎

Proposizione **1.10.11** *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

i) U è unitario;

ii) U è invertibile, e $U^{-1} = U^*$;

iii) $\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in H$, ed inoltre $R(U) = H$;

iv) U è un isomorfismo isometrico di H su tutto *H.*

Dim.: è ovvio che *i*) ⇒ *ii*); per mostrare che *ii*) ⇒ *iii*), basta osservare che $\|Ux\|^2 = (Ux, Ux) = (U^*Ux, x) = (U^{-1}Ux, x) = \|x\|^2$, e che, inoltre, $x = U(U^{-1}x) \in R(U)$ per ogni $x \in H$.

iii) ⇒ *iv*): per ipotesi, U è un'isometria lineare suriettiva; ne viene (**Proposizione 1.2.2**) che $(Ux, Uy) = (x, y) \;\; \forall x, y \in H$.

Infine, mostriamo che *iv*) ⇒ *i*): si ha $(x, y) = (Ux, Uy) = (U^*Ux, y)$, quindi $U^*U = I$; inoltre, esiste U^{-1}, e risulta $U^{-1} = (U^*U)U^{-1} = U^*(UU^{-1}) = U^*$, che a sua volta implica $UU^* = UU^{-1} = I$. ∎

Si osservi che nella *iii*) della Proposizione precedente, la condizione che si abbia $R(U) = H$ è *essenziale*: un operatore isometrico non è necessariamente unitario, come è mostrato ad esempio dall'operatore $\mathfrak{T}_d$ di traslazione a destra.

Un'altra classe importante di operatori in H è quella dei *proiettori*:

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **1.10.7** *Un operatore* lineare $P : H \to H$ *è un* **proiettore**, *o* **operatore di proiezione (ortogonale)**, *se* $P^2 = P = P^*$. ∎

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.10.12** *Ogni proiettore P è in $\mathcal{L}(H)$. Inoltre, se P non è l'operatore nullo, allora $\|P\| = 1$.*

Dim.: per definizione, $\forall x \in H$ si ha $\|Px\|^2 = (Px, Px) = (x, P^*Px) = (x, P^2x) = (x, Px) \leq \|x\| \, \|Px\|$, da cui la continuità di P e la disuguaglianza $\|P\| \leq 1$. Se P non è l'operatore nullo, $\exists x \in H : \quad Px \neq 0$; per tale x si ha $\|P(Px)\| = \|P^2x\| = \|Px\|$, quindi $\|P\| \geq 1$, e, in conclusione, $\|P\| = 1$. ∎

È chiaro che se V è un sottospazio chiuso di H, la proiezione $x \mapsto P_Vx$ di x su V verifica $P_V^2 = P_V$; inoltre, $(P_Vx, y) = (P_Vx, P_Vy + P_{V^\perp}y) = (P_Vx, P_Vy) = (P_Vx + P_{V^\perp}x, P_Vy) = (x, P_Vy)$, quindi $P_V = P_V^*$, e P_V è un proiettore. Reciprocamente, vale la seguente

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.10.13** *Sia P un proiettore, e si ponga $V := R(P)$; allora V è un sottospazio chiuso, e P coincide con l'operatore P_V di proiezione su V. Inoltre, $I - P$ è anch'esso un proiettore, e coincide con l'operatore $P_{V^\perp}$ di proiezione su $V^\perp = R(P)^\perp$.*

Dim.: osserviamo intanto che V coincide con $\{x \in H \mid Px = x\}$. Infatti, se $x \in R(P)$ esiste $y \in H$ tale che $x = Py$; allora $Px = P^2y = Py = x$, dunque $V \subset \{x \in H \mid Px = x\}$, e l'inclusione opposta è ovvia. Se $\{x_n\} \subset V$ e $x_n \to x$, si ha $Px_n \to Px$; per quanto appena visto, $Px_n = x_n$, quindi, per l'unicità del limite, $Px = x$, e V è chiusa. Infine, $\forall x \in H$ ed $y \in V$ si ha $(x - Px, y) = (x - Px, Py) = (Px - P^2x, y) = 0$, quindi $(x - Px) \perp V$, dunque $x = Px + (x - Px)$ con $Px \in V$ e $(x - Px) \in V^\perp$; per il Teorema di decomposizione, $Px = P_Vx$.

La verifica che anche $I - P$ è un proiettore è immediata; inoltre, $I - P$ è l'operatore di proiezione sul sottospazio chiuso

$$\{x \in H \mid (I - P)x = x\} = \{x \in H \mid Px = 0\};$$

dunque, $R(I - P) = N(P) = R(P^*)^\perp = R(P)^\perp$. ∎

Una caratterizzazione algebrica delle nozioni introdotte nella **Definizione 1.10.1** è data dalla seguente

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.10.14** *Siano T un operatore in H, P un proiettore, V il sottospazio chiuso $R(P)$;*[20]

i) (V è invariante per T) $\iff$ ($PTP = TP$);

ii) (V riduce T) $\iff$ ($P \leftrightarrow T$).

Dim.: *i)*: supponiamo che sia $PTP = TP$; fissato ad arbitrio $v \in V = R(P)$, si ha $Pv = v$, quindi $Tv = TPx = PTPx = P(TPx) \in R(P) = V$, cioè V è invariante per T. Reciprocamente, sia V invariante per T; per ogni $x \in H$, si ha $Px \in V$, quindi $TPx \in V$, dunque $PTPx = TPx$, cioè $PTP = TP$.

ii): se $P \leftrightarrow T$, cioè $PT = TP$, si ha intanto che $PTP = TP^2 = TP$, cioè, per *i)*, V è invariante per T. Inoltre, poiché $(I-P)T(I-P) = T - TP - PT + PTP$,

[20] o, equivalentemente: V un sottospazio chiuso, P l'operatore di proiezione su V.

ne viene che $(I-P)T(I-P) = T(I-P)$, quindi anche $V^\perp = R(I-P)$ è invariante per T; cioè, V riduce T. Se poi sia V sia $V^\perp$ sono invarianti per T, si ha $PTP = TP$ e $(I-P)T(I-P) = T(I-P)$; ma allora $(I-P)T(I-P) = T - PT = T - TP$, e ciò implica che $TP = PT$, cioè che $P \leftrightarrow T$. ■

Definizione **1.10.8** *Due proiettori P, Q si dicono* **ortogonali** *quando $PQ = 0$; in questo caso, si scrive $P \perp Q$.* ■

L'ortogonalità di proiettori si può esprimere in altri modi equivalenti:

Proposizione **1.10.15** *Siano P, Q due proiettori; le seguenti proprietà si equivalgono:*

i) $R(P) \perp R(Q)$; *ii)* $P \perp Q$; *iii)* $P(R(Q)) = \{0\}$.

Dim.: *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: se $R(P) \perp R(Q)$, per ogni $x \in H$ si ha $Qx \in (R(P))^\perp$, quindi $P(Qx) = 0$;

ii) $\Rightarrow$ *iii)*: se $x \in P(R(Q))$, esiste $y \in R(Q)$, quindi con $Qy = y$, tale che $x = Py$; dunque $x = P(Qy) = (PQ)y = 0$;

iii) $\Rightarrow$ *i)*: $\forall (v \in R(P),\ w \in R(Q))$ si ha $(v, w) = (Pv, w) = (v, Pw) = (v, P(Qw)) = 0$. ■

Per la *somma* di due proiettori, si ha che:

Proposizione **1.10.16** *La somma di due proiettori P, Q è un proiettore se e solo se P e Q sono ortogonali; in questo caso, $R(P+Q) = R(P) \oplus R(Q)$.*

Dim.: è chiaro che la somma $P+Q$ è *sempre* un operatore hermitiano. Se $P \perp Q$, si ha inoltre che

$$(P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q,$$

quindi $P+Q$ è un proiettore (precisamente, su $R(P) \oplus R(Q)$).

Inversamente, se $P+Q$ è un proiettore, si deve avere, per ogni $y \in H$,

$$\|y\|^2 \geq \|(P+Q)y\|^2 = ((P+Q)y, y) = (Py, y) + (Qy, y) = \|Py\|^2 + \|Qy\|^2.$$

In particolare, se $y = Px$ con x arbitrario in H, si ha

$$\|Px\|^2 \geq \|Px\|^2 + \|Q(Px)\|^2,$$

da cui $QP = 0$. ■

Il risultato precedente si può parzialmente estendere al caso di una *serie* di proiettori:

Proposizione **1.10.17** *Sia $\{P_n\}$ una successione di proiettori tali che, $\forall x$ in H, la serie $\sum_n P_n x$ converga* fortemente *ad un elemento, che indichiamo con Px. Allora $P \in \mathcal{L}(H)$; inoltre,*

$$P \text{ è un proiettore} \iff ((m \neq n) \Longrightarrow (P_m \perp P_n))$$

(cioè se $\{P_n\}$ è una famiglia ortogonale *di proiettori); in questo caso, si ha*

$$R(P) = \overline{\text{span}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R(P_n)\right) = \oplus_n R(P_n).$$

Dim.: il fatto che P sia un operatore in H segue immediatamente dal **Corollario 1.9.2**. Se $\{P_n\}$ è una famiglia ortogonale di proiettori, fissati ad arbitrio $x \in H$ e $m \in \mathbb{N}$ si ha $P(P_m x) = \sum_n P_n(P_m x) = P_m x$, quindi

$$P^2 x = P(\textstyle\sum_m P_m x) = \sum_m P(P_m x) = \sum_m P_m x = Px,$$

da cui $P^2 = P$; inoltre, per ogni $x, y \in H$ si ha

$$(Px, y) = \textstyle\sum_n (P_n x, y) = \sum_n (x, P_n y) = (x, Py), \text{ quindi } P^* = P,$$

dunque P è un proiettore.

Viceversa, se P è un proiettore, si ha, $\forall y \in H$ e per ogni n fissato,

$$\|y\|^2 \geq \|Py\|^2 = (Py, y) = \textstyle\sum_m (P_m y, y) = \sum_m \|P_m y\|^2.$$

In particolare, fissati ad arbitrio in $x \in H$ e $n \in \mathbb{N}$, e posto $y := P_n x$,

$$\|P_n x\|^2 \geq \|P(P_n x)\|^2 = \textstyle\sum_m \|P_m(P_n x)\|^2 \geq \|P_n^2 x\|^2 = \|P_n x\|^2,$$

il che è possibile se e solo se $P_m P_n = 0 \quad \forall n \neq m$ (cioé, i proiettori sono ortogonali), ed inoltre $\|P_n x\|^2 = \|P(P_n x)\|^2$. Quest'ultima uguaglianza mostra che $P_n x = P(P_n x) \in R(P)$, quindi che $R(P_n) \subset R(P)$; per l'arbitrarietà di n, se ne deduce allora che $\overline{\text{span}}\{R(P_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset R(P)$. D'altra parte, $\forall x \in H$ si ha $Px = P(Px) = \sum_n P(P_n x) = \sum_n P_n x$, da cui l'inclusione opposta $R(T) \subset \overline{\text{span}}\{R(P_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, cioè, in definitiva, l'uguaglianza. ∎

Per quanto riguarda il *prodotto* di due proiettori, si ha il seguente risultato:

Proposizione 1.10.18 *Siano P_1, P_2 due proiettori; il prodotto $P := P_1 P_2$ è un proiettore se e solo se $P_1 \leftrightarrow P_2$; in questo caso, si ha che $R(P) = R(P_1) \cap R(P_2)$.*

Dim.: per la **Proposizione 1.10.8**, si ha $P^* = P \iff P_1 \leftrightarrow P_2$; in tal caso, si ha anche $P^2 = P_1 P_2 P_1 P_2 = P_1^2 P_2^2 = P_1 P_2 = P$, dunque P è un proiettore; da $P = P_1 P_2$ segue che $R(P) \subset R(P_1)$, e da $P = P_2 P_1$ si ha $R(P) \subset R(P_2)$, da cui $R(P) \subset R(P_1) \cap R(P_2)$. D'altra parte, se $x \in R(P_1) \cap R(P_2)$ si ha $x = P_1 x = P_2 x$, quindi $Px = P_1(P_2 x) = P_1 x = x$, da cui $x \in R(P)$. ∎

Concludiamo illustrando come la relazione di inclusione tra due sottospazi chiusi si possa esprimere tramite la relazione d'ordine tra i relativi proiettori (si veda **la Definizione 1.10.4**):

Proposizione 1.10.19 *Siano P, Q due proiettori in H; le seguenti affermazioni si equivalgono:*

$$i)\ P \leq Q; \qquad ii)\ \|Px\| \leq \|Qx\| \quad \forall x \in H;$$
$$iii)\ R(P) \subset R(Q); \qquad iv)\ PQ = QP = P.$$

Dim.: *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: se $P \leq Q$, per definizione $\|Px\|^2 = (Px, x) \leq (Qx, x) = \|Qx\|^2$;

ii) $\Rightarrow$ *iii)*: se, in particolare, $x \in R(P)$, si ha $\|x\| = \|Px\| \leq \|Qx\| \leq \|x\|$, da cui $x = Qx \in R(Q)$;

iii) $\Rightarrow$ *iv)*: $\forall x \in H$, si ha $Px \in R(Q)$, quindi $QPx = Px$, cioè $QP = P$, da cui $PQ = (QP)^* = P$;

iv) $\Rightarrow$ *i)*: basta osservare che $(Px, x) = \|Px\|^2 = \|PQx\|^2 \leq \|Qx\|^2 = (Qx, x)$. ∎

Proposizione **1.10.20** *Siano P_1, P_2 due proiettori in H. La loro differenza $P := P_1 - P_2$ è un proiettore se e solo se $P_2 \le P_1$; in questo caso, si ha*

$$P \perp P_2; \qquad R(P_1) = R(P) \oplus R(P_2).$$

Dim.: se P è un proiettore, ne viene che $0 \le \|Px\|^2 = (Px, x) = (P_1x, x) - (P_2x, x) \ \ \forall x \in H$, da cui $P_1 \ge P_2$.

Inversamente, se $P_2 \le P_1$ si ha, per la **Proposizione 1.10.19**, che $P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$, quindi $P^2 = P_1^2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2^2 = P_1 - P_2 = P$, e $P^* = P_1^* - P_2^* = P$, dunque, P è un proiettore. Inoltre, $P = P_1 - P_2 = P_1 - P_2P_1 = (I - P_2)P_1$, cosicché $R(P) \subset R(I - P_2) = R(P_2)^\perp$; poiché dalla definizione di P segue che $P_1 = P_2 + P$, la relazione di ortogonalità ora vista mostra che $R(P_1) = R(P_2) \oplus R(P)$. ∎

1.11 Forme sesquilineari.

Definizione **1.11.1** *Una* **forma sesquilineare** *sullo spazio di* HILBERT *H è un'applicazione φ da $H \times H$ in $\mathbb{C}$ tale che:*

$$\forall y \in H \ , \quad x \mapsto \varphi(x, y) \text{ è lineare;}$$
$$\forall x \in H \ , \quad y \mapsto \varphi(x, y) \text{ è antilineare.}$$

La **coniugata** *φ^* della forma sesquilineare φ è data da*[21] *$\varphi^*(x, y) := \overline{\varphi(y, x)}$; si dice che φ è* **hermitiana** *(o* **h-simmetrica***) se $\varphi^* = \varphi$.*

La **forma quadratica** Φ **associata** *a φ, data da $\Phi(x) := \varphi(x, x)$, e la forma sesquilineare stessa, si dicono:*

semidefinite positive *se, $\forall x \in H$, $\Phi(x)$* è reale *e ≥ 0;*

definite positive *se sono semidefinite positive, e $(\Phi(x) = 0) \Longrightarrow (x = 0)$;*

coercive *se $\exists \alpha > 0 : \quad \Phi(x) \ge \alpha \|x\|^2$ per ogni $x \in H$.* ∎

È evidente che risulta $\Phi(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 \varphi(x, x) = |\lambda|^2 \Phi(x)$ per ogni $x \in H$ e λ in $\mathbb{C}$; in particolare, $\Phi(-x) = \Phi(ix) = \Phi(x)$. Esempi (immediati) di forme sesquilineari:

$\varphi(x, y) := (x, y)$; è hermitiana, e la forma quadratica associata è $\Phi(x) = \|x\|^2$, quindi è coerciva;

$\varphi_T(x, y) := (Tx, y)$, dove T è un'applicazione lineare da H in H; la forma quadratica associata è $\Phi_T(x) = (Tx, x)$. Se $T \in \mathcal{L}(H)$, su ha $\varphi_T^*(x, y) = \overline{\varphi_T(y, x)} = (x, Ty) = (T^*x, y)$, dunque $\varphi_T^* = \varphi_{T^*}$.

Le **Proposizioni 1.2.2** e **1.10.1** si generalizzano nel modo seguente:

[21] è chiaro che anche φ^* è sesquilineare

Proposizione **1.11.1** *Se φ è una forma sesquilineare, e Φ è la forma quadratica associata, vale l'***identità di polarizzazione***:*

$$\varphi(x,y) = \tfrac{1}{4}\left(\Phi(x+y) - \Phi(x-y) + i\,\Phi(x+iy) - i\,\Phi(x-iy)\right).$$

Dim.: basta osservare che nella dimostrazione della **Proposizione 1.2.2** la sola proprietà del prodotto scalare che si è utilizzata è la sesquilinearità. ■

Corollario **1.11.1** *Se φ, φ_1 sono forme sesquilineari, e Φ, Φ_1 sono le forme quadratiche associate, allora:*

i) φ è hermitiana se e solo se $\Phi(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$;

ii) $\varphi = \varphi_1$ se e solo se $\Phi = \Phi_1$; in particolare,

$$(\varphi(x,y) = 0 \quad \forall x,y \in H) \Longleftrightarrow (\Phi(x) = 0 \quad \forall x \in H).$$

Dim.: *i)*: se φ è hermitiana, per ogni $x \in H$ si ha $\overline{\Phi(x)} = \overline{\varphi(x,x)} = \varphi^*(x,x) = \varphi(x,x) = \Phi(x)$, cioè $\Phi(x) \in \mathbb{R}$. Se poi $\Phi(x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in H$, dall'identità di polarizzazione risulta che

$$\begin{aligned}
\varphi^*(x,y) &= \overline{\varphi(y,x)} = \\
&= \frac{1}{4}\left(\Phi(x+y) - \Phi(-(x-y)) - i\Phi(i(x-iy)) + i\Phi(-i(x+iy))\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\Phi(x+y) - \Phi(x-y) - i\Phi(x-iy) + i\Phi(x+iy)\right) = \\
&= \varphi(x,y).
\end{aligned}$$

ii): evidente. ■

Definizione **1.11.2** *La forma sesquilineare φ si dice* **limitata** *se esiste $c \geq 0$ tale che $\forall x,y \in H, \quad |\varphi(x,y)| \leq c\,\|x\|\,\|y\|$; l'estremo inferiore dei numeri c che verificano la disuguaglianza precedente si dice* **modulo** *$\mu(\varphi)$ di φ.* ■

Si noti che se φ è limitata si ha $\mu(\varphi) = \sup\{|\varphi(x,y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1\}$; si ha anche $|\Phi(x)| \leq \mu(\varphi)\,\|x\|^2$. Inoltre,

Proposizione **1.11.2** *Se φ è una forma sesquilineare* hermitiana *e limitata, si ha*

$$\mu(\varphi) = \sup\{|\Phi(x)| \mid \|x\| = 1\}.$$

Dim.: posto $\lambda := \sup\{|\Phi(x)| \mid \|x\| = 1\} = \sup\{|\Phi(x)|/\|x\|^2 \mid x \neq 0\}$, da quanto precede si ha che $\lambda \leq \mu(\varphi)$. Per provare la disuguaglianza opposta, osserviamo intanto che, per ogni *fissata* coppia $x,y \in H$ con $\|x\| = \|y\| = 1$, esiste un vettore x' con $\|x'\| = 1$ e $\varphi(x',y) = |\varphi(x,y)|$: se $\varphi(x,y) = 0$, basta scegliere $x' = x$, mentre se $\varphi(x,y) \neq 0$ si può scegliere $x' = x\,|\varphi(x,y)|/\varphi(x,y)$. Per le identità di polarizzazione e del parallelogrammo, si ha allora (ricordando che, per il **Corollario 1.11.1**, *i)*, $\Phi(x)$ è reale $\forall x \in H$),

$$|\varphi(x,y)| = \varphi(x',y) = \Re\,\varphi(x',y) = \frac{1}{4}\left(\Phi(x'+y) - \Phi(x'-y)\right) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda}{4}\left[\|x'+y\|^2+\|x'-y\|^2\right]=\frac{\lambda}{2}\left(\|x'\|^2+\|y\|^2\right)=\lambda,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $x, y \in H$ con $\|x\| = \|y\| = 1$, $\mu(\varphi) \leq \lambda$. ■

In particolare, ne discende il

Corollario 1.11.2 *Per ogni operatore hermitiano $T \in \mathcal{L}(H)$,*

$$\|T\| = \sup\{|(Tx, x)| \mid \|x\| = 1\}. \quad (1.48)$$ ■

Vogliamo ora illustrare brevemente due risultati, i Teoremi di Lax-Milgram e di Lions-Stampacchia, che hanno un ruolo fondamentale nello studio di equazioni, o, rispettivamente, disequazioni, relative ad operatori a derivate parziali.

Premettiamo intanto la definizione di **terna hilbertiana**, limitandoci, per semplicità, al caso di spazi *reali*.

Sia H uno spazio di Hilbert, con prodotto scalare $(\,.\,,\,.\,)$ e norma $|\,.\,|$, che possiamo *identificare* al suo duale H^*, tramite il Teorema di Riesz. Sia V una varietà lineare *densa* in H, e supponiamo che V sia munita di un prodotto scalare $(\!(\,.\,,\,.\,)\!)$, quindi di una norma $\|\,.\,\|$, che la rende uno *spazio di* Hilbert.[22] Supponiamo infine che l'immersione di V in H sia *continua*:[23]

$$\exists C > 0 : \forall v \in V, \quad |v| \leq C\,\|v\|. \quad (1.49)$$

Come si è visto nell'**Osservazione 1.6.2**, *non si può* identificare V al suo duale V^*: una tale identificazione sarebbe *incompatibile* con quella già effettuata tra H ed H^*. Si può però *immergere* H in V^*, con *immersione continua* e con *immagine densa*, con il procedimento che ora illustriamo. Fissato $h \in H$, consideriamo l'applicazione definita su V nel modo seguente: $v \mapsto (h, v)$. È evidentemente lineare, ed è inoltre continua su V, dato che

$$|(h, v)| \leq |h|\,|v| \leq (C\,|h|)\,\|v\|;$$

quindi individua un elemento di V^*, che indichiamo (per il momento) con Ih. In altri termini, si ha, per definizione, $\forall(v \in V,\, h \in H)$:

$$(Ih)(v) := (h, v)\,;$$

è immediato verificare che, indicando con $\|\,.\,\|_*$ la norma in V^*, l'applicazione I verifica

$$\|Ih\|_* = \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|=1}} (Ih)(v) \leq \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|=1}} |h|\;|v| \leq C\,|h|\,;$$

$$(Ih = 0) \Longrightarrow (\,(h, v) = 0 \;\;\forall v \in V\,) \Longrightarrow (h = 0)$$

ed è quindi *continua* ed *iniettiva*.

[22] in realtà, la definizione si può estendere a situazioni in cui V è uno spazio di natura ben più generale.

[23] alternativamente, sia $(V; (\!(\,.\,,\,.\,)\!)\,)$ uno spazio di Hilbert, e sia I' un'applicazione lineare, continua ed *iniettiva* di V su una varietà lineare *densa* in H; identificando V ad $R(I')$, ci si riconduce alla situazione descritta più sopra.

Mostriamo che $I(H)$ è *denso* in V^*; per il **Corollario 1.5.3**, basta verificare che se $w^* \in V^*$ è ortogonale ad $I(H)$ in V^*, allora $w^* = 0$. In effetti, detto J_* l'isomorfismo di Riesz di V^* su V, se $w^* \in V^*$ è ortogonale in V^* ad Ih per ogni $h \in H$, si ha che

$$0 = (\!(J_* w^*, J_*(Ih))\!) = (Ih)(J_* w^*) = (h, J_* w^*) \quad \forall h \in H,$$

quindi $J_* w^* = 0$, da cui $w^* = 0$.

Di conseguenza, si può *identificare* (tramite l'applicazione iniettiva I) H ad una varietà lineare *densa* in V^*, ottenendo lo schema (**terna hilbertiana** (V, H, V^*)):

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*; \qquad \textit{immersioni} \text{ continue } \textit{con immagini} \text{ dense};$$

d'ora in poi, $\forall h \in H$ (considerato come elemento in V^*), scriveremo dunque h anziché Ih:

$$\forall (v \in V,\ h \in H), \quad h(v) := (h, v), \quad \textit{da cui}: \quad \forall h \in H, \quad \|h\|_* \leq C\,|h|\,.$$

Ricordiamo le definizioni di *punto unito* di un'applicazione, e di *applicazione contrattiva*.

Definizione 1.11.3 *Sia f un'applicazione dello spazio metrico $(M; d)$ in sè.*

Un **punto unito** *(o* **punto fisso***) per f è un (eventuale) punto $x \in M$ tale che $f(x) = x$.*

L'applicazione f è una **contrazione** *(in senso stretto) su M se*

$$\exists k < 1 : \ \forall x, y \in M, \quad d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y). \ \blacksquare$$

Una contrazione è, in altri termini, un'applicazione Lipschitziana (in particolare quindi *continua*), con costante di Lipschitz < 1. Vale il seguente **Teorema delle contrazioni**:

Teorema 1.11.1 *Se $M \neq \emptyset$ è* completo*, ogni contrazione f su M ammette uno ed un solo punto unito.*

Dim.: fissiamo un elemento qualsiasi $z \in M$, e definiamo $\{x_n\} \subset M$ ponendo $x_1 := z$ e $x_{n+1} := f(x_n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. È immediato verificare, per induzione, che, posto $d := d(x_1, x_2) = d(z, f(z))$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^{n-1}\, d;$$

ne viene allora che, $\forall r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+r}, x_n) &\leq d(x_{n+r}, x_{n+r-1}) + d(x_{n+r-1}, x_{n+r-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq (k^{n+r-2} + k^{n+r-1} + \ldots + k^{n-1})\, d = k^{n-1}\, \frac{1 - k^r}{1 - k}\, d. \end{aligned}$$

Quindi la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy, e, per la completezza di M, converge ad un punto $\overline{x}$; per la continuità di f, si ha quindi

$$\overline{x} = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f(\overline{x}),$$

dunque $\overline{x}$ è un punto unito per f.

Supponiamo ora che x_1 sia un altro punto unito per f; si ha allora

$$d(\overline{x}, x_1) = d(f(\overline{x}), f(x_1)) \leq k\, d(\overline{x}, x_1),$$

che evidentemente implica $x_1 = \overline{x}$. ■

Dimostriamo ora il seguente fondamentale

Teorema 1.11.2 (Lions-Stampacchia) *Siano* (V, H, V^*) *una terna hilbertiana di spazi* reali*,* a *una forma bilineare continua e coerciva su* $V \times V$*, e* K *un convesso chiuso non vuoto* $\subset V$*; il problema*

$$(1.50) \quad \begin{cases} \text{dato } v^* \in V^*, \text{ trovare } u := \mathcal{S}(v^*) \in K \text{ tale che}: \\ a(u, v-u) \geq v^*(v-u) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione. Inoltre, dati $v_1^*, v_2^* \in V^*$*, e posto* $u_1 := \mathcal{S}(v_1^*)$*,* $u_1 := \mathcal{S}(v_1^*)$*, vale la maggiorazione*

$$(1.51) \qquad \|u_1 - u_2\| \leq \|v_1^* - v_2^*\|_* \,.$$

Dim.: per ogni u fissato in V, l'applicazione $v \mapsto a(u, v)$ è lineare e continua su V, quindi è un elemento di V^*; indicando con Au la sua immagine (in V) tramite l'isomorfismo di Riesz J_* di V^* su V, si ha dunque $(\!(Au, v)\!) := a(u, v) \quad \forall v \in V$. L'applicazione così definita $A : V \to V$ è evidentemente lineare; inoltre, per la continuità di a, posto $c := \mu(a)$,

$$\|Au\|^2 = a(u, Au) \leq c\,\|u\|\,\|Au\| \quad \forall v \in V,$$

cioè $A \in \mathcal{L}(V)$ (e $\|A\|_{\mathcal{L}(V)} \leq c$); infine, per la coercività di a, A verifica

$$(\!(Au, u)\!) = a(u, u) \geq \alpha\,\|u\|^2 \quad \forall u \in V.$$

Posto $f := J_* v^*$, il problema (1.50) è equivalente al seguente:

$$(1.52) \qquad \begin{cases} \text{dato } f \in V, \text{ trovare } u \in K \text{ tale che}: \\ a(u, v-u) \geq (\!(f, v-u)\!) \quad \forall v \in K. \end{cases}$$

Per ogni $\varrho > 0$ fissato, l'ultima disequazione equivale a

$$(1.53) \qquad (\!(\,(\varrho f - \varrho Au + u) - u, v - u)\!) \leq 0 \quad \forall v \in K,$$

quindi (si ricordino la **Definizione 1.5.3** e la **Proposizione 1.5.1**) se il problema precedente ha una soluzione u, questa deve essere tale che

$$u = P_K(\varrho f - \varrho Au + u).$$

Di conseguenza, il problema (1.50) è ricondotto a quello di mostrare che esiste $\varrho > 0$ tale che l'applicazione $T_\varrho : V \to V$ definita da

$$T_\varrho v := P_K(\varrho f - \varrho Av + v)$$

ammette un unico *punto unito* u; grazie al **Teorema 1.11.1**, basta verificare che, per un opportuno $\varrho > 0$, T_ϱ è una *contrazione.* In effetti, si ha

$$\begin{aligned} \|T_\varrho v_1 - T_\varrho v_2\|^2 &= \|P_K(\varrho f - \varrho Av_1 + v_1) - P_K(\varrho f - \varrho Av_2 + v_2)\|^2 \leq \\ &\leq \|(v_1 - v_2) - \varrho(A(v_1 - v_2))\|^2 = \\ &= \|v_1 - v_2\|^2 - 2\varrho(\!(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2)\!) + \varrho^2\|A(v_1 - v_2)\|^2 \leq \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2\,(1 - 2\alpha\varrho + c^2\varrho^2); \end{aligned}$$

poiché $1 - 2\alpha\varrho + c^2\varrho^2 < 1 \iff \varrho(c^2\varrho - 2\alpha) < 0$, ogni $\varrho \in (0, 2\alpha/c^2)$ verifica la condizione richiesta.

Per dimostrare la (1.51), scriviamo la (1.50) con $v^* := v_1^*,\ u := u_1,\ v := u_2$, poi con $v^* := v_2^*,\ u := u_2,\ v := u_1$, e sommiamo le disuguaglianze così ottenute; grazie alla coercività di a, si ottiene

$$\begin{aligned}\alpha\,\|u_1 - u_2\|^2 &\le a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \le (v_1^* - v_2^*)(u_1 - u_2) \le \\ &\le \|v_1^* - v_2^*\|_*\,\|u_1 - u_2\|,\end{aligned}$$

da cui la (1.51). ∎

Il risultato precedente si può precisare, quando a è *simmetrica*:

Proposizione 1.11.3 *Nelle ipotesi del Teorema precedente, se inoltre la forma bilineare a è* simmetrica*, la soluzione della disequazione (1.50) coincide con la soluzione del* problema di minimo *su K:*

$$(1.54)\qquad \begin{cases} \text{dato } v^* \in V^*, \text{ trovare } u \in K \text{ tale che} \\ \frac{1}{2}\,a(u,u) - v^*(u) \le \frac{1}{2}\,a(v,v) - v^*(v) \quad \forall v \in K. \end{cases}$$

Dim.: se a è anche simmetrica, verifica tutte le proprietà di un prodotto scalare sullo spazio reale V. Poniamo allora $(\!(u,v)\!)_1 := a(u,v)$, e $V_1 := (V; (\!(.\,,.)\!)_1)$. Detta $\|\,.\,\|_1$ la norma associata a $(\!(.\,,.)\!)_1$, si ha $\alpha\|v\|^2 \le \|v\|_1^2 \le c\|v\|^2\ \ \forall v \in V$, ed è facile concluderne che anche V_1 è uno spazio di Hilbert, e che il duale di V_1 coincide con V^*. Per il Teorema di Riesz, per ogni $v^* \in V^*$ esiste un unico $f_1 \in V$ tale che $v^*(v) = (\!(f_1, v)\!)_1\ \ \forall v \in V_1$; dunque il problema (1.50) si scrive

$$(1.55)\qquad \begin{cases} \text{dato } f_1 \in V_1, \text{ determinare } u \in K \text{ tale che} \\ \forall v \in K, \quad (\!(f_1 - u, v - u)\!)_1 \le 0, \end{cases}$$

che (si ricordi il **Teorema 1.5.1**) ha come unica soluzione u la *proiezione* (rispetto al prodotto scalare $(\!(.\,,.)\!)_1$) di f_1 su K. D'altra parte, sappiamo che tale proiezione è *caratterizzata* dalla relazione $\|f_1 - u\|_1^2 \le \|f_1 - v\|_1^2\ \ \forall v \in K$, equivalente a $\|u\|_1^2 - 2(\!(f_1,u)\!)_1 \le \|v\|_1^2 - 2(\!(f_1,v)\!)_1\ \ \forall v \in K$, cioè alla disequazione nella (1.54). ∎

Quando, in particolare, $K = V$, dal Teorema di Lions-Stampacchia si ricava immediatamente il

Teorema 1.11.3 (Lax-Milgram) *Data la terna hilbertiana (V, H, V^*), sia a una forma bilineare, continua e coerciva su $V \times V$. Per ogni v^* fissato in V^*, esiste un'unica soluzione $u \in V$ dell'equazione*

$$a(u,v) = v^*(v) \quad \forall v \in V.$$

Se a è anche simmetrica*, la soluzione u coincide con la soluzione del* problema di minimo libero*:*

$$u \in V; \quad \frac{1}{2}\,a(u,u) - v^*(u) \le \frac{1}{2}\,a(v,v) - v^*(v) \quad \forall v \in V. \;\blacksquare$$

Osservazione **1.11.1** Per ragioni di tempo, non possiamo trattare le molteplici applicazioni dei risultati precedenti; ci limitiamo ad un brevissimo cenno riguardante l'impiego del Teorema di Lax-Milgram nello studio di problemi ai limiti per equazioni a derivate parziali di tipo ellittico, rinviando ad altri Corsi per una trattazione sistematica.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$; lo spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$ è lo spazio vettoriale delle (classi di equivalenza di) funzioni $u \in L^2(\Omega)$ tali che le derivate distribuzionali $D_h u := \partial u/\partial x_h$ $(h = 1, \dots, d)$ siano anch'esse in $L^2(\Omega)$. Si vede facilmente che

$$((u, v))_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega u(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{h=1}^d \int_\Omega D_h u(t)\, D_h v(t)\,\mathrm{d}t$$

è un prodotto scalare su $H^1(\Omega)$, rispetto al quale $H^1(\Omega)$ è completo. In particolare, $H^1(\Omega)$ contiene evidentemente tutte le funzioni di $\mathcal{D}(\Omega)$ (cioè, le funzioni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tali che $\operatorname{supp}\varphi$ sia un compatto contenuto in Ω); si indica con $H^1_0(\Omega)$ la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$. È intuitivo che, in qualche "senso generalizzato", gli elementi di $H^1_0(\Omega)$ sono gli elementi di $H^1(\Omega)$ "nulli" su $\partial\Omega$.

Se si fissa un qualunque sottospazio chiuso V di $H^1(\Omega)$ tale che risulti $H^1_0(\Omega) \subset V$, e si pone $H := L^2(\Omega)$, gli spazi V, H, V^* costituiscono evidentemente una *terna hilbertiana*.

Definiamo ora una forma bilineare a su $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ ponendo, per ora *formalmente*,

$$a(u, v) := \sum_{h,k=1}^d \int_\Omega a_{h,k}(t)\, D_k u(t)\, D_h v(t)\,\mathrm{d}t + \\ + \int_\Omega a_0(t)\, u(t)\, v(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.56}$$

Se, *ad esempio*, i coefficienti a_0, $a_{h,k}$ verificano le condizioni

$$a_{h,k},\ a_0 \in L^\infty(\Omega),$$

allora la forma bilineare a è *continua* su $H^1(\Omega)$; se, inoltre, q.o. in Ω,

$$\exists\alpha > 0 : \quad \sum_{h,k=1}^d a_{h,k}(x)\,\xi_h\,\xi_k \geq \alpha \sum_{h=1}^d \xi_h^2 \quad (\forall\xi \in \mathbb{R}^d); \qquad a_0(x) \geq \alpha,$$

allora la forma è coerciva (con costante di coercività uguale ad α) sullo spazio $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Naturalmente, le stesse proprietà valgono per la *restrizione* di a a V, che indicheremo ancora con a. Siamo quindi nelle condizioni di poter applicare il Teorema di Lax-Milgram: *in particolare*, per ogni f fissata in $L^2(\Omega)$,

$$\exists! u \in V : \ \forall v \in V, \quad \textstyle\sum_{h,k=1}^d \displaystyle\int_\Omega a_{h,k}\, D_k u\, D_h v\,\mathrm{d}t + \\ + \int_\Omega a_0\, u\, v\,\mathrm{d}t = \int_\Omega f\, v\,\mathrm{d}t. \tag{1.57}$$

Se si sceglie $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, se ne deduce che u *è una soluzione, nel senso delle distribuzioni,* dell'equazione ellittica in forma di divergenza:

$$-\sum_{h,k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_h}\left(a_{h,k}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + a_0\, u = f \qquad \textit{in } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.58}$$

Dalla (1.57) si ricava allora (*in modo puramente formale*, applicando il Teorema della divergenza), che, detta $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ la normale esterna a $\partial\Omega$, deve risultare

$$u \in V; \quad \int_{\partial\Omega} v \sum_{h,k=1}^{d} a_{h,k}\, \nu_h \frac{\partial u}{\partial x_h}\, \mathrm{d}s = 0 \quad \forall v \in V,$$

relazioni che forniscono le *condizioni ai limiti* per u. Quando $V = H_0^1(\Omega)$, l'integrale sul bordo è nullo, e l'appartenenza di u a V, come abbiamo accennato più sopra, traduce una generalizzazione della *condizione di* DIRICHLET *omogenea* $u = 0$ su $\partial\Omega$; quando $V = H^1(\Omega)$, l'annullarsi dell'integrale per ogni $v \in V$ si traduce formalmente nella condizione $\partial u/\partial \nu_a := \sum_{h,k=1}^{d} a_{h,k}\, \nu_h\, D_k v = 0$, che generalizza la *condizione di* NEUMANN *omogenea* $\partial u/\partial \nu = 0$ su $\partial\Omega$ (alla quale si riduce se $a_{h,k} = \delta_{h,k}$). Tuttavia, rientrano in questa formulazione molti altri problemi ai limiti: ad esempio, le condizioni $u = 0$ su *una parte* Γ di $\partial\Omega$, e $\partial u/\partial \nu_a = 0$ sul complementare di Γ in $\partial\Omega$. ■

1.12 Operatori compatti in H.

Se $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, dove H_1, H_2 sono spazi di HILBERT, l'immagine tramite T di ogni insieme limitato è *limitata*; una delle maggiori difficoltà degli spazi a dimensione infinita è costituita dal fatto che non se ne può dedurre che tale immagine sia *relativamente compatta*. Si pone allora la seguente

Definizione **1.12.1** *Sia $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, dove H_1, H_2 sono due spazi di* HILBERT.

i) T si dice **a rango finito** *se $R(T)$ ha dimensione finita;*

ii) T si dice **completamente continuo** *se*

$$(x_n \rightharpoonup x \text{ debolmente } in\ H_1) \implies (Tx_n \to Tx \text{ fortemente } in\ H_2);$$

iii) T si dice **compatto** *se*

$$(A \text{ limitato } in\ H_1) \implies (T(A) \text{ relativamente compatto } in\ H_2). \ ■$$

È ovvio che *i)* implica sia *ii)* sia *iii)*; mostriamo che, *nel caso hilbertiano*, queste ultime due condizioni si equivalgono (si vedano però le successive **Proposizioni 2.10.1**, **2.10.2**):

Proposizione **1.12.1** *L'operatore $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ è compatto se e solo se è completamente continuo.*

Dim.: osserviamo preliminarmente che

$$(1.59) \qquad \forall T \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \quad (x_n \rightharpoonup x \ in\ H_1) \Longrightarrow (T\, x_n \rightharpoonup Tx \ in\ H_2):$$

infatti, per ogni y fissato in H_2 risulta $(Tx_n, y)_2 = (x_n, T^*y)_1 \to (x, T^*y)_1 = (Tx, y)_2$.

Dimostriamo ora l'enunciato.

i): *T completamente continuo $\Longrightarrow$ T compatto.* Sia A un insieme limitato in H_1; fissata una successione $\{y_n\} \subset T(A)$, sia $\{x_n\} \subset A$ tale che $y_n = Tx_n$.

Per il Teorema di compattezza debole, dalla successione limitata $\{x_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ debolmente convergente ad $x \in H_1$. Allora $Tx_{n_k} \to Tx$ (fortemente in H_2), quindi $T(A)$ è sequenzialmente relativamente compatto, condizione che in uno spazio metrico è equivalente alla relativa compattezza.

ii): *T non completamente continuo $\Longrightarrow$ T non compatto.* Poiché T non è completamente continuo, esiste una successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \rightharpoonup x$ (quindi $Tx_n \rightharpoonup Tx$), ma $Tx_n \not\to Tx$. Esistono allora $\varepsilon_0 > 0$ ed una sottosuccessione $\{x'_k := x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ tale che $\forall k \in \mathbb{N}$ si abbia $\|Tx'_k - Tx\| \geq \varepsilon_0$. La successione $\{x'_k\}$ è limitata (**Corollario 1.9.1**), dunque lo è anche $\{Tx'_k\}$; mostriamo che $\{Tx'_k\}$ non è relativamente compatto. Se infatti esistesse una sottosuccessione $\{x''_r = x'_{k_r}\}$ di $\{x'_k\}$ tale che $Tx''_r \to z$, si avrebbe $Tx''_r \rightharpoonup z$. D'altra parte, si ha $Tx''_r \rightharpoonup Tx$ perché $x''_r \rightharpoonup x$, quindi $z = Tx$, cioè $Tx''_r \to Tx$; ma questo è assurdo, perché $\|Tx''_r - Tx\| \geq \varepsilon_0$. ■

È evidente che ogni combinazione lineare di operatori compatti da H_1 in H_2 è ancora un operatore compatto tra gli stessi spazi; si pone allora la

Definizione **1.12.2** *Siano H_1, H_2 due spazi di* HILBERT*; la varietà lineare di $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ costituita dagli operatori compatti da H_1 in H_2 si indica con $\mathcal{K}(H_1, H_2)$. Si pone poi $\mathcal{K}(H_1) := \mathcal{K}(H_1, H_1)$.* ■

Proposizione **1.12.2** *Siano H_1, H_2, H_3 spazi di* HILBERT.

i) Se $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ e $T_1 \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$, allora $T_1 \circ T \in \mathcal{K}(H_1, H_3)$; se $T_2 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ e $T \in \mathcal{K}(H_2, H_3)$, allora $T \circ T_2 \in \mathcal{K}(H_1, H_3)$;

ii) $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2) \Longleftrightarrow T^* \in \mathcal{K}(H_2, H_1)$.

Dim.: *i)*: sia $\{x_n\}$ una successione debolmente convergente ad x in H_1; dato che T è completamente continuo, $Tx_n \to Tx$ in H_2, dunque $T_1(Tx_n) \to T_1(Tx)$ in H_3, cioè $T_1 \circ T$ è in $\mathcal{K}(H_1, H_3)$; inoltre, $T_2\, x_n \rightharpoonup T_2\, x$, quindi $T(T_2\, x_n) \to T(T_2\, x)$, cioè $T \circ T_2 \in \mathcal{K}(H_1, H_3)$.

ii): siano $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ e $\{y_n\}$ una successione di vettori in H_2 con $y_n \rightharpoonup y$; mostriamo che $T^*y_n \to T^*y$ in H_1. Si osservi intanto che $\exists c : \ \|y\|_2, \|y_n\|_2 \leq c$, ed inoltre, per quanto appena dimostrato, TT^* è in $\mathcal{K}(H_2)$, quindi TT^*y_n tende a TT^*y fortemente in H_2. Poiché

$$\|T^*y_n - T^*y\|_1^2 = (T^*y_n - T^*y, T^*y_n - T^*y)_1 = (TT^*y_n - TT^*y, y_n - y)_2,$$

per la **Proposizione 1.7.4** si ha $T^*y_n \to T^*y$ in H_1.

Se poi $T^* \in \mathcal{K}(H_2, H_1)$, per quanto ora visto si ha $T = T^{**} \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. ■

Corollario **1.12.1** *$\mathcal{K}(H)$ è un ideale bilatero* **simmetrico**[24] *di $\mathcal{L}(H)$.* ■

Corollario **1.12.2** *Se $\dim H = \infty$, nessun operatore compatto ammette inverso destro o sinistro in $\mathcal{L}(H)$.*

Dim.: se T ammettesse in $\mathcal{L}(H)$ un inverso sinistro T'_s o un inverso destro T'_d, si avrebbe $T'_sT = I$ oppure $TT'_d = I$; ma questo è assurdo se $\dim H = \infty$: per

[24] cioè, invariante per l'applicazione $T \mapsto T^*$ di $\mathcal{L}(H)$ in sè.

ogni base hilbertiana $\{e_n\}$, si ha $e_n \rightharpoonup 0$, mentre $Ie_n = e_n \not\to 0$, quindi I non è compatto. ∎

Anche per gli operatori a rango finito vale l'analogo del **Corollario 1.12.1**:

Proposizione 1.12.3 *Se T è a rango finito, lo è anche T^*; anzi, si ha che* $\dim R(T^*) = \dim R(T)$. *Gli operatori a rango finito sono un ideale bilatero simmetrico di $\mathcal{L}(H)$, quindi di $\mathcal{K}(H)$.*

Dim.: sia T a rango finito, e sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base per $R(T)$; mostriamo che $\dim R(T^*) = n$. Per la **Proposizione 1.9.5**, si ha $N(T^*)^\perp = \overline{R(T)} = R(T)$ (l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\dim R(T) < \infty$). Quindi, per ogni $y \in H$, $T^*y = T^*(P_{N(T^*)^\perp}\, y) = T^*(P_{R(T)}\, y)$ è in $\operatorname{span}\{T^*e_1, \ldots, T^*e_n\}$, da cui $\dim R(T^*) \le n$; anzi, $n = \dim R(T) = \dim R(T^{**}) \le \dim R(T^*)$, dunque $\dim R(T^*) = \dim R(T)$.

È ovvio che ogni combinazione lineare di operatori a rango finito è ancora a rango finito. Mostriamo che se T ha rango finito, $\forall T_1 \in \mathcal{L}(H)$ anche TT_1 e T_1T hanno rango finito. Infatti, si ha $R(TT_1) \subset R(T)$, mentre $R(T_1T) = T_1(R(T)) = \operatorname{span}\{T_1e_1, \ldots, T_1e_n\}$, il che conclude la dimostrazione. ∎

Si osservi che l'ideale degli operatori a rango finito *non è chiuso* nello spazio di Banach $\mathcal{L}(H)$: sia $H = \ell^2$, e definiamo $\mathfrak{A}_1$ come segue:

$$\text{se } x = \{x_n\} \in \ell^2, \quad \mathfrak{A}_1\, x := \{x_n/n\}.$$

È chiaro che $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1^*$, e che $\|\mathfrak{A}_1\| = 1$. Posto $A_n := \mathfrak{A}_1\, P_n$, dove P_n è l'operatore di proiezione su $\operatorname{span}\{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$, si ha

$$\|\mathfrak{A}_1 x - A_n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-2}|x_k|^2 \le (n+1)^{-2}\|x\|^2,$$

quindi $\|\mathfrak{A}_1 - A_n\| \to 0$; perciò, $\mathfrak{A}_1$ è limite uniforme di operatori a rango finito, ma ovviamente non ha rango finito.

Si ha invece il seguente risultato:

Proposizione 1.12.4 *$\mathcal{K}(H_1, H_2)$ è* chiuso *in $(\mathcal{L}(H_1, H_2); \|\,.\,\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)})$; quindi, $\mathcal{K}(H)$ è un* ideale bilatero simmetrico e chiuso *di $\mathcal{L}(H)$.*[25]

Dim.: sia $\{T_n\}$ una successione in $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ tale che $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(H_1, H_2)$; mostriamo che T è completamente continuo, quindi compatto. Sia $\{x_k\}$ una successione in H_1 tale che $x_k \rightharpoonup x$; per il **Corollario 1.9.1** e la **Proposizione 1.7.3**, $\exists c: \ \|x\|_1, \|x_k\|_1 \le c \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Per ogni n, k si ha allora

$$\begin{aligned}\|Tx_k - Tx\|_2 &\le \|Tx_k - T_nx_k\|_2 + \|T_nx_k - T_nx\|_2 + \|T_nx - Tx\|_2 \le \\ &\le \|T - T_n\|\,\|x_k\|_1 + \|T_n(x_k - x)\|_2 + \|T_n - T\|\,\|x\|_1 \le \\ &\le 2c\,\|T - T_n\| + \|T_n(x_k - x)\|_2.\end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon: \ \forall n > n_\varepsilon, \ \ \|T - T_n\| < \varepsilon/(4c)$; fissato un $n > n_\varepsilon$, da $x_k - x \rightharpoonup 0$ segue che $T_n(x_k - x) \to 0$, quindi $\exists k_\varepsilon: \ \forall k > k_\varepsilon, \ \ \|T_n(x_k - x)\|_2 < \varepsilon/2$; in conclusione, si ha $\|Tx_k - Tx\|_2 < \varepsilon \ \ \forall k > k_\varepsilon$, cioè $Tx_k \to Tx$. ∎

Si osservi che l'operatore integrale definito nell'Esempio **2** del **§ 1.10** è, in particolare, un operatore compatto:

[25] si può mostrare (*Teorema di* Calkin) che $\mathcal{K}(H)$ è l'*unico* ideale bilatero chiuso (non banale) in $\mathcal{L}(H)$.

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.12.5** *Se $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$, l'operatore integrale K da $L^2(\Omega)$ in sé definito da*

$$(Kx)(t) := \int_\Omega k(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau \qquad \text{(per q.o. } t \text{ in } \Omega)$$

i) è compatto in $L^2(\Omega)$;

ii) verifica la seguente proprietà: se $\{\varphi_n\}$ è una base hilbertiana in $L^2(\Omega)$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|K\varphi_n\|^2_{L^2(\Omega)} = \|k\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)}. \tag{1.60}$$

Dim.: *i*): si è già visto che $K \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$, con $\|K\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \le \|k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.

È immediato verificare che, se $\{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base hilbertiana per $L^2(\Omega)$, allora $\{\varphi_n(t)\,\overline{\varphi_m(\tau)}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ è una base hilbertiana in $L^2(\Omega\times\Omega)$. L'ortonormalità di $\{\varphi_n(t)\,\overline{\varphi_m(\tau)}\}$ è evidente; inoltre, se $\psi \in L^2(\Omega\times\Omega)$ verifica

$$\int_{\Omega\times\Omega} \psi(t,\tau)\, \varphi_n(t)\, \overline{\varphi_m(\tau)}\, dt\, d\tau = 0,$$

si ha che la funzione y (in $L^2(\Omega)$) data da $y(t) := \int_\Omega \overline{\psi(t,\tau)}\, \varphi_m(\tau)\, d\tau$ è ortogonale a $\{\varphi_n\}$, quindi è nulla q.o. in Ω; ne segue facilmente che anche ψ è nulla q.o. in $\Omega\times\Omega$.

Pertanto, k si può sviluppare in serie di Fourier in $L^2(\Omega\times\Omega)$ rispetto a $\{\varphi_n(t)\,\overline{\varphi_m(\tau)}\}$:

$$k(t,\tau) = \textstyle\sum_{m,n=1}^{+\infty} k_{mn}\, \varphi_n(t)\, \overline{\varphi_m(\tau)} \qquad (\text{in } L^2(\Omega\times\Omega));$$

ciò implica che, posto per ogni $N \in \mathbb{N}$

$$k_N(t,\tau) := \textstyle\sum_{m,n=1}^{N} k_{mn}\, \varphi_n(t)\, \overline{\varphi_m(\tau)},$$

si ha $k_N \to k$ in $L^2(\Omega\times\Omega)$. Se si indica con K_N l'operatore integrale di nucleo k_N, si vede facilmente che $\|K_N - K\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \le \|k_N - k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \to 0$; perciò, K è limite uniforme degli operatori *a rango finito* K_N, dunque è compatto.

ii): basta osservare che, per l'identità di Bessel ed il Teorema di Tonelli, risulta:

$$\begin{aligned}
\sum_n \|K\varphi_n\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{m,n} |(K\varphi_n, \varphi_m)_{L^2(\Omega)}|^2 = \\
&= \sum_{m,n} \left| \int_\Omega \overline{\varphi_m(t)} \left(\int_\Omega k(t,\tau)\, \varphi_n(\tau)\, d\tau \right) dt \right|^2 = \\
&= \sum_{m,n} \left| \int_{\Omega\times\Omega} k(t,\tau)\, \overline{\varphi_m(t)}\, \varphi_n(\tau)\, dt\, d\tau \right|^2 = \\
&= \sum_{m,n} |(k, \varphi_n \overline{\varphi_m})_{L^2(\Omega\times\Omega)}|^2 = \|k\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} < +\infty. \blacksquare
\end{aligned}$$

Si noti che la (1.60) esprime una proprietà degli operatori integrali con nucleo di quadrato sommabile che è *aggiuntiva* rispetto alla loro compattezza: se T è in $\mathcal{K}(H)$ e $\{e_n\}$ è una base hilbertiana in H, *non è detto* (lo vedremo più avanti) che la serie $\sum_n \|T\,e_n\|^2$ converga. Questa osservazione, unita al risultato ottenuto nella **Proposizione 1.9.6**, suggerisce di introdurre, in un *generico* spazio di HILBERT *separabile* H, una categoria di operatori *intermedia* tra quella degli operatori a rango finito e $\mathcal{K}(H)$: gli *operatori di* HILBERT-SCHMIDT:

Definizione **1.12.3** *Sia H uno spazio di* HILBERT *separabile; $T \in \mathcal{L}(H)$ si dice di* HILBERT-SCHMIDT *se esiste una base hilbertiana $\{e_n\}$ di H tale che risulti*[26] $\sum_n \|Te_n\|^2 < +\infty$. *Si definisce* **norma di** HILBERT-SCHMIDT $\|T\|_{\mathcal{HS}}$ *di T il numero,* indipendente *dalla base,*

$$\|T\|_{\mathcal{HS}} := \left(\sum_n \|Te_n\|^2\right)^{1/2}, \text{ dove } \{e_n\} \text{ è una base hilbertiana.}$$

L'insieme degli operatori di HILBERT-SCHMIDT *in H si indica con $\mathcal{HS}(H)$.* ■

Osservando che $T \in \mathcal{HS}(H)$ se e solo se la successione $t := \{\|Te_n\|_H\}$ è in ℓ^2 (si ha $\|T\|_{\mathcal{HS}} = \|t\|_{\ell^2}$), si conclude che $\mathcal{HS}(H)$ è uno spazio vettoriale, e $\|\,.\,\|_{\mathcal{HS}}$ è una norma in $\mathcal{HS}(H)$; inoltre,

Proposizione **1.12.6** *$\mathcal{HS}(H)$ è un* ideale bilatero simmetrico *di $\mathcal{L}(H)$; per ogni T in $\mathcal{HS}(H)$ si ha $\|T\|_{\mathcal{HS}} = \|T^*\|_{\mathcal{HS}}$.*

Dim.: si ha

$$\|T\|^2_{\mathcal{HS}} = \sum_{m,n} |(Te_m, e_n)|^2 = \sum_{m,n} |(T^*e_n, e_m)|^2 = \sum_m \|T^*e_m\|^2 = \|T^*\|^2_{\mathcal{HS}},$$

quindi $\mathcal{HS}(H)$ è simmetrico, e $\|T^*\|_{\mathcal{HS}} = \|T\|_{\mathcal{HS}}$. Poiché se $T \in \mathcal{HS}(H)$ e $T_1 \in \mathcal{L}(H)$ risulta

$$\sum_n \|(T_1T)e_n\|^2 \le \|T_1\|^2 \sum_n \|Te_n\|^2 = \|T_1\|^2\, \|T\|^2_{\mathcal{HS}},$$

ne viene che $T_1T \in \mathcal{HS}(H)$; dato che $\mathcal{HS}(H)$ è simmetrico, anche $TT_1 = (T_1^*T^*)^*$ è in $\mathcal{HS}(H)$, il che conclude la dimostrazione. ■

Si ha inoltre la seguente

Proposizione **1.12.7** *Ogni operatore T di* HILBERT-SCHMIDT *è limite* uniforme *di una successione di operatori a rango finito; in particolare, ogni operatore di* HILBERT-SCHMIDT *è* compatto.

Dim.: fissata in H una base hilbertiana $\{e_n\}$, si ha per ipotesi che è convergente la serie $\sum_{m,n} |(Te_m, e_n)|^2 < +\infty$, quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \;\; \forall N > n_\varepsilon, \;\; \sum_{m,n=N+1}^{+\infty} |(Te_m, e_n)|^2 < \varepsilon^2.$$

Posto allora, $\forall x \in H$, $T_N\, x := \sum_{m,n=1}^{N} (x, e_m)(Te_m, e_n)e_n$, si ha $\dim R(T_N) \le N$, quindi T_N è a rango finito. Inoltre,

$$\begin{aligned}\|Tx - T_Nx\|^2 &= \left\| \sum_{m,n=N+1}^{+\infty} (x, e_m)(Te_m, e_n)e_n \right\|^2 = \\ &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left| \sum_{m=N+1}^{+\infty} (x, e_m)(Te_m, e_n) \right|^2 \le\end{aligned}$$

[26] grazie alla **Proposizione 1.9.6**, la proprietà vale allora per *ogni* base hilbertiana.

$$\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left(\sum_{m=N+1}^{+\infty} |(x, e_m)|^2 \right) \left(\sum_{m=N+1}^{+\infty} |(Te_m, e_n)|^2 \right) \leq$$
$$\leq \|x\|^2 \left(\sum_{m,n=N+1}^{+\infty} |(Te_m, e_n)|^2 \right) < \varepsilon^2 \|x\|^2;$$

quindi $\|T - T_N\| < \varepsilon \quad \forall N > n_\varepsilon$, cioè la tesi. ∎

Per illustrare le relazioni tra $\mathcal{HS}(H)$ e $\mathcal{K}(H)$, può essere utile introdurre la seguente famiglia di operatori in ℓ^2, che generalizzano l'operatore $\mathfrak{A}_1$ visto più sopra:

$$\forall \alpha > 0, \quad \text{se } x = \{x_n\} \in \ell^2, \quad \mathfrak{A}_\alpha\, x := \{n^{-\alpha}\, x_n\}.$$

È chiaro che $\mathfrak{A}_\alpha = (\mathfrak{A}_\alpha)^*$, e che $\|\mathfrak{A}_\alpha\| = 1$. Anzi, $\mathfrak{A}_\alpha$ è *compatto* per ogni $\alpha > 0$: posto $A_{\alpha,n} := \mathfrak{A}_\alpha\, P_n$, dove P_n è l'operatore di proiezione su span $\{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$, si ha infatti

$$\|\mathfrak{A}_\alpha x - A_{\alpha,n} x\|^2 = \textstyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-2\alpha} |x_k|^2 \leq (n+1)^{-2\alpha} \|x\|^2,$$

quindi $\|\mathfrak{A}_\alpha - A_{\alpha,n}\| \to 0$, ed $\mathfrak{A}_\alpha$, limite uniforme di operatori a rango finito, quindi compatti, è a sua volta compatto.

Si noti che $\sum_n \|\mathfrak{A}_\alpha e^{(n)}\|^2 = \sum_n n^{-2\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1/2$; quindi, per $\alpha \in]0, 1/2]$, $\mathfrak{A}_\alpha$ è compatto ma non di Hilbert-Schmidt, ed è limite uniforme di operatori che, essendo a rango finito, sono in $\mathcal{HS}(\ell^2)$. Ne viene che *anche* $\mathcal{HS}(\ell^2)$ *non è chiuso in* $\mathcal{L}(\ell^2)$.

Illustreremo più avanti, nel **§2.10**, la *teoria di* Riesz-Fredholm degli operatori compatti nell'ambito più generale degli spazi di Banach. Descriveremo ora l'*analisi spettrale* degli operatori *compatti ed hermitiani* in uno spazio di Hilbert separabile. Ricordiamo intanto una definizione:

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **1.12.4** *Sia $T \in \mathcal{L}(H)$; il numero complesso λ si dice* **autovalore** *di T se esiste $x \neq 0$, detto* **un autovettore** *corrispondente all'autovalore λ, tale che*

$$Tx = \lambda x. \tag{1.61}$$

Se λ è un autovalore di T, il sottospazio (evidentemente chiuso) degli $x \in H$ che verificano la (1.61) *si dice* **autospazio** V_λ *relativo a λ; la dimensione del sottospazio V_λ si dice* **molteplicità (geometrica)** *di λ.* ∎

Nel caso di operatori hermitiani, è immediato verificare alcune proprietà significative:

$\boxed{\textbf{Lemma}}$ **1.12.1** *Se $T = T^*$, allora:*
i) gli (eventuali) autovalori di T sono reali*;*
ii) gli autospazi relativi a due autovalori distinti sono ortogonali.

Dim.: *i*)**:** se $T = T^*$, si ha $\varphi_T^* = \varphi_T$, quindi, per il **Corollario 1.11.1**, *i*), $(Tx, x) = \Phi_T(x)$ è reale; se λ è un autovalore, si ha quindi $\lambda = (Tx, x)/\|x\|^2 \in \mathbb{R}$;

ii): se λ, μ sono autovalori distinti di T, e x_λ, x_μ sono corrispondenti autovettori, moltiplicando scalarmente per x_μ la relazione $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$ si ottiene $(Tx_\lambda, x_\mu) = \lambda(x_\lambda, x_\mu)$; analogamente, $(Tx_\mu, x_\lambda) = \mu(x_\mu, x_\lambda)$; ne segue che $(\lambda - \mu)(x_\lambda, x_\mu) = 0$, quindi $x_\lambda \perp x_\mu$. ∎

Osservazione **1.12.1** È chiaro che la definizione di autovalore ed autovettore si può dare, più in generale, per un operatore *lineare* T definito su una varietà lineare $D(T)$ di H: basterà evidentemente richiedere che l'autovettore sia in $D(T)$. Può però accadere che un operatore lineare, anche *continuo* e definito su *tutto* H, *non abbia alcun autovalore*: basti pensare all'esempio **1** del **§1.10**, con $\varphi(t) := t$, oppure all'operatore di traslazione a destra definito nell'esempio **3** dello stesso Paragrafo. Questa circostanza si può verificare *persino se l'operatore è in* $\mathcal{HS}(H)$, come ora mostriamo. In ℓ^2, fissato $\alpha > 1/2$ poniamo $T := \mathfrak{T}_d \mathfrak{A}_\alpha$, dove $\mathfrak{T}_d$ è l'operatore di traslazione a destra, ed $\mathfrak{A}_\alpha$ è l'operatore definito poco sopra. Come si è visto, $\mathfrak{T}_d \in \mathcal{L}(\ell^2)$ e $\mathfrak{A}_\alpha \in \mathcal{HS}(\ell^2)$, cosicché $T \in \mathcal{HS}(\ell^2)$. Poiché T è evidentemente iniettivo, $\lambda = 0$ non è autovalore di T. Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fosse un autovalore, dovrebbe esistere $x \neq 0$ tale che $y := Tx = \lambda x$; questo comporta che $y_1 = 0 = \lambda x_1$, e $y_n = (n-1)^{-\alpha} x_{n-1} = \lambda x_n$, da cui si ricava facilmente $x_n = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, assurdo perché x deve essere $\neq 0$. ∎

Come ora mostreremo, la situazione è del tutto diversa nel caso di operatori compatti ed *hermitiani*. Verifichiamo intanto che

Teorema **1.12.1** *Sia $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$; allora T ammette come autovalore almeno uno dei due numeri $\|T\|, -\|T\|$.*

Dim.: per il **Corollario 1.11.2**, si ha $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$. Se risulta $(Tx, x) = 0 \;\; \forall x \in H$, si ha $T = 0$, quindi l'unico autovalore è $\lambda = 0$, ed il corrispondente autospazio è tutto H. Escluso questo caso banale, sia $\{\xi_n\}$ una successione tale che

$$\|\xi_n\| = 1; \quad \lim_n |(T\xi_n, \xi_n)| = \|T\| > 0;$$

possiamo intanto estrarre da $\{\xi_n\}$ una sottosuccessione $\{y_k := \xi_{n_k}\}$ tale che $\lim_n (Ty_k, y_k) = \lambda_1$, dove $\lambda_1 = \|T\|$ oppure $\lambda_1 = -\|T\|$. Dalla successione di vettori (di norma 1) $\{y_k\}$ possiamo estrarre, per il Teorema di compattezza debole, una sottosuccessione $\{y'_h := y_{k_h}\}$ tale che $y'_h \rightharpoonup x_1$ (sappiamo inoltre che $\|x_1\| \leq 1$); per la compattezza di T, ne viene che $Ty'_h \to Tx_1$. Di conseguenza,

$$\|Ty'_h - \lambda_1 y'_h\|^2 = \|Ty'_h\|^2 - 2\lambda_1 (Ty'_h, y'_h) + \lambda_1^2,$$

quantità che tende a

$$\|Tx_1\|^2 - \lambda_1^2 \leq \|T\|^2 - \lambda_1^2 = 0.$$

Perciò, $Ty'_h - \lambda_1 y'_h \to 0$ (fortemente), quindi $\lambda_1 y'_h = Ty'_h - (Ty'_h - \lambda_1 y'_h) \to Tx_1$ (fortemente). Poiché però $\lambda_1 y'_h \rightharpoonup \lambda_1 x_1$ (debolmente), per l'unicità del limite debole si ha $Tx_1 = \lambda_1 x_1$; si ha inoltre che $y'_h \to x_1$, quindi $\|x_1\| = 1$. Dunque, λ_1 è un autovalore per T, ed x_1 è un corrispondente autovettore (**normalizzato**, cioè di norma 1). ∎

Il procedimento che ha permesso di determinare λ_1 e x_1 può essere iterato, e fornisce il seguente risultato:

Proposizione **1.12.8** *Sia $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$ con $T \neq 0$; è possibile determinare una famiglia finita o numerabile $\{\lambda_n\}$ di numeri reali non nulli ed una corrispondente famiglia $\{x_n\}$ di vettori in H tali che:*

$$(1.62) \quad \begin{cases} |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots > 0; \\ Tx_n = \lambda_n x_n, \quad \text{e} \quad (x_m, x_n) = \delta_{mn}; \\ |\lambda_{n+1}| = \max\{|(Tx, x)| \mid x \perp \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad \|x\| = 1\}. \end{cases}$$

e che, inoltre,

$$(1.63) \qquad \text{se} \quad (x, x_n) = 0 \quad \forall n, \quad \text{allora} \quad Tx = 0.$$

Dim.: poniamo $W_1 := \{x_1\}^\perp$, dove λ_1, x_1 sono l'autovalore ed il corrispondente autovettore costruiti nel Teorema precedente. Si ha intanto che W_1 *riduce* T: dato che $T^* = T$, basta verificare che W_1 è *invariante* per T, e questo è ovvio, dato che se $x \in W_1$ si ha $(Tx, x_1) = (x, Tx_1) = \lambda_1(x, x_1) = 0$, cioè Tx è in W_1. Osserviamo poi che la *restrizione* $T_{|W_1}$ di T a W_1 è evidentemente un operatore compatto ed hermitiano nello spazio di Hilbert W_1 (munito del prodotto scalare indotto da quello di H); dunque, per il **Corollario 1.11.1**, *ii*), ne viene che se $(Tx, x) = 0 \ \ \forall x \in W_1$, allora $T_{|W_1}$ è identicamente nullo, e le (1.62), (1.63) (con $n = 1$) sono dimostrate. Se invece $T_{|W_1}$ non è identicamente nullo, possiamo applicare il Teorema precedente all'operatore $T_{|W_1} \in \mathcal{K}(W_1)$: troviamo così un autovalore λ_2 ed un corrispondente autovettore normalizzato x_2. Per costruzione, si ha $x_2 \perp x_1$; inoltre,

$$|\lambda_2| = \sup\{|(Tx, x) \mid x \perp x_1, \quad \|x\| = 1\} \leq |\lambda_1|.$$

Supponiamo di aver determinato $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \{x_1, \ldots, x_n\}$ che verificano le (1.62); dato che $W_n := \{x_1, \ldots, x_n\}^\perp$ riduce T, possiamo considerare la restrizione (compatta ed hermitiana) $T_{|W_n}$ di T a W_n. Se $(Tx, x) = 0 \ \ \forall x \in W_n$, allora $T_{|W_n}$ è identicamente nulla, cioè vale anche la (1.63); altrimenti, possiamo determinare λ_{n+1}, x_{n+1} ancora applicando il Teorema precedente a $T_{|W_n}$. Se $\dim H = N \in \mathbb{N}$, il procedimento ha ovviamente termine dopo n passi (con $n \leq N$). Se $\dim H = \infty$, il procedimento si arresta se e solo se $\exists n : \ (Tx, x) = 0 \ \ \forall x$ in W_n, il che implica la (1.63); altrimenti, fornisce due successioni $\{\lambda_n\}, \{x_n\}$ che verificano le (1.62). Per completare la dimostrazione, occorre mostrare che è soddisfatta anche la (1.63). Per questo, premettiamo la seguente proprietà, che merita di essere messa in evidenza:

Proposizione **1.12.9** *Se i $\{\lambda_n\}$ costruiti nella Proposizione precedente sono infiniti, allora $\lambda_n \to 0$.*

Dim.: la successione $\{|\lambda_n|\}$ è non crescente, quindi ha limite $\lambda \geq 0$. Dalla successione di vettori unitari $\{x_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $w\text{-}\lim_k x_{n_k} = x$, quindi $s\text{-}\lim_k Tx_{n_k} = s\text{-}\lim_k \lambda_{n_k} x_{n_k} = Tx$. Dunque $\{\lambda_{n_k} x_{n_k}\}$ è di Cauchy; dato che

$$\|\lambda_{n_k} x_{n_k} - \lambda_{n_h} x_{n_h}\|^2 = \lambda_{n_k}^2 + \lambda_{n_h}^2 \geq 2\lambda^2,$$

la condizione di Cauchy può essere verificata solo se $\lambda = 0$. ∎

Corollario **1.12.3** *La successione $\{\lambda_n\}$ costruita nella* **Proposizione 1.12.8** *non può contenere infiniti termini coincidenti.* ∎

Siamo ora in grado di completare la dimostrazione della **Proposizione 1.12.8**. In effetti, sia x ortogonale a tutti gli autovettori $\{x_n\}$ costruiti in precedenza. Se $x = 0$, non c'è nulla da dimostrare. Se $x \neq 0$, non è limitativo supporre che $\|x\| = 1$; poiché, per ogni n, si ha $x \in W_n$, grazie al **Corollario 1.11.2** ne segue che, sempre per ogni n, si ha $\|Tx\| \leq \|T_{|W_n}\| = \sup\{|(Ty, y)| \mid y \in W_n, \ \ \|y\| = 1\} = |\lambda_{n+1}|$, quindi $Tx = 0$. ∎

Resta da esaminare se con il procedimento ora descritto si individuino *tutti* gli autovalori di T:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.12.10** *Sia $0 \neq T = T^* \in \mathcal{K}(H)$, e siano $\{\lambda_n\}, \{x_n\}$ gli autovalori ed i corrispondenti autovettori costruiti nella* **Proposizione 1.12.8**. *Allora:*

i): se $\{x_n\}$ è completo, non esistono, oltre ai $\{\lambda_n\}$, altri autovalori di T;

ii) se $\{x_n\}$ non è completo, l'unico altro autovalore di T è $\lambda = 0$.

Dim.: *i*): siano λ, x tali che $x \neq 0$ e $Tx = \lambda x$; se fosse $\lambda \neq \lambda_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, per il **Lemma 1.12.1**, *ii*), si dovrebbe avere $(x, x_n) = 0 \ \ \forall n$, quindi, dato che $\{x_n\}$ è completo, $x = 0$, assurdo.

ii) se $\{x_n\}$ non è completo, esiste un vettore $x \neq 0$, che possiamo supporre di norma uguale ad uno, che è ortogonale a tutti gli x_n. Per la (1.63), si ha $Tx = 0$, dunque $\lambda = 0$ è autovalore. Se poi λ è un autovalore diverso da tutti i λ_n ed y è un corrispondente autovettore normalizzato, dal **Lemma 1.12.1** si deduce che che $(y, x_n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, dunque $Ty = \lambda y = 0$, da cui $\lambda = 0$. ∎

La successione $\{\lambda_n\}$ non solo esaurisce tutti gli autovalori, con la sola (eventuale) eccezione dell'autovalore nullo, ma ne dà anche la *molteplicità*:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.12.11** *Sia λ un autovalore non nullo di T; la dimensione del corrispondente autospazio V_λ coincide con il numero*[27] *di indici distinti n tali che $\lambda = \lambda_n$, dove $\{\lambda_n\}$ è la successione costruita nella* **Proposizione 1.12.8**.

Dim.: se $n_1, \ldots, n_k$ sono tutti e soli gli indici (distinti) tali che $\lambda_{n_1}, \ldots, \lambda_{n_k} = \lambda$, i corrispondenti autovettori $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ sono ortogonali ed appartengono a V_λ, quindi $\dim V_\lambda \geq k$. Se fosse $\dim V_\lambda > k$, esisterebbe in V_λ un vettore $x \neq 0$ ortogonale a $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$; ma allora, per il **Lemma 1.12.1**, *ii*), x sarebbe ortogonale a *tutti* i vettori del sistema $\{x_n\}$. Ciò è assurdo se $\{x_n\}$ è completo, perché allora sarebbe $x = 0$, contrariamente all'ipotesi; ed è assurdo anche se $\{x_n\}$ non è completo, perché si dovrebbe avere $|(Tx, x)| \leq |\lambda_n| \ \ \forall n$, quindi $(Tx, x) = 0$, mentre $(Tx, x) = \lambda\|x\|^2 \neq 0$. ∎

Possiamo concludere con il seguente **Teorema di rappresentazione spettrale per gli operatori compatti hermitiani**:

[27] *finito*, per il **Corollario 1.12.3**.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **1.12.2** *Siano* $0 \neq T = T^* \in \mathcal{K}(H)$, $\{\lambda_n\}$ *il sistema dei suoi autovalori diversi da 0,* $\{x_n\}$ *il sistema ortonormale di corrispondenti autovettori costruiti nella* **Proposizione 1.12.8***; allora*

$$\forall x \in H, \quad Tx = \sum_n \lambda_n\,(x, x_n)\,x_n. \tag{1.64}$$

Dim.: poniamo $V := \overline{\operatorname{span}}\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$; si ha, per il Teorema di decomposizione, $x = P_V x + P_{V^\perp} x$, e, per la (1.63), $T(P_{V^\perp} x) = 0$. Poiché $\{x_n\}$ è completo in V, ne viene che $P_V x = \sum_n (P_V x, x_n)x_n = \sum_n (x, x_n)x_n$, quindi

$$Tx = T(P_V x) = \sum_n (P_V x, x_n)Tx_n = \sum_n \lambda_n(x, x_n)x_n. \ \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{Corollario}}$ **1.12.4** *Se* $\{\lambda_n\}$ *sono gli autovalori* distinti *e non nulli di* $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$, *e* P_n *sono i proiettori sui corrispondenti autospazi* V_n, *si ha*

$$H = N(T) \oplus_n V_n; \qquad T = \sum_n \lambda_n\, P_n. \ \blacksquare$$

Una conseguenza del Teorema di rappresentazione spettrale:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.12.12** *Gli operatori a rango finito sono densi in* $\mathcal{K}(H)$*; di conseguenza, lo sono anche gli operatori di* Hilbert-Schmidt.

Dim.: poiché ogni $T \in \mathcal{K}(H)$ si scrive nella forma $T = T_1 + iT_2$, con T_1, T_2 compatti ed hermitiani, è sufficiente mostrare che ogni operatore compatto ed hermitiano T è limite uniforme di operatori a rango finito. Per la (1.64), si ha $Tx = \sum_n \lambda_n(x, x_n)x_n$; posto $T_n x := \sum_{k=1}^n \lambda_k(x, x_k)x_k$, ogni T_n è a rango finito; inoltre, $\forall x$ con $\|x\| = 1$ si ha

$$\|Tx - T_n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k^2 |(x, x_k)|^2 \leq \lambda_{n+1}^2,$$

quindi T_n tende uniformemente a T. Si osservi che anche gli operatori T_n sono hermitiani:

$$(T_n x, y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(x, x_k)(x_k, y) = \sum_{k=1}^n \overline{\lambda_k(y, x_k)(x_k, x)} = \overline{(T_n y, x)} = (x, T_n y). \ \blacksquare$$

Dal **Teorema 1.12.2** si deduce la seguente notevole caratterizzazione degli operatori di Hilbert-Schmidt:

$\boxed{\textbf{Corollario}}$ **1.12.5** *L'operatore* $T = T^* \in \mathcal{K}(H)$ *è di* Hilbert-Schmidt *se e solo se i suoi autovalori* λ_n *verificano la condizione* $\sum_n \lambda_n^2 < +\infty$*; in tal caso, si ha* $\|T\|_{\mathcal{HS}} = \left(\sum_n \lambda_n^2\right)^{1/2}$. $\blacksquare$

È interessante osservare che *ogni* successione infinitesima reale può essere considerata la successione degli autovalori di un operatore compatto hermitiano:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **1.12.13** *Data una qualunque successione* $\{\lambda_n\}$ *infinitesima di numeri reali, esiste un operatore compatto hermitiano* T *che ha tutti e soli i* λ_n *come autovalori.*

Dim.: scelta in H una base hilbertiana $\{x_n\}$, e posto $T_n x := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, x_k) x_k$ $\forall n \in \mathbb{N}$, gli operatori T_n sono a rango finito ed hermitiani. Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon :$ $\forall n > n_\varepsilon$ si abbia $|\lambda_n| < \varepsilon$; per ogni $n > n_\varepsilon$, $r \in \mathbb{N}$, x con $\|x\| = 1$, si ha allora

$$\|T_{n+r}x - T_n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+r} \lambda_k^2 |(x, x_k)|^2 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2 = \varepsilon^2;$$

quindi $\|T_{n+r} - T_n\| \leq \varepsilon$, cioè $\{T_n\}$ verifica la condizione di Cauchy in $\mathcal{L}(H)$, dunque converge uniformemente ad un operatore compatto hermitiano T. In particolare, $\forall x \in H$ si ha $s\text{-}\lim_n T_n x_n = Tx = \sum_n \lambda_n (x, x_n) x_n$. È evidente che $T x_n = \lambda_n x_n$ $\forall n$, cioè ogni λ_n è un autovalore di T; dato che il sistema $\{x_n\}$ è completo, non esistono autovalori di T diversi dai λ_n. Si osservi che la successione $\{\lambda_n\}$ *può* contenere lo zero, eventualmente ripetuto (anche infinite volte). ∎

Estendiamo ora il Teorema di rappresentazione spettrale ad *ogni* operatore compatto tra due spazi di Hilbert *non necessariamente coincidenti*; in particolare, tale estensione vale per ogni operatore compatto ma *non necessariamente hermitiano* su uno spazio di Hilbert. Dai risultati precedenti è facile dedurre la seguente

Proposizione 1.12.14 *Siano H_1, H_2 due spazi di* Hilbert, *e T un operatore in $\mathcal{K}(H_1, H_2)$; se T non è a rango finito,*[28] *esistono una successione infinitesima $\{\lambda_n\}$ di numeri reali > 0, un sistema ortonormale $\{x_n\}$ in H_1 ed un sistema ortonormale $\{x'_n\}$ in H_2 tali che*

$$\forall x \in H_1 \quad Tx = \sum_n \lambda_n \, (x, x_n)_1 \, x'_n. \tag{1.65}$$

Dim.: per la **Proposizione 1.12.2**, l'operatore $T^* T$ è compatto in H_1; è poi evidente che $T^* T$ è *hermitiano*, e *semidefinito positivo*, dato che risulta $(T^* T\, x, x)_1 = \|T\, x\|_2^2 \geq 0$ $\forall x \in H_1$. Dal **Teorema 1.12.2** segue che $T^* T$ ha una successione di autovalori $\{\mu_n\}$ strettamente positivi, ed una corrispondente successione di autovettori ortonormali $\{x_n\}$; $\forall x$ in H_1, si ha $T^* T\, x = \sum_n \mu_n \, (x, x_n)_1 \, x_n$. Inoltre, $T^* T$ è nullo su $W := \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}^\perp$, e ne viene che anche T si annulla su W, dato che, $\forall w \in W$, $\|T\, w\|_2^2 = (T^* T\, w, w)_1 = 0$. Poichè ogni $x \in H_1$ si scrive nella forma $x = \sum_n (x, x_n)_1 \, x_n + w$ con $w \in W$, si ha allora $Tx = \sum_n (x, x_n)_1 \, T x_n$. Poniamo $\lambda_n := \sqrt{\mu_n}$ e $x'_n := T x_n / \lambda_n$; ne segue che $Tx = \sum_n \lambda_n \, (x, x_n)_1 \, x'_n$, e resta solo da mostrare che $\{x'_n\}$ è un sistema ortonormale in H_2. Ma questo è immediato, dato che

$$\begin{aligned} (x'_n, x'_m)_2 &= \lambda_n^{-1} \lambda_m^{-1} \, (T x_n, T x_m)_2 = \lambda_n^{-1} \lambda_m^{-1} \, (T^* T x_n, x_m)_1 = \\ &= \lambda_n \lambda_m^{-1} (x_n, x_m)_1 = \delta_{n,m}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 1.12.2 Siano $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ due sistemi ortonormali, rispettivamente in H_1 ed in H_2. Sia poi $\{\lambda_n\}$ una *qualunque* successione *limitata* di numeri complessi, e si ponga

$$\lambda := \sup_n |\lambda_n|.$$

Per ogni $x \in H_1$, la serie $\sum_n |\lambda_n|^2 |(x, x_n)_1|^2$ è convergente, perché risulta $|\lambda_n|^2 \, |(x, x_n)_1|^2 \leq \lambda^2 \, |(x, x_n)_1|^2$, e $\sum_n |(x, x_n)_1|^2 \leq \|x\|_1^2$ per la disuguaglianza

[28] se T è a rango finito, le uniche (ovvie) varianti derivano dal fatto che le successioni $\{\lambda_n\}, \{x_n\}, \{x'_n\}$ si riducono ad n-ple $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; $x_1, \ldots, x_n$; $x'_1, \ldots, x'_n$, con $n = \dim R(T)$.

di Bessel. Per la **Proposizione 1.8.6**, è quindi convergente (in H_2) la serie $\sum_n \lambda_n \, (x, x_n)_1 \, x'_n$, ed *è dunque lecito porre*

$$Tx := \sum_n \lambda_n \, (x, x_n)_1 \, x'_n \quad \forall x \in H_1$$

È evidente che l'operatore $T : H_1 \to H_2$ così definito è *lineare*; inoltre, è *limitato*, dato che $\|Tx\|_2^2 \le \lambda^2 \, \|x\|_1^2$, e $\|T\| \le \lambda$. Anzi, risulta $\|T\| = \lambda$: infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda - \varepsilon < |\lambda_{n_\varepsilon}| \le \lambda$, quindi $\|Tx_{n_\varepsilon}\|_2 = |\lambda_{n_\varepsilon}| > (\lambda - \varepsilon) \, \|x_{n_\varepsilon}\|_1$, da cui $\|T\| \ge \lambda$, dunque l'uguaglianza $\|T\| = \lambda$.

Se poi $\{\lambda_n\}$ è infinitesima, T è *compatto*, perché limite uniforme degli operatori a rango finito T_n definiti da $T_n \, x := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, (x, x_k)_1 \, x'_k$; si ha infatti $\|Tx - T_n \, x\|_2^2 \le \left(\sup_{k>n} |\lambda_k|^2\right) \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^2 \le \left(\sup_{k>n} |\lambda_k|^2\right) \|x\|_1^2$, da cui $\|T - T_n\|^2 \le \sup_{k>n} |\lambda_k|^2$, e l'ultima quantità tende a zero quando $n \to +\infty$. ∎

Corollario 1.12.6 *Ogni operatore $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ può essere scritto come limite uniforme di una successione di operatori a rango finito.*

Dim.: se T ha la rappresentazione (1.65), T è limite uniforme degli operatori T_n definiti da $T_n x := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, (x, x_k) \, x'_k$: si ha infatti

$$\|Tx - T_n x\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k^2 \, |(x, x_k)|^2 \le \left(\sup_{k>n} \lambda_k^2 \right) \|x\|_1^2,$$

da cui $\|T - T_n\|^2 \le \sup_{k>n} \lambda_k^2$, quantità infinitesima per $n \to +\infty$. ∎

Capitolo 2

SPAZI DI BANACH

In questo Capitolo (con l'eccezione di una piccola parte del **§2.10**), supporremo per semplicità che tutti gli spazi vettoriali siano sul campo dei numeri *reali*; si veda però la parte conclusiva del prossimo Paragrafo.

2.1 Il teorema di HAHN-BANACH.

Nel **Capitolo 1** abbiamo dato una dimostrazione (molto semplice) del Teorema di HAHN-BANACH, valida però solo in ambito hilbertiano. Mostriamo ora come in realtà questo fondamentale teorema valga in ipotesi ben più generali; la dimostrazione, tuttavia, non sarà di tipo costruttivo, ma utilizzerà il Lemma di ZORN.

Teorema 2.1.1 *Sia E uno spazio vettoriale* reale, *e sia $p : E \to \mathbb{R}$ un fissato funzionale* **positivamente omogeneo** *e* **subadditivo**, *cioè tale che:*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda > 0; \tag{2.1}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \tag{2.2}$$

Se φ è un funzionale lineare (reale), definito sulla varietà lineare (propria) V di E, tale che risulti $\varphi(x) \leq p(x) \quad \forall x \in V$, allora si può prolungare *φ ad un funzionale lineare f definito su* tutto *E, che verifica $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$.*

Dim.: cominciamo a dimostrare il seguente risultato:

fissato $x_0 \notin V$, e posto $W := \mathrm{span}\,\{\{x_0\}, V\}$, è possibile prolungare φ ad un funzionale lineare $\widetilde{\varphi}$ con $\mathrm{dom}\,\widetilde{\varphi} = W$ e $\widetilde{\varphi}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in W$.

Infatti, ogni $x \in W$ si scrive nella forma $x = v + \alpha x_0$, con $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; tale decomposizione è *unica*, perché se $x = v + \alpha x_0 = v' + \alpha' x_0$, con $v, v' \in V$ e $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, si ha $v - v' = (\alpha' - \alpha)x_0 \in V \cap \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{0\}$, da cui $v' = v$ e $\alpha' = \alpha$. Fissato $c \in \mathbb{R}$, è allora lecito porre

$$\varphi_c(x) = \varphi_c(v + \alpha x_0) := \varphi(v) + \alpha c \quad \forall x = v + \alpha x_0 \in W.$$

L'unicità della decomposizione permette subito di concludere che il funzionale così definito su W è, per *ogni* $c \in \mathbb{R}$, un *prolungamento lineare* di φ; resta da mostrare che è possibile scegliere c in modo che risulti $\varphi_c(x) \leq p(x)\ \forall x \in W$. Per questo, si osservi intanto che $\forall v_1, v_2 \in V$ si ha

$$\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \leq p(v_1 + v_2) \leq p(v_1 + x_0) + p(v_2 - x_0),$$

cioè

$$\varphi(v_2) - p(v_2 - x_0) \leq p(v_1 + x_0) - \varphi(v_1);$$

ne viene che

$$\lambda_1 := \sup_{v_2 \in V} (\varphi(v_2) - p(v_2 - x_0)) \leq \inf_{v_1 \in V} (p(v_1 + x_0) - \varphi(v_1)) := \lambda_2.$$

Se si sceglie $c \in [\lambda_1, \lambda_2]$, per tale c risulta, per ogni $v \in V$,

$$\varphi_c(v - x_0) = \varphi(v) - c \leq p(v - x_0), \quad \text{e} \quad \varphi_c(v + x_0) = \varphi(v) + c \leq p(v + x_0).$$

Ne segue che, $\forall x = v + \alpha x_0 \in W$, è verificata la condizione $\varphi_c(x) \leq p(x)$: infatti,

$$\begin{cases} \text{se } \alpha > 0,\ \varphi_c(x) = \alpha\varphi_c\left(\frac{v}{\alpha} + x_0\right) \leq \alpha p\left(\frac{v}{\alpha} + x_0\right) = p(x); \\ \text{se } \alpha < 0,\ \varphi_c(x) = (-\alpha)\varphi_c\left(-\frac{v}{\alpha} - x_0\right) \leq (-\alpha) p\left(-\frac{v}{\alpha} - x_0\right) = p(x) \\ \text{se } \alpha = 0,\ \varphi_c(x) = \varphi(v) \leq p(v) = p(x); \end{cases}$$

il funzionale $\widetilde{\varphi} := \varphi_c$ verifica le richieste poste, e ciò conclude la prima parte della dimostrazione.

Per terminare la dimostrazione, utilizziamo il Lemma di Zorn. Definiamo $\mathcal{F}$ come la famiglia dei **prolungamenti lineari** g di φ che verificano la condizione $g(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in \operatorname{dom} g$:

$$g \in \mathcal{F} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \operatorname{dom} g \textit{ è una varietà lineare di } E; \\ g : \operatorname{dom} g \to \mathbb{R} \textit{ è lineare}; \\ V \subset \operatorname{dom} g, \textit{ e } g(v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V; \\ g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom} g. \end{cases}$$

È chiaro che $\mathcal{F}$ è non vuota (perché $\varphi \in \mathcal{F}$); dati $g_1, g_2 \in \mathcal{F}$, poniamo

$$g_1 \preceq g_2 \overset{def}{\iff} \operatorname{dom} g_1 \subset \operatorname{dom} g_2, \text{ e } g_1(x) = g_2(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom} g_1.$$

La relazione così definita è evidentemente un ordine (parziale) in $\mathcal{F}$.

Se $\mathcal{C} = \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è una catena in $\mathcal{F}$, poniamo $\operatorname{dom} g := \bigcup_\lambda \operatorname{dom} g_\lambda$, e $g(x) := g_\lambda(x)$ se $x \in \operatorname{dom} g_\lambda$. Si osservi che:

- la definizione è ben posta: se $x \in \operatorname{dom} g_\lambda \cap \operatorname{dom} g_\mu$, dato che $\mathcal{C}$ è una catena si deve avere $g_\lambda \preceq g_\mu$ oppure $g_\mu \preceq g_\lambda$; in ciascuno dei due casi, risulta per definizione $g_\lambda(x) = g_\mu(x)$;
- $\operatorname{dom} g$ è *una varietà lineare*, e g è *lineare*: $\forall x, y \in \operatorname{dom} g,\ \ \exists \lambda, \mu \in \Lambda$ tali che sia $x \in \operatorname{dom} g_\lambda,\ y \in \operatorname{dom} g_\mu$; ancora, deve essere $g_\lambda \preceq g_\mu$ oppure $g_\mu \preceq g_\lambda$; se, ad esempio, $g_\lambda \preceq g_\mu$, allora $\alpha x + \beta y \in \operatorname{dom} g_\mu \subset \operatorname{dom} g \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $g(\alpha x + \beta y) = g_\mu(\alpha x + \beta y) = \alpha g_\mu(x) + \beta g_\mu(y) = \alpha g(x) + \beta g(y)$;
- $\forall \lambda \in \Lambda$, si ha $V \subset \operatorname{dom} g_\lambda$, quindi $V \subset \operatorname{dom} g$;
- infine, $\forall x \in \operatorname{dom} g \ \ \exists \lambda \in \Lambda : \ g(x) = g_\lambda(x)$, quindi $g(x) \leq p(x)$.

Dunque $g \in \mathcal{F}$, ed è evidentemente un maggiorante per $\mathcal{C}$; perciò, $(\mathcal{F}, \preceq)$ è un insieme induttivo, e, per il Lemma di Zorn, ammette un elemento massimale f; resta solo da verificare che $\operatorname{dom} f = E$. Se, per assurdo, $\operatorname{dom} f \neq E$, fissato x_0 in $E \setminus \operatorname{dom} f$, grazie alla prima parte della dimostrazione si potrebbe prolungare f ad un funzionale lineare $\tilde{f}$ di dominio $W' = \operatorname{span}\{\{x_0\}, \operatorname{dom} f\}$ e tale che

$\tilde{f}(x) \le p(x)\ \forall x \in W'$. Dunque $\tilde{f} \in \mathcal{F}$, ed $\tilde{f}$ *seguirebbe strettamente* f nella relazione d'ordine definita su $\mathcal{F}$, assurdo perché f è massimale. ∎

Vediamo alcune notevoli conseguenze:

Corollario 2.1.1 *Sia φ un funzionale lineare e continuo definito sulla varietà lineare V dello spazio normato E; esiste almeno un prolungamento f di φ a tutto E, che verifica la condizione $\|f\|_* = \mu_V(\varphi)$.*

Dim.: basta applicare il Teorema precedente con $p(x) := \mu_V(\varphi)\,\|x\|$. ∎

Corollario 2.1.2 *Per ogni $x_0 \in E$, esiste $f_0 \in E^*$ tale che*

$$\|f_0\|_* = \|x_0\|; \qquad f_0(x_0) = \|x_0\|^2. \tag{2.3}$$

Dim.: posto $V := \mathrm{span}\{x_0\}$ e $\varphi(\lambda x_0) := \lambda\|x_0\|^2$, cosicché $\mu_V(\varphi) = \|x_0\|$, si può applicare il Corollario precedente, ed ottenere un prolungamento f_0 di φ con le proprietà richieste. ∎

Corollario 2.1.3 *$\forall x_0 \in E$, risulta*

$$\|x_0\| = \max_{f\neq 0} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|_*}.$$

Dim.: il risultato è ovvio se $x_0 = 0$; se $x_0 \neq 0$, posto $\lambda := \sup_{f\neq 0}(|f(x_0)|/\|f\|_*)$, si ha evidentemente $\lambda \le \|x_0\|$; d'altra parte, se f_0 è il funzionale definito nel Corollario precedente, risulta $(|f_0(x_0)|/\|f_0\|_*) = \|x_0\|$, quindi $\lambda \ge \|x_0\|$, da cui l'uguaglianza $\lambda = \|x_0\|$. ∎

Osservazione 2.1.1 Se la norma in E è indotta da un prodotto scalare, c'è *unicità* sia del prolungamento descritto nel **Corollario 2.1.1** (si veda il **Corollario 1.6.4**), sia, evidentemente, del funzionale f_0 nel **Corollario 2.1.2**: se y_0 è tale che $f_0(x) = (y_0, x)\ \forall x \in E$, da $\|f_0\|_* = \|y_0\| = \|x_0\|$ e $f_0(x_0) = (y_0, x_0) = \|x_0\|^2$ si ricava che $(y_0, x_0) = \|y_0\|\,\|x_0\|$, il che, per il **Teorema 1.1.1**, è possibile solo se $y_0 = x_0$. In generale, quando la norma non è hilbertiana l'unicità viene invece a mancare in entrambi i Corollari. Un esempio: sia $E = \mathbb{R}^2$, munito della norma $\|x\| = \|x_1 e^{(1)} + x_2 e^{(2)}\| := |x_1| + |x_2|$; posto $V := \mathrm{span}\{e^{(1)}\}$, $p(x) := \|x\|$, $x_0 := e^{(2)}$ e $\varphi(x_1 e^{(1)}) := x_1$, si vede facilmente che, con le notazioni del **Teorema 2.1.1**, in questo caso risulta $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Pertanto, per ogni $c \in [-1, 1]$ il funzionale f_c definito da $f_c(x_1 e^{(1)} + x_2 e^{(2)}) := x_1 + c x_2$ è un prolungamento lineare di φ tale che $\|f_c\|_* = \mu_V(\varphi) = 1$. Inoltre risulta $f_c(e^{(1)}) = 1 = \|e^{(1)}\|^2$ e $\|f_c\|_* = 1 = \|e^{(1)}\|$. ∎

Poniamo la seguente

Definizione 2.1.1 *La norma $\|\,.\,\|$ dello spazio normato $(E; \|\,.\,\|)$ si dice* **strettamente convessa**[29] *se*

$$(x_1 \neq x_2, \quad \|x_1\| = \|x_2\| = 1, \quad t \in]0,1[)$$
$$\textit{implicano } (\|t x_1 + (1-t) x_2\| < 1). \ \blacksquare$$

[29] in inglese, **rotund**

Si noti che la norma indotta dal prodotto scalare in uno spazio prehilbertiano *è sempre* strettamente convessa: se $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ e $0 < t < 1$, si ha

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\|^2 = t^2 + 2t(1-t)(x_1, x_2) + (1-t)^2 \leq 1$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $(x_1, x_2) = 1 = \|x_1\|\,\|x_2\|$, il che implica $x_1 = x_2$. Si controlla inoltre facilmente che

Proposizione 2.1.1 *Se la norma* $\|\,.\,\|_*$ *nel* duale E^* *dello spazio normato* $(E; \|\,.\,\|)$ *è* strettamente convessa*, il prolungamento* f *ed il funzionale* f_0 *definiti rispettivamente nei* **Corollari 2.1.1** *e* **2.1.2** *sono* unici*.*

Dim.: nelle ipotesi del **Corollario 2.1.1**, sia $\{x_n\} \subset V$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $\varphi(x_n) \to \mu_V(\varphi)$, e siano $f, g \in E^*$ due prolungamenti di $\varphi \neq 0$ tali che $\|f\|_* = \|g\|_* = \mu_V(\varphi)$. Per ogni $t \in]0,1[$ si ha allora

$$\|tf + (1-t)g\|_* \leq t\|f\|_* + (1-t)\|g\|_* = \mu_V(\varphi);$$

d'altra parte

$$\begin{aligned}\|tf + (1-t)g\|_* &\geq (tf + (1-t)g)(x_n) = t\varphi(x_n) + (1-t)\varphi(x_n) = \\ &= \varphi(x_n) \to \mu_V(\varphi)\,,\end{aligned}$$

quindi $\|tf + (1-t)g\|_* = t\|f\|_* + (1-t)\|g\|_*$, da cui, per la stretta convessità della norma in E^*, $f = g$.

Ne discende facilmente anche l'unicità del funzionale f_0 descritto nel **Corollario 2.1.2**: se $g_0 \in E^*$ è tale che $\|g_0\|_* = \|x_0\|$ e $g_0(x_0) = \|x_0\|^2$, per ogni $t \in]0,1[$ si ha allora che $(tf_0 + (1-t)g_0)(x_0) = \|x_0\|^2$, quindi $\|x_0\| = t\|f_0\|_* + (1-t)\|g_0\|_* \geq \|tf_0 + (1-t)g_0\|_* \geq \geq \big[|(tf_0 + (1-t)g_0)(x_0)|/\|x_0\|\big] = \|x_0\|$, da cui, sempre per la stretta convessità della norma $\|\,.\,\|_*$, $g_0 = f_0$. ∎

Alcuni esempi di spazi duali.

Nel **Paragrafo 1.6** si è mostrato (**Teorema 1.6.2**) come ogni spazio di Hilbert sia isometricamente isomorfo al suo duale. Questa proprietà *non* si estende agli spazi di Banach, per i quali si pone quindi il problema di determinare, di volta in volta, uno spazio che sia isometricamente isomorfo al duale dello spazio in considerazione.

Esamineremo dapprima la situazione per gli spazi ℓ^p, con la limitazione $1 \leq p < +\infty$.

Teorema 2.1.2 *Per ogni* $p \in [1, +\infty[$*, il duale di* ℓ^p *è isometricamente isomorfo ad* ℓ^q*, dove* q *è l'* esponente coniugato *di* p *(***Definizione 1.3.2***).*

Dim.: fissato $x^{(q)} \in \ell^q$, il funzionale lineare

$$x^{(p)} = \{x_n^{(p)}\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{(q)}\, x_n^{(p)}$$

è definito su tutto ℓ^p, ed è *limitato*, dato che, grazie alla disuguaglianza di Hölder (1.8),

$$\forall x^{(p)} \in \ell^p, \quad \left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{(q)}\, x_n^{(p)}\right| \le \left\|\{x_n^{(q)}\, x_n^{(p)}\}\right\|_1 \le \left\|x^{(q)}\right\|_q \left\|x^{(p)}\right\|_p;$$

quindi è un elemento di $(\ell^p)^*$, che indichiamo con $J^{(q)}x^{(q)}$:

$$\left(J^{(q)}x^{(q)}\right)(x^{(p)}) := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{(q)}\, x_n^{(p)}. \tag{2.4}$$

L'applicazione $J^{(q)} : \ell^q \to (\ell^p)^*$ così definita è evidentemente lineare, e da quanto precede si ha che

$$\left\|J^{(q)}x^{(q)}\right\|_{(\ell^p)^*} \le \|x^{(q)}\|_q. \tag{2.5}$$

Per completare la dimostrazione, basta quindi mostrare che $J^{(q)}$ è *suriettiva* ed inoltre è un'*isometria*. Fissiamo allora f ad arbitrio in $(\ell^p)^*$. Se $\xi \in \ell^q$ è tale che $J^{(q)}\xi = f$, deve necessariamente risultare $f(e^{(n)}) = (J^{(q)}\xi)(e^{(n)}) = \xi_n$. Si tratta quindi di verificare: da un lato, che, posto $\xi = \{\xi_n := f(e^{(n)})\}$, si ha $\xi \in \ell^q$ e $J^{(q)}\xi = f$; dall'altro, che $\|\xi\|_q = \|f\|_{(\ell^p)^*}$; anzi, vista la (2.5), che $\|\xi\|_q \le \|f\|_{(\ell^p)^*}$.

Mostriamo che $\xi \in \ell^q$ e $\|\xi\|_q \le \|f\|_{(\ell^p)^*}$. Per $p = 1$, si ha $|\xi_n| = |f(e^{(n)})| \le \|f\|_{(\ell^1)^*}$, quindi $\xi \in \ell^\infty$ e $\|\xi\|_\infty \le \|f\|_{(\ell^1)^*}$. Se $1 < p < +\infty$, posto $\lambda_n := \operatorname{sign} \xi_n$ risulta, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^q &= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n\, \xi_n\, |\xi_n|^{q-1} = f\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n\, e^{(n)}\, |\xi_n|^{q-1}\right) \le \\
&\le \|f\|_{(\ell^p)^*} \left\|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n\, e^{(n)}\, |\xi_n|^{q-1}\right\|_p = \|f\|_{(\ell^p)^*} \left(\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^q\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

da cui

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^q\right)^{1-1/p} = \left(\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^q\right)^{1/q} \le \|f\|_{(\ell^p)^*}. \tag{2.6}$$

Passando al limite per $N \to +\infty$, si ottiene che $\xi \in \ell^q$ e $\|\xi\|_q \le \|f\|_{(\ell^p)^*}$.

Infine, mostriamo che $J^{(q)}\xi = f$. Fissato $x^{(p)} \in \ell^p$ (con $1 \le p < +\infty$), poniamo $y^N := \sum_{n=1}^{N} x_n^{(p)}\, e^{(n)}$ $(N \in \mathbb{N})$; si ha allora che $y^N \to x^{(p)}$ in ℓ^p, ed inoltre

$$(J^{(q)}\xi)(y^N) = \sum_{n=1}^{N} \xi_n\, x_n^{(n)} = f(y^N); \tag{2.7}$$

Passando al limite per $N \to +\infty$, si ottiene

$$(J^{(q)}\xi)(x^{(p)}) = f(x^{(p)}), \quad \text{da cui } J^{(q)}\xi = f. \ \blacksquare$$

Osservazione **2.1.2** La dimostrazione del Teorema precedente *non* si può estendere al caso $p = +\infty$. In effetti, è facile verificare che, per ogni fissato $x^{(1)} \in \ell^1$, il funzionale che manda $x^{(\infty)} \in \ell^\infty$ in $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{(1)}\, x_n^{(\infty)}$ è un elemento $J^{(1)}\, x^{(1)}$ in $(\ell^\infty)^*$, e che, inoltre, $J^{(1)}$ è un'applicazione lineare da ℓ^1 in $(\ell^\infty)^*$ che verifica

$\|J^{(1)}\,x^{(1)}\|_{(\ell^\infty)^*} \leq \|x^{(1)}\|_1$. Fissata poi $f \in (\ell^\infty)^*$, se si pone, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\xi_n := f(e^{(n)})$, dall'uguaglianza, valida $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} |\xi_n| = \sum_{n=1}^{N} f(e^{(n)})\,\mathrm{sign}\;\xi_n = f\left(\sum_{n=1}^{N} e^{(n)}\,\mathrm{sign}\;\xi_n\right)$$

si ricava che $\xi \in \ell^1$ e $\|\xi\|_1 \leq \|f\|_{(\ell^\infty)^*}$. Quindi $J^{(1)}$ è un'isometria lineare da ℓ^1 in $(\ell^\infty)^*$. *Non si può tuttavia concludere che $J^{(1)}$ sia suriettiva* (non è possibile procedere come nella dimostrazione del **Teorema 2.1.2**, perché se $x^{(\infty)} \in \ell^\infty$ la successione $\{y^N\}$, dove $y^N := \sum_{n=1}^{N} x_n^{(\infty)}\,e^{(n)}$, *non tende* in generale ad x in ℓ^∞).

In effetti, si consideri la varietà lineare $\mathfrak{c}$ di ℓ^∞ costituita dalle successioni $x = \{x_n\}$ che ammettono limite finito, e sia φ il funzionale definito su $\mathfrak{c}$ da $\varphi(x) := \lim_n x_n$. Si ha evidentemente che φ è lineare e continuo su $\mathfrak{c}$ (risulta $|\varphi(x)| \leq \|x\|_\infty$, e se ne deduce facilmente che $\mu_{\mathfrak{c}}(\varphi) = 1$), quindi, per il Teorema di Hahn-Banach, si può prolungare φ ad un elemento $f \in (\ell^\infty)^*$, con $\|f\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$. Tuttavia, per nessuno $\xi \in \ell^1$ può essere $J^{(1)}\xi = f$: in questo caso, si dovrebbe avere infatti che $\xi_n = f(e^{(n)}) = \varphi(e^{(n)}) = 0$, quindi $f = J^{(1)}\xi$ dovrebbe essere il funzionale nullo, il che è evidentemente assurdo (il vettore $x := \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ è in $\mathfrak{c}$, e $f(x) = \varphi(x) = 1$).

In realtà, non solo la dimostrazione, ma anche l'*enunciato* del **Teorema 2.1.2** *non si può* estendere al caso $p = +\infty$, come verrà mostrato più avanti: si veda il **Corollario 2.9.1**. ■

Un risultato perfettamente analogo a quello del Teorema precedente vale per gli spazi $L^p(\Omega)$:

Teorema 2.1.3 *Sia Ω un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^d$; per ogni p in $[1, +\infty[$, il duale di $L^p(\Omega)$ è isometricamente isomorfo ad $L^q(\Omega)$, dove q è l'esponente coniugato di p.*

Dim.: come nella dimostrazione del Teorema precedente, fissata $x^{(q)} \in L^q(\Omega)$ si vede, questa volta grazie alla disuguaglianza di Hölder (1.16), che l'applicazione lineare da $L^p(\Omega)$ in $\mathbb{R}$

$$x^{(p)} \mapsto \int_\Omega x^{(q)}(t)\,x^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t$$

è ben definita, ed è *limitata*:

$$\left|\int_\Omega x^{(q)}(t)\,x^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left\|x^{(q)}\right\|_q \left\|x^{(p)}\right\|_p,$$

quindi individua un elemento $J^{(q)}x^{(q)} \in (L^p(\Omega))^*$:

$$\left(J^{(q)}x^{(q)}\right)(x^{(p)}) := \int_\Omega x^{(q)}(t)\,x^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.8}$$

L'applicazione $J^{(q)} : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ definita dalla (2.8) è lineare, ed inoltre si ha che $\left\|J^{(q)}x^{(q)}\right\|_{(L^p(\Omega))^*} \leq \left\|x^{(q)}\right\|_q$.

Ancora, distinguiamo due casi, $p = 1$ e $1 < p < +\infty$. La dimostrazione sarà completata nel primo caso se mostriamo che $\forall f \in (L^1(\Omega))^*\ \ \exists y \in L^\infty(\Omega)$ tale che $f = J^{(\infty)}y$, e $\|y\|_\infty \leq \|J^{(\infty)}y\|_{(L^1(\Omega))^*}$. Fissiamo allora $f \in (L^1(\Omega))^*$, ed una successione $\{\Omega_n\}$ di sottoinsiemi misurabili e di misura finita di Ω, tali che $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$; è lecito supporre che gli Ω_n siano a due a due disgiunti (altrimenti, è sufficiente sostituire ogni Ω_{n+1} con il sottoinsieme $\Omega_{n+1} \setminus (\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n)$), ed indichiamo con χ_n la funzione caratteristica di Ω_n. Fissiamo poi una successione $\{\lambda_n\}$ di numeri *strettamente positivi* tali che la serie $\sum_n \lambda_n^2\, m(\Omega_n)$ converga, e definiamo $\xi \in L^2(\Omega)$ ponendo $\xi(t) := \sum_n \lambda_n\, \chi_n(t)$; si ha allora $\|\xi\|_2^2 = \sum_n \lambda_n^2\, m(\Omega_n)$, e per ogni $x \in L^2(\Omega)$ risulta

$$\|\xi x\|_1 = \int_\Omega |\xi(t)\, x(t)|\, \mathrm{d}t \le \|\xi\|_2\, \|x\|_2.$$

Il funzionale (lineare) $x \mapsto f(\xi x)$ è *continuo* su $L^2(\Omega)$, dato che

$$|f(\xi x)| \le \|f\|_*\, \|\xi x\|_1 \le (\|f\|_*\, \|\xi\|_2)\, \|x\|_2;$$

per il **Teorema 1.6.2**, esiste una funzione $z \in L^2(\Omega)$ tale che

$$f(\xi x) = (z, x)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega z(t)\, x(t)\, \mathrm{d}t \quad \forall x \in L^2(\Omega). \tag{2.9}$$

Poniamo, q.o. in Ω, $y(t) := z(t)/\xi(t)$, come è possibile, dato che $\xi(t) > 0$ q.o. in Ω. Risulta evidentemente $y\chi_n \in L^2(\Omega)$; per ogni fissata $u \in L^\infty(\Omega)$, scegliendo nella (2.9) $x := \chi_n u/\xi$ (funzione che è in $L^2(\Omega)$) si ottiene che

$$f(\chi_n u) = \int_\Omega y(t)\, \chi_n(t)\, u(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\Omega_n} y(t)\, u(t)\, \mathrm{d}t \quad \forall u \in L^\infty(\Omega). \tag{2.10}$$

Mostriamo ora che $y \in L^\infty(\Omega)$, anzi che $\|y\|_\infty \le \|f\|_*$. Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, poniamo

$$A_\varepsilon := \{t \in \Omega \mid |y(t)| \ge \|f\|_* + \varepsilon\},$$

e verifichiamo che $m(A_\varepsilon) = 0$. Infatti, se nella (2.10) si sceglie $u = \chi_{A_\varepsilon} \operatorname{sign} y$ si ha che

$$(\|f\|_* + \varepsilon)\, m(A_\varepsilon \cap \Omega_n) \le \int_{A_\varepsilon \cap \Omega_n} |y(t)|\, \mathrm{d}t \le \|f\|_*\, m(A_\varepsilon \cap \Omega_n),$$

possibile solo se $m(A_\varepsilon \cap \Omega_n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, da cui $m(A_\varepsilon) = 0$; per l'arbitrarietà di ε, ne segue che $|y(t)| \le \|f\|_*$ q.o. in Ω.
È facile ora verificare che la (2.10) vale anche per ogni u fissata in $L^1(\Omega)$: in effetti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ponga

$$u_n(t) := \begin{cases} u(t) & \text{se } |u(t)| \le n, \\ n \operatorname{sign} u(t) & \text{se } |u(t)| > n. \end{cases}$$

Si controlla subito che, per il Teorema di Lebesgue, $\widetilde{\chi}_n\, u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$, dove $\widetilde{\chi}_n := \chi_1 + \ldots + \chi_n$ è la funzione caratteristica di $\widetilde{\Omega}_n := \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n$; scegliendo nella (2.10) $u = \widetilde{\chi}_n\, u_n$ e passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene che

$$f(u) = \int_\Omega y(t)\, u(t)\, \mathrm{d}t \quad \forall u \in L^1(\Omega), \tag{2.11}$$

il che conclude la dimostrazione *nel caso* $p = 1$.

Veniamo ora al caso $1 < p < +\infty$. Abbiamo verificato all'inizio della dimostrazione che l'applicazione $J^{(q)} : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))^*$ definita dalla (2.8) è lineare, e verifica la maggiorazione $\left\| J^{(q)} x^{(q)} \right\|_{(L^p(\Omega))^*} \le \left\| x^{(q)} \right\|_q$. Anzi, se per ogni $x^{(q)} \in \ell^q$ si definisce, q.o. in Ω,

$$\widetilde{x}^{(p)}(t) := \begin{cases} 0 & \text{se } x^{(q)}(t) = 0, \\ |x^{(q)}(t)|^{q-2}\, x^{(q)}(t) & \text{se } x^{(q)}(t) \ne 0, \end{cases}$$

si verifica immediatamente che

$$\widetilde{x}^{(p)} \in L^p(\Omega); \qquad \left\|\widetilde{x}^{(p)}\right\|_p = \left\|x^{(q)}\right\|_q^{q-1}; \qquad \left(J^{(q)}x^{(q)}\right)(\widetilde{x}^{(p)}) = \left\|x^{(q)}\right\|_q^q,$$

e ne viene facilmente che $J^{(q)}$ è un'*isometria* da $L^q(\Omega)$ in $(L^p(\Omega))^*$.

La suriettività di $J^{(q)}$ è più delicata; per $1 < p < +\infty$ omettiamo quindi una dimostrazione *diretta* (possibile, ma complicata), e rimandiamo al **Corollario 2.8.1**, che la presenta come conseguenza della riflessività di $L^p(\Omega)$. ■

Osserviamo che il **Teorema 2.1.3** vale anche per spazi del tipo $L^p(A, \mathcal{E}, \mu)$ costruiti in modo analogo agli $L^p(\Omega)$ ma a partire da uno spazio di misura σ-finito $(A, \mathcal{E}, \mu)$, con μ misura non negativa (di cui anche gli spazi ℓ^p sono un caso particolare). Per spazi di misura *non* σ-finiti, vale ancora lo stesso risultato, *solo però per* $1 < p < +\infty$.

Vediamo ora un altro esempio, che non rientra invece nella categoria degli **spazi di** Lebesgue $L^p(A, \mathcal{E}, \mu)$:

Definizione **2.1.2** $\mathfrak{c}_0$ *è lo spazio delle successioni* **infinitesime***, con norma definita da* $\|x\|_{\mathfrak{c}_0} := \|x\|_\infty$. ■

È chiaro che $\mathfrak{c}_0$ è una varietà lineare di ℓ^∞; anzi, come ora mostriamo, è un *sottospazio chiuso* di ℓ^∞, quindi è a sua volta uno spazio di Banach:

Proposizione **2.1.2** $\mathfrak{c}_0$ *è chiuso in* ℓ^∞.

Dim.: sia $\{x^{(n)}\}$ una successione in $\mathfrak{c}_0$ tale che $x^{(n)} \to x$ in ℓ^∞; dobbiamo mostrare che $x \in \mathfrak{c}_0$. Sia $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$; per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, $\exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon$, $\|x^{(n)} - x\|_\infty < \varepsilon/2$, quindi $|x_k^{(n)} - x_k| < \varepsilon/2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_\varepsilon$. Fissato $\overline{n} > n_\varepsilon$, esiste $\overline{k} = \overline{k}(\varepsilon, \overline{n})$ tale che, per ogni $k > \overline{k}$, risulti $|x_k^{(\overline{n})}| < \varepsilon/2$; dato che allora $|x_k| \le |x_k - x_k^{(\overline{n})}| + |x_k^{(\overline{n})}| < \varepsilon$, ne viene che $x_k \to 0$, cioè $x \in \mathfrak{c}_0$. ■

Proposizione **2.1.3** *Il duale* $\mathfrak{c}_0^*$ *di* $\mathfrak{c}_0$ *è isometricamente isomorfo a* ℓ^1.

Dim.: procediamo come nella dimostrazione del **Teorema 2.1.2**. Fissato $x^{(1)} \in \ell^1$, si verifica facilmente che il funzionale $\mathcal{J}x^{(1)}$ definito da $(\mathcal{J}x^{(1)})(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^{(1)} x_n \quad \forall x \in \mathfrak{c}_0$ è lineare e continuo, con $\|\mathcal{J}x^{(1)}\|_{\mathfrak{c}_0^*} \le \|x^{(1)}\|_1$. Per mostrare che $\mathcal{J}$ è un'isometria suriettiva di ℓ^1 su $\mathfrak{c}_0^*$, fissiamo ad arbitrio $f \in \mathfrak{c}_0^*$ e poniamo $\xi = \{\xi_n := f(e^{(n)})\}$. Per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha, posto $\lambda_n := \operatorname{sign} \xi_n$,

$$\sum_{n=1}^{N} |\xi_n| = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n f(e^{(n)}) = f\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n e^{(n)}\right) \le \|f\|_{\mathfrak{c}_0^*};$$

ne segue che $\xi \in \ell^1$ e $\|\xi\|_{\ell^1} \le \|f\|_{\mathfrak{c}_0^*}$. Grazie alla disuguaglianza opposta già dimostrata, si ha che $\|\xi\|_1 = \|f\|_{\mathfrak{c}_0^*} = \|\mathcal{J}\xi\|_{\mathfrak{c}_0^*}$. Per ogni $x = \{x_n\} \in \mathfrak{c}_0$ fissato, e per ogni $N \in \mathbb{N}$, poniamo $x^N := \sum_{n=1}^{N} x_n e^{(n)}$, cosicché $x^N \to x$ in $\mathfrak{c}_0$. Dato che $(\mathcal{J}\xi)(x^N) = f(x^N)$, se ne deduce che $(\mathcal{J}\xi)(x) = f(x)$, cioè, data l'arbitrarietà di x, che $\mathcal{J}\xi = f$. ■

Terminiamo questo Paragrafo con un'ultima osservazione. Abbiamo già detto che in questo Capitolo ci occuperemo solo di spazi reali. Per evitare equivoci, chiariamo però che anche il Teorema di Hahn-Banach (come del resto gli altri teoremi fondamentali dell'analisi funzionale citati nel **Capitolo 1**), può essere esteso al caso di spazi complessi. Prima di stabilire tale estensione, premettiamo alcune considerazioni. Se E è uno spazio vettoriale *complesso*, è evidentemente anche uno spazio vettoriale reale; occorre però distinguere tra *varietà lineare complessa* e *varietà lineare reale*:

Definizione 2.1.3 *Sia E uno spazio vettoriale complesso;*

i) V è una varietà lineare **complessa** (*risp.*, **reale**) *se $\alpha x + \beta y$ è in V $\forall x, y$ in V e $\forall \alpha, \beta$ in $\mathbb{C}$ (risp., $\forall \alpha, \beta$ in $\mathbb{R}$);*

ii) il funzionale f, definito sulla varietà lineare complessa (*oppure* reale) $\operatorname{dom} f$, *si dice* **lineare complesso** (*oppure* **lineare reale**) *se è a valori* complessi (*oppure* reali), *ed inoltre $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ $\forall x, y \in \operatorname{dom} f$, e $\forall \alpha, \beta$ in $\mathbb{C}$ (oppure $\forall \alpha, \beta$ in $\mathbb{R}$).* ■

È ovvio che una varietà lineare complessa è anche una varietà lineare reale, ma non vale, in generale, il viceversa: se $x \neq 0$, x ed ix sono linearmente indipendenti se il campo degli scalari è $\mathbb{R}$, mentre non lo sono se il campo degli scalari è $\mathbb{C}$.

Definizione 2.1.4 *Sia E uno spazio vettoriale complesso. L'applicazione $p : E \to \mathbb{R}$ è detta* **seminorma** *su E se verifica le seguenti proprietà:*

i) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$;

ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in E$. ■

Quindi, una seminorma verifica le proprietà di una norma, eccettuata la proprietà di *separazione*: è ancora vero che $p(x) \geq 0$ $\forall x \in E$, e che $p(0) = 0$, ma non è detto che $p(x)$ si annulli *solo* per $x = 0$.

Dimostriamo la seguente estensione del Teorema di Hahn-Banach:

Teorema 2.1.4 *Sia E uno spazio vettoriale complesso, e sia p una fissata seminorma su E. Se φ è un funzionale lineare complesso definito sulla varietà lineare complessa $V := \operatorname{dom} \varphi$, e tale che $|\varphi(v)| \leq p(v)$ $\forall v \in V$, allora φ si può prolungare ad un funzionale lineare complesso f definito su* tutto E, *che verifica $|f(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in E$.*

Dim.: per ogni $v \in V$, scriviamo $\varphi(v) = \varphi_1(v) + i\varphi_2(v)$ con $\varphi_1(v), \varphi_2(v) \in \mathbb{R}$: è evidente che φ_1, φ_2 sono funzionali lineari *reali*, e che $\varphi_1(v) \leq |\varphi_1(v)| \leq |\varphi(v)| \leq p(v)$. Inoltre, $\forall v \in V$ si ha

$$\varphi(iv) = \varphi_1(iv) + i\varphi_2(iv) = i\varphi(v) = -\varphi_2(v) + i\varphi_1(v),$$

cosicché $\varphi_2(v) = -\varphi_1(iv)$ $\forall v \in V$. Per il **Teorema 2.1.1**, è possibile estendere φ_1 ad un funzionale lineare reale f_1 definito su tutto E, tale che $f_1(x) \leq p(x)$ $\forall x \in E$; in particolare, $-f_1(x) = f_1(-x) \leq p(-x) = p(x)$, da cui $|f_1(x)| \leq p(x)$. Definiamo allora

$$f(x) := f_1(x) - i f_1(ix) \quad \forall x \in E.$$

Ne viene che $f(ix) = f_1(ix) - i f_1(-x) = f_1(ix) + i f_1(x) = i f(x)$, e se ne deduce immediatamente che f è un funzionale lineare *complesso* su E; inoltre, $\forall v \in V$ si ha che

$$f(v) = f_1(v) - i f_1(iv) = \varphi_1(v) - i\varphi_1(iv) = \varphi_1(v) + i\varphi_2(v) = \varphi(v),$$

quindi f è un'*estensione* (complessa) di φ a tutto E.

Resta infine da mostrare che $|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$; per questo, poniamo $f(x) = |f(x)| \exp(i\theta)$: si ha allora $0 \leq |f(x)| = f(x) \exp(-i\theta) = f(x \exp(-i\theta))$, quindi $|f(x)| = f_1(x \exp(-i\theta)) \leq p(x \exp(-i\theta)) = p(x)$. ■

2.2 Separazione di insiemi convessi.

Completiamo la **Definizione 1.6.1** nel modo seguente:

Definizione 2.2.1 *Sia X uno spazio vettoriale; chiamiamo* **iperpiano affine** *ogni* traslato *di un iperpiano (vettoriale), cioè ogni insieme della forma $x_0 + V$, dove x_0 è un qualsiasi elemento di X e V è un iperpiano (vettoriale).* ■

Si ottiene facilmente la seguente caratterizzazione:

Proposizione 2.2.1 *V_1 è un iperpiano affine se e solo se esistono un funzionale lineare f non identicamente nullo ed un numero reale λ tali che $V_1 = f^{-1}(\lambda)$.*

Dim.: se V è un iperpiano (vettoriale), x_0 è un elemento fissato in X, e $V_1 := x_0 + V$, si ha $V_1 = x_0 + \ker f$, dove $f \neq 0$ è lineare; quindi, per ogni $x \in V_1$ si ha $f(x) = f(x_0)$, da cui $V_1 \subset f^{-1}(f(x_0))$. Reciprocamente, se $x \in f^{-1}(f(x_0))$ si ha $x = x_0 + (x - x_0)$ con $x - x_0 \in \ker f$, da cui l'inclusione opposta, e, in definitiva, $V_1 = f^{-1}(\lambda)$ con $\lambda := f(x_0)$.

Viceversa, se $f \neq 0$ è un funzionale lineare, e $V_1 = f^{-1}(\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, fissato $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = \lambda$, si vede, procedendo in modo analogo, che $V_1 = x_0 + \ker f$; ciò conclude la dimostrazione. ■

Definizione 2.2.2 *Dati i due sottoinsiemi A, B dello spazio vettoriale X, si dice che l'iperpiano affine $f^{-1}(\lambda)$ (*iperpiano affine **di equazione $[f = \lambda]$** *)* **separa** *gli insiemi A e B:*

in senso largo, *se $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ $\forall (a \in A,\ b \in B)$ (o se $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$ per ogni $a \in A,\ b \in B$);*

in senso stretto, *se* $\sup_{a \in A} f(a) < \lambda < \inf_{b \in B} f(b)$, *(cioè se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(a) \leq \lambda - \varepsilon < \lambda + \varepsilon \leq f(b)$ $\forall (a \in A,\ b \in B)$, oppure se risulta* $\sup_{b \in B} f(b) < \lambda < \inf_{a \in A} f(a)$. ■

È del tutto ovvio (già in $\mathbb{R}$) che, senza qualche ipotesi di natura "geometrica", due *generici* insiemi non vuoti e disgiunti A, B *non sempre* possono essere separati –anche in senso largo– da un iperpiano affine. Alcune condizioni sufficienti, che vedremo tra poco, fanno intervenire in modo essenziale la *convessità* dei due insiemi:

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **2.2.3** *Siano X uno spazio vettoriale, e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ n vettori in X; ogni elemento z della forma*

$z = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k$, dove: $t_k \geq 0$ per $k = 1, \ldots n$, e $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$,

si dice **combinazione convessa** *degli elementi $x_1, \ldots, x_n$.*

L'insieme delle combinazioni convesse di due *elementi $x, y \in X$ si dice* **segmento** *di estremi x, y.*

Un sottoinsieme $K \subset X$ si dice **convesso** *se ogni segmento cha ha estremi in K è tutto contenuto in K.* ∎

Ogni insieme convesso ha la rilevante proprietà di contenere *tutte* le combinazioni convesse di un numero finito *qualunque* di suoi elementi:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.2.2** *Sia K un sottoinsieme convesso dello spazio vettoriale X. $\forall n \in \mathbb{N}$ e per ogni n-pla di elementi $x_1, \ldots, x_n \in K$, tutte le combinazioni convesse di $x_1, \ldots, x_n$ appartengono a K.*

Dim.: dimostriamo la proprietà per induzione sul numero di elementi. Assumiamo che essa valga quando il numero di elementi è $\leq n$; fissiamo poi $x_1, \ldots, x_{n+1} \in K$, ed una loro combinazione convessa $x := \sum_{k=1}^{n+1} t_k\, x_k$. Se $t_{n+1} = 1$, si ha $x = x_{n+1} \in K$; se $0 \leq t_{n+1} < 1$, si ha

$$x = (1 - t_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}}\, x_k + t_{n+1}\, x_{n+1}.$$

Poiché $y := \sum_{k=1}^{n} t_k\, (1 - t_{n+1})^{-1}\, x_k$ è una combinazione convessa di n elementi in K, anche $y \in K$ per l'ipotesi di induzione; ne viene quindi che anche x, combinazione convessa dei due elementi y, x_{n+1}, è in K. ∎

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **2.2.4** *Dato il sottoinsieme C dello spazio vettoriale X, si indica con* $\operatorname{conv} C$ *il* **convessificato di** *C, definito come l'insieme di tutte le combinazioni convesse di un qualunque numero finito di elementi in C.* ∎

È ovvio che $\operatorname{conv} C$ è convesso; anzi, si verifica facilmente che è l'intersezione di tutti i convessi in X che contengono C, quindi è *il più piccolo* insieme convesso che contiene C. Si noti che l'intersezione di una *qualunque* famiglia di insiemi convessi è sempre convessa, così come l'unione degli elementi di una *catena* (rispetto alla relazione di inclusione) di sottoinsiemi convessi.

Gli insiemi convessi in uno *spazio normato* hanno notevoli proprietà topologiche:

$\boxed{\textbf{Lemma}}$ **2.2.1** *Sia K un sottoinsieme convesso dello spazio normato E. Per ogni x* interno *a K, e per ogni y in K, il segmento semiaperto definito da $\{tx + (1-t)y \mid 0 < t \leq 1\}$ è* interno *a K.*

Dim.: sia $\varrho > 0$ tale che la sfera aperta $\Sigma(x, \varrho)$ sia contenuta in K; per ogni $t \in]0, 1]$ fissato, la sfera $\Sigma(tx + (1-t)y, t\varrho)$ è un intorno del punto $tx + (1-t)y$, ed è contenuta in K, dato che $\Sigma(tx + (1-t)y, t\varrho) = t\,\Sigma(x, \varrho) + (1-t)y$. ∎

Proposizione **2.2.3** *Sia K un sottoinsieme convesso dello spazio normato E; allora*

i) l'interno $\operatorname{int} K$ *e la chiusura* $\overline{K}$ *di K sono convessi;*

ii) se $\operatorname{int} K \neq \emptyset$*, allora* $\overline{K} = \overline{\operatorname{int} K}$.

iii) se K è aperto, $K = \operatorname{int} \overline{K}$.

Dim.: *i*): applicando il Lemma precedente, si vede che se $x, y \in \operatorname{int} K$ e $t \in [0,1]$ si ha $tx + (1-t)y \in \operatorname{int} K$. Se $x, y \in \overline{K}$, siano $\{x_n\}, \{y_n\} \subset K$ tali che $x_n \to x$, $y_n \to y$; per ogni $t \in [0,1]$ fissato, si ha $tx_n + (1-t)y_n \in K$, e $tx_n + (1-t)y_n \to tx + (1-t)y$, dunque $tx + (1-t)y \in \overline{K}$.

ii): basta dimostrare che $\overline{K} \subset \overline{\operatorname{int} K}$. Fissato ad arbitrio $x \in \overline{K}$, mostriamo che $\forall \varepsilon > 0$ si ha $\Sigma(x, \varepsilon) \cap \operatorname{int} K \neq \emptyset$. Sia $x_\varepsilon \in K$ tale che $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon/2$, e scegliamo $x_0 \in \operatorname{int} K$. Se $x_\varepsilon = x_0$ non c'è altro da aggiungere; altrimenti, per il **Lemma 2.2.1** si ha che per ogni $t \in]0,1]$ risulta $x_t := tx_0 + (1-t)x_\varepsilon \in \operatorname{int} K$. Se $0 < t < \varepsilon/(2\|x_0 - x_\varepsilon\|)$, si ha $\|x - x_t\| \leq \|x - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x_0\| < \varepsilon$, cioè $x_t \in \Sigma(x, \varepsilon) \cap \operatorname{int} K$.

iii): si veda il **Corollario 2.2.1** più avanti. ■

Ricordiamo (**Corollario 1.6.3**) che in ogni spazio normato a dimensione infinita si dimostra l'esistenza di funzionali lineari definiti su *tutto* lo spazio, ma non continui. Vale il seguente risultato, che estende parte della **Proposizione 1.6.4**:

Proposizione **2.2.4** *Sia E uno spazio normato; allora:*

i) ogni iperpiano (vettoriale o affine) è chiuso *o* denso*;*

ii) l'iperpiano V di equazione $[f = \lambda]$ è chiuso se e solo se f è continuo.

Dim.: è sufficiente dimostrare le proprietà nel solo caso degli iperpiani vettoriali.

i): è il **Corollario 1.6.2**.

ii): se f è continuo, $\ker f = f^{-1}(0)$ è chiuso. Reciprocamente, supponiamo $\ker f$ chiuso, e sia $y \in E \setminus \ker f$, cosicché $f(y) \neq 0$. Dato che $E \setminus \ker f$ è aperto, esiste $\varrho > 0$ tale che $\Sigma(y, \varrho) \cap \ker f = \emptyset$, quindi $\forall z \in \ker f$ risulta $\|y - z\| \geq \varrho$. Ogni $x \in E$ si scrive nella forma $x = \alpha y + z$, con $\alpha = f(x)/f(y)$ e $z \in \ker f$; per ogni $x \in E \setminus \ker f$ si ha allora

$$\|x\| = \|\alpha y + z\| = |\alpha| \left\| y - \left(-\frac{z}{\alpha}\right) \right\| \geq |\alpha|\, \varrho = \varrho\, |f(x)|/|f(y)|,$$

(perché $(-z/\alpha) \in \ker f$). Di conseguenza, $|f(x)| \leq (|f(y)| \varrho^{-1}) \|x\| \quad \forall x \in E \setminus \ker f$, anzi, dato che la disuguaglianza è ovvia se $x \in \ker f$, per tutti gli x in E, cioè f è *limitato*. ■

Dato che sembra difficilmente proponibile l'idea di "separare" due insiemi mediante un iperpiano affine *denso*, i risultati di separazione dovranno essere relativi ad iperpiani affini *chiusi*. Qualche considerazione preliminare:

Definizione **2.2.5** *Sia K un sottoinsieme non vuoto dello spazio vettoriale X; il* **funzionale di** Minkowski*, o* **gauge***, j_K di K è definito da*

$$j_K(x) := \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1} x \in K\}, \quad \forall x \in E. \ ■$$

Se X è uno *spazio normato*, $0 \in K$ e K è *aperto*, esiste $\varrho > 0 : \ \Sigma(0, \varrho) \subset K$; ne viene che $j_K(x)$ è *finito* (e ≥ 0) $\forall x$. Se inoltre K è convesso, j_K ha alcune proprietà notevoli:

Proposizione **2.2.5** *Sia j_K il funzionale di* Minkowski *di K, dove K è un aperto convesso dello spazio normato E, con $0 \in K$; allora:*

i) $j_K(\lambda x) = \lambda\, j_K(x), \quad \forall x \in E, \quad \forall \lambda > 0$;

ii) $j_K(x+y) \leq j_K(x) + j_K(y), \quad \forall x, y \in K$;

iii) $\exists c : \quad j_K(x) \leq c\, \|x\|, \quad \forall x \in E$;

iv) $K = \{x \in E \ j_K(x) < 1\}$.

Dim.: *i)*: immediato, perché, $\forall \lambda > 0$,

$$j_K(\lambda x) = \inf\{\alpha > 0 \mid \lambda\alpha^{-1}\, x \in K\} = \inf\{\lambda\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha}^{-1}\, x \in K\} = \lambda\, j_K(x).$$

ii): si osservi intanto che

$$\text{(2.12)} \qquad \textit{se} \ \ \gamma > j_K(x), \ \ \textit{allora} \ \ \gamma^{-1}x \in K;$$

infatti, per definizione di j_K esiste $\alpha \in [j_K(x), \gamma[$ tale che $\alpha^{-1}x \in K$; ma allora $\gamma^{-1}x = \alpha\gamma^{-1}(\alpha^{-1}x) + (1 - \alpha\gamma^{-1})0 \in K$ (perché K è convesso, $\alpha\gamma^{-1} \in]0,1[$ e $0 \in K$). Ne segue che, $\forall(\alpha > j_K(x), \ \beta > j_K(y))$, si ha $\alpha^{-1}x, \ \beta^{-1}y \in K$; quindi, posto $t := \alpha\,(\alpha+\beta)^{-1}$, risulta $t \in]0,1[$, ed inoltre $t\alpha^{-1}x + (1-t)\beta^{-1}y = (\alpha+\beta)^{-1}(x+y) \in K$, da cui $j_K(x+y) \leq \alpha + \beta$; per l'arbitrarietà di α, β, ne viene che $j_K(x+y) \leq j_K(x) + j_K(y)$.

iii): sia $\varrho > 0$ tale che $\Sigma(0, \varrho) \subset K$; per ogni $x \in E$ e per ogni $\varepsilon > 0$) si ha che $\varrho(\varepsilon + \|x\|)^{-1}\, x \in K$, quindi $j_K(x) \leq \varrho^{-1}(\varepsilon + \|x\|)$, e, data l'arbitrarietà di ε, $j_K(x) \leq \varrho^{-1}\|x\|$.

iv): se $j_K(x) < 1$, dalla (2.12) si ha $x \in K$; d'altra parte, se $x \in K$ esiste $\varepsilon > 0 : (1+\varepsilon)x \in K$ (perché K è aperto), dunque $j_K(x) \leq (1+\varepsilon)^{-1} < 1$. ∎

Possiamo ora dimostrare le cosiddette **forme geometriche del Teorema di** Hahn-Banach:

Teorema **2.2.1 (prima forma)** *Siano E uno spazio normato, A, B due sottoinsiemi* convessi, non vuoti *e* disgiunti *di E, e supponiamo che A sia* aperto*; esiste un iperpiano affine chiuso che separa A e B* in senso largo*; più precisamente,*

$$\text{(2.13)} \qquad \exists(f \in E^* \setminus \{0\}, \ \alpha \in \mathbb{R}) : \\ f(a) < \alpha \leq f(b), \quad \forall(a \in A, \ b \in B).$$

Dim.: mostriamo intanto che, nel caso particolare in cui $B = \{x_0\}$ (con $x_0 \notin A$),

$$\text{(2.14)} \qquad \exists f \in E^* : \ \ \forall x \in A, \quad f(x) < f(x_0),$$

cosicché l'iperpiano affine di equazione $\big[f = f(x_0)\big]$ separa A e $B = \{x_0\}$ in senso largo.

Fissato $a_0 \in A$, poniamo $x'_0 := x_0 - a_0$ ed $A' := A - a_0 := \{x - a_0 \mid x \in A\}$, di modo che A' è un convesso aperto, con $0 \in A'$ e $x'_0 \notin A'$. Posto $X_0 :=$

$\{\lambda x_0' \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, sia φ il funzionale definito su X_0 da $\varphi(\lambda x_0') := \lambda$; è evidente che φ è lineare. Inoltre, per la *iv)* della **Proposizione 2.2.5** si ha $j_{A'}(x_0') \geq 1$; ne viene che

$$\text{se } \lambda \geq 0,\ \varphi(\lambda x_0') = \lambda \leq \lambda j_{A'}(x_0') = j_{A'}(\lambda x_0');$$
$$\text{se } \lambda < 0,\ \varphi(\lambda x_0') = \lambda < 0 \leq j_{A'}(\lambda x_0');$$

quindi $\varphi(x') \leq j_{A'}(x') \quad \forall x' \in X_0$. Per il **Teorema 2.1.1**, esiste un prolungamento lineare $f : E \to \mathbb{R}$ di φ che verifica $f(x) \leq j_{A'}(x) \ \ \forall x \in E$; per la *iii)* della **Proposizione 2.2.5**, ne viene che $f(x) \leq c\,\|x\|$, quindi anche $f(x) = -f(-x) \geq -c\,\|-x\| = -c\,\|x\|$, da cui $f \in E^*$. Infine, si ha $f(x_0') = \varphi(x_0') = 1$, mentre, $\forall x' \in A'$, risulta, per la *iv)* della **Proposizione 2.2.5**, $f(x') \leq j_{A'}(x') < 1$. Per ogni x fissato in A, si ha $x' := x - a_0 \in A'$; quindi

$$f(x') = f(x) - f(a_0) < f(x_0') = f(x_0) - f(a_0), \quad \textit{cioè} \quad f(x) < f(x_0).$$

Veniamo ora al caso generale, e poniamo $C := A - B : \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}$, cosicché C è convesso; inoltre, si ha $C = \bigcup_{b\in B}(A - b)$, quindi C è aperto; infine, $0 \notin C$ perché $A \cap B = \emptyset$. Per la prima parte della dimostrazione, $\exists f \in E^*$ tale che $f(x) < f(0) = 0 \ \forall x \in C$, cioè $f(a) < f(b) \ \forall (a \in A,\ b \in B)$; posto $\alpha := \inf_{b\in B} f(b)$, si ha la (2.13). ∎

Corollario 2.2.1 *Se K è un sottoinsieme convesso e aperto dello spazio normato E, si ha $K = \operatorname{int}\overline{K}$.*

Dim.: basta verificare che $(x \in \operatorname{int}\overline{K}) \Rightarrow (x \in K)$. Supponiamo, per assurdo, che $\exists x_0$ in $\operatorname{int}\overline{K} \setminus K$; come si è visto nella prima parte della dimostrazione del Teorema precedente, $\exists (f \in E^* \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbb{R}) : f(x) < f(x_0)$ per ogni $x \in K$, quindi $f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in \overline{K}$. Poiché $x_0 \in \operatorname{int}\overline{K}$, $\exists \varrho > 0 : \ \Sigma(x_0, \varrho) = x_0 + \varrho\Sigma(0,1) \subset \overline{K}$; per ogni z con $\|z\| < 1$ si deve quindi avere

$$f(x_0 + \varrho z) = f(x_0) + \varrho f(z) \leq f(x_0),$$

da cui $f(z) \leq 0 \ \ \forall z \in \Sigma(0,1)$, possibile solo se $f \equiv 0$, contro l'ipotesi. ∎

Teorema 2.2.2 (seconda forma) *Siano E uno spazio normato, A, B due sottoinsiemi* convessi, chiusi, non vuoti *e* disgiunti *di E, e supponiamo che A sia* compatto*; esiste un iperpiano affine chiuso che separa A e B* in senso stretto.

Dim.: consideriamo ancora l'insieme $C := A - B$; è non vuoto, *convesso*, e $0 \notin C$. Mostriamo che C è *chiuso*: se $\{a_n\} \subset A$, $\{b_n\} \subset B$ sono tali che $a_n - b_n \to c \in E$, per la compattezza di A possiamo estrarre da $\{a_n\}$ una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ tale che $a_{n_k} \to a \in A$. Ma allora

$$b_{n_k} = a_{n_k} - (a_{n_k} - b_{n_k}) \to a - c;$$

dato che B è chiuso, $a - c \in B$, dunque $c = a - (a - c) \in A - B$.

Di conseguenza, $E \setminus C$ è un aperto contenente l'origine; sia $\varrho > 0$ tale che $\Sigma(0,\varrho) \subset (E \setminus C)$, cioè $\Sigma(0,\varrho) \cap C = \emptyset$. Per il **Teorema 2.2.1**, esistono $f \in E^* \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$ tali che $f(\xi) < \alpha \leq f(a) - f(b)$ per ogni ξ in $\Sigma(0,\varrho)$ e per ogni $a \in A$, $b \in B$; in particolare (per $\xi = 0$) si ha $\alpha > 0$, e ne viene che

$$\inf_{a\in A} f(a) - \sup_{b\in B} f(b) \geq \alpha > 0.$$

Scelto ad arbitrio $\alpha' \in]\sup_{b\in B} f(b), \inf_{a\in A} f(a)[$, l'iperpiano chiuso di equazione $\big[f = \alpha'\big]$ separa A e B in senso stretto. ∎

Ne segue un risultato utilizzato molto frequentemente (si veda anche il **Corollario 1.5.3**):

$\boxed{\text{Corollario}}$ **2.2.2** *Sia A un sottoinsieme dello spazio normato E; sono equivalenti le proprietà:*

i) $\operatorname{span} A$ *è denso in E;*

ii) se $f \in E^*$ è nullo su A, allora $f = 0$.

Dim.: *i)* $\Rightarrow$ *ii)* è evidente. Mostriamo che la negazione di *i)* implica la negazione di *ii)*: assumiamo quindi che esista $x_0 \notin \overline{\operatorname{span} A}$. Per il **Teorema 2.2.2**, devono esistere $f \in E^* \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) < \alpha < f(x_0) \quad \forall x \in \operatorname{span} A$. Poiché, fissato $x \in \operatorname{span} A$, anche $\lambda x \in \operatorname{span} A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, deve essere $\lambda\, f(x) < \alpha \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, il che è possibile se e solo se $f(x) = 0 \ \forall x \in \operatorname{span} A$, quindi $\forall x \in A$. Dato che $f \neq 0$, si è ottenuta la negazione di *ii)*. ∎

$\boxed{\text{Osservazione}}$ **2.2.1** In dimensione infinita, contrariamente a quanto accade in $\mathbb{R}^d$, *non è detto*, anche nel caso hilbertiano, che due convessi A, B non vuoti e disgiunti si possano *sempre* separare, *anche* in senso largo, con un iperpiano affine chiuso . Ad esempio, sia $E := \ell^p$ (con $1 \leq p < +\infty$; quindi, *compreso* il caso hilbertiano $p = 2$), e si ponga

$$A := \Big\{a = \{a_n\} \in E \;\Big|\; a_{2n} = a_{2n-1}/2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}\Big\};$$

$$C := \Big\{c = \{c_n\} \in E \;\Big|\; c_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

È evidente che A e C sono sottospazi chiusi di E, ed è facile verificare, utilizzando il **Corollario 2.2.2**, che $A + C$ è denso in E: se $f = \{f_n\} \in E^*(=\ell^q)$ è nulla su $A{+}C$, in particolare è nulla su C, ed è immediato dedurne che $f_{2n-1} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ma f deve essere nulla anche su A, quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{2n} a_{2n} = 0 \quad \forall a \in A$; se per ogni fissato $k \in \mathbb{N}$ si pone $a^{(k)} := 2^k\, e^{(2k-1)} + e^{(2k)}$, ne viene che $0 = \langle f, a^{(k)}\rangle = f_{2k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, cosicché $f = 0$.

Se $\xi \in E$ è il vettore $\xi := \sum_{n=1}^{+\infty} e^{(2n)}/2^n$, si vede subito che $\xi \notin A + C$. In effetti, se esistessero $a = \{a_n\} \in A$ e $c = \{c_n\} \in C$ tali che $\xi = a + c$, si avrebbe, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\xi_n = a_n + c_n$; in particolare, $2^{-n} = a_{2n}$ e $0 = 2^n\, a_{2n} + c_{2n-1} = 1 + c_{2n-1}$, cioè $c_{2n-1} = -1$, assurdo perché, essendo $c \in E$, deve essere $\lim_{n\to+\infty} c_{2n-1} = 0$. Posto $B := C - \xi$ (è un iperpiano affine chiuso di E), risulta $A \cap B = \emptyset$; ma si controlla facilmente che i convessi (non vuoti, disgiunti, chiusi –ma non compatti–) A e B *non possono essere separati in senso largo da nessun iperpiano affine chiuso*. In effetti, se $0 \neq f \in E^*$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ sono tali che $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$ $\forall (a \in A,\ b \in B)$, ne viene facilmente che, poiché A e C sono varietà lineari, f è nulla sia su A sia su C, quindi su $A + C$, dunque $f = 0$, contrariamente all'ipotesi. ∎

2.3 I teoremi di Banach-Steinhaus e dell'applicazione aperta.

Riprendiamo ora alcuni teoremi solo enunciati, (e limitatamente al caso hilbertiano), nel **Capitolo 1**. Premettiamo un risultato molto notevole, il **Lemma di** BAIRE:

Lemma **2.3.1** *Siano $(M; d)$ uno spazio metrico* completo*, e $\{A_n\}$ una successione di suoi sottoinsiemi* aperti*, ciascuno dei quali è* denso *in M. Allora anche l'intersezione $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ è densa in M.*

Dim.: fissati ad arbitrio $x_0 \in M$ e $\varrho_0 > 0$, mostriamo che la sfera (aperta) $\Sigma(x_0, \varrho_0)$ contiene almeno un punto di A. Poiché A_1 è denso in M, esiste x_1 in $A_1 \cap \Sigma(x_0, \varrho_0)$, che è un aperto; dunque $\exists \varrho_1 > 0 : \ \Sigma(x_1, \varrho_1) \subset A_1 \cap \Sigma(x_0, \varrho_0)$; anzi, non è limitativo supporre che risulti[30] $\overline{\Sigma}(x_1, \varrho_1) \subset A_1 \cap \Sigma(x_0, \varrho_0)$, e $\varrho_1 < \varrho_0/2$. Per ricorrenza, è possibile allora costruire una successione $\{x_n\}$ di punti in M ed una successione $\{\varrho_n\}$ di numeri positivi tali che:

$$\begin{cases} \overline{\Sigma}(x_n, \varrho_n) \subset A_n \cap \Sigma(x_{n-1}, \varrho_{n-1}), \\ 0 < \varrho_n < \varrho_{n-1}/2 < 2^{-n} \varrho_0. \end{cases}$$

Ne segue che la successione $\{x_n\}$ è di CAUCHY, perché

$$\begin{aligned} d(x_{n+r}, x_n) &\leq d(x_{n+r}, x_{n+r-1}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) < \\ &< 2^{-n+1} \varrho_0 (2^{-r} + 2^{-r+1} + \ldots + 1) < 2^{-n+2} \varrho_0; \end{aligned}$$

dunque, converge ad un punto $\overline{x} \in M$. Per costruzione, $\forall n, r \in \mathbb{N}$ si ha x_{n+r} in $\Sigma(x_n, \varrho_n)$, quindi $\overline{x} \in \overline{\Sigma}(x_n, \varrho_n) \subset A_n \cap \Sigma(x_{n-1}, \varrho_{n-1}) \subset A_n \cap \Sigma(x_0, \varrho_0) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, e ne viene che $\overline{x} \in A \cap \Sigma(x_0, \varrho_0)$. ∎

Corollario **2.3.1** *Sia M uno spazio metrico completo non vuoto, e sia $\{C_n\}$ una successione di insiemi chiusi. Se $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, almeno uno dei C_n ha interno non vuoto.*

Dim.: mostriamo che se ogni C_n ha interno vuoto, il complementare dell'unione dei $\{C_n\}$ non può essere vuoto. Infatti, ogni $M \setminus C_n$ è aperto, e denso in M (dato che si ha $\overline{M \setminus C_n} = M \setminus (\operatorname{int} C_n) = M$). Per il Lemma precedente, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (M \setminus C_n)$ è densa in M, e ne viene che $M \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (M \setminus C_n) \neq \emptyset$. ∎

Dimostriamo ora il **Teorema di** BANACH-STEINHAUS, o **Teorema di limitatezza uniforme**:

Teorema **2.3.1** *Siano E, F due spazi di* BANACH, *e $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia*[31] *di operatori in $\mathcal{L}(E, F)$. Se $\{T_\lambda\}$ è* **puntualmente limitata**, *cioè*

$$\forall x \in E, \ \ \exists c(x) \geq 0 : \ \forall \lambda \in \Lambda, \ \ \|T_\lambda x\|_F \leq c(x), \tag{2.15}$$

allora è **uniformemente limitata**:

$$\exists c \geq 0 : \ \ \forall \lambda \in \Lambda, \ \ \|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq c. \tag{2.16}$$

[30] $\overline{\Sigma}(x, \varrho)$ indica la sfera *chiusa* di centro x e raggio ϱ: $\overline{\Sigma}(x, \varrho) := \{y \in M \mid d(y, x) \leq \varrho\}$.
[31] non necessariamente numerabile

Dim.: per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo $C_n := \{x \in E \mid \|T_\lambda x\|_F \leq n, \quad \forall \lambda \in \Lambda\}$. $\{C_n\}$ è una successione di *chiusi* in E, e, grazie alla (2.15), la loro unione dà tutto E. Per il **Corollario 2.3.1**, $\exists k : \ \operatorname{int} C_k \neq \emptyset$; sia allora $\Sigma(x_0, \varrho_0)$ una sfera aperta non vuota, contenuta in $\operatorname{int} C_k$. Osserviamo che, $\forall x \in E \setminus \{0\}$, posto $y := x_0 + \varrho_0\, x/\|x\|_E$, si ha $y \in \overline{\Sigma}(x_0, \varrho_0) \subset C_k$, e $x = \|x\|_E\, (y - x_0)/\varrho_0$. Dunque, $\|T_\lambda x\|_F = \|x\|_E\, \|T_\lambda y - T_\lambda x_0\|_F/\varrho_0 \leq 2k\, \|x\|_E/\varrho_0$, cioè la (2.16). ∎

Corollario **2.3.2** *Sia E_1 uno spazio di* Banach*, e sia $Y \subset E_1$; Y è* limitato *in E_1 se e solo se $\forall f \in E_1^*$ l'insieme $f(Y) := \{f(x)\}_{x \in Y}$ è limitato in $\mathbb{R}$. In particolare, se $x_n \rightharpoonup x$ allora $\{x_n\}$ è limitata; inoltre, $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.*

Dim. (si veda la dimostrazione del **Corollario 1.9.1**): è evidente che se Y è limitato in E_1, si ha che $f(Y)$ è limitato in $\mathbb{R}$, $\forall f \in E^*$. Per dimostrare l'implicazione reciproca, basta applicare il Teorema precedente con $E := E_1^*$, $F = \mathbb{R}$, $\Lambda := Y$, $T_x(f) := f(x)\ \forall x \in Y$: per ipotesi, $\{T_x\}_{x \in Y}$ è puntualmente limitata in $E = E_1^*$: $\exists c(f) : \ |T_x(f)| \leq c(f)$, $\forall x \in Y$, dunque esiste c : $\forall x \in Y$, $\|T_x\| = \sup_{\|f\|_*=1} |f(x)| \leq c$. Per il **Corollario 2.1.3**, si ha che $\|x\| = \max_{\|f\|_*=1} |f(x)| \leq c \quad \forall x \in Y$, cioè Y è limitato in E_1. In particolare, se $x_n \rightharpoonup x$, per ogni $f \in E_1^*$ la successione $\{f(x_n)\}$ è convergente, quindi limitata, in $\mathbb{R}$, dunque $\{x_n\}$ è limitata in E_1. Per il **Corollario 2.1.2**, $\exists f_0$ in E_1^* : $\|f_0\|_* = \|x\|$ e $f_0(x) = \|x\|^2$; allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \ \forall n > n_\varepsilon$ si ha $\|x\|^2 - \varepsilon \leq f_0(x_n) \leq \|f_0\|_*\, \|x_n\| = \|x\|\, \|x_n\|$, quindi $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$. ∎

Corollario **2.3.3** *Siano E, F due spazi di* Banach*, $\{T_n\}$ una successione in $\mathcal{L}(E, F)$. Se T_n* **converge debolmente** *a T (si ricordi la* **Definizione 1.9.4***), allora si ha:*

$$\sup_n \|T_n\| < +\infty; \quad T \in \mathcal{L}(E, F); \quad \|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|.$$

Dim.: si veda la dimostrazione del **Corollario 1.9.2**. ∎

Corollario **2.3.4** *Sia E_1 uno spazio di* Banach*, e sia $Y^* \subset E_1^*$; Y^* è* limitato *in E_1^* se e solo se $\forall x \in E_1$ l'insieme $\{f(x)\}_{f \in Y^*}$ è limitato in $\mathbb{R}$.*

Dim.: è evidente che se Y^* è limitato in E_1^*, si ha che $\{f(x)\}_{f \in Y^*}$ è limitato in $\mathbb{R}$, $\forall x \in E_1$. Per dimostrare l'implicazione reciproca, basta applicare il Teorema precedente con $E := E_1$, $F = \mathbb{R}$, $\Lambda := Y^*$, $T_f(x) := f(x)\ \forall f \in Y^*$: per ipotesi, $\{T_f\}_{f \in Y^*}$ è puntualmente limitata in E_1: $\exists c(x) : \ |T_f(x)| \leq c(x)$, $\forall f \in Y^*$. Dunque, esiste $c : \ \forall f \in Y^*$, $\|T_f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \|f\|_* \leq c$, cioè Y^* è limitato in E_1^*. ∎

Un altro risultato fondamentale è il **Teorema dell'applicazione aperta**:

Teorema **2.3.2** *Siano E, F spazi di* Banach*; l'operatore $T \in \mathcal{L}(E, F)$ è* suriettivo *se e solo se*

$$\exists \varrho > 0 : \quad \Sigma_F(0, \varrho) \subset T(\Sigma_E(0, 1)). \tag{2.17}$$

Dim.: se la (2.17) è verificata, è ovvio che T è suriettivo. Per dimostrare la proposizione reciproca, poniamo $A := T(\Sigma_E(0,1))$. La suriettività di T implica che $F = \bigcup_n nA$ ($\forall y \in F$, esiste x in E con $y = Tx$: per $n > \|x\|$ si ha $y = nT(xn^{-1})$, con $xn^{-1} \in \Sigma_E(0,1)$), quindi $F = \bigcup_n n\overline{A}$. Per il Lemma di Baire, almeno uno dei chiusi $n\overline{A}$ deve avere interno non vuoto, e ciò significa che $\operatorname{int} \overline{A} \neq \emptyset$. Siano allora $y_0 \in F$, $\varrho_0 > 0$ tali che $\Sigma_F(y_0, \varrho_0) \subset \overline{A}$; in particolare, $y_0 \in \overline{A}$, e dato che A (quindi anche $\overline{A}$) è evidentemente *simmetrico* rispetto all'origine, $-y_0 \in \overline{A}$. Dunque $\Sigma_F(0,\varrho_0) = -y_0 + \Sigma_F(y_0,\varrho_0) \subset \overline{A} + \overline{A}$, cioè $\Sigma_F(0,\varrho_0/2) \subset \frac{1}{2}\overline{A} + \frac{1}{2}\overline{A}$. Dato che A è *convesso*, lo è anche $\overline{A}$ (**Proposizione 2.2.3**), quindi $\frac{1}{2}\overline{A} + \frac{1}{2}\overline{A} = \overline{A}$; posto $\varrho := \varrho_0/4$, si ha che

$$\Sigma_F(0, 2\varrho) \subset \overline{A}. \tag{2.18}$$

Mostriamo che la (2.18) implica, per la continuità di T, che $\Sigma_F(0,\varrho) \subset A$. Dalla (2.18) si ha intanto che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_F(0, 2^{-n+1}\varrho) \subset 2^{-n}\overline{A} = \overline{T(\Sigma_E(0,2^{-n}))}$, cioè che:

$$\forall (y \in \Sigma_F(0, 2^{-n+1}\varrho),\ \varepsilon > 0),\ \exists x \in \Sigma_E(0,2^{-n}) :\quad \|y - Tx\|_F < \varepsilon. \tag{2.19}$$

Fissiamo allora ad arbitrio $\eta \in \Sigma_F(0,\varrho)$, e mostriamo che $\exists \xi \in \Sigma_E(0,1)$ tale che $T\xi = \eta$. Costruiamo una successione $\{x_n\} \subset E$ nel modo seguente: per $n = 1$, scegliamo nella (2.19) $y := \eta$, $\varepsilon := \frac{1}{2}\varrho$; quindi

$$\exists x_1 \in \Sigma_E(0, \tfrac{1}{2}) : \quad \|\eta - Tx_1\|_F < \tfrac{1}{2}\varrho;$$

si può allora scegliere nella (2.19) $y := \eta - Tx_1$ e $\varepsilon := \frac{1}{4}\varrho$; si ha allora che

$$\exists x_2 \in \Sigma_E(0, \tfrac{1}{4}) : \quad \|\eta - (Tx_1 + Tx_2)\|_F < \tfrac{1}{4}\varrho.$$

Per ricorrenza, si costruisce $\{x_n\}$ tale che

$$x_n \in \Sigma_E(0, 2^{-n}),\ \text{e}\quad \|\eta - T(x_1 + \ldots + x_n)\|_F < 2^{-n}\varrho.$$

È chiaro che la serie $\sum_n x_n$ è convergente in E; si ha infatti

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+r} x_k \right\|_E \leq \sum_{k=n+1}^{n+r} \|x_k\|_E < \sum_{k=n+1}^{n+r} 2^{-k};$$

detta ξ la sua somma, si ha inoltre che

$$\|\textstyle\sum_{k=1}^n x_k\|_E \leq \|x_1\|_E + \sum_{k=2}^n 2^{-k} < \|x_1\|_E + \frac{1}{2},$$

quindi $\|\xi\|_E < 1$; infine, $\|\eta - T\xi\|_F = \lim_n \|\eta - T(x_1 + \ldots + x_n)\|_F = 0$. ∎

Si osservi che se E, F sono spazi di Banach, e $T \in \mathcal{L}(E,F)$ è un operatore[32] che verifica la (2.17), allora T è un'*applicazione aperta*: si riveda l'**Osservazione 1.9.1**.

Anche il **Corollario 1.9.3** ed il Teorema del grafico chiuso si estendono, sostanzialmente con le *stesse* dimostrazioni, al caso di un operatore tra spazi di Banach:

Corollario 2.3.5 *Siano E, F due spazi di* Banach, *e $T \in \mathcal{L}(E,F)$;*

i) se T è una biiezione *di E* su tutto *F, allora $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$;*

ii) T è iniettivo *e con* immagine chiusa *se e solo se*

$$\exists \alpha > 0 : \quad \forall x \in E, \quad \|Tx\|_F \geq \alpha \|x\|_E. \tag{2.20}$$

[32] non necessariamente suriettivo

Teorema **2.3.3** *Siano E, F spazi di* Banach*, e sia T un operatore* lineare *da* tutto *E in F; se il grafico $G(T)$ di T è chiuso in $E \times F$, allora $T \in \mathcal{L}(E, F)$.*

In particolare, il Corollario precedente implica che gli spazi di Banach E, F sono isomorfi se esiste una *applicazione lineare continua, iniettiva e suriettiva* di uno dei due sull'altro.

È evidente che molte (ma non tutte: si veda l'Osservazione **2.8.1**) delle proprietà degli spazi normati si conservano passando ad uno spazio isomorfo: ad esempio, è immediato controllare che uno spazio isomorfo ad uno spazio completo è esso stesso completo.

Quando gli spazi *vettoriali* E, F coincidono, si pone la

Definizione **2.3.1** *Due norme $\| \,.\, \|_1$, $\| \,.\, \|_2$ sullo spazio vettoriale E si dicono* **equivalenti** *se*

$$(2.21) \quad \exists(\alpha, \beta > 0): \quad \beta\, \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \alpha\, \|x\|_1, \quad \forall x \in E. \blacksquare$$

Se entrambi gli spazi $(E; \| \,.\, \|_1)$, $(E; \| \,.\, \|_2)$ sono *completi*, la (2.3.1) può essere sostituita da

$$(2.22) \qquad \exists \alpha > 0: \quad \|x\|_2 \leq \alpha\, \|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

In effetti, se vale la (2.22) allora l'applicazione identica dello spazio $(E; \| \,.\, \|_1)$ su $(E; \| \,.\, \|_2)$ è continua, quindi, sempre per il **Corollario 2.3.5**, anche I^{-1} è continua: di conseguenza, $\exists \beta^{-1} > 0: \ \forall x \in E, \ \|x\|_1 \leq \beta^{-1} \|x\|_2$, da cui la (2.21).

2.4 La topologia iniziale.

Ricordiamo alcune nozioni relative alla topologia iniziale su un insieme.

Proposizione **2.4.1** *Dato un insieme X, fissiamo $\mathcal{F} = \{F_\mu\}_{\mu \in M}$, dove ogni F_μ è un sottoinsieme di X. Definiamo $\mathcal{B} = \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ come la famiglia delle intersezioni* al più finite *di elementi di $\mathcal{F}$: $B \in \mathcal{B}$ significa cioè che*

$$\begin{cases} \exists M_0 \subset M, \ \text{con } M_0 = \emptyset \text{ o } M_0 = \{\mu_1, \ldots, \mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ \text{tale che } B = \bigcap_{\mu \in M_0} F_\mu. \end{cases}$$

Infine, sia τ la famiglia di sottoinsiemi di X definita come segue:

$$(A \in \tau) \Longleftrightarrow (\exists \Lambda_0 \subset \Lambda: \ A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} B_\lambda).$$

Allora τ è una topologia *su X, anzi è* la meno fine *tra le topologie su X che contengono $\mathcal{F}$.*

Dim.: poiché $X = \bigcap_{\mu \in \emptyset} F_\mu$, e $\emptyset = \bigcup_{\lambda \in \emptyset} B_\lambda$, si ha intanto che $\emptyset, X \in \tau$. È evidente che l'unione *qualsiasi* di elementi in τ è ancora in τ; per verificare che τ è una topologia, di cui $\mathcal{B}$ è una *base*, è sufficiente allora controllare che l'intersezione di due qualsiasi elementi di τ è in τ. Ma in effetti, se si ha

$$A_1 = \bigcup_{\lambda_1\in\Lambda_1} B_{\lambda_1}; \qquad A_2 = \bigcup_{\lambda_2\in\Lambda_2} B_{\lambda_2},$$

(dove $\Lambda_1 := \Lambda(A_1), \Lambda_2 := \Lambda(A_2)$ sono sottoinsiemi di Λ), risulta

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup\{B_{\lambda_1} \cap B_{\lambda_2} \mid \lambda_1 \in \Lambda_1,\ \lambda_2 \in \Lambda_2\},$$

quindi $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Dunque τ è una topologia, ed è ovvio che τ contiene $\mathcal{F}$.

Sia ora τ' una topologia su X, e sia $\mathcal{F} \subset \tau'$; dato che τ' è una topologia, è chiusa rispetto alle intersezioni finite, in particolare di elementi di $\mathcal{F}$, dunque $\mathcal{B} \subset \tau'$. Ma allora anche le unioni di elementi in $\mathcal{B}$ devono essere in τ', cioè $\tau \subset \tau'$, il che conclude la dimostrazione. ∎

Poniamo la seguente

Definizione **2.4.1** *La topologia τ su X descritta nella* **Proposizione 2.4.1** *si dice* **topologia generata da $\mathcal{F}$**.

Siano X un insieme, *$\{(X_\lambda; \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di spazi topologici; data una famiglia di applicazioni $\{\varphi_\lambda : X \to X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, poniamo*

$$\mathcal{F} := \{\varphi_\lambda^{-1}(A_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda, \quad A_\lambda \in \tau_\lambda\}.$$

La topologia τ generata da $\mathcal{F}$ su X si chiama **topologia iniziale** *rispetto alle applicazioni $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.* ∎

Si osservi che, se $\mathcal{B}$ è la famiglia delle intersezioni al più finite di elementi di $\mathcal{F}$, $\forall x \in X$ la famiglia $\mathcal{V}_x := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ è un *sistema fondamentale di intorni* (aperti) *di x*.

Alcune proprietà fondamentali della topologia iniziale:

Proposizione **2.4.2** *Sia τ la topologia iniziale sull'insieme X rispetto alle applicazioni $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ da X negli spazi topologici $(X_\lambda; \tau_\lambda)$.*

i) τ è la meno fine *tra le topologie su X rispetto alle quali tutte le applicazioni φ_λ sono* continue*;*

ii) la successione $\{x_n\}$ in X è convergente ad x in $(X; \tau)$ se e solo se, $\forall\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda(x_n)$ tende a $\varphi_\lambda(x)$ in $(X_\lambda; \tau_\lambda)$;

iii) sia g un'applicazione dello spazio topologico $(Z_0; \tau_0)$ in $(X; \tau)$; g è continua (nel punto $z_0 \in Z_0$) se e solo se (in z_0) sono continue tutte le applicazioni

$$g_\lambda := \varphi_\lambda \circ g : Z_0 \to X_\lambda, \quad (\forall\lambda \in \Lambda).$$

Dim.: *i*): conseguenza immediata della definizione e della **Proposizione 2.4.1**.

ii): se $x_n \to x$ in X, dato che ogni φ_λ è continua si ha $\varphi_\lambda(x_n) \to \varphi_\lambda(x)$. Reciprocamente, se $\{x_n\}$ è una successione in X e, $\forall\lambda \in \Lambda$, $\varphi_\lambda(x_n) \to \varphi_\lambda(x)$, fissato un intorno aperto A di x si ha che $\exists B \in \mathcal{B}$ (dove $\mathcal{B}$ è la famiglia delle intersezioni finite di elementi in $\mathcal{F}$) tale che $x \in B = \bigcap_{k=1}^{n_0} \varphi_{\lambda_k}^{-1}(A_{\lambda_k}) \subset A$, con $A_{\lambda_k} \in \tau_{\lambda_k}$. Poiché ogni A_{λ_k} è un intorno aperto di $\varphi_{\lambda_k}(x)$, esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_k$ si abbia $\varphi_{\lambda_k}(x_n) \in A_{\lambda_k}$; posto $N := \max_k n_k$, per ogni $n > N$ si ha allora $x_n \in \varphi_{\lambda_k}^{-1}(A_{\lambda_k})$, $\ k = 1, \ldots, n_0$, quindi $x_n \in A$, cioè $x_n \to x$ in $(X; \tau)$.

iii): se, in z_0, g è continua, lo è anche ogni applicazione $g_\lambda := \varphi_\lambda \circ g$, come composizione di funzioni continue. Reciprocamente, se ogni applicazione $\varphi_\lambda \circ g$

è continua in z_0, sia V un intorno aperto di $g(z_0)$ in X. Esiste allora $B \in \mathcal{B}$ tale che $g(z_0) \in B \subset V$; se $B = \bigcap_{k=1}^{n} \varphi_{\lambda_k}^{-1}(A_{\lambda_k})$, dove $\lambda_k \in \Lambda$ e $A_{\lambda_k} \in \tau_{\lambda_k}$, ne viene che $g(z_0) \in \varphi_{\lambda_k}^{-1}(A_{\lambda_k})$, cioè $z_0 \in g_{\lambda_k}^{-1}(A_{\lambda_k})$, $(k = 1, \ldots, n)$; inoltre,

$$\begin{aligned} g^{-1}(B) &= \{z \in Z_0 \mid g(z) \in B\} = \\ &= \{z \in Z_0 \mid \varphi_{\lambda_k}(g(z)) = g_{\lambda_k}(z) \in A_{\lambda_k}, \quad k = 1, \ldots, n\} = \\ &= \{z \in Z_0 \mid z \in g_{\lambda_k}^{-1}(A_{\lambda_k}), \quad k = 1, \ldots, n\} = \\ &= \bigcap_{k=1}^{n} g_{\lambda_k}^{-1}(A_{\lambda_k}). \end{aligned}$$

Poiché ogni g_{λ_k} è continua, $g_{\lambda_k}^{-1}(A_{\lambda_k})$ è un intorno aperto di z_0; dato che $g^{-1}(B) \subset g^{-1}(V)$, si conclude che g è continua in z_0. ■

QUALCHE APPLICAZIONE.

1. Immagine reciproca di una topologia.

In particolare, supponiamo che sia $\Lambda = \{1\}$; si hanno dunque un *insieme* X, uno spazio topologico $(X_1; \tau_1)$ ed un'applicazione φ_1 da X in X_1. La topologia iniziale τ su X rispetto all'applicazione φ_1 è l'**immagine reciproca tramite** φ_1 della topologia τ_1 su X_1. Si vede facilmente che[33] gli aperti di τ sono le immagini inverse tramite φ_1 degli aperti di τ_1; se $\mathcal{W}$ è un sistema fondamentale di intorni per $\varphi_1(x)$ in X_1, $\{\varphi_1^{-1}(W) \mid W \in \mathcal{W}\}$ è un sistema fondamentale di intorni per x in X.

Dati due spazi topologici $(X_1; \tau_1), (X_2; \tau_2)$ ed un'applicazione φ da X_1 in X_2, si ha che φ è continua se e solo se τ_1 è *più fine* dell'immagine reciproca tramite φ di τ_2.

2. Sottospazi topologici.

Ancora più in particolare, supponiamo che l'insieme X sia un sottoinsieme dello spazio topologico $(X_1; \tau_1)$, e che φ_1 sia l'*immersione* di X in X_1. La topologia iniziale su X rispetto a φ_1 è allora la *topologia indotta* su X da $(X_1; \tau_1)$, e $(X; \tau)$ si dice **ottospazio topologico** di $(X_1; \tau_1)$. È evidente che

$$\tau = \{X \cap A_1 \mid A_1 \in \tau_1\};$$

ciò mostra altresì che se $X_0 \subset X$, il sottospazio topologico X_0 di X_1 coincide con il sottospazio topologico X_0 di X, a sua volta sottospazio topolo gico di X_1 (*transitività* della topologia indotta).

Naturalmente, occorre distinguere tra le nozioni di insieme aperto, chiuso,..., *rispetto ad* X_1 e le nozioni analoghe *rispetto ad* X: se, ad esempio, A è aperto in X, non è detto che sia aperto in X_1 (a meno che X stesso sia aperto in X_1).

Se ψ è un'applicazione di $(X_1; \tau_1)$ nello spazio topologico $(X_2; \tau_2)$, si dice che ψ è *continua relativamente ad* X se è continua la sua *restrizione* $\psi_{|X} := \psi \circ \varphi_1$ da X in X_2; è chiaro che se ψ è continua, lo è anche $\psi_{|X}$, ma non vale il viceversa.

3. Estremo superiore di una famiglia di topologie.

Sia $\{\tau_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di topologie definite sullo stesso insieme X. Se, $\forall \lambda \in \Lambda$, si indica con φ_λ l'applicazione identica di X in $(X; \tau_\lambda)$, la topologia

[33] dato che $\bigcap_\mu \varphi_1^{-1}(A_\mu) = \varphi_1^{-1}\left(\bigcap_\mu A_\mu\right)$, e $\bigcup_\mu \varphi_1^{-1}(A_\mu) = \varphi_1^{-1}\left(\bigcup_\mu A_\mu\right)$, in questo caso si ha $\tau = \mathcal{F}$.

iniziale su X rispetto alle applicazioni φ_λ è, come si è visto, la topologia meno fine su X tra quelle che sono più fini di ciascuna delle topologie τ_λ: è cioè l' bf estremo superiore della famiglia $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

4. Prodotto topologico.

Data una famiglia $(X_\lambda;\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di spazi topologici, sia $X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ il *prodotto cartesiano* degli insiemi X_λ, cioè la famiglia di tutte le applicazioni $x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tali che $x_\lambda := x(\lambda) \in X_\lambda \quad \forall\lambda \in \Lambda$. Per ogni $\lambda \in \Lambda$, indichiamo con pr_λ la *proiezione* di X su X_λ, definita da $\mathrm{pr}_\lambda(x) := x(\lambda)$.

Definizione **2.4.2** *Lo spazio* $(X;\tau)$, *dove* τ *è la topologia iniziale su* $X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *rispetto alla famiglia di applicazioni* $\{\mathrm{pr}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, *si dice* **prodotto topologico** *degli* $(X_\lambda;\tau_\lambda)$. ■

Si noti che, $\forall\lambda \in \Lambda$ e $\forall U_\lambda \subset X_\lambda$, $\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(U_\lambda) = \prod_{\mu\in\Lambda} W_\mu$, dove $W_\lambda = U_\lambda$ e $W_\mu = X_\mu \quad \forall\mu \neq \lambda$.

La **Proposizione 2.4.2** fornisce i seguenti risultati:

Proposizione **2.4.3** *Sia* $(X;\tau)$ *il prodotto topologico di* $\{(X_\lambda;\tau_\lambda)\}$;

i) una base per la topologia τ *è data dalla famiglia* $\mathcal{B}$ *definita come segue:* $B \in \mathcal{B}$ *se e solo se*

$$B = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, \ \textit{dove} \ \begin{cases} A_\lambda \in \tau_\lambda, & \forall\lambda \in \Lambda, \\ \exists\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \Lambda : & \lambda \neq \lambda_k \Rightarrow A_\lambda = X_\lambda. \end{cases}$$

ii) Un sistema fondamentale di intorni del punto $x \in X$ *è dato dalla famiglia* $\mathcal{V}_x$ *così definita:* $V \in \mathcal{V}$ *se e solo se*

$$V = \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda, \ \textit{dove} \ \begin{cases} x(\lambda) \in V_\lambda \in \tau_\lambda, & \forall\lambda \in \Lambda, \\ \exists\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \Lambda : & \lambda \neq \lambda_k \Rightarrow V_\lambda = X_\lambda. \end{cases}$$

iii) La successione $\{x^{(n)}\} \subset X$ *tende ad* x *in* $(X;\tau)$ *se e solo se,* $\forall\lambda \in \Lambda$, *la successione* $\{x_\lambda^{(n)}\}$ *tende a* x_λ *in* $(X_\lambda;\tau_\lambda)$.

iv) Siano $(Z_0;\tau_0)$ *uno spazio topologico,* f *un'applicazione da* Z_0 *in* X; f *è continua nel punto* $z_0 \in Z_0$ *se e solo se lo è,* $\forall\lambda \in \Lambda$, *l'applicazione* $\mathrm{pr}_\lambda \circ f : Z_0 \to X_\lambda$. ■

Si dimostra facilmente, utilizzando la **Proposizione 2.4.3**, *ii*), che ciascuna delle applicazioni $\mathrm{pr}_\lambda : X_\lambda \to X$ è un'*applicazione aperta.* Inoltre, vale la seguente caratterizzazione della continuità di un'applicazione tra due prodotti topologici:

Proposizione **2.4.4** *Siano* $\{(X_\lambda;\tau_\lambda),(X'_\lambda;\tau'_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ *due famiglie di spazi topologici, per ogni* $\lambda \in \Lambda$ *sia assegnata* $f_\lambda : X_\lambda \to X'_\lambda$, *e si ponga* $X := \prod_\lambda X_\lambda$, $X' := \prod_\lambda X'_\lambda$. *L'applicazione* $f : X \to X'$ *definita da*

$\mathrm{pr}'_\lambda \circ f = f_\lambda \circ \mathrm{pr}_\lambda$ ($\mathrm{pr}_\lambda, \mathrm{pr}'_\lambda$ *essendo le proiezioni di* X *su* X_λ *e di* X' *su* X'_λ):

$$(y = f(x)) \Longleftrightarrow (\forall \lambda \in \Lambda,\ y(\lambda) = f_\lambda(x(\lambda)))$$

è continua (nel punto $z = \{z(\lambda)\} \in X$*) se e solo se,* $\forall \lambda \in \Lambda$*, l'applicazione* f_λ *è continua (nel punto* $z(\lambda)$*).*

Dim.: se f è continua nel punto $z \in X$, lo è anche $f_\lambda \circ \mathrm{pr}_\lambda = \mathrm{pr}'_\lambda \circ f$. Fissato ad arbitrio $\mu \in \Lambda$, sia $g_\mu : X_\mu \to X$ l'applicazione definita $\forall \xi^{(\mu)} \in X_\mu$ da $\mathrm{pr}_\mu(g_\mu(\xi^{(\mu)})) = \xi^{(\mu)}$, $\mathrm{pr}_\lambda(g_\mu(\xi^{(\mu)})) = z(\lambda)$ se $\lambda \neq \mu$. Per ogni $\lambda \in \Lambda$, l'applicazione $\mathrm{pr}_\lambda \circ g_\mu : X_\mu \to X_\lambda$ è continua: infatti, è l'*applicazione identica* se $\lambda = \mu$, un'applicazione *costante* se $\lambda \neq \mu$. Per la **Proposizione 2.4.3**, *iv*), g_μ è continua; dato che $f_\mu = f_\mu \circ \mathrm{pr}_\mu \circ g_\mu = \mathrm{pr}'_\mu \circ f \circ g_\mu$, ne viene che anche f_μ è continua.

Reciprocamente, se ogni f_λ è continua, allora lo è anche $\mathrm{pr}'_\lambda \circ f = f_\lambda \circ \mathrm{pr}_\lambda$, dunque, ancora per la **Proposizione 2.4.3**, *iv*), lo è f. ∎

Infine, ricordiamo il fondamentale

Teorema 2.4.1 (Tikhonov) *Il prodotto topologico* $(X; \tau)$ *degli spazi* $(X_\lambda; \tau_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ *è compatto se e solo se, per ogni* $\lambda \in \Lambda$*,* $(X_\lambda; \tau_\lambda)$ *è compatto.* ∎

5. Topologia indotta da una famiglia di funzionali lineari.

Premettiamo qualche osservazione relativa alle topologie definite su uno spazio vettoriale.

Sia X uno spazio vettoriale $\neq \{0\}$; è chiaro che sull'*insieme* X si possono definire più topologie, tra le quali però non hanno alcun interesse quelle *non compatibili* con la struttura algebrica di X. Poniamo allora, intanto, la seguente

Definizione 2.4.3 *Uno* **spazio vettoriale topologico** $(X; \tau)$ *è uno spazio vettoriale* X *munito di una topologia* τ *rispetto alla quale sono* continue *le applicazioni*

$$\begin{cases} \Phi : X \times X \to X & \textit{data da } \Phi(x, y) := x + y, \\ \Psi : \mathbb{R} \times X \to X & \textit{data da } \Psi(\alpha, x) := \alpha\, x. \end{cases} \tag{2.23}$$ ∎

Ne segue il seguente risultato, che –ad esempio– mostra come gli intorni del generico punto x_0 coincidano con i *traslati* degli intorni dell'origine (quindi, in particolare, la topologia dello spazio X è univocamente individuata se si assegna un sistema fondamentale di intorni dell'origine):

Corollario 2.4.1 *Sia* $(X; \tau)$ *uno spazio vettoriale topologico; per ogni* x_0 *fissato in* X*, ed ogni* α *fissato in* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*, le applicazioni*

$$f_{x_0}(x) := x + x_0 \quad e \quad g_\alpha(x) := \alpha\, x$$

sono omeomorfismi di $(X; \tau)$ *su se stesso.* ∎

Poniamo la

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **2.4.4** *Sia X uno spazio vettoriale; il sottoinsieme $A \subset X$ si dice*

equilibrato *(o* **bilanciato**, *o* **cerchiato***) se $\alpha A \subset A$ $\forall \alpha$ con $|\alpha| \leq 1$;*

assorbente *(o* **radiale***) se $\forall x \in X$ $\exists t_x > 0$ tale che per ogni $t > t_x$ si abbia $x \in t\, A$.* ■

È immediato verificare che *ogni* intorno dell'origine in uno spazio vettoriale topologico è *assorbente*, e che, inoltre, *ogni* spazio vettoriale topologico ammette un sistema fondamentale dell'origine composto da insiemi (assorbenti ed) equilibrati. Si noti che uno spazio vettoriale topologico è *separato*[34] se e solo se ogni insieme ridotto ad un punto è *chiuso*.

Alcuni dei risultati visti nei Paragrafi precedenti si possono estendere al caso degli spazi vettoriali topologici. A titolo di esempio, dimostriamo la seguente:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.4.5** *Siano $(X;\tau)$ uno spazio vettoriale topologico, f un funzionale lineare su X. Le proprietà seguenti si equivalgono:*

i) f è continuo su X;

ii) $\ker\, f$ è chiuso;

iii) esistono un intorno dell'origine U ed un numero reale α tali che risulti

$$|f(x)| \leq \alpha, \quad \forall x \in U;$$

iv) f è continuo nell'origine.

Dim.: *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: ovvio, dato che $\ker\, f = f^{-1}(0)$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*: evidente se $f \equiv 0$. Altrimenti, fissato $x_0 \notin \ker f$, e posto $V := (X \setminus \ker f) - x_0$, si ha che V è un intorno dell'origine, dunque contiene un intorno equilibrato U dell'origine, per il quale risulta evidentemente che $(x_0 + U) \cap \ker\, f = \emptyset$. Dato che f è lineare, $f(U)$ è un sottoinsieme equilibrato di $\mathbb{R}$, quindi o è limitato oppure coincide con tutto $\mathbb{R}$. La seconda eventualità non può presentarsi, altrimenti dovrebbe esistere $u \in U$ tale che $f(u) = -f(x_0)$, cioè $f(x_0 + u) = 0$, impossibile perché $(x_0 + U) \cap \ker\, f = \emptyset$. Dunque $f(U)$ è limitato, cioè la *iii)*.

iii) $\Rightarrow$ *iv)*: fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si ha che $(\varepsilon/\alpha)U$ è un intorno dell'origine, e $\forall x \in (\varepsilon/\alpha)U$ risulta $(\alpha/\varepsilon)x \in U$, quindi $|f((\alpha/\varepsilon)x)| \leq \alpha$, da cui $|f(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x \in U$, cioè la continuità di f nell'origine.

iv) $\Rightarrow$ *i)*: fissati ad arbitrio x_0 e $\varepsilon > 0$, sia V un intorno dell'origine tale che $f(V) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$. Allora $x_0 + V$ è un intorno di x_0, per il quale risulta $f(x_0 + V) = f(x_0) + f(V) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, da cui la continuità di f in x_0. ■

Anche il **Teorema 2.2.1** si estende al caso degli spazi vettoriali topologici:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2.4.2** *Siano $(X;\tau)$ uno spazio vettoriale topologico, A e B due sottoinsiemi convessi, non vuoti e disgiunti di X, e supponiamo*

[34] ad esempio, nel senso di HAUSDORFF; negli spazi vettoriali topologici si dimostra la coincidenza tra varie definizioni di separazione (ad esempio, T_0, T_1, T_2, T_3).

che A sia aperto*; esistono un funzionale lineare e continuo f, non identicamente nullo, su X, ed un $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che*

$$f(a) < \alpha \leq f(b), \quad \forall (a \in A,\ b \in B); \tag{2.24}$$

l'iperpiano affine chiuso di equazione $[f = \alpha]$ separa quindi A e B in senso largo.

Dim.: seguiamo le linee della dimostrazione del **Teorema 2.2.1**. Supponiamo dapprima $B = \{x_0\}$ con $x_0 \notin A$, fissiamo $a_0 \in A$ e poniamo

$$x_0' := x_0 - a_0,\ A' := A - a_0,\ X_0 := \operatorname{span}\{x_0\},\ \varphi(\lambda x_0) := \lambda\ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Si è visto che esiste un funzionale lineare f definito su tutto X che verifica $f(a) < f(x_0)\ \ \forall a \in A$ e $f(x) \leq j_{A'}(x)\ \ \forall x \in E$. Quest'ultima disuguaglianza implica che f è continuo: in effetti, fissato ad arbitrio $\varrho > 0$, l'insieme $\varrho A'$ è un intorno aperto dell'origine, dunque esiste un intorno equilibrato V dell'origine contenuto in $\varrho A'$. Per ogni $x \in V$ si ha allora $f(x) \leq j_{A'}(x) < \varrho$ e $-f(x) = f(-x) < \varrho$, quindi l'immagine inversa tramite f dell'intervallo $(-\varrho, \varrho)$ è, per ogni $\varrho > 0$, un intorno dell'origine in X. In particolare, l'iperpiano affine chiuso $[f = f(x_0)]$ separa A ed $\{x_0\}$ in senso largo.

Nel caso in cui B sia un generico convesso disgiunto da A, si conclude come nella dimostrazione del **Teorema 2.2.1**. ∎

$\boxed{\textbf{Osservazione}}$ **2.4.1** Fissato $p \in]0,1[$, l'insieme ℓ^p delle successioni $x = \{x_n\}$ tali che $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$ è evidentemente uno spazio vettoriale (basta osservare che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha $|a-b|^p \leq (2 \max\{|a|;|b|\})^p \leq 2^p\,(|a|^p + |b|^p)$), e l'applicazione $d_p : \ell^p \times \ell^p \to \mathbb{R}$ data da

$$d_p(x,y) := \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p$$

è una *metrica* su ℓ^p. Per verificare la disuguaglianza triangolare, poniamo (per $t \geq 0$) $f_p(t) := 1 + t^p - (1+t)^p$; si ha $f_p(0) = 0$, ed è immediato verificare che f_p è crescente, quindi $(1+t)^p \leq 1 + t^p\ \ \ \forall t \geq 0$. Se ne deduce (ponendo $t := a/b$) che per ogni $a, b \geq 0$ si ha $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, quindi che

$$|x_n - y_n|^p \leq (|x_n - z_n| + |z_n - y_n|)^p \leq |x_n - z_n|^p + |z_n - y_n|^p,$$

da cui $d_p(x,y) \leq d_p(x,z) + d_p(z,y),\ \ \forall x, y, z \in \ell^p$. Inoltre, è chiaro che rispetto alla topologia τ_p indotta da d_p le applicazioni Φ, Ψ della (2.23) sono continue (si osservi che $d_p(\alpha x, 0) = |\alpha|^p\, d_p(x,0)$, e $d_p(x+y,0) \leq d_p(x+y,y) + d_p(y,0) = d_p(x,0) + d_p(y,0)$).

Considerazioni analoghe si possono svolgere per lo spazio $L^p(\Omega)$ (con $0 < p < 1$) delle funzioni di potenza p-esima sommabile nell'insieme misurabile Ω, munito della topologia η_p indotta dalla metrica definita da

$$d_p(x,y) := \int_\Omega |x(t) - y(t)|^p\, dt$$

.

Per $0 < p < 1$, gli spazi $(\ell^p; \tau_p)$ ed $(L^p(\Omega); \eta_p)$ sono quindi *spazi vettoriali topologici*, ma *non* normabili, dato che, ad esempio, $d_p(2x,0) = 2^p\, d_p(x,0)$; si ricordi la **Proposizione 1.2.5**. ∎

Tuttavia, la struttura di spazio vettoriale topologico $(X;\tau)$ ora introdotta è un'estensione fin troppo generale per gli scopi usuali dell'Analisi; uno dei principali aspetti negativi è la possibilità che il *duale topologico* [35] $(X;\tau)^*$ dello spazio vettoriale topologico $(X;\tau)$ sia ridotto a $\{0\}$, cioè che non esistano funzionali lineari e continui su $(X;\tau)$ eccettuato il funzionale identicamente nullo. Come ora mostriamo (supponendo per semplicità $\Omega =]0,1[$), ciò si verifica, ad esempio, per gli spazi $L^p(\Omega)$ con $0 < p < 1$ appena introdotti. Sia f un qualunque funzionale lineare non identicamente nullo su $L^p(0,1)$; esiste allora $x \in L^p(0,1)$ con $\alpha := f(x) \neq 0$. Sostituendo eventualmente x con $x \operatorname{sign} \alpha / d(x,0)$, possiamo supporre che sia $d(x,0) = 1$ e $\alpha > 0$. Poiché la funzione integrale

$$\xi(t) := \int_0^t |x(\tau)|^p \,\mathrm{d}\,\tau$$

è continua e non decrescente su $[0,1]$, fissato $n \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere una partizione $\{t_0,\ldots,t_n\}$, con $0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$, tale che $\xi(t_k) = k/n$. Dato che, detta χ_k $(k = 1,\ldots,n)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $]t_{k-1},t_k[$, e posto $y_k(t) := x(t)\,\chi_k(t)$, si ha, q.o. in $[0,1]$, $x(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t)$, quindi $f(x) = \alpha = \sum_{k=1}^n f(y_k)$, deve esistere $h \in \{1,\ldots,n\}$ tale che $f(y_h) \geq \alpha/n$. Poniamo $x^{(n)}(t) := n\,y_h(t)$, cosicché

$$d(x^{(n)},0) = n^p\,d(y_h,0) = n^p\,(\xi(t_h) - \xi(t_{h-1})) = n^{p-1},$$

quindi $\lim_n x^{(n)} = 0$ in $L^p(0,1)$. D'altra parte, si ha $f(x^{(n)}) = n\,f(y_h) \geq \alpha > 0$, quindi f *non è continuo.*

Per contemperare le esigenze di generalità con quelle di ricchezza della struttura, conviene allora restringersi ad una categoria particolare ma significativa.

Definizione **2.4.5** *Lo spazio vettoriale topologico $(X;\tau)$ si dice* **localmente convesso** *se l'origine ammette un sistema fondamentale di intorni* convessi, *equilibrati (ed assorbenti).* ■

Osservazione **2.4.2** Gli spazi ℓ^p, $L^p(\Omega)$ con $0 < p < 1$ introdotti sopra *non* sono localmente convessi: verifichiamolo nel caso di ℓ^p. Per assurdo, supponiamo ℓ^p localmente convesso; allora l'intorno $\Sigma_p(0,1)$ dell'origine deve contenere un insieme aperto, convesso, equilibrato ed assorbente W, che a sua volta deve contenere la sfera chiusa $\overline{\Sigma_p}(0,\varrho)$ per un opportuno $\varrho > 0$. In particolare, $\varrho^{1/p}\,e^{(n)} \in W$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e, poiché W è convesso, $y := \varrho^{1/p}\,N^{-1}\sum_{k=1}^N e^{(k)}$ appartiene a W per ogni $N \in \mathbb{N}$. Dunque $y \in \Sigma_p(0,1)$, assurdo perché $d(y,0) = \varrho\,N^{1-p} \to +\infty$ per $N \to +\infty$. ■

La **Definizione 2.4.5** può essere riformulata in termini più analitici, facendo ricorso alla nozione di *funzionale di* MINKOWSKI j_K del sottoinsieme $K \neq \emptyset$ dello spazio vettoriale X (**Definizione 2.2.5**). Si ha intanto che

Proposizione **2.4.6** *Sia X uno spazio vettoriale.*

i) Se $W \subset X$ è convesso, equilibrato ed assorbente, allora j_W è una seminorma, e

$$\{x \in X \mid j_W(x) < 1\} \subset W \subset \{x \in X \mid j_W(x) \leq 1\}.$$

[35] definito ancora come spazio vettoriale dei funzionali lineari e *continui* da X in $\mathbb{R}$

Se p è una seminorma su X, allora:

ii): l'insieme W dato da $W := \{x \in X \mid p(x) < 1\}$ è convesso, equilibrato ed assorbente, e p è il funzionale di Minkowski *di W;*

iii): per ogni $x_0 \in X$, esiste un funzionale lineare f tale che $f(x_0) = p(x_0)$ e $|f(x)| \le p(x) \quad \forall x \in X$.

Dim.: *i*): dato che W è assorbente, si ha che $j_W(x)$ è un numero reale (non negativo) per ogni $x \in X$; è poi evidente che $j_W(tx) = t\, j_W(x)\ \forall(x \in X,\ t > 0)$, e che $W \subset \{x \in X \mid j_W(x) \le 1\}$. Dalla convessità di W segue, come nella dimostrazione della **Proposizione 2.2.5**, che

$$j_W(x+y) \le j_W(x) + j_W(y)\ \forall x, y \in X,$$

e che inoltre risulta $\{x \in X \mid j_W(x) < 1\} \subset W$. Infine, dato che W è anche equilibrato, fissati $\alpha \in \mathbb{R}, t > 0, x \in X$ si ha che $t^{-1}\alpha x \in W \iff t^{-1}|\alpha| x \in W$, quindi $\alpha x \in tW \iff |\alpha| x \in tW$: ne segue che $j_W(\alpha x) = |\alpha| j_W(x)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed ogni $x \in X$.

ii): per ogni x fissato in X, se $t > p(x)$ si ha $p(x/t) < 1$, quindi $x \in tW$, cioè W è assorbente. Inoltre,

$$\inf\{t > 0 \mid x \in tW\} = \inf\{t > 0 \mid p(x/t) < 1\} = \inf\{t > 0 \mid p(x) < t\} = p(x),$$

cioè $p = j_W$. Fissati $x, y \in W$ e $t \in [0, 1]$, si ha poi

$$p(tx + (1-t)y) \le tp(x) + (1-t)p(y) < 1,$$

quindi $tx + (1-t)y \in W$, cioè W è convesso. Infine, se $0 < |\alpha| \le 1$ si ha

$$\alpha W = \{x \in X \mid p(x/\alpha) < 1\} = \{y \in X \mid p(y) < |\alpha|\} \subset W;$$

è poi evidente che $0W = \{0\} \subset W$, quindi W è anche equilibrato.

iii): detta V la varietà lineare generata da x_0, definiamo $\varphi(\lambda x_0) := \lambda p(x_0)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$; quindi se $x = \lambda x_0$ si ha $|\varphi(x)| = |\lambda|\, p(x_0) = p(x)$. Per il **Teorema 2.1.1**, esiste un prolungamento lineare f definito su tutto X che per ogni $x \in X$ verifica $f(x) \le p(x)$, quindi anche $|f(x)| \le p(x)$. ■

Ne segue che il duale di uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, separato e non ridotto a $\{0\}$ *non è mai ridotto allo zero*: se $x_0 \ne 0$, e W è un intorno dell'origine aperto, convesso, equilibrato, e non contenente x_0, posto $p := j_W$, il funzionale f costruito nella dimostrazione del punto *iii*) della Proposizione precedente è limitato su W, quindi è continuo, per la **Proposizione 2.4.5**, *iii*), e $f(x_0) = p(x_0) \ge 1$.

Si vede inoltre facilmente che

Corollario 2.4.2 *Se $(X; \tau)$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, e W è un intorno dell'origine convesso, equilibrato ed inoltre* aperto*, allora si ha $W = \{x \in X \mid j_W(x) < 1\}$.*

Dim.: per la *i*) della Proposizione precedente, basta mostrare che per ogni x fissato in W si ha $j_W(x) < 1$. Dato che l'applicazione $\alpha \mapsto \alpha x$ da $\mathbb{R}$ in X è continua per $\alpha = 1$, in particolare deve esistere $\varepsilon > 0$ tale che $(1+\varepsilon)x \in W$. Dalla *i*), si ha allora $j_W((1+\varepsilon)x) \le 1$, cioè $j_W(x) \le (1+\varepsilon)^{-1} < 1$. ■

Osservazione **2.4.3** ℓ^p con $0 < p < 1$ è un esempio di spazio vettoriale topologico *non* localmente convesso, ma con duale non ridotto a $\{0\}$. Ad esempio, fissato $y := \{y_n\} \in \ell^\infty$, e posto $f(x) := \sum_n x_n\, y_n \quad \forall x := \{x_n\} \in \ell^p$, il funzionale lineare f è limitato su $\Sigma_p(0,1)$, dove risulta $|f(x)| \le \|y\|_\infty \sum_n |x_n| \le \|y\|_\infty \sum_n |x_n|^p < \|y\|_\infty$, quindi è *continuo* su ℓ^p. ∎

Si ha anche la seguente caratterizzazione:

Teorema **2.4.3** *Sia X uno spazio vettoriale.*

i) Se $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme su X, fissati $p \in \mathcal{P}$ e $\varrho > 0$ si ponga

$$V(p;\varrho) := \{x \in X \mid p(x) < \varrho\}; \tag{2.25}$$

inoltre, si definiscano $\mathcal{V}(x_0)$ (per ogni fissato $x_0 \in X$) e $\tau = \tau(\mathcal{P})$ ponendo:

$$V \in \mathcal{V}(x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \exists (n \in \mathbb{N},\ p_1,\dots,p_n \in \mathcal{P},\ \varrho > 0) : \\ V = x_0 + \bigcap_{k=1}^n V(p_k;\varrho); \end{cases} \tag{2.26}$$

$$A \in \tau(\mathcal{P}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x_0 \in A,\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0) :\ V \subset A. \tag{2.27}$$

Allora $(X;\mathcal{P}) := (X;\tau(\mathcal{P}))$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso; è separato se e solo se $\forall x_0 \neq 0\ \exists p \in \mathcal{P} :\ p(x_0) > 0$. Inoltre, $\mathcal{V}(x_0)$ è un sistema fondamentale di intorni (aperti) del punto $x_0 \in X$.

ii) Reciprocamente, se $(X;\eta)$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, e $\mathcal{W}$ è la famiglia degli intorni aperti, convessi ed equilibrati dell'origine in $(X;\eta)$, allora $(X;\eta)$ coincide con lo spazio $(X;\{j_W\}_{W\in\mathcal{W}})$.

Dim.: *i)*: è evidente che τ è una topologia su X. Mostriamo intanto che $(X;\tau)$ è uno spazio vettoriale topologico. Chiaramente, basta mostrare che le applicazioni Φ, Ψ della (2.23) sono continue rispettivamente nei punti $x = y = 0$ e $\alpha = 0,\ x = 0$. Sia V un intorno dell'origine, che non è restrittivo supporre della forma

$$V = \textstyle\bigcap_{k=1}^n V(p_k;\varrho), \text{ con } p_k \in \mathcal{P} \text{ per } k = 1,\dots,n \in \mathbb{N}, \text{ e } \varrho > 0.$$

L'insieme $V_0 := \bigcap_{k=1}^n V(p_k;\varrho/2)$ è un intorno dell'origine, e $\Phi(V_0,V_0) \subset V$, il che dimostra la continuità di Φ nel punto $(0;0)$.

Analogamente, si ha che $\Psi(]-1,1[,V) \subset V$, da cui la continuità di Ψ nel punto $(0;0)$.

Infine, dato che *ogni* insieme di $\mathcal{V}(0)$ è *convesso* ed *equilibrato*, si conclude che $(X;\tau)$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso.

Supponiamo ora che $(X;\tau)$ sia separato, e sia $x_0 \in X\setminus\{0\}$, cosicché esiste un intorno V dell'origine tale che $x_0 \notin V$. Non è limitativo supporre, come sopra, che V sia della forma $V = \{x \in X \mid p_k(x) < \varrho\}$ (con $p_1,\dots,p_n \in \mathcal{P}$ e $\varrho > 0$): poiché $x \notin V$, deve esistere k tale che $p_k(x_0) \ge \varrho$, quindi $p_k \in \mathcal{P}$ e $p_k(x_0) > 0$.

Reciprocamente, supponiamo che $\forall x_0 \neq 0$ esista $p \in \mathcal{P}$ tale che sia $p(x_0) > 0$; l'insieme $V_0 := \{x \in X \mid p(x) < p(x_0)/2\}$ è un intorno dell'origine che non contiene x_0.

ii): basta mostrare che $\mathcal{W}$ coincide con la famiglia $\mathcal{V}(0)$ definita nella (2.26). In effetti, da un lato, per la *iii)* della Proposizione precedente, se $W \in \mathcal{W}$ si ha $W = V(j_W; 1) \in \mathcal{V}(0)$. D'altra parte, se $V \in \mathcal{V}(0)$, per definizione esistono $W_1, \ldots, W_n \in \mathcal{W}$, $\varrho > 0$ tali che $W := \bigcap_{k=1}^n V(j_{W_n}; \varrho) \subset V$. Dato che $W = \varrho \bigcap_{k=1}^n W_k \in \mathcal{W}$, ne discende la tesi. ∎

Anche il **Teorema 2.2.2** si estende agli spazi vettoriali topologici *localmente convessi*, con una dimostrazione analoga a quella vista nel caso degli spazi di Banach; dobbiamo però premettere il seguente risultato (valido in ogni spazio vettoriale topologico):

Lemma 2.4.1 *Sia X uno spazio vettoriale topologico; se C, K sono due suoi sottoinsiemi, con C chiuso e K compatto, allora l'insieme $C + K$ è chiuso.*

Dim.: fissiamo ad arbitrio $x \in \overline{C + K}$, cosicché per ogni intorno V dell'origine si ha che $(x + V) \cap (C + K) \neq \emptyset$, , e mostriamo che $x \in C + K$. Posto $\mathcal{A}_V := (x + V - C) \cap K$, da quanto precede si ha $\mathcal{A}_V \neq \emptyset$; ed è ovvio che

$$(V_1 \subset V_2) \Longrightarrow (\mathcal{A}_{V_1} \subset \mathcal{A}_{V_2}).$$

Dato che ogni intersezione finita di intorni dell'origine è ancora un intorno dell'origine, la famiglia

$$\{\overline{\mathcal{A}_V} \mid V \ intorno\ dell'origine\}$$

ha la proprietà di intersezione finita, dunque, grazie alla compattezza di K, l'intersezione di tutti gli elementi della famiglia contiene almeno un punto y; ne viene che, per ogni coppia U, V di intorni dell' origine, $(y+U)\cap\mathcal{A}_V \neq \emptyset$, quindi

$$(y + U - V) \cap (x - C) \neq \emptyset. \tag{2.28}$$

Fissiamo ora un intorno arbitrario W dell'origine. Per la continuità dell'applicazione $\{x_1; x_2\} \mapsto x_1 - x_2$ da $X \times X$ in X, esistono due intorni U, V dell'origine tali che $V - U \subset W$; per la (2.28), ne segue che $(y - W) \cap (x - C) \neq \emptyset$, da cui $(x-y+W)\cap C \neq \emptyset$. Per l'arbitrarietà di W, ciò implica che $x-y \in \overline{C} = C$; dato che, per costruzione, $y \in K$, ne viene che $x = (x - y) + y \in C + K$. ∎

Teorema 2.4.4 *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso separato, e siano A, B due suoi sottoinsiemi* convessi, chiusi, non vuoti *e* disgiunti. *Se A è* compatto, *esiste un iperpiano chiuso che separa A e B* in senso stretto.

Dim.: seguiamo la linea della dimostrazione del **Teorema 2.2.2**. L'insieme $C := A - B$ non contiene l'origine, è $\neq \emptyset$, convesso, e *chiuso* per il Lemma che precede; quindi $E \setminus C$ è un intorno aperto dell'origine. Dato che X è *localmente convesso*, esiste un intorno aperto e convesso V dell'origine tale che $V \cap C = \emptyset$. Per il **Teorema 2.4.2**, esistono un funzionale lineare e continuo f su X ed $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f(v) < \alpha \leq f(c), \quad \forall (v \in V,\ c \in C)$; in particolare, si ha $0 = f(0) < \alpha$, quindi $\inf_{b\in B} f(b) - \sup_{a\in A} f(a) \geq \alpha > 0$: se α' è in $]\sup_{a\in A} f(a), \inf_{b\in B} f(b)[$, l'iperpiano chiuso $\big[f = \alpha'\big]$ separa A e B in senso stretto. ∎

In vista delle applicazioni al caso degli spazi normati, hanno particolare rilevanza gli spazi che si possono introdurre con la seguente

Definizione **2.4.6** *Dato lo spazio vettoriale X, indichiamo con $X^{\#}$ il suo* **duale algebrico** (*spazio vettoriale di tutti i funzionali* lineari *definiti su X). Sia X' una varietà lineare $\subset X^{\#}$; la topologia $\sigma(X, X')$ è definita come la* topologia iniziale *su X rispetto alle applicazioni $\{f\}_{f\in X'}$ da X in $X_f := \mathbb{R}$.* ∎

Una base per la topologia $\sigma(X, X')$ è quindi data dalla famiglia $\mathcal{B}$ definita come segue:

$$B \in \mathcal{B} \overset{def}{\Longleftrightarrow} B = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(A_k), \quad (n \in \mathbb{N}, \ \ f_k \in X', \ \ A_k \text{ aperto in } \mathbb{R});$$

per ogni $x_0 \in X$, le famiglie $\mathcal{V}(x_0)$ e $\mathcal{W}(x_0)$ definite da

$$V \in \mathcal{V}(x_0) \text{ se e solo se}$$
$$V = \{x \in X \mid |f_k(x - x_0)| < \varrho \ \ (1 \le k \le n, \ \ n \in \mathbb{N}, \ f_k \in X', \ \varrho > 0)\};$$

$$W \in \mathcal{W}(x_0) \text{ se e solo se}$$
$$W = \{x \in X \mid |f_k(x - x_0)| \le \varrho \ \ (1 \le k \le n, \ \ n \in \mathbb{N}, \ f_k \in X', \ \varrho > 0)\}$$

costituiscono due sistemi fondamentali di intorni, rispettivamente *aperti* e *chiusi*, del punto x_0 (si osservi che, ad esempio, grazie alla linearità degli f_k gli insiemi $V \in \mathcal{V}(x_0)$ sono della forma $V = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(]f_k(x_0) - \varrho, f_k(x_0) + \varrho[)$).

Si ha il seguente risultato fondamentale:

Teorema **2.4.5** $(X; \sigma(X, X'))$ *è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso; è* separato *se e solo se*

$$\forall x_0 \in X \setminus \{0\}, \quad \exists f \in X' : \ \ f(x_0) \neq 0.$$

Dim.: se $f \in X'$, il funzionale p_f definito da $p_f(x) := |f(x)|$ è una seminorma su X; inoltre (notazioni della (2.25)) si ha

$$\{x \in X \mid |f(x - x_0)| < \varrho\} = x_0 + V(p_f; \varrho).$$

Di conseguenza, lo spazio $(X; \sigma(X, X'))$ *coincide* con lo spazio $(X; \{p_f\}_{f\in X'})$, ed il risultato segue dal Teorema precedente. ∎

Per caratterizzare il duale topologico di $(X; \sigma(X, X'))$, premettiamo un risultato di natura algebrica:

Lemma **2.4.2** *Sia X uno spazio vettoriale, e siano $f_0, f_1, \ldots, f_n \in X^{\#}$; f_0 è combinazione lineare degli f_k se e solo se $\bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k \subset \ker f_0$.*

Dim.: se $f_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k$ e $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k$, è evidente che $x \in \ker f_0$. Per dimostrare l'implicazione reciproca, consideriamo l'applicazione $F : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ data da

$$F(x) := \{f_1(x), \ldots, f_n(x), f_0(x)\}.$$

Per ipotesi, $e^{(n+1)} \notin R(F)$; detto P l'operatore di proiezione su $R(F)$, che è una varietà lineare, quindi *chiusa*, di $\mathbb{R}^{n+1}$, poniamo

$$w = \{w_1, \ldots, w_{n+1}\} := e^{(n+1)} - P\, e^{(n+1)}.$$

Poiché w è la proiezione di $e^{(n+1)}$ sulla varietà ortogonale ad $R(F)$, si ha che $w_{n+1} \neq 0$, mentre $w \perp R(F)$, cioè

$$\sum_{k=1}^{n} w_k\, f_k(x) + w_{n+1}\, f_0(x) = 0 \quad \forall x \in X;$$

ne viene che $f_0 = \sum_{k=1}^{n} (-w_{n+1}^{-1}\, w_k)\, f_k$. ∎

Possiamo allora dimostrare il seguente

Teorema 2.4.6 *Il sostegno del duale (topologico) di $(X; \sigma(X, X'))$ è X'.*

Dim.: per definizione, ogni $f \in X'$ è in $(X; \sigma(X, X'))^*$. Reciprocamente, se $f_0 \in X^{\#}$ è continuo per la topologia $\sigma(X, X')$, esiste un intorno V dell'origine in $(X; \sigma(X, X'))$ tale che risulti $f_0(V) \subset]-1, 1[$. Esistono allora $\varrho > 0$ e $f_1, \ldots, f_n$ in X' tali che si abbia $W := \{x \in X \mid |f_k(x)| < \varrho\} \subset V$. In particolare, se $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k$ si ha $n\, x_0 \in W \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, cioè $n\, |f_0(x_0)| < 1$, da cui $f_0(x_0) = 0$. Per il Lemma precedente, f_0 è combinazione lineare degli f_k, quindi $f_0 \in X'$. ∎

Nel prossimo Paragrafo vedremo alcuni esempi significativi di spazi LCS[36] costruiti nel modo ora descritto a partire da uno spazio normato assegnato.

2.5 Le topologie deboli.

Sia E uno spazio normato; la topologia indotta dalla norma, o **topologia forte**, lo rende evidentemente uno spazio LCS: la norma su E è ovviamente una seminorma, e, se si pone $\mathcal{P} := \{\|\,.\,\|\}$, lo spazio $(E; \mathcal{P})$ è ovviamente separato. Utilizzando il procedimento illustrato alla fine del Paragrafo precedente, si può però definire su E un'altra topologia di spazio LCS: quella determinata dai funzionali $f \in E^* \subset E^{\#}$:

Definizione 2.5.1 *La* **topologia debole** *sullo spazio normato E è la topologia $\sigma(E, E^*)$ della* **Definizione 2.4.6***, cioè la topologia iniziale su E rispetto alla famiglia di applicazioni $\{f\}_{f \in E^*}$.* ∎

Dal **Teorema 2.4.5**, ricordando il **Corollario 2.1.2**, e dal **Teorema 2.4.6** si ha allora che

Teorema 2.5.1 *$(E; \sigma(E, E^*))$ è uno spazio* LCS*; il sostegno del suo duale topologico è uguale ad E^*.* ∎

Per brevità di scrittura, indicheremo spesso con E_s lo spazio $(E; \|\,.\,\|)$, e con E_w lo spazio $(E; \sigma(E, E^*))$. Inoltre, seguendo le notazioni usuali, d'ora in poi indicheremo con $\langle f, x\rangle$ (se necessario, con ${}_{E^*}\langle f, x\rangle_E$), anziché con $f(x)$, il valore che $f \in E^*$ assume su $x \in E$.

Nel **§1.7** abbiamo introdotto la nozione di *successione debolmente convergente ad $x \in E$*; la *ii)* della **Proposizione 2.4.2** mostra che la **Definizione 1.7.1** è in accordo con la nozione di topologia debole ora introdotta: $x_n \rightharpoonup x$ se e solo se $x_n \to x$ in $\sigma(E, E^*)$. In particolare, le **Proposizioni 1.7.2** e **1.7.3** forniscono proprietà delle *successioni* convergenti ad $x \in E$ in $E_w = (E; \sigma(E, E^*))$.

[36] per brevità, nel seguito scriveremo spesso *spazio* LCS anziché *spazio vettoriale topologico localmente convesso e separato.*

Occorre però considerare con attenzione la seguente circostanza. Mentre, dalla definizione stessa, si ha che

$$(x_n \to x \text{ in } \sigma(E, E^*)) \Longrightarrow (\forall f \in E^*, \ \text{ esiste in } \mathbb{R} \text{ il } \lim_n \langle f, x_n \rangle),$$

(il limite è $\langle f, x \rangle$), non vale, in generale, l'implicazione reciproca. Si osservi che l'esistenza $\forall f \in E^*$ del $\lim_n \langle f, x_n \rangle$ esprime il fatto che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$. Si pone allora la seguente

Definizione **2.5.2** *Lo spazio normato E si dice* **debolmente sequenzialmente completo** *se, per* ogni *successione $\{x_n\}$ di* Cauchy *nella topologia debole, esiste $x \in E$ tale che $x_n \rightharpoonup x$.* ∎

La completezza sequenziale nella topologia debole è una condizione più restrittiva della completezza nella topologia indotta dalla norma:

Proposizione **2.5.1** *Se lo spazio normato E è debolmente sequenzialmente completo, è uno spazio di* Banach.

Dim.: mostriamo che se E non è completo, non può essere debolmente sequenzialmente completo. Sia $\{x_n\} \subset E$ una successione di Cauchy che non ammette limite (in E_s); per ogni $f \in E^*$, la successione numerica $\{\langle f, x_n \rangle\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, cioè $\{x_n\}$ è di Cauchy nella topologia debole. Per assurdo, supponiamo che esista $x \in E$ tale che $x_n \rightharpoonup x$. Indichiamo con $\widetilde{E}$ il completamento di E, e con I l'immersione canonica di E in $\widetilde{E}$ (**Teorema 1.4.5**). Si ha allora che $\widetilde{x}_n := I x_n$ è di Cauchy in $\widetilde{E}$, quindi converge in $\widetilde{E}_s$ ad un elemento ξ, dunque converge a ξ anche in $\widetilde{E}_w$. D'altra parte, dato che I è un'isometria lineare, da $x_n \rightharpoonup x$ segue che $\widetilde{x}_n \rightharpoonup \widetilde{x} := Ix$: infatti, se Φ è un qualunque elemento in $\widetilde{E}^*$, l'applicazione $f := \Phi \circ I$ è evidentemente un funzionale lineare e continuo su E, dunque ${}_{\widetilde{E}^*}\langle \Phi, \widetilde{x}_n \rangle_{\widetilde{E}} = {}_{E^*}\langle f, x_n \rangle_E \to {}_{E^*}\langle f, x \rangle_E = {}_{\widetilde{E}^*}\langle \Phi, \widetilde{x} \rangle_{\widetilde{E}} \quad \forall \Phi \in \widetilde{E}^*$, cioè $\widetilde{x}_n \rightharpoonup \widetilde{x}$. Allora si deve avere $\xi = \widetilde{x}$, dunque $\|x_n - x\|_E = \|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}\|_{\widetilde{E}} \to 0$, cioè $x_n \to x$ in E, contrariamente all'ipotesi. ∎

Osservazione **2.5.1** In effetti, esistono spazi di Banach che *non* sono debolmente sequenzialmente completi: un esempio è lo spazio $\mathfrak{c}_0$ introdotto nel **Paragrafo 2.1**. Se $x^{(n)} := \sum_{k=1}^{n} e^{(k)}$, la successione $\{x^{(n)}\} \subset \mathfrak{c}_0$ è costituita da vettori unitari, e per ogni f in $\mathfrak{c}_0^*$ si ha, posto [37] $\{f_k\} = \mathcal{J} f \in \ell^1$, che $\langle f, x^{(n)} \rangle = \sum_{k=1}^{n} f_k$, cosicché $\lim_n \langle f, x^{(n)} \rangle = \sum_n f_n \in \mathbb{R}$. Tuttavia, non può esistere nessun $x = \{x_n\} \in \mathfrak{c}_0$ tale che $\langle f, x \rangle = \sum_n f_n \quad \forall f \in \mathfrak{c}_0^*$: se un tale x esistesse, si vede facilmente, prendendo $f := \mathcal{J}^{-1} e^{(n)}$, che dovrebbe essere $x_n = 1 \ \forall n$, assurdo. ∎

È chiaro dalla definizione che $\sigma(E, E^*)$ è *meno fine* della topologia indotta dalla norma; mostriamo che, in *ogni* spazio con dimensione infinita, $\sigma(E, E^*)$ è *strettamente* meno fine della topologia forte. Premettiamo il seguente

Lemma **2.5.1** *Se lo spazio normato E ha dimensione infinita, nessun insieme $A \neq \emptyset$ che sia aperto nella topologia debole è limitato.*

[37] $\mathcal{J}$ è l'isomorfismo isometrico canonico di $\mathfrak{c}_0^*$ su ℓ^1; si veda la **Proposizione 2.1.3**.

Dim.: mostriamo che se $A \neq \emptyset$ è contenuto nella sfera $\Sigma_E(0,r)$ con $r > 0$, A non può essere aperto in $\sigma(E,E^*)$. Per traslazione, possiamo supporre che $0 \in A$; se, per assurdo, A fosse aperto, dovrebbe contenere un insieme V della forma $V = \{x \in E \mid |f_k(x)| < \varrho\}$, con $f_k \in E^*$ per $k = 1,\dots,n$, e $\varrho > 0$. Consideriamo l'applicazione lineare $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) := \{\langle f_1, x\rangle, \dots, \langle f_n, x\rangle\};$$

φ non può essere iniettiva, altrimenti sarebbe un isomorfismo algebrico di E su $\varphi(E) \subset \mathbb{R}^n$; in questo caso però ne verrebbe che $\dim E \leq n$. Dunque $\exists x_0$ in $E\setminus\{0\}$ tale che $\langle f_k, x_0\rangle = 0$ per $k = 1,\dots,n$; ma allora $tx_0 \in V \subset \Sigma_E(0,r)\ \ \forall t \in \mathbb{R}$, quindi $\|tx_0\| < r\ \ \forall t \in \mathbb{R}$, impossibile perché $x_0 \neq 0$. ∎

Una conseguenza immediata:

Proposizione 2.5.2 *Sullo spazio normato E, la topologia debole coincide con la topologia forte se e solo se $\dim E < \infty$.*

Dim.: sia $\dim E = n$; occorre soltanto mostrare che, fissati ad arbitrio $x_0 \in E$ e $\varrho_0 > 0$, esiste un intorno V di x_0 per la topologia $\sigma(E,E^*)$ contenuto in $\Sigma_E(x_0,\varrho_0)$. Per questo, fissata in E una base $\{e_1,...,e_n\}$ con $\|e_k\| = 1$, siano f_k i funzionali lineari e continui su E definiti da $\langle f_k, x\rangle := x_k$ se $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Posto

$$V := \{x \in E \mid |\langle f_k, x - x_0\rangle| < \frac{\varrho_0}{n},\quad k = 1,\dots,n\},$$

si ha che V è un intorno di x_0 in $\sigma(E,E^*)$, ed inoltre per ogni $x \in V$ risulta che $\|x - x_0\| = \|\sum_{k=1}^n \langle f_k, x - x_0\rangle\, e_k\| \leq \sum_{k=1}^n |\langle f_k, x - x_0\rangle| < \varrho_0$, quindi $V \subset \Sigma_E(x_0,\varrho_0)$.

Se invece $\dim E = \infty$, per il Lemma precedente la sfera unitaria $\Sigma_E := \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$ è aperta nella topologia forte, ma *non è aperta* in $\sigma(E,E^*)$. ∎

È importante mettere in evidenza che invece, anche in uno spazio a dimensione infinita, per gli *insiemi convessi* c'è coincidenza tra *chiusura forte* e *chiusura debole*:

Proposizione 2.5.3 *Sia K un sottoinsieme* convesso *dello spazio normato E; la chiusura debole (cioè in E_w) di K coincide con la sua chiusura forte (cioè in E_s).*

Dim.: occorre solo verificare che se K è chiuso fortemente allora lo è anche debolmente. Sia $A := E \setminus K$, e mostriamo che A è debolmente aperto. Fissato $x_0 \in A$, per il **Teorema 2.2.2** esistono $f \in E^*,\ \alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, x\rangle,\quad \forall x \in K.$$

Posto $V := \{x \in E \mid \langle f, x\rangle < \alpha\}$, si ha che V è aperto nella topologia debole, $V \subset A$ ed $x_0 \in V$; quindi, A è un intorno di ogni suo punto, cioè è aperto. ∎

Si ha inoltre la seguente conseguenza:

Corollario 2.5.1 *In ogni spazio normato E con dimensione infinita, la chiusura in $\sigma(E,E^*)$ dell'insieme $A := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ è l'intera sfera unitaria chiusa $\overline{\Sigma} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$.*

Dim.: detta B la chiusura di A in $\sigma(E, E^*)$, verifichiamo intanto che $\Sigma \subset B$ mostrando che, fissato ad arbitrio x_0 con $\|x_0\| < 1$, ogni intorno di x_0 in $\sigma(E, E^*)$ della forma $V = \{x \in E \mid |\langle f_k, x - x_0\rangle| < \varepsilon\}$, con $\varepsilon > 0$, $k = 1, \ldots, n$, $f_k \in E^*$, ha intersezione non vuota con A. Procedendo come nella dimostrazione del **Lemma 2.5.1**, si vede che $\exists y_0 \neq 0$ tale che $y_0 \in \bigcap_{k=1}^n \ker f_k$. Poiché la funzione $t \mapsto g(t) := \|x_0 + ty_0\|$ è continua in $\mathbb{R}$, ed inoltre $g(0) = \|x_0\| < 1$, e $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, esiste $t_0 > 0$ tale che $g(t_0) = 1$, cioè $x_0 + t_0 y_0 \in A$; ed è ovvio che $x_0 + t_0 y_0 \in V$, da cui $\Sigma \subset B$. Poiché, per la **Proposizione 2.5.3**, la chiusura debole di $\overline{\Sigma}$ coincide con la sua chiusura forte, che è ancora $\overline{\Sigma}$, ne viene che $\overline{\Sigma} \subset B$; dato che $A \subset \overline{\Sigma}$, si ha anche $B \subset \overline{\Sigma}$, da cui la tesi. ∎

Si dice **semispazio chiuso** ogni insieme della forma $\{x \in E \mid \langle f, x\rangle \leq \alpha\}$, con $f \in E^*$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$; si vede facilmente che

Corollario 2.5.2 *Ogni sottoinsieme convesso e chiuso di uno spazio normato è l'intersezione dei semispazi chiusi che lo contengono.* ∎

Osservazione 2.5.2 In *ogni* spazio di Hilbert di dimensione infinita, ci sono successioni che convergono debolmente ma non fortemente:[38] per la disuguaglianza di Bessel, ciò accade, ad esempio, se la successione $\{x_n\}$ è un sistema ortonormale infinito. Questa proprietà *non si estende* a *tutti* gli spazi di Banach: se $\dim E = \infty$, nonostante la topologia debole sia *strettamente* meno fine di quella forte, può tuttavia accadere che ci sia coincidenza tra *successioni* debolmente e fortemente convergenti ad un elemento x. Ad esempio (si veda più avanti il Teorema di Schur (**Teorema 2.9.6**)):

$$\textit{in } \ell^1, \ (x_n \rightharpoonup x) \Longleftrightarrow (x_n \to x). \ \blacksquare$$

Infine, una proprietà riguardante la continuità di un operatore lineare tra due spazi di Banach:

Proposizione 2.5.4 *Sia T un operatore lineare dallo spazio di* Banach *E nello spazio di* Banach *F; le proprietà:*

i) T è continuo da E_s in F_s;

ii) T è continuo da E_w in F_w;

iii) T è continuo da E_s in F_w

sono tra loro equivalenti, e sono implicate da

iv) T è continuo da E_w in F_s.

Dim.: *i*) $\Rightarrow$ *ii*): per la **Proposizione 2.4.2**, *iii*), basta mostrare che $\forall g \in F^*$ l'applicazione $g \circ T$ è continua da E_w in $\mathbb{R}$; ora, $g \circ T$ è continua da E_s in $\mathbb{R}$, quindi è un elemento di E^*, dunque, per definizione di topologia debole, è continua da E_w in $\mathbb{R}$.

ii) $\Rightarrow$ *iii*): per ogni aperto $A \subset F_w$, $T^{-1}(A)$ è aperto in E_w, quindi in E_s.

iii) $\Rightarrow$ *i*): il grafico $G(T)$ è chiuso in $E_s \times F_w$, quindi in $E_s \times F_s$; per il Teorema del grafico chiuso, T è continuo da E_s in F_s.

Per concludere, basta osservare che *iv*) implica ovviamente *i*) (ma *non* è equivalente a *i*): si veda più avanti la **Proposizione 2.6.12**). ∎

[38] anzi, questa è una caratterizzazione degli spazi di Hilbert di dimensione infinita.

Consideriamo ora il *duale* E^* dello spazio normato E. Poichè E^* è uno spazio di Banach, oltre alla topologia forte (indotta dalla norma duale $\|\,.\,\|_*$) è definita su E^* la topologia debole $\sigma(E^*, E^{**})$ (dove $E^{**} := (E^*)^*$ è il *biduale* di E). Si può inoltre definire su E^*, sempre utilizzando il procedimento descritto nel Paragrafo precedente, una terza topologia di spazio LCS. Premettiamo un'osservazione, che riprenderemo più ampiamente nel successivo **Paragrafo 2.7**.

Proposizione 2.5.5 *Siano E uno spazio di* Banach*, e $\mathfrak{J}$ l'applicazione che al generico vettore $\xi \in E$ associa l'elemento $\mathfrak{J}\,\xi \in E^{**}$ così definito:*

$$_{E^{**}}\langle \mathfrak{J}\,\xi, f\rangle_{E^*} :=_{E^*} \langle f, \xi\rangle_E, \quad \forall f \in E^*;$$

allora $\mathfrak{J}$ è un isomorfismo isometrico di E sul sottospazio chiuso $\mathfrak{J}(E)$ di E^{**}.

Dim.: la linearità di $\mathfrak{J}$ è evidente, così come il fatto che $\mathfrak{J}$ sia un'isometria: indicando con $\|\,.\,\|_{**}$ la norma in E^{**}, si ha infatti, per il **Corollario 2.1.3**,

$$\|\mathfrak{J}\,\xi\|_{**} = \sup_{\|f\|_* \le 1} |_{E^{**}}\langle \mathfrak{J}\,\xi, f\rangle_{E^*}| = \sup_{\|f\|_* \le 1} |_{E^*}\langle f, \xi\rangle_E| = \|\xi\|.$$

Dato che $\mathfrak{J}$ è un'isometria, $\mathfrak{J}(E)$ è chiuso. ∎

Non è però detto che $\mathfrak{J}$ sia *suriettivo*. Ad esempio, si è visto che $\mathfrak{c}_0^*$ è isometricamente isomorfo a ℓ^1 (**Proposizione 2.1.3**); ne segue che la successione $\{x_n := 1\}$ è in ℓ^∞ (isometricamente isomorfo a $\mathfrak{c}_0^{**}$) ma non in $\mathfrak{J}(\mathfrak{c}_0)$.[39] È tuttavia sempre possibile –come faremo nel seguito– *identificare*, tramite $\mathfrak{J}$, lo spazio E ad un sottospazio chiuso del suo biduale E^{**}.

Possiamo allora porre la

Definizione 2.5.3 *Sia E^* il duale dello spazio normato E; la* **topologia debole*** *su E^* è la topologia*[40] *$\sigma(E^*, E)$ della* **Definizione 2.4.6***, cioè la topologia iniziale su E^* rispetto alla famiglia di applicazioni $\{\mathfrak{J}\,x\}_{x\in E} \subset E^{**} \subset (E^*)^\#$.* ∎

Si osservi che un *sistema fondamentale $\mathcal{V}_{f_0}$ di intorni del punto $f_0 \in E^*$* nella topologia $\sigma(E^*, E)$ è ad esempio quello definito nel modo seguente:

$$V \in \mathcal{V}_{f_0} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists (n \in \mathbb{N},\ \ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \ \varepsilon > 0) : \\ V = \{f \in E^* \mid |\langle f - f_0, x_k\rangle| < \varepsilon,\ \ k = 1, \ldots, n\}.$$

Dai **Teoremi 2.4.5**[41] e **2.4.6** si ha allora il seguente

Teorema 2.5.2 *$(E^*; \sigma(E^*, E))$ è uno spazio* LCS*; il sostegno del suo duale topologico è uguale ad E.* ∎

---

[39] dimostrazione alternativa: ogni spazio isomorfo ad uno spazio separabile è separabile –si veda il successivo **Paragrafo 2.9**–; ora, $\mathfrak{c}_0$ è separabile, ℓ^∞ non lo è.
[40] identificando E a $\mathfrak{J}(E)$, si scrive $\sigma(E^*, E)$ anziché $\sigma(E^*, \mathfrak{J}(E))$.
[41] la separazione di $E^*_{w^*}$ è ovvia per definizione di funzionale nullo.

La **Proposizione 2.5.4** (con E sostituito da E^* e F da $\mathbb{R}$) mostra che il funzionale lineare $\varphi : E^* \to \mathbb{R}$ è continuo su E^*_w se e solo se lo è su E^*_s, cioè se e solo se $\varphi \in E^{**}$. Il Teorema precedente mostra che la situazione cambia radicalmente se si munisce E^* della topologia $\sigma(E^*, E)$: il funzionale lineare φ su E^* è continuo su $E^*_{w^*}$ se e solo se $\varphi \in \mathfrak{J}(E)$, cioè se e solo se $\exists x \in E : \ \forall f \in E^*, \ \ \varphi(f) =_{E^*} \langle f, x \rangle_E$.

La topologia $\sigma(E^*, E^{**})$ rende continue, in particolare, tutte le applicazioni $\varphi_x : E^* \to \mathbb{R}$, dove $\varphi_x(f) := \langle \mathfrak{J}x, f \rangle, \ \forall x \in E$. Dunque, per definizione di topologia iniziale, $\sigma(E^*, E)$ è *meno fine* di $\sigma(E^*, E^{**})$ (coincide con $\sigma(E^*, E^{**})$ se $\mathfrak{J}$ è *suriettivo*).

Per brevità, porremo spesso $E^*_{w^*} := (E^*; \sigma(E^*, E))$; inoltre, per indicare che la successione $\{f_n\} \subset E^*$ converge ad f nella topologia $\sigma(E^*, E)$, scriveremo $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, oppure w^*-$\lim_n f_n = f$.

Proposizione **2.5.6** *Sia E^* il duale dello spazio di* Banach *E; per ogni successione $\{f_n\}$ in E^*, valgono le seguenti proprietà:*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ se e solo se, $\forall x \in E$, $\lim_n \langle f_n, x \rangle = \langle f, x \rangle$;

ii) se $f_n \rightharpoonup f$, allora $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;

iii) se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, allora $\{f_n\}$ è limitata, e $\|f\|_* \leq \liminf_n \|f_n\|_*$;

iv) se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ e $\|x_n - x\| \to 0$, allora $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Dim.: *i*): è la *ii*) della **Proposizione 2.4.2**;

ii): evidente, perché $\sigma(E^*, E)$ è meno fine di $\sigma(E^*, E^{**})$;

iii): per ogni $x \in E$, $\{\langle f_n, x \rangle\}$ è convergente, dunque limitata; per il Teorema di Banach-Steinhaus (con $G = \mathbb{R}$) applicato alla successione $\{f_n\}$, si deduce che è limitata la successione $\{\|f_n\|_*\}$. Inoltre, da $|\langle f_n, x \rangle| \leq \|f_n\|_* \|x\|$ si deduce che $|\langle f, x \rangle| \leq \liminf_n \|f_n\|_*$ per ogni $x \in E$ tale che $\|x\| \leq 1$, quindi $\|f\|_* \leq \liminf_n \|f_n\|_*$;

iv): si ha

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| &\leq |\langle f_n, x_n - x \rangle| + |\langle f_n - f, x \rangle| \\ &\leq \|f_n\|_* \|x_n - x\| + |\langle f_n - f, x \rangle|; \end{aligned}$$

per la *iii*), esiste c tale che $\|f_n\|_* \leq c$, e, per la *i*), $\langle f_n - f, x \rangle$ tende a zero $\forall x \in E$, il che conclude la dimostrazione. ■

Naturalmente, la **Definizione 2.5.2** si adatta anche al caso del duale di uno spazio di Banach; si pone inoltre la seguente

Definizione **2.5.4** *Sia E^* il duale dello spazio normato E; si dice che E^* è* ***-debolmente sequenzialmente completo** *se, per ogni successione $\{f_n\}$ di* Cauchy *nella topologia debole*, esiste un elemento $f \in E^*$ tale che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.* ■

Vale il seguente risultato:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.5.7** *Sia E uno spazio normato; il suo duale E^* è* sempre *-*debolmente sequenzialmente completo.*

Dim.: sia $\{f_n\}$ tale che $\forall x \in E$ esista in $\mathbb{R}$ il $\lim_n \langle f_n, x\rangle := \varphi(x)$. La successione $\{\langle f_n, x\rangle\}$ è limitata, perché convergente, $\forall x \in E$; per il **Corollario 2.3.4**, è limitata la successione delle norme degli $\{f_n\}$, cioè $\exists c: \ \|f_n\|_* \leq c, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ne viene che $|\varphi(x)| \leq c\|x\|$, quindi il funzionale φ, che è evidentemente lineare, è in E^*, e, per definizione, $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$. ∎

Vediamo ora alcuni risultati riguardanti la *compattezza* della sfera unitaria chiusa $\overline{\Sigma}$ in uno spazio di Banach. È ovvio che se E ha dimensione finita, $\overline{\Sigma}$ è compatta; vale anche la proposizione inversa, come ora verifichiamo. Premettiamo il

$\boxed{\textbf{Lemma}}$ **2.5.2 (Lemma di Riesz)** *Siano E uno spazio normato, ed M un sottospazio* chiuso *e* proprio *di E; allora*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in E: \quad \|x_\varepsilon\| = 1 \quad e \quad d(x_\varepsilon, M) \geq 1 - \varepsilon.$$

Dim.: dato che $M \neq E$, esiste $y_0 \in E \setminus M$, e, poiché M è chiuso, si ha $d := d(y_0, M) > 0$. Fissato $\varepsilon \in]0,1[$, sia $y_\varepsilon \in M$ tale che $d \leq \|y_0 - y_\varepsilon\| < d(1-\varepsilon)^{-1}$. Il vettore x_ε dato da $x_\varepsilon := (y_0 - y_\varepsilon)\|y_0 - y_\varepsilon\|^{-1}$ verifica le condizioni richieste: $\forall x \in M$ si ha infatti $y_\varepsilon + x\,\|y_0 - y_\varepsilon\| \in M$, quindi $\|y_0 - (y_\varepsilon + x\,\|y_0 - y_\varepsilon\|)\| \geq d$, da cui

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon - x\| &= \|(y_0 - y_\varepsilon)\|y_0 - y_\varepsilon\|^{-1} - x\| = \\ &= \|y_0 - y_\varepsilon\|^{-1}\,\|y_0 - (y_\varepsilon + x\,\|y_0 - y_\varepsilon\|)\| \geq (1-\varepsilon)d^{-1}d = 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$ ∎

Dimostriamo ora il seguente risultato, pure dovuto a Riesz:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2.5.3** *Se la sfera unitaria chiusa $\overline{\Sigma}$ dello spazio normato $(E; \|\,.\,\|)$ è compatta (nella topologia* forte*), allora E ha dimensione* finita*.*

Dim.: per assurdo, supponiamo che $\dim E = \infty$; allora è possibile costruire, per induzione, una successione $\{M_n\}$ di sottospazi di dimensione finita, quindi chiusi, tali che M_n sia strettamente contenuto in M_{n+1} per ogni n. Per il Lemma di Riesz, per ogni n esiste un vettore $x_n \in M_n$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $d(x_{n+1}, M_n) > \frac{1}{2}$. In particolare, se $n > k$ si ha $x_k \in M_k$ e $x_n \notin M_{n-1} \supset M_k$, quindi $\|x_n - x_k\| \geq d(x_n, M_k) \geq \frac{1}{2}$; dunque, nessuna sottosuccessione di $\{x_n\}$ può essere di Cauchy, assurdo per la compattezza di $\overline{\Sigma}$. ∎

Anche nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$ la sfera unitaria chiusa $\overline{\Sigma}$ non è, *in generale*, compatta: si veda il Teorema di Kakutani (successivo **Teorema 2.7.2**), che caratterizza gli spazi di Banach in cui $\overline{\Sigma}$ è compatta. Ha pertanto estrema rilevanza il *Teorema di* Banach-Alaoglu-Bourbaki:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2.5.4** *Dato uno spazio normato E, nel suo duale E^* la sfera unitaria chiusa $\overline{\Sigma}_* := \{f \in E^* \mid \|f\|_* \leq 1\}$ è compatta nella topologia debole* $\sigma(E^*, E)$.*

Dim.: per ogni x in E, poniamo $Y_x := \mathbb{R}$; sia poi Y il prodotto topologico $\prod_{x\in E} Y_x$ degli spazi $\{Y_x\}_{x\in E}$, cioè la famiglia di tutte le applicazioni $\varphi : E \to \mathbb{R}$, munita della topologia introdotta nell'esempio **4** del Paragrafo precedente. L'elemento generico $\varphi \in Y$ è individuato dalle sue proiezioni $\mathrm{pr}_x\varphi = \varphi(x)$ sugli spazi Y_x, che indicheremo anche con φ_x; scriveremo perciò $\varphi = \{\varphi(x)\}_{x\in E} = \{\varphi_x\}_{x\in E}$. Si noti che in particolare, l'applicazione φ è *lineare* se e solo se $\forall x, y \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta

$$(\mathrm{pr}_{\alpha x+\beta y} - \alpha\mathrm{pr}_x - \beta\mathrm{pr}_y)\varphi = \varphi(\alpha x + \beta y) - \alpha\varphi(x) - \beta\varphi(y) = 0;$$

il sottoinsieme $\mathcal{L}$ di Y costituito dalle applicazioni lineari è quindi dato da

$$\mathcal{L} = \bigcap_{\substack{x,y\in E\\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}}} \ker\left(\mathrm{pr}_{\alpha x+\beta y} - \alpha\mathrm{pr}_x - \beta\mathrm{pr}_y\right); \tag{2.29}$$

evidentemente, si ha anche $E^* \subset \mathcal{L} \subset Y$, e

$$E^* = \{\varphi \in \mathcal{L} \mid \exists c = c(\varphi) :\ |\mathrm{pr}_x\varphi| \le c\,\|x\|,\ \forall x \in E\}.$$

Su $E^* \subset Y$ consideriamo la topologia $\sigma(E^*, E)$, e la topologia τ indotta su E^* come sottospazio topologico di Y. Mostriamo che esse coincidono, cioè che l'applicazione identica I da $E^*_{w^*} = (E^*; \sigma(E^*, E))$ su $(E^*; \tau)$ è continua, con inversa continua.

I è continua: per la **Proposizione 2.4.2**, *iii*), basta mostrare che è continua l'applicazione $I_0 \circ I$, dove I_0 è l'immersione canonica di E^* in Y. Anzi, per la **Proposizione 2.4.3**, *iv*), è sufficiente mostrare che $\forall x \in E$ è continua l'applicazione $\mathrm{pr}_x \circ I_0 \circ I$ da $E^*_{w^*}$ in $Y_x = \mathbb{R}$; ma questo è ovvio, per la definizione stessa di topologia debole*, dato che $(\mathrm{pr}_x \circ I_0 \circ I)f = \langle f, x\rangle$.

I^{-1} è continua: per la **Proposizione 2.4.2**, *iii*), basta verificare che $\forall x \in E$ è continua l'applicazione, da $(E^*; \tau)$ in $\mathbb{R}$, data da $f = \{f_x\}_{x\in E} \mapsto \langle f, x\rangle$; ma questo è evidente, dato che tale applicazione è la restrizione ad E^* dell'applicazione continua pr_x.

Grazie a quanto ora visto, se verifichiamo che $\overline{\Sigma}_*$ è compatta come sottospazio topologico di Y, risulta dimostrato che $\overline{\Sigma}_*$ è compatta in $E^*_{w^*}$. Si osservi che, posto

$$\mathcal{C} := \{\varphi \in Y \mid |\mathrm{pr}_x\varphi| \le \|x\|,\ \forall x \in E\} = \textstyle\prod_{x\in E} [-\|x\|, \|x\|],$$

risulta $\overline{\Sigma}_* = \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$, dove $\mathcal{L}$ è dato dalla (2.29). Ora, $\mathcal{L}$ è *chiuso*, perché le applicazioni $\mathrm{pr}_{\alpha x+\beta y} - \alpha\mathrm{pr}_x - \beta\mathrm{pr}_y$ sono continue da Y in $\mathbb{R}$ $\forall(x, y \in E,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R})$, mentre $\mathcal{C}$ è compatto, grazie al Teorema di TIKHONOV; ciò conclude la dimostrazione. ∎

2.6 Ortogonalità. Supplementari topologici.

Nel **Capitolo 1** abbiamo visto parecchie notevoli conseguenze della nozione di *ortogonalità*, e, in particolare, del *Teorema di decomposizione* negli spazi di HILBERT. Ricordiamo che (**Teorema 1.5.2**) se V è un sottospazio chiuso dello spazio di HILBERT H, allora si ha $H = V \oplus V^\perp$, dove $V^\perp$ è il sottospazio ortogonale a V: ogni $x \in H$ si scrive nella forma $x = P_V\, x + P_{V^\perp}\, x$, ed inoltre P_V e $P_{V^\perp}$ sono *proiettori ortogonali* (si veda il §**1.9**).

È naturale chiedersi se in un generico spazio di Banach, in cui manca la nozione di ortogonalità, ma, soprattutto, non è possibile (in generale) parlare di *proiezione* su un sottospazio chiuso (si ricordi l' Osservazione **1.5.1**), si possa trovare una formulazione generalizzata di questa situazione.

Premettiamo qualche richiamo sugli *spazi quoziente*:

Proposizione 2.6.1 *Siano E uno spazio di* Banach*, V un suo sottospazio* chiuso*.*

i) La relazione binaria $x\mathcal{R}y \overset{def}{\iff} x-y\in V$ è una relazione di equivalenza *su E,* compatibile *con le operazione definite in E: $\forall x,y\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$,*

$$(x'\mathcal{R}x \text{ e } y'\mathcal{R}y) \text{ implicano che } (x'+y')\mathcal{R}(x+y) \text{ e } (\lambda x')\mathcal{R}(\lambda x);$$

se π è l'applicazione canonica di E su E/V, per ogni $\widetilde{x}\in E/V$ ed ogni x fissato in $\pi^{-1}(\widetilde{x})$ si ha $\pi^{-1}(\widetilde{x}) = x+V = \{x+v \mid v\in V\}$;

ii) è quindi lecito definire

$$\widetilde{x}+\widetilde{y} := \pi(x+y);\ \lambda\widetilde{x} := \pi(\lambda x) \quad \forall (x\in\pi^{-1}(\widetilde{x}),\ y\in\pi^{-1}(\widetilde{y}),\ \lambda\in\mathbb{R});$$

con queste operazioni, E/V è uno spazio vettoriale; inoltre, se si pone

$$\|\widetilde{x}\|_{E/V} := \inf_{x\in\pi^{-1}(\widetilde{x})} \|x\|_E,$$

da cui, per ogni $x\in\pi^{-1}(\tilde{x})$,

$$\|\widetilde{x}\|_{E/V} = \inf_{v\in V}\|x+v\|_E = d_E(0,x+V) = d_E(x,V),$$

l'applicazione $\widetilde{x}\mapsto\|\widetilde{x}\|_{E/V}$ è una norma su E/V, rispetto alla quale E/V è uno spazio di Banach*.*

Dim.: *i*): la verifica è immediata.

ii): è evidente che le definizioni sono ben poste, e che E/V è uno spazio vettoriale. È poi ovvio che $\|\tilde{x}\|_{E/V}\ge 0$; inoltre, se $\|\tilde{x}\|_{E/V}=0$ si ha che, $\forall x\in\pi^{-1}(\tilde{x})$, $d_E(x,V)=0$, cioè, dato che V è *chiuso*, $x\in V$, quindi $\tilde{x}=0$ in E/V. Se $\lambda\ne 0$, si ha $\|\lambda\tilde{x}\|_{E/V} = d_E(\lambda x,V) = d_E(\lambda x,\lambda V) = |\lambda|\, d_E(x,V) = |\lambda|\,\|\tilde{x}\|_{E/V}$, quindi $\|\lambda\tilde{x}\|_{E/V} = |\lambda|\,\|\tilde{x}\|_{E/V}$ (per $\lambda=0$ l'uguaglianza è ovvia). Dati $\tilde{x},\tilde{y}\in E/V$, fissiamo $x\in\pi^{-1}(\tilde{x}), y\in\pi^{-1}(\tilde{y})$; poiché, $\forall v_1,v_2$ in V, si ha $\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_{E/V}\le\|x+y+v_1+v_2\|_E\le\|x+v_1\|_E+\|y+v_2\|_E$, dall'arbitrarietà di $v_1,\ v_2\in V$ si ricava che $\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_{E/V}\le\|\tilde{x}\|_{E/V}+\|\tilde{y}\|_{E/V}$. Infine, per dimostrare che E/V è completo, sia $\{\tilde{x}_n\}$ una successione di Cauchy in E/V. È intanto possibile estrarre da $\{\tilde{x}_n\}$ una sottosuccessione $\{\tilde{y}_k\} := \{\tilde{x}_{n_k}\}$ tale che per ogni $k\in\mathbb{N}$ risulti $\|\tilde{y}_{k+1}-\tilde{y}_k\|_{E/V} < 2^{-k}$ (si ricordi il **Lemma 1.4.1**). Poiché, fissati $y_1\in\pi^{-1}(\tilde{y}_1),\ y_2\in\pi^{-1}(\tilde{y}_2)$,

$$\|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|_{E/V} = \inf\nolimits_{v\in V}\|(y_1-y_2)+v\|_E = \inf\nolimits_{v\in V}\|y_1-(y_2-v)\|_E < 1/2,$$

esiste $v_2\in V$ tale che, posto $z_2 := y_2-v_2$, risulti $\|y_1-z_2\|_E<1/2$. Con un ovvio procedimento di induzione, si costruisce così una successione $\{z_n\}\subset E$

tale che $z_1 := y_1$, $z_n \in \pi^{-1}(\tilde{y}_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\|z_{n+1} - z_n\|_E < 2^{-n}$. Poiché E è completo, $\exists x \in E :\ z_n \to x$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha allora $\|\tilde{y}_n - \pi(x)\|_{E/V} = \|\tilde{z}_n - \pi(x)\|_{E/V} = \inf_{v\in V} \|(z_n - x) + v\|_E \le \|z_n - x\|_E$, cosicché $\tilde{y}_n \to \pi(x)$ in E/V. In questo modo, dalla successione di Cauchy $\{\tilde{x}_n\}$ si è estratta una sottosuccessione $\{\tilde{y}_n\}$ che tende a $\pi(x)$, e ciò basta per concludere che l'intera successione $\{\tilde{x}_n\}$ è convergente. ■

Definizione 2.6.1 *Sia V un sottospazio chiuso dello spazio di* Banach *E; la dimensione di E/V si chiama* **codimensione** *di V in E.* ■

Vediamo ora alcuni risultati di isomorfismo che fanno intervenire spazi quoziente. Premettiamo un risultato notevole:

Proposizione 2.6.2 *Siano E, F due spazi di* Banach*, T un operatore in $\mathcal{L}(E, F)$, V un sottospazio chiuso contenuto nel nucleo $N(T)$ di T. Esiste un unico operatore lineare Λ da E/V in F che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & E/V \arrow[ur, "\Lambda"'] & \end{tikzcd}$$

quindi tale che $T = \Lambda \circ \pi$. Inoltre, Λ è continuo, $R(\Lambda) = R(T)$, e $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E/V,F)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$

Dim.: sia $\widetilde{x} \in E/V$; se $x, x' \in \pi^{-1}(\widetilde{x})$ (π è l'applicazione canonica di E su E/V), si ha $x - x' \in V \subset N(T)$, quindi $Tx = Tx'$. È pertanto lecito definire

$$\Lambda\widetilde{x} := Tx, \qquad \forall x \in \pi^{-1}(\widetilde{x}).$$

È evidente che Λ è l'*unico* operatore lineare da E/V in F che verifica $T = \Lambda \circ \pi$; anche l'uguaglianza $R(\Lambda) = R(T)$ è ovvia.

Osserviamo ora che $\pi(\Sigma_E) = \Sigma_{E/V}$: in effetti, per ogni $x \in \Sigma_E$ si ha che $\|\pi(x)\|_{E/V} = \inf_{v\in V} \|x + v\|_E \le \|x\|_E < 1$, quindi $\pi(\Sigma_E) \subset \Sigma_{E/V}$. D'altra parte, se $\widetilde{x} \in \Sigma_{E/V}$, fissato $x \in \pi^{-1}(\widetilde{x})$ si ha $\inf_{v\in V} \|x + v\|_E < 1$, quindi esiste $v' \in V$ tale che $\|x + v'\|_E < 1$. Posto $x' := x + v'$, si ha $\pi(x') = \pi(x) = \widetilde{x}$ e $\|x'\|_E < 1$, da cui l'inclusione opposta $\Sigma_{E/V} \subset \pi(\Sigma_E)$.
Se ne deduce che

$$\begin{aligned} \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E/V,F)} &= \sup_{\widetilde{x}\in\Sigma_{E/V}} \|\Lambda\widetilde{x}\|_F = \sup_{x\in\Sigma_E} \|\Lambda(\pi(x))\|_F = \\ &= \sup_{x\in\Sigma_E} \|Tx\|_F = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}. \ ■ \end{aligned}$$

In particolare, ne discende il **primo Teorema d'isomorfismo**:

Teorema 2.6.1 *Siano E, F due spazi di* Banach*, e sia $T \in \mathcal{L}(E, F)$; se $R(T)$ è* chiuso*, lo spazio quoziente $E/N(T)$ è isomorfo a $R(T)$.*

Dim.: con la norma indotta da quella di F, $R(T)$ è uno spazio di Banach; si può quindi applicare la Proposizione precedente, con $V = N(T)$ e F sostituito da $R(T)$. Se Λ è (l'unico operatore) tale che $T = \Lambda \circ \pi$, si ha

$x \in \pi^{-1}(N(\Lambda))$ se e solo se $\Lambda(\pi(x)) = Tx = 0$, cioè se e solo se $x \in N(T)$;

dunque Λ è una biiezione lineare e continua da $E/N(T)$ su $R(T)$, quindi, per il **Corollario 2.3.5**, è un isomorfismo da $E/N(T)$ su $R(T)$. ■

Nell'ambito degli spazi normati, pur in assenza di un prodotto scalare, è ancora evidentemente possibile parlare di *ortogonalità* di due vettori, almeno quando uno dei due è un elemento di E e l'altro è un elemento del duale E^*. Si pone allora la definizione seguente:

Definizione 2.6.2 *Sia E uno spazio di* Banach.

i) L' **ortogonale** *(o* **annichilatore***) $^\perp A \subset E^*$ del sottoinsieme non vuoto $A \subset E$ è l'insieme*

$$^\perp A := \{f \in E^* \mid \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in A\} = = \bigcap_{x\in A} \ker(\mathfrak{J}x) = \bigcap_{\varphi\in\mathfrak{J}(A)} \ker\varphi,$$

dove $\mathfrak{J}$ è l'immersione canonica di E in E^{**};

ii) l' **ortogonale** *(o* **annichilatore***) $B^\perp \subset E$ del sottoinsieme non vuoto $B \subset E^*$ è l'insieme*

$$B^\perp := \{x \in E \mid \langle f, x\rangle = 0 \quad \forall f \in B\} = \textstyle\bigcap_{f\in B} \ker f. \ ■$$

Si osservi che, quando $\emptyset \neq B \subset E^*$, se si pone, in accordo con la *i)* della Definizione precedente,

$$^\perp B := \{\varphi \in E^{**} \mid \langle \varphi, f\rangle = 0 \quad \forall f \in B\},$$

si ha evidentemente che $\mathfrak{J}(B^\perp) \subset {}^\perp B$ (i due insiemi coincidono se e solo se $\mathfrak{J}$ è *suriettiva*).

È ovvio dalla definizione che gli ortogonali sono sempre varietà lineari; è poi immediato controllare che, se $\emptyset \neq A \subset E$, $\emptyset \neq B \subset E^*$,

$$^\perp A = {}^\perp(\overline{A}) = {}^\perp(\operatorname{span} A) = {}^\perp(\overline{\operatorname{span}} A); \qquad (A \subset A_1 \subset E) \Longrightarrow ({}^\perp A \supset {}^\perp A_1);$$

$$B^\perp = (\overline{B})^\perp = (\operatorname{span} B)^\perp = (\overline{\operatorname{span}} B)^\perp; \qquad (B \subset B_1 \subset E^*) \Longrightarrow (B^\perp \supset B_1^\perp).$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà di chiusura:

Proposizione 2.6.3 *i) Se $\emptyset \neq A \subset E$, allora $^\perp A$ è un sottospazio proprio di E^*,* chiuso nella topologia debole* *(quindi anche nella topologia debole ed in quella forte);*

ii) se $\emptyset \neq B \subset E^*$, allora $B^\perp$ è un sottospazio proprio di E, chiuso nella topologia debole *(o equivalentemente, per la* **Proposizione 2.5.3***, in quella forte).*

Dim.: *i)*: per definizione di topologia debole*, per ogni $x \in E$ il funzionale $\mathfrak{J}x : f \mapsto \langle f, x\rangle$ è continuo su $(E^*; \sigma(E^*, E))$, quindi $\ker(\mathfrak{J}x)$ è chiuso in $\sigma(E^*, E)$; ne segue la chiusura di $^\perp A$ in $\sigma(E^*, E)$.

ii): $\forall f \in E^*$, $\ker f$ è un sottospazio chiuso in E, quindi lo è anche $B^\perp$. ■

Proposizione **2.6.4** *i) Se* $\emptyset \neq A \subset E$, $({}^{\perp}A)^{\perp}$ *è la chiusura di* $\operatorname{span} A$ *in* E *(nella topologia forte o, equivalentemente, debole);*

ii) se $\emptyset \neq B \subset E^*$, ${}^{\perp}(B^{\perp})$ *è la chiusura di* $\operatorname{span} B$ *nella topologia debole** $\sigma(E^*, E)$ *di* E^*.

Dim.: i): è ovvio che $\overline{\operatorname{span}}\, A \subset ({}^{\perp}A)^{\perp}$. Per assurdo, supponiamo che l'inclusione sia stretta, cioè che esista $x_0 \in ({}^{\perp}A)^{\perp} \setminus \overline{\operatorname{span}}\, A$. Per il **Teorema 2.2.2**, possiamo separare strettamente $\{x_0\}$ e $\overline{\operatorname{span}}\, A$: esistono $g \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che, in particolare,

$$\langle g, x_0 \rangle < \alpha < \langle g, x \rangle \quad \forall x \in \operatorname{span} A. \tag{2.30}$$

Dato che $\operatorname{span} A$ è una varietà lineare, ne viene che $\langle g, x \rangle = 0 \ \forall x \in A$, cioè che $g \in {}^{\perp}A$; ma allora dovrebbe essere $\langle g, x_0 \rangle = 0$, il che contraddice la (2.30).

ii): la dimostrazione è come quella di i), utilizzando il **Teorema 2.4.4** anziché il **Teorema 2.2.2**. ∎

Si osservi che ${}^{\perp}(B^{\perp})$ può *contenere strettamente* la chiusura di $\operatorname{span} B$ nella topologia forte (o, il che è lo stesso, in quella debole): ad esempio, se $E = \ell^1$ e $B \subset \ell^\infty$ è l'insieme delle successioni a termini definitivamente nulli, si verifica facilmente che la chiusura di B nella topologia forte è $\mathfrak{c}_0$, mentre $B^{\perp} = \{0\}$ (dato che $e^{(n)} \in B \ \forall n \in \mathbb{N}$), quindi ${}^{\perp}(B^{\perp}) = \ell^\infty$.

Estendiamo ora la nozione di *operatore aggiunto* già vista nel caso hilbertiano. Sia $T \in \mathcal{L}(E, F)$, dove $(E; \|\,.\,\|_E), (F; \|\,.\,\|_F)$ sono spazi normati. Per ogni fissato $g \in F^*$, l'applicazione $x \mapsto {}_{F^*}\langle g, Tx \rangle_F$ è un funzionale lineare su E, che è anche continuo dato che

$$|{}_{F^*}\langle g, Tx \rangle_F| \leq (\|g\|_{F^*} \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}) \|x\|_E; \tag{2.31}$$

quindi individua un elemento di E^*, che indichiamo con T^*g. Poniamo allora la seguente

Definizione **2.6.3** *Sia* $T \in \mathcal{L}(E, F)$, *dove* E, F *sono spazi normati; si chiama* **aggiunto** *di* T *l'operatore* T^* *da* F^* *in* E^* *definito dalla* **relazione di reciprocità**

$$ {}_{E^*}\langle T^*g, x \rangle_E := {}_{F^*} \langle g, Tx \rangle_F \,, \quad \forall x \in E, \ \forall g \in F^*. \tag{2.32}$$ ∎

Si verificano le seguenti proprietà:

Proposizione **2.6.5** *Siano* E, F, G *spazi normati, e siano* T, T_1, T_2 *in* $\mathcal{L}(E, F)$*; allora:*

i) $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, *e* $\|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$;

ii) $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha\, T_1^* + \beta\, T_2^*$; *se* $S \in \mathcal{L}(F, G)$, $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$;

iii) se T *è biiettivo (da* E *su* F*), lo è anche* T^* *(da* F^* *su* E^**), e si ha* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Dim.: i): la linearità di T è conseguenza immediata della definizione. Dalla (2.31) si ha

$$\begin{aligned}\|T^*g\|_{E^*} &= \sup_{\|x\|_E\le 1} |{}_{E^*}\langle T^*g, x\rangle_E| = \sup_{\|x\|_E\le 1} |{}_{F^*}\langle g, Tx\rangle_F| \le \\ &\le \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\, \|g\|_{F^*},\end{aligned}$$

quindi $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, e $\|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} \le \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$. Per il **Corollario 2.1.3**,

$$\begin{aligned}\|Tx\|_F &= \sup_{\|g\|_{F^*}\le 1} |{}_{F^*}\langle g, Tx\rangle_F| = \sup_{\|g\|_{F^*}\le 1} |{}_{E^*}\langle T^*g, x\rangle_E| \le \\ &\le \Big(\sup_{\|g\|_{F^*}\le 1} \|T^*g\|_{E^*}\Big)\, \|x\|_E = \|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)}\, \|x\|_E,\end{aligned}$$

da cui $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \le \|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)}$, e ne discende l'uguaglianza cercata.

ii): la verifica della prima affermazione è immediata. Quanto alla seconda, basta osservare che, $\forall g \in G^*$ e $\forall x \in E$, si ha

$${}_{E^*}\langle (S\circ T)^*\, g, x\rangle_E = {}_{G^*}\ \langle g, S(Tx)\rangle_G = {}_{F^*}\ \langle S^*\, g, Tx\rangle_F = {}_{E^*}\ \langle (T^*\circ S^*)g, x\rangle_E.$$

iii): per la ii), la relazione $T^{-1}\circ T = I_E$ implica $T^*\circ (T^{-1})^* = I_{E^*}$, da cui la suriettività di T^*; la relazione $T\circ T^{-1} = I_F$ implica $(T^{-1})^*\circ T^* = I_{F^*}$, da cui l'iniettività di T^*. Quindi esiste $(T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$, e, per quanto ora visto, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. ∎

Una conseguenza notevole della **Proposizione 2.6.4**:

$\boxed{\textbf{Corollario}}$ **2.6.1** *Siano E, F due spazi di* Banach*; per ogni $T \in \mathcal{L}(E,F)$, si ha:*

i) $N(T) = R(T^*)^\perp$;	*ii*) $N(T^*) = {}^\perp R(T)$;
iii) $N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}$;	*iv*) ${}^\perp N(T) = \overline{R(T^*)}^{w^*}$.

Dim.: i), ii): la verifica è immediata.

iii), iv): da ii) si ha che $N(T^*)^\perp = ({}^\perp R(T))^\perp = \overline{R(T)}$: l'ultima uguaglianza deriva dalla **Proposizione 2.6.4**, i); analogamente, ${}^\perp N(T)$, per la **Proposizione 2.6.4**, ii), è la chiusura di $R(T^*)$ in $\sigma(E^*, E)$. ∎

$\boxed{\textbf{Osservazione}}$ **2.6.1** Nella iv) del Corollario precedente, la chiusura di $R(T^*)$ nella topologia $\sigma(E^*, E)$ *non può* (in generale) essere sostituita dalla chiusura nella topologia forte o in quella debole. Poniamo $E := F := \ell^1$, e sia T l'operatore in $\mathcal{L}(\ell^1)$ definito da $T\{x_n\} := \{x_n/n\}$, cosicché il suo aggiunto $T^* \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$ è dato da $T^*\{y_n\} = \{y_n/n\} \in \mathfrak{c}_0$. Si ha allora ${}^\perp N(T) = \ell^\infty$, mentre, come ora mostriamo, la chiusura di $R(T^*)$ nella topologia forte di ℓ^∞ è $\mathfrak{c}_0$. Ricordando la **Proposizione 2.1.2**, è sufficiente verificare che ogni $y = \{y_n\} \in \mathfrak{c}_0$ è limite di una successione di vettori in $R(T^*)$; per questo, basta porre $x^{(n)} := \sum_{k=1}^n k y_k\, e^{(k)}$; è evidente che $x^{(n)} \in \mathfrak{c}_0$ e che $Tx^{(n)} = \sum_{k=1}^n y_k\, e^{(k)}$, cosicché, essendo $\lim_n y_n = 0$, si ha $\lim_n \|y - Tx^{(n)}\|_\infty = 0$. ∎

Si ha anzi l'ulteriore proprietà

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.6.6** *Siano E, F spazi normati; se $T \in \mathcal{L}(E,F)$, allora T^* è continuo da $(F^*; \sigma(F^*, F))$ in $(E^*; \sigma(E^*, E))$.*

Dim.: basta mostrare (**Proposizione 2.4.2**) che $\forall x \in E$ l'applicazione φ_x definita da $\varphi_x(g) := {}_{E^*}\langle T^*g, x\rangle_E$ è continua da $(F^*; \sigma(F^*, F))$ in $\mathbb{R}$. Dato che risulta, per definizione, ${}_{E^*}\langle T^*g, x\rangle_E = {}_{F^*}\langle g, Tx\rangle_F$, posto $y := Tx$ si ha, $\forall \varrho > 0$,

$$\varphi_x^{-1}(]-\varrho, \varrho[) = \{g \in F^* \ |{}_{E^*}\langle T^*g, x\rangle_E| = |{}_{F^*}\langle g, y\rangle_F| < \varrho\},$$

che è un intorno dell'origine in $(F^*; \sigma(F^*, F))$; quindi $\varphi_x(g)$ è continua per $g = 0$. Per la linearità di φ_x, ne discende la continuità di φ_x su tutto $F^*_{w^*}$. ∎

Osservazione **2.6.2** Il risultato precedente è particolarmente rilevante perché, mentre per un *generico* operatore lineare la continuità da F^*_s in E^*_s è *equivalente* alla continuità da F^*_w in E^*_w (si ricordi la **Proposizione 2.5.4**), non vale una proprietà analoga se si muniscono E^*, F^* delle topologie deboli*. Mostriamo anzi che, scelto $E = F = \mathfrak{c}_0$, esiste un *isomorfismo* di E^*_s su F^*_s che *non è continuo* da $E^*_{w^*}$ in $F^*_{w^*}$. Identificando E^* ed F^* ad ℓ^1, definiamo $T : \ell^1 \to \ell^1$ ponendo

$$T\{x_n\} := \{\textstyle\sum_n x_n, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\} \qquad \forall \{x_n\} \in \ell^1.$$

T è evidentemente (ben definito), lineare, iniettivo; è anche suriettivo, perché dato $\{x_n\} \in \ell^1$ si ha che

$$y := \{x_1 - \textstyle\sum_{k=2}^{+\infty} x_k, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\} \in \ell^1,$$

e $Ty = \{x_n\}$. Inoltre, $\|T\{x_n\}\|_{\ell^1} = |\sum_n x_n| + \sum_{k=2}^{+\infty} |x_k| \leq 2\|\{x_n\}\|_{\ell^1}$, quindi (**Corollario 2.3.5**) T è un isomorfismo di ℓ^1 su ℓ^1. Se si considera la successione $\{e^{(n)}\}$ dei versori in ℓ^1, si ha che, *nella topologia debole* di* $\ell^1 = \mathfrak{c}_0^*$, $\{e^{(n)}\}$ tende a zero, mentre, dato che $\forall n \geq 2$ si ha $Te^{(n)} = e^{(1)} + e^{(n)}$, risulta $Te^{(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} e^{(1)}$. ∎

La Proposizione precedente può essere precisata:

Proposizione **2.6.7** *Siano E, F due spazi normati, e sia S un operatore lineare da F^* in E^*. Allora S è continuo da $F^*_{w^*}$ in $E^*_{w^*}$ se e solo se esiste un operatore $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tale che $S = T^*$.*

Dim.: dobbiamo solo mostrare che se S è continuo da $F^*_{w^*}$ in $E^*_{w^*}$, allora $S = T^*$, dove T è un opportuno operatore in $\mathcal{L}(E, F)$. Siano $\mathfrak{J}_E$, $\mathfrak{J}_F$ le immersioni canoniche di E in E^{**} e di F in F^{**}. Fissato ad arbitrio $x \in E$, per il **Teorema 2.5.2** si ha che $\mathfrak{J}_E\, x$ è un funzionale lineare e continuo su $E^*_{w^*}$; poiché

$$((\mathfrak{J}_E\, x) \circ S)(g) = (\mathfrak{J}_E\, x)(Sg) = {}_{E^{**}}\langle \mathfrak{J}_E\, x, Sg\rangle_{E^*} = {}_{E^*}\langle Sg, x\rangle_E,$$

ne viene che $(\mathfrak{J}_E\, x) \circ S$ è un funzionale lineare e continuo su $F^*_{w^*}$. Ancora per il **Teorema 2.5.2**, esiste –ed è unico– $y \in F$ tale che $(\mathfrak{J}_E\, x) \circ S = \mathfrak{J}_F\, y$, cioè

$${}_{E^*}\langle Sg, x\rangle_E = {}_{F^{**}}\langle \mathfrak{J}_F\, y, g\rangle_{F^*} = {}_{F^*}\langle g, y\rangle_F, \quad \forall g \in F^*.$$

Naturalmente, y dipende dal vettore x fissato: poniamo allora $y = Tx = \mathfrak{J}_F^{-1}((\mathfrak{J}_E\, x) \circ S)$, cosicché

$${}_{E^*}\langle Sg, x\rangle_E = {}_{F^*}\langle g, Tx\rangle_F, \qquad \forall x \in E,\ \forall g \in F^*.$$

Si vede facilmente che $T : E \to F$ è lineare; per dimostrare che $T \in \mathcal{L}(E, F)$, grazie alla **Proposizione 2.5.4**, basta mostrare che T è continuo da E_w in F_w, cioè che, per ogni $g \in F^*$, l'applicazione $x \mapsto {}_{F^*}\langle g, Tx\rangle_F$ è continua da E_w in $\mathbb{R}$. Ora, $\forall \varrho > 0$ l'insieme $\{x \in E \mid |{}_{F^*}\langle g, Tx\rangle_F| = |{}_{E^*}\langle Sg, x\rangle_E| < \varrho\}$ è un intorno dell'origine per $\sigma(E^*, E)$, e, grazie anche alla linearità di T, se ne deduce la continuità di T da E_w in F_w. Infine, dato che $T \in \mathcal{L}(E, F)$, esiste $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, e l'identità ${}_{E^*}\langle Sg, x\rangle_E = {}_{F^*}\langle g, Tx\rangle_F$ mostra che $S = T^*$. ∎

Se ne deduce anche il seguente complemento alla **Proposizione 2.5.4**:

Corollario **2.6.2** *Siano E, F due spazi normati. Se T è un operatore lineare e continuo da $E^*_{w^*}$ in $F^*_{w^*}$, allora $T \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$.*

Dim.: T è l'aggiunto di un operatore in $\mathcal{L}(F, E)$, quindi è continuo da E^*_s in F^*_s. ∎

Definizione **2.6.4** *Sia V un sottospazio* chiuso *dello spazio di* Banach *E; W è detto* **un supplementare topologico** *di V (si scrive $E = V \oplus W$) se:*

i) W è un sottospazio chiuso *di E;*

ii) W è un supplementare algebrico di V in E (cioè, $V \cap W = \{0\}$, e per ogni $x \in E$ esistono $v \in V, w \in W : \quad x = v + w$). ∎

Definizione **2.6.5** *Un* **proiettore** *nello spazio di* Banach *E è un operatore $P \in \mathcal{L}(E)$* idempotente *(cioè tale che $P^2 = P$).* ∎

È immediata la verifica delle seguenti proprietà elementari:

Proposizione **2.6.8** *i) Se W è un supplementare topologico di V in E, allora, $\forall x \in E$, la decomposizione $x = v + w$ con $v \in V$, $w \in W$ è* unica*; posto $Px := v$, $Qx := w$, si ha che P, Q sono proiettori in E, ed inoltre:*

$$PQ = QP = 0; \quad P + Q = I. \tag{2.33}$$

ii) Viceversa, se P è un proiettore in E, anche $Q := I - P$ è un proiettore; P, Q verificano le (2.33); $R(P)$, $R(Q) = N(P)$ sono sottospazi chiusi *di E, e risulta*

$$E = R(P) \oplus N(P).$$

Dim.: *i)*: l'unica proprietà non ovvia è la continuità dei *proiettori* P, Q (che sono evidentemente operatori lineari da E in sè). Questa è però una conseguenza immediata del Teorema del grafico chiuso: se $\{x_n\}$ è una successione in E tale che $x_n \to x$ e $P x_n \to y$, ne viene intanto che $Q x_n = x_n - P x_n \to x - y$. Per la chiusura di V e di W, si ha $y \in V$ e $x - y \in W$; quindi, per l'unicità della decomposizione, da $x = y + (x - y) = P x + Q y$ si ricava, in particolare, che $y = P x$, cioè che il grafico di P è chiuso, dunque che P è continuo; lo stesso vale evidentemente per Q.

ii): è immediato verificare che Q è un proiettore, che $R(Q) = N(P)$, e che P, Q verificano la (2.33). È anche facile vedere, come nella dimostrazione della **Proposizione 1.10.13**, che $R(P) = \{x \in E \mid Px = x\}$; quindi, $R(P), R(Q)$ sono sottospazi *chiusi*. Se $x \in R(P) \cap N(P)$, si ha $x = Px = 0$; infine, $\forall x \in E$ risulta $x = Px + (x - Px)$, con Px in $R(P)$ e $(x - Px)$ in $N(P)$. ∎

Osserviamo che vale anche la seguente proprietà:

Proposizione **2.6.9** *Se $E = V \oplus W$, lo spazio quoziente E/V è* isomorfo *al sottospazio chiuso W.*

Dim.: basta applicare il primo Teorema di isomorfismo, con $F := W$ e $T :=$ proiezione di E su W (cosicché $N(T) = V$). ∎

È evidente la *non unicità* dell'(eventuale) supplementare topologico, già in $\mathbb{R}^2$: se V è una retta passante per l'origine, *ogni altra* retta per l'origine è un supplementare topologico di V. Si osservi poi che ciascuno dei proiettori P, Q dipende da *entrambi* i sottospazi V, W: se $E = \mathbb{R}^2$, V è la retta $\{x_2 = 0\}$ e W la retta $\{x_2 = x_1\}$, si ha ad esempio $P\{x_1; x_2\} = \{x_1 - x_2; 0\}$; se invece si sceglie come W la retta $\{x_2 = -x_1\}$, si ha che $P\{x_1; x_2\} = \{x_1 + x_2; 0\}$. È anche ovvio che la norma di un proiettore è *maggiore o uguale* ad 1: in entrambi gli esempi appena visti con $E = \mathbb{R}^2$, si verifica immediatamente che si ha $\|P\| = \|Q\| = \sqrt{2}$.

Più delicata è la questione relativa all'*esistenza* di un supplementare topologico (tranne, beninteso, nel caso di uno spazio di HILBERT); un risultato semplice è il seguente:

Proposizione **2.6.10** *Sia V una varietà lineare dello spazio di* BANACH *E; ciascuna delle due condizioni*

i) V ha dimensione finita*;*

ii) V è un sottospazio chiuso *di codimensione finita*

è sufficiente a garantire l'esistenza di un supplementare topologico di V.

Dim.: *i*): fissiamo ad arbitrio una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in V, cosicché ogni $x \in V$ si scrive in modo unico nella forma $x = \sum_{k=1}^n x_k\, e_k$ ($x_k \in \mathbb{R}$). Per ogni $k = 1, \ldots, n$, poniamo $\varphi_k(x) := x_k$; è evidente che ogni φ_k è un funzionale lineare e continuo definito su V. Per il **Corollario 2.1.1**, esiste un prolungamento $\widetilde{\varphi}_k \in E^*$ di φ_k. Poniamo $W := \bigcap_{k=1}^n \ker \widetilde{\varphi}_k$; è evidente che W è un sottospazio chiuso, e che $V \cap W = \{0\}$. Infine, fissato un qualsiasi $x \in E$, poniamo $v := \sum_{k=1}^n \widetilde{\varphi}_k(x)\, e_k$ e $w := x - v$. Si ha $v \in V$, e, poiché $\varphi_k(v) = \widetilde{\varphi}_k(v) = \widetilde{\varphi}_k(x)$, ne viene che $w \in W$, il che conclude la dimostrazione.

ii): evidente, perché un supplementare algebrico di dimensione finita è automaticamente chiuso, quindi è anche un supplementare topologico. ∎

Si può dimostrare che, ad esempio, il sottospazio chiuso $\mathfrak{c}_0$ di ℓ^∞ *non ha* supplementare topologico in ℓ^∞. Ci limitiamo poi ad enunciare un risultato, di natura ben più generale, dovuto a LINDENSTRAUSS-TZAFRIRI, che fornisce tra l'altro un'ulteriore interessante caratterizzazione di natura geometrica:

Teorema **2.6.2** *Dato lo spazio normato $(E; \|\,.\,\|)$, le seguenti affermazioni si equivalgono:*

i) esiste in E un prodotto scalare la cui norma indotta è equivalente *a $\|\,.\,\|$;*

ii) ogni sottospazio chiuso di E ammette un supplementare topologico. ∎

Un'altra proprietà relativa a sottospazi con dimensione o codimensione *finita*:

Proposizione 2.6.11 *i) Se V è un sottospazio di dimensione* finita n *di E, il suo ortogonale ${}^\perp V$ ha codimensione n in E^*;*

ii) Se V_* è un sottospazio di dimensione finita n *di E^*, il suo ortogonale $(V_*)^\perp$ ha codimensione n in E.*

Dim.: sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base per V; consideriamo l'applicazione lineare e continua $\Lambda : E^* \to \mathbb{R}^n$ definita da $\Lambda(f) := \sum_{k=1}^n \langle f, x_k\rangle\, e^{(k)}$, dove gli $e^{(k)}$ sono i versori in $\mathbb{R}^n$. Mostriamo intanto che deve essere $\Lambda(E^*) = \mathbb{R}^n$; in caso contrario, $\exists y = \sum_{k=1}^n y_k\, e^{(k)} \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda(E^*)$, e, poiché $\Lambda(E^*)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, è possibile separare strettamente $\Lambda(E^*)$ ed $\{y\}$ in $\mathbb{R}^n$. Esistono quindi $z = \sum_{k=1}^n z_k\, e^{(k)} \neq 0$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $(z, y) < \alpha < (z, \Lambda(f))\ \forall f \in E^*$. Ne discende che $(z, \Lambda(f)) = 0$, cioè $\sum_{k=1}^n z_k \langle f, x_k\rangle = \langle f, \sum_{k=1}^n z_k x_k\rangle = 0\ \forall f \in E^*$, quindi $\sum_{k=1}^n z_k x_k = 0$, assurdo perché gli x_k sono linearmente indipendenti e $z \neq 0$.
Di conseguenza, esistono $f_1, \dots, f_n \in E^*$ tali che $\Lambda(f_k) = e^{(k)}$ per $k = 1, \dots, n$. È evidente che $f_1, \dots, f_n$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, si ha che $\operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$ è un supplementare topologico di $V^\perp$ (si osservi che ogni f in E^* si scrive nella forma $f = (f - \sum_{k=1}^n \langle f, x_k\rangle f_k) + \sum_{k=1}^n \langle f, x_k\rangle f_k$).

In modo analogo si procede per quanto riguarda $(V_*)^\perp$. ■

Un'applicazione (si riveda la **Proposizione 2.5.4**):

Proposizione 2.6.12 *Siano E, F due spazi di* Banach*, e sia T un operatore in $\mathcal{L}(E, F)$; T è continuo da E munito della topologia debole in F munito della topologia forte se e solo se T è a rango finito* $(\dim R(T) < \infty)$.

Dim.: se T è continuo da E_w in F_s, $T^{-1}(\Sigma_F)$ è un intorno dell'origine in $\sigma(E, E^*)$; quindi $\exists f_1, \dots, f_n \in E^*$ ed $\exists \varepsilon > 0$ tali che

$$(\ |\langle f_k, x\rangle| < \varepsilon, \quad (k = 1, \dots, n)\ ) \Longrightarrow (\ \|Tx\|_F < 1\ ).$$

In particolare, $\forall x \in V := \bigcap_{k=1}^n \ker f_k$ risulta $\|Tx\|_F < 1$, dunque, dato che V è un sottospazio, $Tx = 0$, cioè $V \subset N(T)$. Per la **Proposizione 2.6.2**, esiste $\Lambda \in \mathcal{L}(E/V, F)$ tale che $R(T) = R(\Lambda)$. Il sottospazio $V_* := \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$ ha dimensione $\le n$, ed evidentemente $V = (V_*)^\perp$; per la **Proposizione 2.6.11**, *ii*), si ha $\operatorname{codim} V = \dim E/V = \dim V_* \le n$; ma allora anche $\dim R(T) = \dim \Lambda(E/V) \le n$.

Reciprocamente, se $\dim R(T) < \infty$, $R(T)$ è chiuso, quindi, con la norma indotta da quella di F, è uno spazio di Banach $\widetilde{F}$. Indichiamo con $\widetilde{T}$ l'applicazione da E in $\widetilde{F}$ definita da $\widetilde{T}x := Tx$. Poiché $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, \widetilde{F})$, si ha (**Proposizione 2.5.4**) che $\widetilde{T}$ è continuo da E_w in $\widetilde{F}_w$. Ma, nello spazio a dimensione finita $\widetilde{F}$, topologia forte e debole coincidono, quindi $\widetilde{T}$ è continuo da E_w in $\widetilde{F}_s$; e allora $T = i \circ \widetilde{T}$ (dove i è l'immersione canonica di $\widetilde{F}$ in F) è continuo da E_w in F_s. ■

Vediamo infine qualche collegamento con gli spazi quoziente:

Proposizione 2.6.13 *Sia V un sottospazio chiuso dello spazio di* Banach *E:*

i) ${}^\perp V$ *è isometricamente isomorfo a* $(E/V)^*$*;*

ii) V^* *è isometricamente isomorfo ad* $E^*/{}^\perp V$.

Dim.: *i)*: fissiamo $f \in {}^\perp V$; dato $\widetilde{x} \in E/V$, e scelto $x \in \pi^{-1}(\widetilde{x})$, osserviamo che il valore $\langle f, x\rangle$ dipende da f e da $\widetilde{x}$, *ma non* dal vettore $x \in \widetilde{x}$ (se $x' \in \pi^{-1}(\widetilde{x})$, $x' - x \in V$, quindi $\langle f, x'\rangle = \langle f, x\rangle$). Definiamo quindi

$$(\Lambda f)\,\widetilde{x} := \langle f, x\rangle, \qquad x \in \pi^{-1}(\widetilde{x}).$$

Si vede subito che Λf è un funzionale lineare su E/V; inoltre,

$$|(\Lambda f)\,\widetilde{x}| = |\langle f, x\rangle| \le \|f\|_*\,\|x\|, \qquad \forall x \in \pi^{-1}(\widetilde{x}),$$

quindi $|(\Lambda f)\,\widetilde{x}| \le \|f\|_*\,\|\widetilde{x}\|_{E/V}$, da cui $\Lambda f \in (E/V)^*$ e $\|\Lambda f\|_{(E/V)^*} \le \|f\|_*$.

L'applicazione Λ è evidentemente lineare e iniettiva da ${}^\perp V$ in $(E/V)^*$. È anche suriettiva: dato $F \in (E/V)^*$, posto $\langle f, x\rangle := \langle F, \pi(x)\rangle$, si ha $f \in E^*$ (si noti che $\|f\|_* \le \|F\|_{(E/V)^*}$), $f \in {}^\perp V$ e $\Lambda f = F$. Come si è visto, risulta $\|\Lambda f\|_{(E/V)^*} \le \|f\|_*$; resta solo da mostrare che $\|f\|_* \le \|\Lambda f\|_{(E/V)^*}$. Per questo, si osservi che se $\widetilde{x} \ne 0$, $\exists x \in \pi^{-1}(\widetilde{x}) \setminus V$; inoltre, si ha $\|x\| \ge \|\widetilde{x}\|_{E/V} > 0$, quindi

$$\|\Lambda f\|_{(E/V)^*} \ge \frac{|(\Lambda f)\,\widetilde{x}|}{\|x\|_{E/V}} \ge \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|}.$$

Data l'arbitrarietà di $\widetilde{x} \ne 0$, la disuguaglianza vale $\forall x \notin V$, ed è ovvia per gli $x \in V \setminus \{0\}$. Quindi, passando all'estremo superiore per $x \ne 0$, si ha la disuguaglianza cercata.

ii): indichiamo con π_1 l'immersione canonica di E^* in $E^*/{}^\perp V$. Per ogni funzionale φ lineare e continuo definito su V, cioè ogni $\varphi \in V^*$, per il Teorema di Hahn-Banach esiste almeno un'estensione $\widetilde{\varphi} \in E^*$ tale che $\|\widetilde{\varphi}\|_* = \mu_V(\varphi) = \|\varphi\|_{V^*}$. Se $\widetilde{\varphi}'$ è un'altra estensione di φ, si ha evidentemente $\widetilde{\varphi}' - \widetilde{\varphi} \in {}^\perp V$, quindi la classe d'equivalenza $\pi_1(\widetilde{\varphi})$ è *indipendente* dall'estensione scelta, e dipende solo da φ: poniamo allora

$$\Lambda_1\,\varphi := \pi_1(\widetilde{\varphi}), \qquad \widetilde{\varphi} \in E^*, \quad \widetilde{\varphi}(v) = \varphi(v)\ \forall v \in V.$$

Λ_1 è un'applicazione lineare da V^* in $E^*/{}^\perp V$, e chiaramente è iniettiva (se $\varphi = 0$, si ha $\widetilde{\varphi} = 0$). È anche suriettiva: $\forall F \in E^*/{}^\perp V$, scelta $f \in \pi_1^{-1}(F)$ e detta ψ la restrizione di f a V, risulta $\psi \in V^*$ e $\Lambda_1\psi = \pi_1(f) = F$. Si ha poi

$$\|\Lambda_1\varphi\|_{E^*/{}^\perp V} = \|\pi_1(\widetilde{\varphi})\|_{E^*/{}^\perp V} = \inf_{g \in {}^\perp V} \|\widetilde{\varphi} + g\|_* \le \|\widetilde{\varphi}\|_* = \|\varphi\|_{V^*};$$

d'altra parte, $\forall g \in {}^\perp V$ si ha

$$\|\varphi\|_{V^*} = \sup_{v \in V, \|v\|=1} |\langle \varphi, v\rangle| = \sup_{v \in V, \|v\|=1} |\langle \varphi + g, v\rangle| \le \sup_{\|v\|=1} |\langle \widetilde{\varphi} + g, v\rangle| = \|\widetilde{\varphi} + g\|_*,$$

da cui $\|\varphi\|_{V^*} \le \inf_{g \in {}^\perp V} \|\widetilde{\varphi} + g\|_*$, e ne segue che Λ_1 è un'isometria. ∎

2.7 Riflessività.

Diamo la seguente (fondamentale) definizione (si riveda il **Paragrafo 2.5**):

Definizione 2.7.1 *Sia E uno spazio di* Banach*, e sia $\mathfrak{J}$ l'immersione canonica di E in E^{**}, definita $\forall \xi \in E$ da*

$$(2.34) \qquad {}_{E^{**}}\langle \mathfrak{J}\xi, f\rangle_{E^*} := {}_{E^*}\langle f, \xi\rangle_E \quad \forall f \in E^*;$$

E si dice **riflessivo** *se $\mathfrak{J}$ è suriettiva.* ■

$\boxed{\textbf{Osservazione}}$ **2.7.1** È essenziale avere ben chiaro che la definizione di riflessività richiede che *proprio l'immersione canonica*, e non un'altra opportuna applicazione, sia un isomorfismo isometrico di E su E^{**}. È possibile costruire (in modo piuttosto elaborato) esempi di spazi *non riflessivi* E per i quali si riesce a costruire un isomorfismo isometrico (che ovviamente non è $\mathfrak{J}$) di E su *tutto* E^{**}. ■

Vale il seguente

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2.7.1** *Ogni spazio di* Hilbert *H è riflessivo.*

Dim.: indicati con J e J_* gli isomorfismi di Riesz di H^* su H e di H^{**} su H^* rispettivamente, si ha che, $\forall (x \in H,\ f \in H^*)$,

$$(J_*(\mathfrak{J}x), f)_* =_{H^{**}} \langle \mathfrak{J}x, f\rangle_{H^*} = \ _{H^*}\langle f, x\rangle_H = (x, Jf) = (J^{-1}x, f)_*, \tag{2.35}$$

quindi $J_* \circ \mathfrak{J} = J^{-1}$, da cui $\mathfrak{J} = J_*^{-1} \circ J^{-1}$. Come composizione degli isomorfismi isometrici J^{-1} (da H su H^*) e J_*^{-1} (da H^* su H^{**}), $\mathfrak{J}$ è un isomorfismo isometrico di H su tutto H^{**}. ■

Dimostriamo la seguente proprietà:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.7.1** *Siano E, F spazi normati, e sia $T \in \mathcal{L}(E,F)$; dette $\mathfrak{J}_E$, $\mathfrak{J}_F$ le immersioni canoniche di E in E^{**} e di F in F^{**}, il diagramma*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathfrak{J}_E"'] & F \arrow[d, "\mathfrak{J}_F"] \\ E^{**} \arrow[r, "T^{**}"'] & F^{**} \end{tikzcd}$$

è commutativo: $T^{**} \circ \mathfrak{J}_E = \mathfrak{J}_F \circ T$; in particolare, se E, F sono riflessivi, ed identificati ai rispettivi biduali, $T^{**} = T$.

Dim.: dalla *i)* della **Proposizione 2.6.5** si ha intanto che $T^{**} \in \mathcal{L}(E^{**}, F^{**})$, e che

$$\|T^{**}\|_{\mathcal{L}(E^{**},F^{**})} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(F^*,E^*)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Inoltre, per la (2.32), si ha che, $\forall g \in F^*$ e $\forall x \in E$, risulta

$$\begin{aligned} _{F^{**}}\langle T^{**}(\mathfrak{J}_E x), g\rangle_{F^*} &= \ _{E^{**}}\langle \mathfrak{J}_E x, T^* g\rangle_{E^*} =_{E^*} \langle T^* g, x\rangle_E \\ &= \ _{F^*}\langle g, Tx\rangle_F =_{F^{**}} \langle \mathfrak{J}_F(Tx), g\rangle_{^*F}, \end{aligned}$$

da cui $T^{**} \circ \mathfrak{J}_E = \mathfrak{J}_F \circ T$. ■

Si noti che, in generale, $R(T^{**} \circ \mathfrak{J}_E) \subset R(\mathfrak{J}_F)$, cosicché (dato che $\mathfrak{J}_F$ è *invertibile* su $R(\mathfrak{J}_F)$) risulta $\mathfrak{J}_F^{-1} \circ T^{**} \circ \mathfrak{J}_E = T$. Inoltre, si ha il

$\boxed{\textbf{Corollario}}$ **2.7.1** *Se E è isomorfo ad uno spazio riflessivo F, anche E è riflessivo.*

Dim.: sia T un isomorfismo di E su F; per la **Proposizione 2.6.5**, *iii*), T^{**} è un isomorfismo di E^{**} su F^{**}. Dalla Proposizione precedente, si ricava allora che $\mathfrak{J}_E = (T^{**})^{-1} \circ \mathfrak{J}_F \circ T$; quindi anche $\mathfrak{J}_E$, composizione di applicazioni suriettive, è suriettiva. ∎

Gli spazi riflessivi sono caratterizzati da una proprietà di compattezza debole della sfera unitaria, come mostreremo tra poco. Premettiamo il seguente risultato:

Proposizione **2.7.2 (Lemma di Goldstein)** *Sia E uno spazio normato; nella topologia debole* $\sigma(E^{**}, E^*)$, l'immagine $\mathfrak{J}(\Sigma_E)$ della sfera unitaria in E è* densa *in* $\overline{\Sigma}_{**} := \{\varphi \in E^{**} \mid \|\varphi\|_{**} \leq 1\}$.

Dim.: per assurdo, supponiamo che esistano $\xi_0 \in \overline{\Sigma}_{**}$ ed un intorno aperto V in $\sigma(E^{**}, E^*)$ di ξ_0 tali che $V \cap \mathfrak{J}(\Sigma_E) = \emptyset$. Poiché $(E^{**}; \sigma(E^{**}, E^*))$ è uno spazio LCS, possiamo supporre V *convesso*. Per il **Teorema 2.4.2** (si ricordi anche il **Teorema 2.5.2**, con E, E^* sostituiti rispettivamente da E^*, E^{**}), $\exists(f \in E^* \setminus \{0\},\ \alpha \in \mathbb{R})$ tali che

$$(2.36) \qquad {}_{E^{**}}\langle \xi_0, f\rangle_{E^*} < \alpha \leq {}_{E^{**}}\langle \mathfrak{J}\, x, f\rangle_{E^*} = {}_{E^*}\langle f, x\rangle_E, \quad \forall x \in \Sigma_E.$$

Ma $|\langle \xi_0, f\rangle| \leq \|\xi_0\|_{E^{**}} \|f\|_* \leq \|f\|_*$, quindi $-\|f\|_* \leq \langle \xi_0, f\rangle$; inoltre, dato che Σ_E è equilibrata, $\inf_{x\in\Sigma_E} \langle f, x\rangle = -\sup_{x\in\Sigma_E} \langle f, x\rangle = -\|f\|_*$; dalla (2.36) si ottengono allora le disuguaglianze assurde

$$-\|f\|_* < \alpha \leq -\|f\|_*. \ ∎$$

Siamo ora in grado di dimostrare il *Teorema di* KAKUTANI

Teorema **2.7.2** *Sia E uno spazio di* BANACH*; E è riflessivo se e solo se la sfera unitaria chiusa $\overline{\Sigma}_E$ è compatta in $\sigma(E, E^*)$.*

Dim.: se E è riflessivo, $\mathfrak{J}(\overline{\Sigma}_E) = \overline{\Sigma}_{**}$, e quest'ultima è compatta in $\sigma(E^{**}, E^*)$ per il **Teorema 2.5.4**, applicato ad $E^{**} = (E^*)^*$. Basta quindi mostrare che $\mathfrak{J}^{-1}$ è continuo da $(E^{**}; \sigma(E^{**}, E^*))$ in $(E; \sigma(E, E^*))$. Per la **Proposizione 2.4.2**, *iii*), è equivalente dimostrare che, $\forall f \in E^*$, l'applicazione che manda $\xi \in E^{**}$ in ${}_{E^*}\langle f, \mathfrak{J}^{-1}\xi\rangle_E$ è continua da $(E^{**}; \sigma(E^{**}, E^*))$ in $\mathbb{R}$; ma questo è ovvio, perché ${}_{E^*}\langle f, \mathfrak{J}^{-1}\xi\rangle_E = {}_{E^{**}}\langle \xi, f\rangle_{E^*}$, ed il funzionale lineare dato da $\xi \mapsto {}_{E^{**}}\langle \xi, f\rangle_{E^*}$ è continuo in $\sigma(E^{**}, E^*)$ per definizione di topologia debole* in E^{**}.

Supponiamo ora $\overline{\Sigma}_E$ compatta in E_w. L'applicazione $\mathfrak{J}$ è continua da E_s in E_s^{**}, quindi, per la **Proposizione 2.5.4**,

$$\mathfrak{J} \textit{ è continua da } E_w \textit{ in } E_w^{**} = (E^{**}; \sigma(E^{**}, E^{***})),^{42}$$

dunque anche da E_w in $E_{w^*}^{**} = (E^{**}; \sigma(E^{**}, E^*))$. Ne viene che $\mathfrak{J}(\overline{\Sigma}_E)$ è compatta, dunque chiusa, in $E_{w^*}^{**}$; poiché, per il Lemma di GOLDSTEIN, $\mathfrak{J}(\overline{\Sigma}_E)$ è densa in $\overline{\Sigma}_{**}$ per la topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$, si conclude che $\mathfrak{J}(\overline{\Sigma}_E) = \overline{\Sigma}_{**}$, e ne discende immediatamente che $\mathfrak{J}(E) = E^{**}$. ∎

Un risultato notevole, che riguarda i sottospazi di uno spazio riflessivo:

[42] E^{***} è per definizione il duale di E^{**}, o equivalentemente (dato che $(E^{**})^* = ((E^*)^*)^* = (E^*)^{**}$) il biduale di E^*.

Proposizione **2.7.3** *Se* $(E; \|\,.\,\|)$ *è uno spazio di* BANACH *riflessivo, ed* M *è un suo sottospazio* chiuso*, anche* $(M; \|\,.\,\|)$ *è riflessivo.*

Dim.: M è uno spazio di BANACH, sul quale possiamo considerare la topologia debole, e definire $M_w := (M; \sigma(M, M^*))$. D'altra parte, possiamo considerare M come sottospazio topologico M_0 di E_w, il che equivale a porre $M_0 := (M; M \cap \sigma(E, E^*))$. In realtà, questi due spazi coincidono. Per mostrarlo, è sufficiente verificare che hanno un medesimo sistema fondamentale di intorni *dell'origine*; come sistemi fondamentali $\mathcal{V}_w$, $\mathcal{V}_0$ di intorni dell'origine in M_w, M_0 possiamo scegliere, per quanto si è visto in precedenza, quelli definiti da:

$$V \in \mathcal{V}_w \overset{def}{\Longleftrightarrow} V = \{x \in M \mid |\langle g_k, x\rangle| < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n\}, \tag{2.37}$$

dove $\varepsilon > 0$, $g_k \in M^*$, e

$$\begin{cases} V \in \mathcal{V}_0 \ \textit{se e solo se} \\ V = M \cap W, \ \textit{dove } W = \{x \in E \mid |\langle f_k, x\rangle| < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \tag{2.38}$$

con $f_k \in E^*$. Indichiamo con g_k la restrizione di f_k ad M, che è evidentemente un elemento di M^*. Il generico $V \in \mathcal{V}_0$ si scrive allora nella forma (2.37), quindi è in $\mathcal{V}_w$. Reciprocamente, se V ha la forma (2.37), per ogni $k = 1, \dots, n$ esiste, per il **Corollario 2.1.1**, un'estensione di g_k ad $f_k \in E^*$, cosicché V si scrive nella forma (2.38), quindi è in $\mathcal{V}_0$.

Siamo ora in grado di concludere la dimostrazione, applicando il Teorema di KAKUTANI. Detta $\overline{\Sigma}_M := \{x \in M \mid \|x\| \le 1\}$ la sfera unitaria chiusa in $(M; \|\,.\,\|)$, si ha che $\overline{\Sigma}_M = M \cap \overline{\Sigma}_E$; ora, $\overline{\Sigma}_E$ è compatta in E_w, ed M è chiuso, anche nella topologia debole (per la **Proposizione 2.5.3**). Allora $\overline{\Sigma}_M$ è compatta in M_0, dunque anche in $M_w = M_0$; per il **Teorema 2.7.2**, M è riflessivo. ∎

Un'importante conseguenza:

Teorema **2.7.3** *Lo spazio di* BANACH E *è riflessivo se e solo se lo è il suo duale* E^*.

Dim.: supponiamo che E sia riflessivo. Per il **Teorema 2.5.4**, la sfera unitaria chiusa $\overline{\Sigma}_*$ in E^* è compatta nella topologia $\sigma(E^*, E)$, quindi –essendo E riflessivo– nella topologia $\sigma(E^*, E^{**})$; allora, per il Teorema di KAKUTANI, E^* è riflessivo.

Sia ora E^* riflessivo; per quanto appena visto, E^{**} è riflessivo, dunque, dato che $\mathfrak{J}(E)$ è chiuso in E^{**}, per la **Proposizione 2.7.3** anche $\mathfrak{J}(E)$ è riflessivo. Ma allora è riflessivo anche E, che è isomorfo a $\mathfrak{J}(E)$. ∎

Ne discende il seguente notevole

Corollario **2.7.2** *Se lo spazio di* BANACH E non è riflessivo*, nel suo spazio duale* E^* *la topologia debole** $\sigma(E^*, E)$ *è* strettamente *meno fine della topologia debole* $\sigma(E^*, E^{**})$.

Dim.: se E non è riflessivo, non lo è neppure E^*, dunque, per il Teorema di KAKUTANI, $\overline{\Sigma}_*$ non è compatta in $\sigma(E^*, E^{**})$; dato che $\overline{\Sigma}_*$ è sempre compatta in $\sigma(E^*, E)$ (**Teorema 2.5.4**), ne viene che la topologia debole* è strettamente meno fine della topologia debole. ∎

$\boxed{\textbf{Osservazione}}$ **2.7.2** Se E è uno spazio di BANACH non riflessivo, esistono in E^* degli insiemi convessi (addirittura, degli iperpiani) che sono *chiusi* in E^*_s –o, equivalentemente, in E^*_w– ma *non* in $E^*_{w^*}$. Ad esempio, se $\xi \in E^{**} \setminus R(\mathfrak{J})$, allora $V := \ker \xi$ è chiuso in E^* per le topologie forte e debole, non per quella debole*: si ricordi che, per il **Teorema 2.5.2**, ξ non è continuo su $(E^*; \sigma(E^*, E))$. ∎

Per quanto riguarda la completezza sequenziale, vale il seguente risultato:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.7.4** *Ogni spazio di* BANACH *riflessivo E è debolmente sequenzialmente completo.*

Dim.: E^{**}, duale di E^*, è *-debolmente sequenzialmente completo (**Proposizione 2.5.7**), quindi, dato che è riflessivo (**Corollario 2.7.1**) è debolmente sequenzialmente completo; ma allora lo è anche E, che è isometricamente isomorfo ad E^{**} ∎

È interessante osservare che uno spazio di BANACH isomorfo al *duale* di uno spazio normato verifica proprietà *aggiuntive* rispetto a quelle valide in uno spazio di BANACH generico. Un esempio deriva facilmente dal seguente risultato:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.7.5** *Siano F uno spazio normato, $\mathfrak{J}_{F^*}$ l'immersione canonica di F^* in F^{***}; il sottospazio chiuso $R(\mathfrak{J}_{F^*}) = \mathfrak{J}_{F^*}(F^*)$ ammette supplementare topologico in F^{***}.*

Dim.: consideriamo l'aggiunto $\mathfrak{J}^*_F$ dell'immersione canonica $\mathfrak{J}_F$ di F in F^{**}, cosicché $\mathfrak{J}^*_F$ è in $\mathcal{L}(F^{***}, F^*)$, e poniamo $P := \mathfrak{J}_{F^*} \circ \mathfrak{J}^*_F$. È chiaro che P è in $\mathcal{L}(F^{***})$; mostriamo intanto che P è un *proiettore* in F^{***}. In effetti, poiché si ha, $\forall(x \in F,\ f \in F^*)$,

$$ {}_{F^*}\langle \mathfrak{J}^*_F(\mathfrak{J}_{F^*} f), x\rangle_F = {}_{F^{***}}\langle \mathfrak{J}_{F^*} f, \mathfrak{J}_F x\rangle_{F^{**}} = {}_{F^{**}}\langle \mathfrak{J}_F x, f\rangle_{F^*} = {}_{F^*}\langle f, x\rangle_F, $$

ne viene che

$$ \mathfrak{J}^*_F \circ \mathfrak{J}_{F^*} = I_{F^*} \quad (\textit{dove } I_{F^*} = \text{identità in } F^*), \tag{2.39} $$

e di conseguenza $P^2 = \mathfrak{J}_{F^*} \circ (\mathfrak{J}^*_F \circ \mathfrak{J}_{F^*}) \circ \mathfrak{J}^*_F = \mathfrak{J}_{F^*} \circ \mathfrak{J}^*_F = P$. Per la **Proposizione 2.6.8**, *ii*), si ha allora che $F^{***} = R(P) \oplus N(P)$; la dimostrazione sarà quindi completata se mostriamo che $R(P) = R(\mathfrak{J}_{F^*})$. Ora, dalla definizione di P si ha intanto l'inclusione $R(\mathfrak{J}_{F^*}) \supset \mathfrak{J}_{F^*}(\mathfrak{J}^*_F(F^{***})) = R(P)$; d'altra parte, $\forall \varphi$ in $R(\mathfrak{J}_{F^*})$ esiste $f \in F^*$ con $\varphi = \mathfrak{J}_{F^*} f$. Per la (2.39), si ha $\mathfrak{J}^*_F \varphi = \mathfrak{J}^*_F(\mathfrak{J}_{F^*} f) = f$, dunque $\varphi = \mathfrak{J}_{F^*}(\mathfrak{J}^*_F \varphi) = P\varphi \in R(P)$. In conclusione, $R(P) = R(\mathfrak{J}_{F^*})$, dunque $\ker P$ è un supplementare topologico di $R(\mathfrak{J}_{E^*})$. ∎

Non ci sono difficoltà a dimostrare la seguente estensione:

$\boxed{\textbf{Corollario}}$ **2.7.3** *Se E, F sono spazi di* BANACH, *ed E è isomorfo ad F^*, allora $R(\mathfrak{J}_E)$ ammette supplementare topologico in E^{**}.*

Dim.: sia T un isomorfismo di E su F^*, cosicché T^{**} è un isomorfismo di E^{**} su F^{***}. Se si definisce $Q := (T^{**})^{-1} \circ P \circ T^{**}$, dove, come nella Proposizione precedente, $P := \mathfrak{J}_{F^*} \circ \mathfrak{J}^*_F$, si ha che $Q \in \mathcal{L}(E^{**})$; inoltre, Q è un *proiettore* in E^{**}, dato che

$$ Q^2 = (T^{**})^{-1} \circ P \circ (T^{**} \circ (T^{**})^{-1}) \circ P \circ T^{**} = (T^{**})^{-1} \circ P^2 \circ T^{**} = Q. $$

Infine, si ha $R(Q) = R(\mathfrak{J}_E)$, dato che

$$(T^{**})^{-1}(P(T^{**}(E^{**}))) = (T^{**})^{-1}(P(F^{***})) = (T^{**})^{-1}(R(\mathfrak{J}_F^*)) = R(\mathfrak{J}_E);$$

dunque, $R(\mathfrak{J}_E)$ ammette $N(Q)$ come supplementare topologico. ■

Ricordando che, come abbiamo enunciato, $\mathfrak{c}_0$ non ha supplementare topologico nel suo biduale ℓ^∞, si può altresì osservare che

Corollario **2.7.4** *Lo spazio $\mathfrak{c}_0$ non è isomorfo al duale di nessuno spazio normato.* ■

Osservazione **2.7.3** La (2.39) mostra che se F è uno spazio normato, l'operatore $\mathfrak{J}_F^* \circ \mathfrak{J}_{F^*}$ coincide con l' *identità* I_{F^*} in F^*. Supponiamo ora che F sia uno spazio di Banach *non riflessivo.* Dato che, per quanto ricordato, $\mathfrak{J}_F^* : F^{***} \to F^*$ è suriettivo, *non può essere iniettivo*: se lo fosse, anche $\mathfrak{J}_{F^*} = (\mathfrak{J}_F^*)^{-1}$ sarebbe suriettivo da F^* su F^{***}, dunque F^* sarebbe riflessivo, il che è assurdo per il **Teorema 2.7.3**. ■

2.8 Convessità stretta; convessità uniforme.

Nel **Paragrafo 2.1** abbiamo introdotto la nozione di norma *strettamente convessa* (**Definizione 2.1.1**).

Osserviamo che la convessità stretta *non è un invariante* per la relazione di equivalenza introdotta tra norme, nel senso che una norma *strettamente* convessa può essere equivalente ad una norma che *non* lo è. L'esempio più banale è $\mathbb{R}^2$, in cui le norme

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|; \quad \|x\|_2 := (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}; \quad \|x\|_\infty := \max(|x_1|; |x_2|)$$

sono equivalenti, ma soltanto la seconda è strettamente convessa.

La stretta convessità della norma equivale alla circostanza che la superficie della sfera unitaria, cioè l'insieme $\{x \in E \mid \|x\| = 1\}$, non contenga alcun segmento. Un'altra caratterizzazione è fornita dalla seguente

Proposizione **2.8.1** *Sia $(E; \|\,.\,\|)$ uno spazio normato; sono equivalenti le proposizioni:*

i) la norma di E è strettamente convessa;

ii) se $x, y \in E$ e $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, allora uno dei due vettori è un multiplo non negativo dell'altro.

Dim.: *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: sia $(E; \|\,.\,\|)$, e siano $x, y \in E$ tali che $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Il risultato è banale se uno dei due vettori è nullo; non è limitativo allora supporre che $1 = \|x\| \le \|y\|$. Posto $z := y/\|y\|$, si ha allora

$$\begin{aligned} 2 \ge \|x + z\| &= \|x + y - (1 - \|y\|^{-1})\, y\| \ge \\ &\ge \|x + y\| - (1 - \|y\|^{-1})\, \|y\| = \|x\| + \|y\| - \|y\| + 1 = 2; \end{aligned}$$

di conseguenza, $\|(x+z)/2\| = 1$. Poiché $\|x\| = \|z\| = 1$ e la norma è strettamente convessa, questo è possibile solo se $x = z = \|y\|^{-1}\, y$.

ii) $\Rightarrow$ *i)*: se x, y sono due elementi *distinti* di E con norma $= 1$, dall'ipotesi segue che $\|x + y\| < \|x\| + \|y\| = 2$, cioè $\|(x + y)/2\| < 1$, quindi il punto

$((x+y)/2)$ è in $\operatorname{int}\Sigma(0,1)$. Applicando due volte il **Lemma 2.2.1**, si vede che tutti i punti del segmento aperto di estremi x, y sono *interni* a $\Sigma(0,1)$. ∎

Abbiamo già visto che la norma indotta da un prodotto scalare è sempre strettamente convessa. Diamo qualche esempio di norme *non* strettamente convesse:

Proposizione **2.8.2** *Le norme usuali sugli spazi ℓ^1, ℓ^∞, $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ non sono strettamente convesse.*

Dim.: dato che $\|e_1\|_1 = \|e_2\|_1 = \|(e_1+e_2)/2\|_1 = 1$, la norma in ℓ^1 non è strettamente convessa. Non lo è neppure la norma in ℓ^∞, dato che, posto $x := e_1 + e_2$, $y := e_1 - e_2$, si ha

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \|(x+y)/2\|_\infty = 1.$$

Per quanto riguarda gli spazi $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$,[43] si fissino due sottoinsiemi A, B misurabili e disgiunti di Ω, ciascuno con misura *positiva* e *finita*, e si definiscano x, y, x', y' ponendo $x := (m(A))^{-1}\chi_A$, $y := (m(B))^{-1}\chi_B$, $x' := \chi_A + \chi_B$, $y' := \chi_A - \chi_B$; si ha allora

$$\|x\|_1 = \|y\|_1 = \|(x+y)/2\|_1 = \|x'\|_\infty = \|y'\|_\infty = \|(x'+y')/2\|_\infty = 1. \blacksquare$$

Le norme usuali degli spazi ℓ^p, $L^p(\Omega)$ con $1 < p < +\infty$ hanno una proprietà ben *più forte* della stretta convessità, e che è verificata anche da ogni norma indotta da un prodotto scalare. Premettiamo una definizione:

Definizione **2.8.1** *La norma $\|\,.\,\|$ sullo spazio vettoriale E si dice* **uniformemente convessa**[44] *se*

$$\left\{\begin{array}{l}\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x, y \in E,\ \textit{se}\ \|x\| = \|y\| = 1 \\ \textit{e}\ \|x-y\| > \varepsilon\ \textit{allora}\ \|(x+y)/2\| < 1-\delta;\end{array}\right. \tag{2.40}$$

in tal caso, lo spazio normato $(E; \|\,.\,\|)$ si dice **uniformemente convesso** (*od anche* **superriflessivo**). ∎

Anche l'uniforme convessità *non è un invariante* per la relazione di equivalenza tra norme: una norma uniformemente convessa può essere equivalente ad una norma che *non* lo è (si riveda l'osservazione all'inizio di questo Paragrafo).

È facile vedere che

Proposizione **2.8.3** *Ogni spazio di* Hilbert *H è superriflessivo.*

Dim.: fissati $\varepsilon \in]0,2]$ ed $x, y \in H$ tali che $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x-y\| > \varepsilon$, per l'*identità del parallelogrammo* si ha che

$$\|(x+y)/2\|^2 = 2\|x/2\|^2 + 2\|y/2\|^2 - \|(x-y)/2\|^2 < 1 - (\varepsilon/2)^2,$$

quindi $\|(x+y)/2\| < 1-\delta$, dove $\delta := 1 - [1-(\varepsilon/2)^2]^{1/2}$. ∎

Vale la seguente proprietà, che mostra l'importanza delle norme uniformemente convesse (e giustifica il nome "superriflessivo"):

[43] ovviamente, si suppone che $m(\Omega) > 0$.
[44] in inglese, anche **uniformly rotund**

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.8.4** *Ogni spazio isomorfo ad uno spazio di* Banach $(E; \|\,.\,\|)$ *superriflessivo è riflessivo.*

Dim.: grazie al **Corollario 2.7.1**, basta dimostrare che E stesso è riflessivo. Per questo, è sufficiente mostrare che ogni $\xi \in E^{**}$ con $\|\xi\|_{**} = 1$ è in $\mathfrak{J}(\overline{\Sigma}_E)$. Fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che valga la (2.40); per definizione di norma duale in $E^{**} = (E^*)^*$,

$$\exists f \in E^* : \quad \|f\|_* = 1 \ \text{ e } \ {}_{E^{**}}\langle \xi, f\rangle_{E^*} > 1 - \frac{\delta}{2}. \tag{2.41}$$

Posto

$$V := \{\eta \in E^{**} \ | \ |{}_{E^{**}}\langle \eta - \xi, f\rangle_{E^*}| < \delta/2\}\ ,$$

si ha che V è intorno di ξ in $\sigma(E^{**}, E^*)$; per il Lemma di Goldstein, $\exists x_1$ in $\overline{\Sigma}$: $\ \mathfrak{J}x_1 \in V$. Mostriamo che $\|\xi - \mathfrak{J}x_1\|_{**} \le \varepsilon$, cioè che $\xi \in \mathfrak{J}x_1 + \varepsilon\overline{\Sigma}_{**}$. Per assurdo, supponiamo che sia $\xi \in W := E^{**} \setminus (\mathfrak{J}x_1 + \varepsilon\overline{\Sigma}_{**})$. Dato che, per il **Teorema 2.5.4**, $\overline{\Sigma}_{**}$ è chiuso in $\sigma(E^{**}, E^*)$, ne viene che W è aperto nella topologia debole* di E^{**}; applicando ancora il Lemma di Goldstein, si ha che $\exists x_2 \in \overline{\Sigma}$ tale che $\mathfrak{J}x_2 \in V \cap W$. Dalla (2.40) e dal fatto che $\mathfrak{J}x_1$, $\mathfrak{J}x_2$ sono in V, si ottiene allora che

$$\begin{aligned} {}_{E^{**}}\langle \xi, f\rangle_{E^*} \ &\le \frac{1}{2}|{}_{E^{**}}\langle \xi - \mathfrak{J}x_1, f\rangle_{E^*}| + \frac{1}{2}|{}_{E^{**}}\langle \xi - \mathfrak{J}x_2, f\rangle_{E^*}| + \\ &+ \left| {}_{E^*}\langle f, \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\rangle_E \right| < \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{4}\delta + 1 - \delta = 1 - \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

che contraddice la (2.41). ∎

$\boxed{\textbf{Osservazione}}$ **2.8.1** È ovvio che l'uniforme convessità implica la convessità stretta, e che ogni spazio *isometricamente* isomorfo ad uno spazio superriflessivo è anch'esso superriflessivo. Esistono tuttavia spazi riflessivi ma non superriflessivi, e spazi strettamente convessi ma non riflessivi. ∎

Mostriamo ora che, quando $1 < p < +\infty$, gli spazi $L^p(A, \mathcal{E}, m)$ (dove $(A, \mathcal{E}, m)$ è uno spazio di misura σ-finito e $m \ge 0$) sono superriflessivi; ne segue, in particolare, la riflessività per $1 < p < +\infty$ di ℓ^p e di $L^p(\Omega)$. Due risultati preliminari:

$\boxed{\textbf{Lemma}}$ **2.8.1 (1^a disuguaglianza di Clarkson)** *Per ogni fissato numero reale $p \ge 2$, si ha*

$$|a + b|^p + |a - b|^p \le 2^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p\right) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \tag{2.42}$$

Dim.: per $|a| = |b|$ oppure $p = 2$ il risultato è ovvio. Sia $a \ne b$ e $p > 2$; si osservi intanto che la funzione $\varphi(\xi) := \xi^{p/2} + 1 - (\xi + 1)^{p/2}$ è in $C^1([0, +\infty[)$, si annulla per $\xi = 0$ ed ha derivata negativa per ogni $\xi > 0$. Quindi si ha $\xi^{p/2} + 1 \le (\xi + 1)^{p/2} \quad \forall \xi \ge 0$. Per $\xi := (a + b)^2/(a - b)^2$ e moltiplicando per $|a - b|^p$ si ottiene quindi facilmente che

$$|a + b|^p + |a - b|^p \le \left((a + b)^2 + (a - b)^2\right)^{p/2} = 2^p \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2\right)^{p/2}.$$

Dato che la funzione $\eta \mapsto |\eta|^{p/2}$ è convessa su $\mathbb{R}$ (perché $p > 2$), l'ultima quantità scritta è $\le \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p)$, da cui la (2.42). ∎

$\boxed{\textbf{Lemma}}$ **2.8.2 (disuguaglianza di Morawetz)** *Per ogni p tale che $1 < p < 2$, esiste una costante $c_p > 0$ tale che*

$$(|a|^p + |b|^p)^{(2-p)/2} \left(|a|^p + |b|^p - 2 \left| \frac{a+b}{2} \right|^p \right)^{p/2} \geq \tag{2.43}$$

$$\geq c_p \, |a-b|^p \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Dim.: per $|b| = |a|$, il primo membro della (2.43) vale

$$\begin{cases} 0 & \text{se } b = a, \\ 2|a|^p & \text{se } b = -a, \end{cases}$$

ed è quindi $\geq c_p \, |a-b|^p$, ad esempio se $c_p = 2^{1-p}$.

Se invece $|b| \neq |a|$, data la simmetria della (2.43) in a, b possiamo supporre che sia $|b| > |a| \geq 0$. Verifichiamo che, posto $\tau := a/b$, la funzione

$$\tau \mapsto (|\tau|^p + 1)^{(2-p)/2} \left(|\tau|^p + 1 - 2 \left| \frac{\tau+1}{2} \right|^p \right)^{p/2} (1-\tau)^{-p}$$

ha estremo inferiore *strettamente positivo* su $]-1, 1[$. Dato che $(|\tau|^p + 1)^{(2-p)/2} \geq 1$, è sufficiente mostrare che, posto

$$f_p(\tau) := \frac{|\tau|^p + 1 - 2((\tau+1)/2)^p}{(1-\tau)^2}, \tag{2.44}$$

si ha $\inf_{|\tau|<1} f_p(\tau) > 0$. Ora, la funzione $\tau \mapsto |\tau|^p$ è strettamente convessa, dunque, per ogni $\tau \neq 1$, si ha $|(\tau+1)/2|^p < (|\tau|^p + 1)/2$, e ne viene che f_p è continua e *strettamente positiva* in $[-1, 1[$. Poiché, come è facile verificare, $\lim_{\tau \to 1-0} f_p(\tau) = p(p-1)/4$, si conclude che l'estremo inferiore di f_p in $]1, 1[$ è un numero c_p *positivo*. ■

Possiamo ora dimostrare il

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2.8.1** *Per ogni p con $1 < p < +\infty$, lo spazio $L^p := L^p(A, \mathcal{E}, m)$ è superriflessivo.*

Dim.: per $p = 2$, il risultato è noto (**Proposizione 2.8.3**); mostriamo intanto che vale anche per $p > 2$. Fissato $\varepsilon > 0$, siano $x, y \in L^p$ tali che $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$ e $\|x - y\|_p > \varepsilon$. Dalla (2.42), (con $a := \frac{1}{2}x(t)$ e $b := \frac{1}{2}y(t)$ q. o. in A, ed integrando su A), si ottiene che

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p \leq 1 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p,$$

da cui l'uniforme convessità della norma $\| \, . \, \|_p$ (si veda la **Definizione 2.8.1**, con $\delta := 1 - [1 - (\varepsilon/2)^p]^{1/p}$).

Per $1 < p < 2$, fissiamo $x, y \in L^p$; la (2.43), scritta con $a := x(t)$ e $b := y(t)$ per q. o. $t \in A$, e dopo aver integrato su Ω, assume la forma

$$\int_A f_1(t) \, f_2(t) \, \mathrm{d}m(t) \geq c_p \int_A |x(t) - y(t)|^p \, \mathrm{d}m(t),$$

dove
$$f_1(t) := (|x(t)|^p + |y(t)|^p)^{(2-p)/2} \in L^{2/(2-p)}(A),$$
$$f_2(t) := \left(|x(t)|^p + |y(t)|^p - 2\left|\frac{x(t)+y(t)}{2}\right|^p\right)^{p/2} \in L^{2/p}(A).$$

Dato che $2/(2-p)$ e $2/p$ sono esponenti coniugati, dalla disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|_p^p &\le c_p^{-1}\|f_1\|_{2/(2-p)}\,\|f_2\|_{2/p} = \\
&= c_p^{-1}\left(\|x\|_p^p+\|y\|_p^p\right)^{(2-p)/2}\left(\|x\|_p^p+\|y\|_p^p-2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p\right)^{p/2}.
\end{aligned}
$$

Fissato $\varepsilon>0$, se $\|x\|_p=\|y\|_p=1$ e $\|x-y\|_p>\varepsilon$ si ha allora

$$
\varepsilon^p < 2c_p^{-1}\left(1-\|(x+y)/2\|_p^p\right),
$$

da cui

$$
\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p < 1-\delta, \quad \text{con} \quad \delta = 1-\left[1-\frac{\varepsilon^p\, c_p}{2}\right]^{1/p},
$$

cioè la convessità uniforme di $\|\,.\,\|_p$. ∎

Siamo ora in grado di completare la dimostrazione del **Teorema 2.1.3**, mediante il

Corollario 2.8.1 *Per ogni $p\in]1,+\infty[$, il duale di L^p è isometricamente isomorfo ad L^q.*

Dim.: fissato $p\in]1,+\infty[$, dobbiamo solo mostrare che, con le notazioni usate nella dimostrazione del **Teorema 2.1.3**, l'operatore (lineare ed isometrico) $J^{(q)}: L^q\to(L^p)^*$ è *suriettivo*. Sappiamo già che il sottospazio $R(J^{(q)})$ è *chiuso* in L^p; basta quindi mostrare che è *denso* in L^p. Per questo, utilizziamo il **Corollario 2.2.2**: sia $\varphi\in(L^p)^{**}$ ortogonale ad $R(J^{(q)})$, ed osserviamo che, essendo L^p riflessivo, esiste $x\in L^p$ tale che $\varphi=\mathfrak{J}_p\,x$. Si ha allora

$$
{}_{(L^p)^{**}}\langle\varphi,f\rangle_{(L^p)^*} = {}_{(L^p)^*}\langle f,x\rangle_{L^p} = 0 \quad \forall f\in(L^p)^*,
$$

da cui $x=0$; dunque $\varphi=0$, e ne viene che $R(J^{(q)})$ è denso in L^p, quindi coincide con *tutto* lo spazio L^p. ∎

2.9 Separabilità.

Nel **§1.8**, abbiamo introdotto la nozione di *spazio separabile*. È facile verificare che

Proposizione 2.9.1 $\mathfrak{c}_0$ *e gli spazi ℓ^p, $L^p(\Omega)$ con $1\le p<+\infty$ sono separabili.*

Dim.: per quanto riguarda $\mathfrak{c}_0$ e gli spazi ℓ^p con $1\le p<+\infty$, basta osservare che la successione $\{e^{(n)}\}$ dei versori è evidentemente una *base* in ciascuno di tali spazi, ed applicare la **Proposizione 1.8.2**. La separabilità di $L^p(\Omega)$ per $1\le p<+\infty$ si dimostra in modo perfettamente analogo alla **Proposizione 1.8.3**. ∎

La limitazione $p<+\infty$ è essenziale; per mostrarlo, premettiamo il

$\boxed{\textbf{Lemma}}$ **2.9.1** *Sia $(X;d)$ uno spazio metrico; se esistono $\varepsilon > 0$ ed un sottoinsieme B* non numerabile *di X tali che*

$$(x, y \in B \text{ e } x \neq y) \Longrightarrow (d(x,y) \geq \varepsilon),$$

allora X non è separabile.

Dim.: per assurdo, supponiamo che la successione $\{x_n\}$ sia densa in X. In particolare, $\forall x \in B$ si ha $\Sigma(x, \varepsilon/2) \bigcap \{x_n\} \neq \emptyset$, quindi $\forall x \in B\ \exists \nu(x) \in \mathbb{N}$: $x_{\nu(x)} \in \Sigma(x, \varepsilon/2)$. L'applicazione $\nu : x \mapsto \nu(x)$ è iniettiva da B in $\mathbb{N}$, dato che $\nu(x) = \nu(y)$ implica che $x_{\nu(x)} \in \Sigma(x, \varepsilon/2) \bigcap \Sigma(y, \varepsilon/2)$, possibile solo se $x = y$. Ma allora B sarebbe equipotente a $\nu(B) \subset \mathbb{N}$, quindi al più numerabile, contrariamente all'ipotesi. ■

Ne discende il seguente risultato:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.9.2** *Gli spazi ℓ^∞ e $L^\infty(\Omega)$ non sono separabili.*

Dim.: in ℓ^∞, si consideri il sottoinsieme B (non numerabile, perché equipotente a $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$) delle successioni $x = \{x_n\}$ tali che $|x_n| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. Evidentemente, se $x, y \in B$ e $x \neq y$ si ha $d(x,y) = 2$; per il Lemma precedente, ℓ^∞ non è separabile.
Dimostriamo la non separabilità di $L^\infty(\Omega)$ nel caso particolare $\Omega =]0,1[$ (il caso generale presenta qualche ulteriore complicazione, ma di natura esclusivamente tecnica). Poniamo

$$B := \{\chi_{[0,t]} \mid t \in [0,1]\};$$

è chiaro che B non è numerabile, e che ogni coppia di elementi *distinti* $x, y \in B$ verifica $\|x - y\|_\infty = 1$; per il Lemma precedente, $L^\infty(0,1)$ non è separabile. ■

Da quanto appena visto, discende che esistono spazi di Banach separabili (ad esempio, ℓ^1 ed $L^1(\Omega)$) il cui duale *non* è separabile. Non si può presentare invece la situazione opposta:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2.9.1** *Se il duale E^* dello spazio di* Banach *E è separabile, anche E è separabile.*

Dim.: sia $\{f_n\}$ una successione densa in E^*; per definizione di norma in E^*, per ogni n esiste $x_n \in E$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $\langle f_n, x_n \rangle \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_*$. Poniamo

$$\mathcal{L}_0 := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{x_n\} = \{x \in E \mid x = \textstyle\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \quad k \in \mathbb{N},\ \alpha_k \in \mathbb{Q}\},$$
$$\mathcal{L} := \operatorname{span}\{x_n\} = \{x \in E \mid x = \textstyle\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \quad k \in \mathbb{N},\ \alpha_k \in \mathbb{R}\};$$

è evidente che $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$, e che $\mathcal{L}_0$ è denso in $\mathcal{L}$. Basta allora mostrare la densità di $\mathcal{L}$ in E, da cui discende la densità in E di $\mathcal{L}_0$, che è numerabile. Per questo, sia $f \in E^*$ tale che $\langle f, x \rangle = 0\ \forall x \in \mathcal{L}$; in particolare, si ha $\langle f, x_n \rangle = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, esiste f_n tale che $\|f_n - f\|_* < \varepsilon$; per tale n risulta

$$\tfrac{1}{2}\|f_n\|_* \leq \langle f_n, x_n \rangle = \langle f_n - f, x_n \rangle + \langle f, x_n \rangle \leq \varepsilon,$$

quindi $\|f\|_* \leq \|f - f_n\|_* + \|f_n\|_* < 3\varepsilon$, da cui $f = 0$. Grazie al **Corollario 2.2.2**, ne viene che $\mathcal{L}$ è densa in E. ■

$\boxed{\textbf{Corollario}}$ **2.9.1** *$(L^\infty(\Omega))^*$ (risp., $(\ell^\infty)^*$) non è isometricamente isomorfo a $L^1(\Omega)$ (risp., a ℓ^1).* ■

$\boxed{\textbf{Corollario}}$ **2.9.2** *Sia E uno spazio di* Banach riflessivo*; allora E è separabile se e solo se E^* è separabile.*

Dim.: se E è separabile, lo è $E^{**} = \mathfrak{J}(E)$, quindi, per la Proposizione precedente, anche E^*. ∎

Osserviamo (omettendo per semplicità la dimostrazione) che, se E ha dimensione infinita, lo spazio $(E^*; \sigma(E^*, E))$ *non è mai* metrizzabile. Vale tuttavia il seguente risultato:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2.9.2** *Lo spazio di* Banach *E è separabile se e soltanto se lo spazio* LCS $(\overline{\Sigma}_*; \overline{\Sigma}_* \cap \sigma(E^*, E))$ *(dove $\overline{\Sigma}_* := \{f \in E^* \mid \|f\|_* \leq 1\}$) è metrizzabile.*

Dim.: sia E separabile, e sia $\{x_n\}$ una successione densa in $\overline{\Sigma} := \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ (si ricordi la **Proposizione 1.8.1**); per ogni $f, g \in \overline{\Sigma}_*$, poniamo

$$d(f, g) := \sum_n 2^{-n} |\langle f - g, x_n \rangle|.$$

È immediato verificare che d è una metrica su $\overline{\Sigma}_*$; mostriamo che la topologia τ_d da essa indotta coincide su $\overline{\Sigma}_*$ con la topologia $\tau := \overline{\Sigma}_* \cap \sigma(E^*, E)$.

Verifichiamo che $\tau \subset \tau_d$: sia $f_0 \in \overline{\Sigma}_*$, e sia U un intorno di f_0 in τ; esistono allora $\varepsilon > 0$, $y_k \in \overline{\Sigma}$ $(k = 1, \ldots, n)$ (non è limitativo supporre che $\|y_k\| \leq 1$) tali che

$$V := \{f \in \overline{\Sigma}_* \mid |\langle f - f_0, y_k \rangle| < \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, n\} \subset U.$$

Per ogni $k = 1, \ldots, n$, sia n_k tale che $\|y_k - x_{n_k}\| < \varepsilon/4$; sia poi ϱ tale che $2^{n_k} \varrho < \varepsilon/2$, $k = 1, \ldots, n$. Se $f \in \Sigma_*(f_0, \varrho)$, allora

$$2^{-n_k} |\langle f - f_0, x_{n_k} \rangle| \leq d(f, f_0) < \varrho, \quad k = 1, \ldots, n,$$

quindi, per $k = 1, \ldots, n$,

$$|\langle f - f_0, y_k \rangle| \leq |\langle f - f_0, y_k - x_{n_k} \rangle| + |\langle f - f_0, x_{n_k} \rangle| < \varepsilon,$$

e se ne deduce che $U \supset V \supset \Sigma(f_0, \varrho)$, cioè che U è un intorno di f_0 in τ_d.

Verifichiamo che $\tau_d \subset \tau$: dati $f_0 \in \overline{\Sigma}_*$ e $\varrho > 0$, poniamo

$$V(\varepsilon, n) := \{f \in \overline{\Sigma}_* \mid |\langle f - f_0, x_k \rangle| < \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, n\},$$

e mostriamo che è possibile determinare $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ in modo che risulti $V(\varepsilon, n) \subset \Sigma(f_0, \varrho)$. Poiché

$$\begin{aligned} d(f, f_0) &= \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} |\langle f - f_0, x_k \rangle| + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} |\langle f - f_0, x_k \rangle| < \\ &< \varepsilon + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{1-k} = \varepsilon + 2^{1-n}, \end{aligned}$$

è sufficiente scegliere $\varepsilon < \varrho/2$, ed n tale che $2^n > 4/\varrho$.

Supponiamo ora che $(\overline{\Sigma}_*; \tau)$ sia metrizzabile, e mostriamo che E è separabile. Sia $S_n := \{f \in S_* \mid d(f, 0) < n^{-1}\}$, e sia U_n un intorno di 0 nella topologia debole* di E^* con $U_n \subset S_n$. Esisteranno allora

$$\Lambda_n = \{1, \ldots, N_n\}, \quad \{z_k\}_{k \in \Lambda_n} \subset E \quad \{\varepsilon_k > 0\}_{k \in \Lambda_n}$$

tali che $V_n := \{f \in \overline{\Sigma}_* \mid |\langle f, z_k\rangle| < \varepsilon_k, \quad \forall k \in \Lambda_n\} \subset U_n \subset S_n$.

L'insieme $A := \bigcup_n \{z_k\}_{k\in\Lambda_n}$ è numerabile; inoltre, $\bigcap_n V_n \subset \bigcap_n S_n = \{0\}$, quindi se $f \in E^*$ è tale che $\langle f, x\rangle = 0 \;\; \forall x \in A$, si ha $f \in V_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, dunque $f = 0$. Per il **Corollario 2.2.2**, ne viene che span A è denso in E. ∎

Vale anche (ma ci limitiamo ad enunciarlo) l'analogo risultato con i ruoli di E ed E^* scambiati; si ha cioè che

Teorema 2.9.3 *Il duale E^* dello spazio di* BANACH *E è separabile se e solo se lo spazio* LCS *$(\overline{\Sigma}; \overline{\Sigma} \cap \sigma(E, E^*))$ è metrizzabile.*

Vediamo ora qualche conseguenza riguardante la *compattezza sequenziale*; premettiamo la seguente

Osservazione 2.9.1 Ricordiamo che la compattezza non implica, in generale, la compattezza sequenziale. Ad esempio, poniamo $E := \ell^\infty$: per il **Teorema 2.5.4**, in E^* la sfera unitaria chiusa $\overline{\Sigma}_*$ è *compatta* in E^* munito della topologia $\sigma(E^*, E)$); mostriamo che *non è sequenzialmente compatta* nella stessa topologia. Poniamo[45] $\eta^{(n)} := \mathfrak{J}_{\ell^1}\, e^{(n)}$, e mostriamo che da $\{\eta^{(n)}\}$ non si può estrarre nessuna sottosuccessione che converga in $(E^*; \sigma(E^*, E))$. In effetti, fissata $\{\eta^{(n_k)}\} \subset \{\eta^{(n)}\}$, definiamo $\varphi \in E$ ponendo

$$\varphi_n := \begin{cases} (-1)^k & \text{se } \exists k \in \mathbb{N}: \; n = n_k; \\ 0 & \text{se } n \neq n_k, \; \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si ha allora

$${}_{E^*}\langle \eta^{(n_k)}, \varphi\rangle_E =_{\ell^\infty} \langle \varphi, e^{(n_k)}\rangle_{\ell^1} = (-1)^k,$$

quindi $\{\eta^{(n_k)}\}$ non può ammettere limite in $\sigma(E^*, E)$. ∎

Vale però il seguente notevole risultato (che, in particolare, si applica al caso in cui $E^* = L^\infty(A, \mathcal{E}, m)$):

Teorema 2.9.4 *Il duale E^* di uno spazio di* BANACH separabile *E è* localmente *-debolmente compatto per successioni*: se $\{f_n\}$ è una successione limitata in E^*, esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$ che converge nella topologia $\sigma(E^*, E)$.*

Dim.: non è limitativo supporre che $\|f_n\|_* \leq 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Nella topologia debole*, la sfera $\overline{\Sigma}_*$ è compatta (**Teorema 2.5.4**) e metrizzabile (**Teorema 2.9.2**), da cui la tesi. ∎

Inoltre, nel caso di uno spazio *riflessivo* vale la proprietà espressa dal seguente

Teorema 2.9.5 *Ogni spazio di* BANACH riflessivo *è localmente debolmente compatto per successioni: se $\{x_n\}$ è una successione limitata in E, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ che converge*[46] *nella topologia $\sigma(E, E^*)$.*

---

[45] dove gli $\{e^{(n)}\}$ sono i versori in ℓ^1; si noti che $\|\eta^{(n)}\|_{E^*} = \|e^{(n)}\|_{\ell^1} = 1$.
[46] si ricordi la **Proposizione 2.7.4**.

Dim.: poniamo $M := \overline{\text{span}}\{x_n\}$; per la **Proposizione 2.7.3**, M è riflessivo; procedendo come nella dimostrazione del **Teorema 2.9.1**, si vede che M è separabile. Dunque, per il **Corollario 2.9.2**, M^* è separabile; pertanto, per il **Teorema 2.9.2**, $\overline{\Sigma}_{M^{**}}$ è metrizzabile nella topologia $\sigma(M^{**}, M^*)$. Ne viene che $\overline{\Sigma}_M = \overline{\Sigma}_{M^{**}}$ è metrizzabile, e, per il **Teorema 2.5.4**, compatta, nella topologia $\sigma(M, M^*) = \sigma(M^{**}, M^*)$. Esiste quindi una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ che converge in $\sigma(M, M^*)$, e se ne deduce facilmente che $\{x_{n_k}\}$ converge anche in $\sigma(E, E^*)$. ∎

Il **Teorema di** Eberlein-Smulian, che per brevità non dimostriamo, afferma che il Teorema precedente si può invertire: ogni spazio di Banach che sia localmente debolmente compatto per successioni è uno spazio riflessivo.

Il problema di minimizzare la distanza di un punto da un convesso chiuso e non vuoto, già esaminato nel **Paragrafo 1.5**, ha soluzione nell'ambito degli spazi *riflessivi*; più precisamente, si ha il seguente risultato:

Proposizione 2.9.3 *Siano E uno spazio di* Banach riflessivo, *K un convesso chiuso e non vuoto di E. Per ogni $x \in E$, esiste in K almeno un punto k di minima distanza da x:*

$$\exists k \in K : \ \|x - k\| = d(x, K) := \inf_{y \in K} \ \|x - y\|.$$

Tale punto è unico *se E è* strettamente convesso.

Dim.: posto $d := d(x, K)$, sia $\{k_n\} \subset K$ una successione minimizzante:

$$k_n \in K; \quad d \leq \|x - k_n\| < d + \tfrac{1}{n}.$$

La successione $\{k_n\}$ è *limitata*, dato che

$$\|k_n\| \leq \|k_n - x\| + \|x\| < d + \tfrac{1}{n} + \|x\| \leq d + 1 + \|x\|;$$

poiché E è riflessivo, si può estrarne una sottosuccessione k_{n_i} debolmente convergente ad un punto k (**Teorema 2.9.5**). Per la coincidenza tra convessi fortemente e debolmente chiusi (**Proposizione 2.5.3**), si ha che $k \in K$; inoltre, dal **Corollario 2.3.2** si ricava che

$$d \leq \|x - k\| \leq \liminf_i \ \|x - k_{n_i}\| = d,$$

quindi k è un punto in K tale che $\|x - k\| = d(x, K)$.

Sia ora $k' \in K$ un altro punto tale che $\|x - k'\| = d > 0$ (se $d = 0$, è ovvio che $k = k' = x$), e poniamo $z := (x - k)/d$, $z' := (x - k')/d$. Dato che $\|z\| = \|z'\| = 1$, se E è *strettamente convesso* si deve avere

$$1 > \|(z + z')/2\| = d^{-1} \|x - ((k + k')/2)\| \geq 1$$

(dato che $((k + k')/2) \in K$), assurdo. ∎

Dimostriamo ora il **Teorema di** Schur:

Teorema 2.9.6 *In ℓ^1, $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow x_n \to x$.*

Dim.: definiamo intanto, $\forall f, g \in \overline{\Sigma}_\infty := \{f \in \ell^\infty \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$,

$$d(f, g) := \sum_k 2^{-k} |f_k - g_k|.$$

È immediato verificare che d è una metrica su $\overline{\Sigma}_\infty$, e che lo spazio metrico $(\overline{\Sigma}_\infty; d)$ è *completo*: se $\{f^{(n)}\}$ è una successione di Cauchy in $(\overline{\Sigma}_\infty; d)$, per ogni *k fissato* si ha infatti che $|f_k^{(n+r)} - f_k^{(n)}| \leq 2^k\, d(f^{(n+r)}, f^{(n)})$, quindi la successione *numerica* $\{f_k^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è anch'essa di CAUCHY. Detto f_k il suo limite, da $|f_k^{(n)}| \leq \|f^{(n)}\|_\infty \leq 1$ si ha che $|f_k| \leq 1$, quindi $f := \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \overline{\Sigma}_\infty$. Mostriamo che $\lim_n d(f^{(n)}, f) = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia N tale che $\sum_{k=N+1}^{+\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon/2$, e sia $\overline{n}$ tale che $\forall n > \overline{n}$ risulti $\sum_{k=1}^{N} 2^{-k}\,|f_k^{(n)} - f_k| < \varepsilon/2$; si ha allora che, $\forall n > \overline{n}$,

$$\begin{aligned} d(f^{(n)}, f) &= \sum_{k=1}^{N} 2^{-k}\,|f_k^{(n)} - f_k| + \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2^{-k}\,|f_k^{(n)} - f_k| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2^{-k+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

quindi $d(f^{(n)}, f) \to 0$.

Sia ora $\{x^{(n)}\} \subset \ell^1$ tale che $w\text{-}\lim_n x^{(n)} = x$, e mostriamo che allora si ha $s\text{-}\lim_n x^{(n)} = x$; sostituendo eventualmente $x^{(n)}$ con $x^{(n)} - x$, basta verificare che se $x^{(n)} \rightharpoonup 0$ allora $x^{(n)} \to 0$. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, poniamo, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$F_k = F_k(\varepsilon) := \{f \in S \mid |\langle f, x^{(n)}\rangle| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq k\}.$$

Mostriamo che F_k è chiuso in $(\overline{\Sigma}_\infty; d)$. Sia $\{f^{(h)}\} \subset F_k$ una successione tale che risulti $\lim_h d(f^{(h)}, f) = 0$, cosicché, in particolare, $\lim_h f_k^{(h)} = f_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Poiché $\|f^{(h)}\|_\infty \leq 1$, per il **Teorema 2.9.4** esiste una sottosuccessione $\{f^{(h_r)}\}$ di $\{f^{(h)}\}$ con $w^*\text{-}\lim_r f^{(h_r)} = g$; questo implica, per ogni k fissato, che $\lim_r \langle f^{(h_r)}, e^{(k)}\rangle = \lim_r f_k^{(h_r)} = \langle g, e^{(k)}\rangle = g_k$; di conseguenza, risulta $g = f$. Dal momento che, fissato $n \geq k$, si ha $|\langle f^{(h_r)}, x^{(n)}\rangle| \leq \varepsilon \quad \forall r$, risulta anche $|\langle f, x^{(n)}\rangle| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq k$, cioè $f \in F_k$, dunque F_k è chiuso in $(\overline{\Sigma}_\infty; d)$.

Poiché $w\text{-}\lim_n x^{(n)} = 0$, $\forall \varphi \in \overline{\Sigma}_\infty\ \exists \overline{n} :\ |\langle \varphi, x^{(n)}\rangle| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \overline{n}$, cioè $\varphi \in F_{\overline{n}}$: dunque $\overline{\Sigma}_\infty = \bigcup_k F_k$. Per il Lemma di BAIRE, $\exists k_0 :\ \operatorname{int} F_{k_0} \neq \emptyset$; cioè,

$$\exists (k_0 \in \mathbb{N},\ \psi \in F_{k_0},\ \varrho_0 > 0) :\ \textit{se } \|f\|_\infty \leq 1 \text{ e } d(\psi, f) \leq \varrho_0,\ \textit{allora } f \in F_{k_0}.$$

Sia N tale che $2^{-N+1} < \varrho_0$; data $f \in \overline{\Sigma}_\infty$, scriviamo $f = f' + f''$, dove

$$f' := \sum_{k=1}^{N} (f_k - \psi_k) e^{(k)}; \qquad f'' := \sum_{k=1}^{N} \psi_k e^{(k)} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} f_k e^{(k)}.$$

Si ha evidentemente $f'' \in \overline{\Sigma}_\infty$ (infatti, $f_k'' = \psi_k$ se $k \leq N$, mentre $f_k'' = f_k$ se $k > N$); anzi, poiché $d(f'', \psi) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2^{-k}\,|f_k - \psi_k| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} 2^{-k+1} \leq \varrho_0$, ne viene che $f'' \in F_{k_0}$, dunque $|\langle f'', x^{(n)}\rangle| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq k_0$.

D'altra parte, $|\langle f', x^{(n)}\rangle| \leq 2\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)}|$, e $\lim_n \sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)}| = 0$, quindi $\exists \overline{n}$ tale che $\forall n \geq \overline{n}$, $\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)}| \leq \varepsilon$. Dunque, $\forall n \geq n^* := \max\{k_0; \overline{n}\}$ si ha $|\langle f, x^{(n)}\rangle| \leq 3\varepsilon$; poiché tale disuguaglianza vale $\forall f \in \overline{\Sigma}_\infty$, si ha $\|x^{(n)}\|_1 = \|\mathfrak{J}_{\ell^1} x^{(n)}\|_{(\ell^1)^{**}} = \sup_{f\in\overline{\Sigma}_\infty} |\langle \mathfrak{J}_{\ell^1} x^{(n)}, f\rangle| = \sup_{f\in\overline{\Sigma}_\infty} |\langle f, x^{(n)}\rangle| \leq 3\varepsilon \quad \forall n \geq n^*$; quindi, $s\text{-}\lim_n x^{(n)} = 0$. ∎

Si ha peraltro il seguente risultato:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.9.4** *Sia E uno spazio di* BANACH *con* $\dim E = \infty$. *Se E^* è separabile, oppure E è riflessivo, esiste una successione $\{x_n\}$ in E tale che $\|x_n\| = 1$ e $w\text{-}\lim_n x_n = 0$.*

Dim.: si è visto nel **Corollario 2.5.1** che la chiusura nella topologia debole dell'insieme $A := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ coincide con $\overline{\Sigma}$; in particolare, 0 appartiene a tale chiusura. Se E^* è separabile, $\overline{\Sigma}$ è metrizzabile in $\sigma(E, E^*)$ (**Teorema 2.9.3**): dunque, esiste una successione $\{x_n\} \subset A$ tale che $x_n \rightharpoonup 0$.

Il caso in cui E sia riflessivo si riconduce a quello appena esaminato: sia infatti E_0 un sottospazio chiuso e separabile di E, con $\dim E_0 = \infty$; per la **Proposizione 2.7.3**, E_0 è riflessivo, quindi (**Corollario 2.9.2**) anche E_0^* è separabile. Si è così ricondotti al caso esaminato prima. ∎

2.10 La teoria di Riesz-Fredholm.

È chiaro che le definizioni di *operatore a rango finito, operatore compatto e operatore completamente continuo* (**Definizione 1.12.1**) si estendono senza modifiche al caso di un operatore $T \in \mathcal{L}(E, F)$, dove E, F sono spazi di Banach. Si osservi che *non vale* però, in generale, l'equivalenza tra operatori compatti e completamente continui dimostrata, nel caso hilbertiano, nella **Proposizione 1.12.1**: ad esempio, il Teorema di Schur può essere riformulato dicendo che l'identità in ℓ^1 *è completamente continua*, mentre sappiamo che *non è compatta*, per il **Teorema 2.5.3**.

Si ha comunque la seguente implicazione:

Proposizione 2.10.1 *Se E, F sono spazi di* Banach, *e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ è compatto, allora è completamente continuo.*

Dim.:[47] supponiamo che $x_n \rightharpoonup x$ in E. Si ha allora $T\,x_n \rightharpoonup T\,x$ (**Proposizione 2.5.4**), e $\|x_n\|$, $\|T\,x_n\| \le c$ per un'opportuna costante c (**Corollario 2.3.2**). Per assurdo, supponiamo che $T\,x_n \not\to T\,x$; allora $\exists \varepsilon_0 > 0$ ed $\exists \{x_{n_k}\}$ estratta da $\{x_n\}$ tale che $\|T\,x_{n_k} - T\,x\| \ge \varepsilon_0$. Dato che $\{T\,x_{n_k}\}$ è relativamente compatto nello spazio metrico F, è possibile estrarre da $\{x_{n_k}\}$ una sottosuccessione $\{x'_h\}$, con $x'_h := x_{n_{k_h}}$, tale che $\{T\,x'_h\}$ converga fortemente ad $y \in F$. Ma allora si ha anche $T\,x'_h \rightharpoonup y$, e, poiché $\{T\,x'_h\}$ è estratta da $\{T\,x_{n_k}\}$ che tende debolmente a Tx, per l'unicità del limite ne viene che $y = T\,x$. Questo però è assurdo, perché ne risulterebbe che $T\,x'_{n_k} \to T\,x$, mentre $\|T\,x'_{n_k} - T\,x\| \ge \varepsilon_0$. ∎

Rileviamo esplicitamente che la non equivalenza tra compattezza e completa continuità per un operatore in $\mathcal{L}(E, F)$ è legata esclusivamente alle proprietà dello spazio E: lo spazio F può anche essere uno spazio di Hilbert, come mostra la seguente variante dell'esempio dato all'inizio (identità in ℓ^1).

Consideriamo gli spazi ℓ^1, ℓ^2, con le norme abituali $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$. Se $y \in \ell^1$ ha norma ≤ 1, si ha $|y_n| \le 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, quindi $|y_n|^2 \le |y_n|$, dunque $\|y\|_2 \le \|y\|_1^{1/2} \le 1$; dato che ogni $x \in \ell^1$ si scrive nella forma $x = \lambda y$ con $\|y\|_1 = 1$, ne viene che $\|x\|_2 = |\lambda|\,\|y\|_2 \le |\lambda| = \|x\|_1$. Di conseguenza, l'immersione I di ℓ^1 in ℓ^2 è continua, con $\|I\| = 1$ (dato che $\|Ie^{(n)}\|_2 = 1 = \|e^{(n)}\|_1$). Per il Teorema di Schur, I è completamente continua (se $x_n \rightharpoonup 0$ in ℓ^1, si ha $x_n \to 0$ in ℓ^1, quindi $x_n \to 0$ in ℓ^2); d'altra parte, l'immagine $\{Ie^{(n)}\}$ dei versori non è relativamente compatta in ℓ^2.

A questo proposito, ci limitiamo ad enunciare il seguente risultato:

[47] si veda la dimostrazione della **Proposizione 1.12.1**.

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.10.2** *Sia $T \in \mathcal{L}(E,F)$; se è verificata una delle condizioni*

$$i)\ E^* \text{ è separabile;} \quad \text{oppure:} \quad ii)\ E \text{ è riflessivo,}$$

allora T è compatto se e solo se è completamente continuo. ■

Osserviamo inoltre che il **Corollario 1.12.6** *non si estende* al caso degli operatori compatti tra due spazi di Banach: gli operatori a rango finito *possono non essere densi*, nella topologia uniforme, in $\mathcal{K}(E,F)$.

Vale invece il seguente analogo della **Proposizione 1.12.2**, *i*):

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.10.3** *Siano E_1, E_2, E_3 spazi di* Banach. *Se T è in $\mathcal{K}(E_1,E_2)$ e T_1 è in $\mathcal{L}(E_2,E_3)$, allora $T_1 \circ T \in \mathcal{K}(E_1,E_3)$; inoltre, se $T_2 \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$ e $T \in \mathcal{K}(E_2,E_3)$, allora $T \circ T_2 \in \mathcal{K}(E_1,E_3)$.*

Dim.: nel primo caso, se A è limitato in E_1, $T(A)$ è relativamente compatto in E_2, quindi $T_1(T(A))$ è relativamente compatto in E_3; nel secondo caso, $T_2(A)$ è limitato in E_2, quindi $T(T_2(A))$ è relativamente compatto in E_3. ■

Dimostriamo il **Teorema di** Schauder:

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ **2.10.1** *$T \in \mathcal{K}(E,F)$ se e solo se $T^* \in \mathcal{K}(F^*,E^*)$.*

Dim.: siano $T \in \mathcal{K}(E,F)$ e $\{g_n\} \subset \Sigma_{F^*}(0,1)$. Indichiamo con A l'insieme (compatto in F) $A := \overline{T(\Sigma_E(0,1))}$, e con $\mathcal{A}$ il sottoinsieme di $C^0(A)$ così definito:

$$\mathcal{A} := \{\varphi_n \mid \varphi_n(y) :=_{F^*} \langle g_n, y\rangle_F \quad \forall y \in A \quad (n \in \mathbb{N})\}.$$

In $C^0(A)$, l'insieme $\mathcal{A}$ è *limitato*, dato che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\|\varphi_n\|_{C^0(A)} = \sup_{x\in\Sigma_E} |_{F^*}\langle g_n, Tx\rangle_F| \le \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)},$$

ed *equicontinuo*: vale infatti la disuguaglianza

$$|\varphi_n(y) - \varphi_n(\tilde{y})| = |_{F^*}\langle g_n, y-\tilde{y}\rangle_F| \le \|y-\tilde{y}\|_F.$$

Per il Teorema di Ascoli, è possibile estrarre da $\{\varphi_n\}$ una sottosuccessione $\{\varphi_{n_k}\}$ tale che $\varphi_{n_k} \to \varphi$ in $C^0(A)$. In particolare, $\{\varphi_{n_k}\}$ verifica la condizione di Cauchy in $C^0(A)$, cioè $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall h,k > n_\varepsilon$ risulti

$$\sup_{x\in\Sigma_E} |_{F^*}\langle g_{n_h}, Tx\rangle_F -_{F^*} \langle g_{n_k}, Tx\rangle_F| < \varepsilon;$$

ne viene che $\|T^*g_{n_h} - T^*g_{n_k}\|_{E^*} < \varepsilon$, dunque che $\{T^*g_{n_k}\}$ converge in E^*. Quindi $T^*(\Sigma_{F^*})$ è relativamente compatto in E^*, cioè $T^* \in \mathcal{K}(F^*,E^*)$.

Supponiamo ora che $T^* \in \mathcal{K}(F^*,E^*)$; per la prima parte della dimostrazione, $T^{**} \in \mathcal{K}(E^{**},F^{**})$. Dato che $\mathfrak{J}_E(\Sigma_E) \subset \Sigma_{E^{**}}$, l'insieme $T^{**}(\mathfrak{J}_E(\Sigma_E))$ è relativamente compatto in F^{**}. Ma, per la **Proposizione 2.7.1**, tale insieme coincide con $\mathfrak{J}_F(T(\Sigma_E))$; poiché $\mathfrak{J}_F$ è un'isometria, $T(\Sigma_E)$ è relativamente compatto in F, il che dimostra la compattezza di T da E in F. ■

La teoria di Riesz-Fredholm riguarda equazioni della forma $x - Kx = y$, dove K è un operatore *compatto* nello spazio di Banach E, y è assegnato in E, e la soluzione x è pure cercata in E; generalizza quindi lo studio di equazioni integrali quali, *ad esempio*,

data $y \in L^2(\Omega)$, cercare $x \in L^2(\Omega)$ tale che risulti

$$x(t) - \int_\Omega k(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau = y(t), \quad \text{q.o. in } \Omega,$$

dove k è un assegnato nucleo integrale in $L^2(\Omega \times \Omega)$. i Nel seguito, riterremo fissati uno spazio di Banach E ed un operatore K in $\mathcal{K}(E)$; porremo poi $T := I - K$, dove I è l'operatore identità su E.

Vale il seguente risultato (**primo e secondo Teorema di** Riesz):

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.10.4** *Se $K \in \mathcal{K}(E)$ e $T = I - K$, allora*

i) $\dim N(T) < \infty$*;*

ii) $R(T)$ *è chiuso.*

Dim.: *i)*: $N := N(T)$ è un sottospazio chiuso di E, quindi, con la norma indotta da quella di E, è uno spazio di Banach. Si noti che, per definizione, $x \in N$ se e solo se $x = Kx$; in particolare, N è *invariante*[48] per K, dunque la restrizione di K ad N è (ben definita ed) in $\mathcal{K}(N)$, come è evidente. Ma tale restrizione coincide con l'*identità* su N; ne segue, per il **Teorema 2.5.3**, che N ha dimensione finita.

ii): Sia $\{y_n\} \subset R(T)$ tale che $y_n \to y \in E$: vogliamo mostrare che $y \in R(T)$. Sia $\{x_n\}$ tale che $y_n = Tx_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$; posto $d_n := d(x_n, N) = \inf_{\xi \in N} \|x_n - \xi\|$, mostriamo intanto che $\{d_n\}$ è *limitata*. Fissiamo $\{\eta_n\} \subset N$ tale che, posto $z_n := x_n - \eta_n$, si abbia ad esempio $\|z_n\| < 2d_n$; è evidente che

$$Tz_n = Tx_n - T\eta_n = Tx_n = y_n.$$

Per assurdo, supponiamo che $\{d_n\}$ *non* sia limitata; poiché $\{y_n\}$ è convergente, quindi limitata, posto $w_n := z_n/d_n$ si ha $\|w_n\| < 2$, e $w_n - Kw_n = T(z_n/d_n) = y_n/d_n \to 0$. Per la compattezza di K, $\{w_n\}$ ha una sottosuccessione $\{w_{n_k}\}$ tale che $Kw_{n_k} \to z \in E$; allora anche $\{w_{n_k}\}$ converge a z (perché $w_{n_k} = (w_{n_k} - Kw_{n_k}) + Kw_{n_k}$), cosicché $Tw_{n_k} \to 0 = Tz$, cioè $z \in N$. Ma allora, dato che si ha $d_n \leq \|z_n - \xi\| \quad \forall \xi \in N$, quindi $\|w_n - \xi\| \geq 1 \quad \forall \xi \in N$, in particolare si deve avere $\|w_n - z\| \geq 1$; il che è assurdo, perché $w_{n_k} \to z$.

Possiamo ora concludere la dimostrazione. Sappiamo che $z_n - Kz_n = Tz_n = y_n \to y$; dato che $\|z_n\| < d_n$, da quanto appena dimostrato risulta che $\{z_n\}$ è limitata, quindi ammette una sottosuccessione $\{z_{n_k}\}$ tale che $Kz_{n_k} \to w$. Allora si ha anche $z_{n_k} = Tz_{n_k} + Kz_{n_k} \to y + w$, quindi $Tz_{n_k} \to T(y+w)$, e, per l'unicità del limite, $y = T(y + w) \in R(T)$. ■

Poniamo la

$\boxed{\textbf{Definizione}}$ **2.10.1** *$T \in \mathcal{L}(E)$ è detto* **operatore ad indice** *se $R(T)$* è chiuso*, e almeno uno dei numeri* $\dim N(T)$, $\operatorname{codim} R(T)$ *è* finito. *In questo caso, l'***indice** *di T è*

$$\operatorname{ind} T := \dim N(T) - \operatorname{codim} R(T). \ ■$$

Possiamo dimostrare le seguenti proprietà:

$\boxed{\textbf{Proposizione}}$ **2.10.5** *Sia K un operatore compatto nello spazio di* Banach *E, e poniamo $T := I - K$.*

i) T è un operatore ad indice, con indice zero; in particolare, T è suriettivo se e solo se è iniettivo[49]*; in tal caso, $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$;*

---

[48] cioè, $K(N) \subset N$; si ricordi la **Definizione 1.10.1**.

[49] proprietà che *non vale* per un generico operatore lineare e continuo, neppure in uno spazio di Hilbert: si ricordino gli operatori $\mathfrak{T}_s$, $\mathfrak{T}_d$ definiti nell'Esempio **3** del § **1.9**.

ii) $\dim N(T) = \dim N(T^*)$.

Dim.: *i*): per assurdo, supponiamo intanto T iniettivo ma non suriettivo, cosicché $E_1 := T(E)$ è un sottospazio *chiuso* (**Proposizione 2.10.4**, *ii*)) e *proprio* di E, che è evidentemente *invariante* per T, quindi per K; dunque la restrizione di K ad E_1 è un operatore compatto (la verifica è immediata) in E_1. Indicando ancora con K, T le restrizioni ad E_1 di K, T, si ha che $E_2 := T(E_1)$ è un sottospazio chiuso di E_1, invariante per T. Inoltre, se $y \in E \setminus E_1$ si ha, per l'iniettività di T, che $Ty \in E_1 \setminus E_2$, quindi $E_2 = T(E_1) = T^2(E)$ è a sua volta un sottospazio chiuso e proprio di $E_1 = T(E)$. Se si definisce, $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n := T^n(E)$, si ottiene una successione $\{E_n\}$ di sottospazi di E tali che E_{n+1} è un sottospazio *chiuso* e *proprio* di E_n (*invariante* per K, quindi tale che la restrizione di K ad E_n è compatta). Per il Lemma di Riesz, esiste una successione $\{x_n\} \subset E$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in E_n; \quad \|x_n\| = 1; \quad d(x_n, E_{n+1}) \geq \tfrac{1}{2}.$$

Per tale successione, risulta $Kx_n - Kx_m = x_n - x_m + Tx_n - Tx_m$; se, ad esempio, $m < n$, si ha $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m \subset \ldots \subset E$, quindi $x_n + Tx_m - Tx_n$ è in E_{m+1}, dunque $\|Kx_n - Kx_m\| = \|(x_n + Tx_m - Tx_n) - x_m\| \geq d(x_m, E_{m+1}) \geq \frac{1}{2}$. Ciò però contraddice la compattezza di K; pertanto, T, se è iniettivo, deve essere suriettivo.

Mostriamo ora che se T è suriettivo, allora è iniettivo. Per il **Corollario 2.6.1**, *i*), si ha $N(T^*) = R(T)^\perp = \{0\}$. Poiché $T^* = I^* - K^*$, e K^* è compatto in E^*, per la prima parte della dimostrazione si ha che T^* è suriettivo. Di conseguenza, ancora per il **Corollario 2.6.1**, *i*), $N(T) = R(T^*)^\perp = \{0\}$, cioè T è iniettivo.

La continuità di T^{-1} è data dal **Corollario 2.3.5**.

Poiché, $\forall K' \in \mathcal{K}(E)$, l'operatore $T' := I - K'$ ha nucleo di dimensione finita, è ad indice (**Proposizione 2.10.4**, *ii*)); mostriamo che l'indice è nullo ragionando per induzione su $n := \dim N(T')$. Come abbiamo appena mostrato, la proprietà è vera per $n = 0$. Supponiamo che $\operatorname{ind} T' = 0$ se $\dim N(T') < n$, e sia $K \in \mathcal{K}(E)$ tale che $T := I - K$ abbia nucleo di dimensione $n (> 0)$, cosicché $R(T) \neq E$, quindi $\exists y_0 \in E \setminus R(T)$ (da cui, in particolare, $y_0 \neq 0$). Per la **Proposizione 2.6.10**, esiste un sottospazio chiuso $E_1 \subset E$ tale che $E = N(T) \oplus E_1$. Sia $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base per $N(T)$: ogni $x \in E$ si scrive allora, in modo unico, nella forma $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + y$, con $y \in E_1$; definiamo $T' \in \mathcal{L}(E)$ ponendo

$$T'x := \lambda_1 y_0 + Tx = \lambda_1 y_0 + Ty.$$

È chiaro che $\{x_2, \ldots, x_n\} \subset N(T')$; inoltre, se $T'x = 0$ si ha che $\lambda_1 = 0$ (perché $y_0 \neq 0$) e $y \in N(T)$, quindi $x = \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$. Allora $N(T') = \operatorname{span}\{x_2, \ldots, x_n\}$ ha dimensione $n - 1$; d'altra parte, si ha $T'x - Tx = \lambda_1 y_0$, quindi $S := T' - T$ è a rango uno, dunque compatto, e $T' = T + S = I - (K - S)$ con $(K - S)$ in $\mathcal{K}(E)$; quindi, per l'ipotesi di induzione, $\operatorname{codim} R(T') = n - 1$. Poiché $R(T')$ è chiuso (**Proposizione 2.6.10**), ammette un supplementare topologico V' di dimensione $n - 1$ (**Proposizione 2.6.9**): $E = R(T') \oplus V'$. Ma $R(T') = \{\lambda y_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \oplus R(T)$, dunque $E = R(T) \oplus (\{\lambda y_0\} \oplus V') = R(T) \oplus V$, con $V = \{\lambda y_0\} \oplus V'$, quindi $\operatorname{codim} R(T) = \dim V = 1 + \dim V' = n$.

ii): poniamo $n := \dim N(T)$ e $n^* := \dim N(T^*)$ (per la **Proposizione 2.10.4**, *i*), si ha che $n, n^* < +\infty$). Cominciamo a mostrare che non può essere $n < n^*$. Poiché $N(T)$ ha dimensione finita, per la **Proposizione 2.6.10**, *i*), $N(T)$ ha un supplementare topologico V in E; inoltre (**Proposizione 2.6.8**, *ii*)), il proiettore P su $N(T)$ è in $\mathcal{L}(E)$. Analogamente, $R(T) = \overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$ ha codimensione finita n^* (**Proposizione 2.6.4**, *ii*)), quindi $R(T)$ ha un supplementare topologico W, con $\dim W = n^*$. Se $n < n^*$, esiste un'applicazione lineare iniettiva ma non suriettiva $\Lambda : N(T) \to W$. Poniamo $\widetilde{K} := K + \Lambda \circ P$; dato che $\Lambda \circ P$ ha rango finito, anche $\widetilde{K} \in \mathcal{K}(E)$. Inoltre, $I - \widetilde{K}$ è *iniettivo*: se $x \in E$ verifica $0 = x - \widetilde{K}\,x = Tx - \Lambda(Px)$, si ha $Tx = \Lambda(Px) \in R(T) \cap W = \{0\}$, da cui $x \in N(T)$ e $Px = x$, dunque $\Lambda x = \Lambda(Px) = 0$; dato che Λ è iniettivo, ne viene che $x = 0$. Per la *i*), $I - \widetilde{K}$, essendo iniettivo, è suriettivo; ma questo è assurdo, dato che $R(\Lambda) \neq W$: se infatti $y \in W \setminus R(\Lambda)$, non esiste alcun $x \in E$ tale che $x - \widetilde{K}\,x = Tx - \Lambda(Px) = y$ (altrimenti, sarebbe $Tx = y + \Lambda(Px) \in R(T) \cap W = \{0\}$, quindi $y \in \Lambda(P(-x)) \in R(\Lambda)$).

Risulta quindi $n \geq n^*$. Applicando questo risultato a K^*, si ottiene che $\dim N(I^{**} - K^{**}) \leq \dim N(I^* - K^*) \leq \dim N(I - K) = n$; poiché però si ha che $N(I^{**} - K^{**}) \supset \mathfrak{J}(N(I-K))$ ($\mathfrak{J}$ = isomorfismo canonico di E in E^{**}), e $\mathfrak{J}$ è un'isometria, si ha $\dim N(I^{**} - K^{**}) \geq \dim N(I-K)$, da cui $\dim N(I^{**} - K^{**}) = \dim N(I^* - K^*) = n^* = \dim N(I - K) = n$. ∎

Possiamo riformulare i risultati precedenti nella seguente forma (**Teorema dell'alternativa** di Fredholm):

Teorema 2.10.2 *Sia K un operatore compatto nello spazio di* Banach *E, e si consideri l'equazione (nell'incognita x)*

$$x - Kx = y \qquad (y \text{ assegnato in } E); \tag{2.45}$$

vale la seguente alternativa:

i) o l'equazione aggiunta omogenea

$$f - K^* f = 0 \tag{2.46}$$

ha in E^* la sola soluzione $f = 0$, ed allora la (2.45) *ha, per* ogni *fissato $y \in E$, una ed una sola soluzione $x \in E$;*

ii) oppure la (2.46) *ammette soluzioni non nulle. In questo caso, il numero n di soluzioni linearmente indipendenti della* (2.46) *è* finito*: precisamente, è uguale al numero di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $x - Kx = 0$; inoltre, se $f_1, \ldots, f_n$ sono soluzioni linearmente indipendenti della* (2.46)*, condizione necessaria e sufficiente perché la* (2.45) *sia risolubile è che y verifichi le n* condizioni di compatibilità

$$\langle f_k, y \rangle = 0, \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Infine, se x_0 è una (fissata) soluzione della (2.45)*, le soluzioni della stessa equazione sono tutti e soli i vettori della forma*

$$x = x_0 + \textstyle\sum_{k=1}^n \alpha_k\, x_k,$$

dove $x_1, \ldots, x_n$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $x - Kx = 0$, ed $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono numeri reali. ∎

Osservazione **2.10.1** Quando K, in particolare, è un operatore compatto in uno spazio di HILBERT H, il Teorema dell'alternativa ammette una formulazione più sintetica: come è facile verificare, si può infatti tradurre (con l'usuale identificazione tra H ed il suo duale) nelle relazioni

$$\dim N(T^*) = \dim N(T) < \infty; \qquad H = R(T) \oplus N(T^*). \blacksquare$$

Diamo ora qualche cenno di teoria spettrale. Nel seguito, riterremo fissato uno spazio di BANACH E che converrà scegliere sul campo dei numeri *complessi.*

Premettiamo qualche proprietà valida, più in generale, in $\mathcal{L}(E)$. È intanto evidente che le **Proposizioni 1.10.2-1.10.3** si estendono senza modifiche al caso di uno spazio di BANACH. Si ha inoltre che l'insieme degli operatori invertibili in E è *aperto* in $\mathcal{L}(E)$:

Proposizione **2.10.6** *Sia $T \in \mathcal{L}(E)$ un operatore invertibile; se T_1 in $\mathcal{L}(E)$ è tale che $\|T_1\|_{\mathcal{L}(E)} < \|T^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(E)}$, anche $T - T_1$ è invertibile.*

Dim.: supponiamo dapprima che $T = I$, e sia dato $T_1 \in \mathcal{L}(E)$ con $\|T_1\| < 1$. Si vede facilmente che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} T_1^n := I + \sum_{n=1}^{+\infty} T^n$ converge in $\mathcal{L}(E)$: posto $S_n := \sum_{j=0}^{n} T_1^j$, si ha infatti

$$\|S_{n+k} - S_n\| = \| \textstyle\sum_{j=n+1}^{n+k} T_1^j\| \le \sum_{j=n+1}^{n+k} \|T_1\|^j,$$

e ne viene che $\{S_n\}$ è una successione di CAUCHY rispetto alla topologia uniforme. Poiché (**Proposizione 1.9.4**) $\mathcal{L}(E)$ è *completo*, S_n converge ad un operatore $S \in \mathcal{L}(E)$, ed è immediato verificare che

$$T_1\, S = T_1 + \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} T_1^n = \sum_{n=1}^{+\infty} T_1^n = S - I,$$

cosicché $(I - T_1)S = I$; analogamente, si controlla che $S(I - T_1) = I$. Quindi (**Proposizione 1.10.2**) $I - T_1$ è invertibile, con inverso S.

Veniamo al caso generale: se T è invertibile e $T_1 \in \mathcal{L}(E)$ verifica $\|T_1\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, poiché $T^{-1}\,T_1 \in \mathcal{L}(E)$ e $\|T^{-1}\,T_1\| < 1$, da quanto precede risulta che $I - T^{-1}\,T_1$ è invertibile. Dato che $T - T_1 = T(I - T^{-1}\,T_1)$, anche $T - T_1$ è invertibile, con

$$(T - T_1)^{-1} = (I - T^{-1}\,T_1)^{-1}\,T^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (T^{-1}\,T_1)^n\,T^{-1}. \blacksquare \tag{2.47}$$

Poniamo la

Definizione **2.10.2** *L'***insieme risolvente** *$\varrho(T)$ di $T \in \mathcal{L}(E)$ è*

$$\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T \quad \text{è invertibile}\}.$$

Per ogni $\lambda \in \varrho(T)$, l'operatore $R_T(\lambda) := (\lambda I - T)^{-1}$ si dice **risolvente** *di T.*

Lo **spettro** *$\sigma(T)$ di T è il complementare di $\varrho(T)$ in $\mathbb{C}$; lo* **spettro puntuale** *$\sigma_p(T)$ è l'insieme degli autovalori di T in $\mathbb{C}$.* $\blacksquare$

Possiamo allora dimostrare il seguente risultato:

Corollario **2.10.1** *Sia $T \in \mathcal{L}(E)$; allora: $\varrho(T)$ è un sottoinsieme* aperto *di $\mathbb{C}$ (quindi, lo spettro $\sigma(T)$ è* chiuso *in $\mathbb{C}$); inoltre, per ogni $\lambda_0 \in \varrho(T)$ si ha*

$$R_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_T(\lambda_0))^{n+1} (\lambda_0 - \lambda)^n \quad se \quad |\lambda_0 - \lambda| < \|R_T(\lambda_0)\|^{-1}$$

(in particolare, la serie scritta converge *in $\mathcal{L}(E)$); infine, per ogni $\lambda_0 \in \varrho(T)$, si ha $d(\lambda_0, \sigma(T))) \geq \|(R_T(\lambda_0))\|^{-1}$, dove $d(\lambda_0, \sigma(T))$ è la distanza di λ_0 dallo spettro di T.*

Dim.: sia $\lambda_0 \in \varrho(T)$; applicando la **Proposizione 2.10.6**, con T sostituito da $\lambda_0 I - T$ e T_1 da $(\lambda_0 - \lambda)I$, si ottiene che $\lambda I - T$ è invertibile se $|\lambda_0 - \lambda| < \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|^{-1} = \|R_T(\lambda_0)\|^{-1}$. Quando questa condizione è verificata, per la (2.47) si ha

$$R_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_T(\lambda_0)(\lambda_0 - \lambda))^n R_T(\lambda_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_T(\lambda_0))^{n+1} (\lambda_0 - \lambda)^n.$$

L'ultima affermazione segue subito dalle considerazioni precedenti. ∎

Lemma 2.10.1 *Sia T un operatore lineare su E; autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti. Se T è in $\mathcal{L}(E)$, si ha $\sigma(T) \subset \overline{\Sigma}(0, \|T\|)$.*

Dim.: siano $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ con $\lambda \neq \mu$ e $x, y \in E \setminus \{0\}$ tali che $Tx = \lambda x$ e $Ty = \mu y$. Se risulta $\alpha x + \beta y = 0$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha $0 = T(\alpha x + \beta y) = \alpha\lambda x + \beta\mu y$, ed anche $\alpha\lambda x + \beta\lambda y = 0$, quindi $\beta(\lambda - \mu)y = 0$. Poiché $\lambda \neq \mu$ e $y \neq 0$, deve essere $\beta = 0$; quindi, poiché $x \neq 0$ e $0 = \alpha x + \beta y = \alpha x$, anche $\alpha = 0$.

L'ultima affermazione è evidente, perché se $Tx = \lambda x$ con $x \neq 0$, si ha $|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$. ∎

Nel caso degli operatori compatti, si ha inoltre il seguente risultato

Lemma 2.10.2 *Sia $K \in \mathcal{K}(E)$; per ogni $r > 0$, il numero di autovalori di K con modulo maggiore di r è* finito.

Dim.: fissato $r > 0$, supponiamo per assurdo che $\{\lambda_n\}$ sia una successione di autovalori distinti con $|\lambda_n| > r$, e sia $\{x_n\}$ una corrispondente successione di autovettori: $x_n \neq 0$, e $Kx_n = \lambda_n x_n$. Poniamo $X_n := \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Per il Lemma precedente, X_n è *strettamente* contenuto in X_{n+1}; grazie al Lemma di Riesz, $\forall n > 1\ \exists y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in X_n$ tale che

$$\|y_n\| = 1; \quad d(y_n, X_{n-1}) > \tfrac{1}{2}.$$

Dunque si ha

$$Ky_n - \lambda_n y_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_n)\alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_n)\alpha_k x_k \in X_{n-1},$$

cioè $Ky_n = \lambda_n y_n + z_n$, con $z_n \in X_{n-1}$; ne viene che se $n > m$ risulta

$$Ky_n - Ky_m = \lambda_n y_n + (z_n - \lambda_m y_m - z_m) = \lambda_n y_n + y, \text{ con } y \in X_{n-1}.$$

Di conseguenza,

$$\|Ky_n - Ky_m\| \geq |\lambda_n|\, d(y_n, X_{n-1}) > |\lambda_n|/2 > r/2,$$

ma questo è assurdo, perché allora l'insieme $\{Ky_n\}$, che è relativamente compatto, non ammetterebbe nessuna sottosuccessione convergente. ∎

Veniamo ora alla caratterizzazione dello spettro di un operatore *compatto* nello spazio di Banach E:

Teorema **2.10.3** *Sia E uno spazio di* Banach, *e sia $K \in \mathcal{K}(E)$.*

i) Se $\dim E = \infty$, allora $0 \in \sigma(K)$; 0 può essere o no un autovalore di K, ma ogni elemento $\neq 0$ dello spettro è un autovalore:

$$\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}.$$

La molteplicità di ogni autovalore $\neq 0$ è finita.

*ii) $\sigma(K)$ è costituito da un numero finito o da un'*infinità numerabile *di numeri complessi* distinti $\{\lambda_n\}$. *Se i λ_n sono infiniti, la successione $\{\lambda_n\}$ è* infinitesima.

Dim.: *i*): se $0 \in \varrho(K)$, si ha, per la **Proposizione 2.10.3**, che $I = K \circ R_K(0)$ è compatto, quindi (**Teorema 2.5.3**) $\dim E < +\infty$.

Per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, poniamo $S_\lambda := I - \lambda^{-1} K = \lambda^{-1}(\lambda I - K)$. Per la **Proposizione 2.10.5**, *i*), se $N(S_\lambda) = \{0\}$ allora S_λ è invertibile, quindi lo è anche $\lambda I - K$, cioè $\lambda \in \varrho(K)$: ciò mostra che se $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$, necessariamente $\lambda \in \sigma_p(K)$.

Inoltre, se $0 \neq \lambda \in \sigma_p(K)$, la molteplicità di λ è uguale a $\dim N(S_\lambda)$, che è $< +\infty$ per la **Proposizione 2.10.5**, *ii*).

ii): entrambe le affermazioni sono conseguenze immediate del **Lemma 2.10.2**; la prima, perché

$$\sigma(K) \setminus \{0\} = \bigcup_{r>0} \{\lambda \in \sigma(K) \mid |\lambda| \geq r\}.$$

Quanto alla seconda, posto $\overline{\lambda} := \limsup_n |\lambda_n|$, se $\overline{\lambda} > 0$ esiste una sottosuccessione $\{\lambda_{n_k}\}$ di autovalori distinti tale che $|\lambda_{n_k}| > \overline{\lambda}/2$, il che però contraddice il **Lemma 2.10.2**. ∎

Osservazione **2.10.2** Abbiamo già rilevato (**Osservazione 1.12.1**) che, anche in uno spazio di Hilbert, per un operatore compatto K può risultare $\sigma_p(K) = \emptyset$. In tal caso, si ha ovviamente, per il Teorema precedente, *i*), che $\sigma(K) = \{0\}$. In generale, (anche per un operatore compatto non identicamente nullo), *non vale* l'implicazione reciproca : l'operatore K definito in ℓ^2 da $K := \mathfrak{T}_s \circ \mathfrak{A}_1$ verifica

$$K\{x_n\} = \left\{\frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \ldots\right\};$$

è compatto, e $0 \in \sigma_p(K)$, dato che $K e^{(1)} = 0$. Inoltre, K non ha autovalori $\neq 0$ (quindi, $\sigma(K) = \sigma_p(K) = \{0\}$): infatti, se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $x = \{x_n\}$, l'uguaglianza $Kx = \lambda x$ implica, come si vede facilmente, che $\forall n \in \mathbb{N}$ deve essere $x_{n+1} = (n+1)!\lambda^n x_1$. Quindi, o $x_1 = 0$, ma allora $x_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (e x non è un autovettore); oppure $x_1 \neq 0$, ma in questo caso la successione $\{x_n\}$ non è infinitesima, quindi non è in ℓ^2. ∎

Indice analitico