L'integrale di Poisson (trattazione elementare)

Vale la formula

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \pi^{n/2}. \tag{1}$$

Prima di tutto, però, occorre dire che cosa significa l'integrale (1) in una teoria elementare dell'integrazione. Sia, più in generale, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e, ipotesi essenziale, *non negativa*. Allora f è interabile su ogni sottoinsieme $B \subset \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Peano-Jordan (necessariamente limitato), per cui ha senso porre

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \sup_{B\in\mathcal{B}} \int_B f(x)\,dx \tag{2}$$

ove $\mathcal{B}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi $B \subset \mathbb{R}^n$ misurabili. Naturalmente l'estremo superiore può essere anche infinito, ma la cosa non disturba nel seguito. Osserviamo una volta per tutte che l'ipotesi che f sia non negativa fornisce

$$\int_{B'} f(x)\,dx \le \int_{B''} f(x)\,dx \quad \text{se } B', B'' \in \mathcal{B} \text{ verificano } B' \subseteq B''. \tag{3}$$

Sia ora $\{B_k\}$ una successione di elementi di $\mathcal{B}$ con la proprietà seguente:

$$\text{per ogni } B \in \mathcal{B} \text{ esiste } k \text{ tale che } B \subseteq B_k \quad \text{e} \quad B_k \subseteq B_{k+1} \quad \text{per ogni } k. \tag{4}$$

Allora, grazie alla (3), abbiamo che

$$\sup_{B\in\mathcal{B}} \int_B f(x)\,dx = \sup_k \int_{B_k} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{B_k} f(x)\,dx \le \int_{B_{k+1}} f(x)\,dx \quad \text{per ogni } k.$$

Pertanto concludiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \sup_{B\in\mathcal{B}} \int_B f(x)\,dx = \sup_k \int_{B_k} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{B_k} f(x)\,dx. \tag{5}$$

Siccome successioni $\{B_k\}$ verificanti la (4) sono date dalle formule

$$B_k = B_k^n(0), \text{ la palla di } \mathbb{R}^n \text{ di centro 0 e raggio } k, \quad \text{e} \quad B_k = [-k,k]^n$$

posto per comodità

$$P_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx \tag{6}$$

abbiamo che

$$P_n = \lim_{k\to\infty} \int_{B_k^n(0)} e^{-|x|^2}\,dx \quad \text{e} \quad P_n = \lim_{k\to\infty} \int_{[-k,k]^n} e^{-|x|^2}\,dx. \tag{7}$$

Premesso ciò, eseguiamo il calcolo. Per il Teorema di riduzione abbiamo

$$\begin{aligned}&\int_{[-k,k]^n} e^{-x_1^2+\ldots+x_n^2}\,dx = \int_{[-k,k]^n} e^{-x_1^2}\cdots e^{x_n^2}\,dx \\ &= \int_{[-k,k]} e^{-x_1^2}\,dx_1 \cdots \int_{[-k,k]} e^{-x_n^2}\,dx_n = \Bigl(\int_{[-k,k]} e^{-t^2}\,dt\Bigr)^n\end{aligned}$$

e usando la seconda delle (7) sia nel caso generale sia con $n = 1$ deduciamo che

$$P_n = P_1^n, \quad \text{da cui, in particolare, anche} \quad P_2 = P_1^2 \quad \text{cioè} \quad P_1 = P_2^{1/2}. \tag{8}$$

Ci siamo dunque ricondotti al calcolo di P_2. Per questo usiamo il Teorema di cambiamento di variabile passando a coordinate polari nell'integrazione sul disco $B_k^2(0)$ e poi ancora il Teorema di riduzione. Abbiamo

$$\begin{aligned}&\int_{B_k^2(0)} e^{-|x|^2}\,dx = \int_{[0,k)\times[0,2\pi]} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^k e^{-\rho^2}\rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \\ &= \Bigl[-\frac{1}{2}\,e^{-\rho^2}\Bigr]_0^k \cdot 2\pi = \pi\bigl(1 - e^{-k^2}\bigr).\end{aligned}$$

Per la prima delle (7) abbiamo allora $P_2 = \pi$ e la (8) fornisce $P_n = \pi^{n/2}$, cioè la (1).