Integrali di Riemann e di Cauchy

Gianni Gilardi

Pavia, 14 novembre 1997

L'integrale nell'ambito delle teorie di Riemann e di Cauchy, fra loro equivalenti, può essere introdotto in vari modi e queste pagine sono dedicate a possibili definizioni. Per lo sviluppo della teoria rimandiamo invece a testi usuali di Analisi Matematica.

Dapprima diamo le definizioni di integrabilità e di integrale secondo Riemann e secondo Cauchy operando una scelta fra le tante. Successivamente dimostriamo l'equivalenza delle due teorie, presentiamo qualche variante alle definizioni date e commentiamo brevemente pregi e difetti delle varie impostazioni in relazione alle diverse esigenze di tipo didattico. Infine, nell'Appendice, diamo la caratterizzazione di Vitali–Lebesgue delle funzioni integrabili secondo Riemann.

1. Le definizioni fondamentali

Precisiamo innanzi tutto il concetto di suddivisione di un intervallo chiuso e limitato.

Definizione 1.1. *Chiamiamo suddivisione dell'intervallo* $[a, b]$ *ogni sottoinsieme finito* σ *di* $[a, b]$ *che contiene gli estremi* a *e* b *.* ■

Se σ è una suddivisione di $[a, b]$, assumiamo le notazioni in modo che valgano le condizioni

$$\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\} \qquad \text{e} \qquad x_{k-1} < x_k \quad \text{per} \quad k = 1, \ldots, n. \ ■ \tag{1.1}$$

La teoria dell'integrazione secondo Riemann si basa sulla nozione di somma inferiore e di somma superiore e l'integrabilità di una funzione richiede che l'insieme delle somme inferiori e quello delle somme superiori costituiscano una coppia di classi contigue.

Ricordiamo che due sottoinsiemi non vuoti A e B di $\mathbb{R}$ costituiscono una *coppia di classi contigue* quando valgono le due condizioni: $i)$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ vale la disuguaglianza $a \le b$; $ii)$ per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$.

Ricordiamo inoltre che già la prima condizione, unita all'ipotesi che i due insiemi A e B non sono vuoti, assicura l'esistenza di almeno un *elemento di separazione*, cioè di un numero reale c tale che $a \le c \le b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ (questa affermazione, infatti, è una delle possibili formulazioni della completezza del campo dei numeri reali) e che la seconda condizione equivale al fatto che tale elemento di separazione è unico.

Definizione 1.2. *Siano* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata e* $\{x_0, \ldots, x_n\}$ *una suddivisione di* $[a, b]$ *. Chiamiamo somme inferiore e superiore di Riemann associate alla* *suddivisione data i due numeri reali*

$$S_* = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{(x_{k-1},x_k)} f \qquad \text{e} \qquad S^* = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{(x_{k-1},x_k)} f. \ \blacksquare \tag{1.2}$$

Osservazione 1.3. La Definizione 1.2 necessita dell'ipotesi di limitatezza sulla funzione considerata, altrimenti le (1.2) potrebbero essere infinite. Di riflesso, la stessa ipotesi è necessaria nella definizione successiva di integrabilità e di integrale.

Il caso più banale possibile è quello in cui f è una funzione costante. Detto c il valore assunto da f in tutti i punti di $[a, b]$, si vede subito che, qualunque sia la suddivisione presa in esame, risulta $S_* = S^* = (b - a)c$.

In generale, invece, accade che le somme inferiore e superiore siano diverse fra loro e varino al variare della suddivisione. Considerata ad esempio la funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, se scegliamo la suddivisione $\{0, 1/2, 1\}$ otteniamo

$$S_* = (1/2 - 0) \cdot 0 + (1 - 1/2) \cdot 1/4 = 1/8 \quad \text{e} \quad S^* = (1/2 - 0) \cdot 1/4 + (1 - 1/2) \cdot 1 = 5/8$$

mentre la suddivisione $\{0, 1/4, 1/3, 1\}$ fornisce altri valori di S_* e di S^*. $\blacksquare$

Consideriamo ora l'insieme di *tutte le somme inferiori* e l'insieme di *tutte le somme superiori* ottenuti prendendo tutte le possibili suddivisioni dell'intervallo (insiemi che saranno infiniti in generale ma non sempre) e ci chiediamo se essi costituiscono o meno una coppia di classi contigue secondo la definizione menzionata velocemente poco sopra. Ciò che si può dire è solo che essi sono non vuoti e verificano la prima delle due condizioni richieste, mentre la *ii*) può essere vera o falsa. Dunque è assicurata l'esistenza di un elemento di separazione ma non la sua unicità.

Definizione 1.4. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile secondo Riemann se è unico il numero reale I compreso fra tutte le somme inferiori di f e tutte le somme superiori di f. Se f è integrabile secondo Riemann, l'unico numero I nelle condizioni dette è chiamato integrale di Riemann di f.* $\blacksquare$

Si può poi dimostrare che si ottengono definizioni equivalenti di integrabilità e di integrale se si modifica la Definizione 1.2 prendendo nelle (1.2) gli estremi inferiori e superiori sui corrispondenti intervalli chiusi. $\blacksquare$

La definizione di integrale secondo Cauchy, invece, fa riferimento alla nozione di somma di Cauchy e al comportamento delle somme di Cauchy all'infittirsi della suddivisione. Una misura di quanto è fitta una suddivisione è il suo parametro di finezza introdotto nella definizione che segue.

Definizione 1.5. *Sia $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Chiamiamo parametro di finezza di σ il numero reale*

$$\max_{k=1,\ldots,n} (x_k - x_{k-1}). \ \blacksquare$$

Ad esempio, il parametro di finezza della suddivisione $\{0, 1/4, 1/3, 1\}$ di $[0,1]$ vale

$$\max\{1/4 - 0, 1/3 - 1/4, 1 - 1/3\} = \max\{1/4, 1/12, 2/3\} = 2/3.$$

Notiamo che, perché il parametro di finezza di una suddivisione sia piccolo, occorre che i punti di suddivisione siano numerosi. Tuttavia è chiaro che, anche se i punti di suddivisione sono numerosi, non è detto che il parametro di finezza sia piccolo.

Definizione 1.6. *Sia $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una suddivisione di $[a,b]$. Un sottoinsieme σ' di $[a,b]$ è detto scelta di punti intermedi compatibile con σ quando esso è del tipo*

$$\sigma' = \{x'_1, \ldots, x'_n\} \qquad \text{con} \qquad x_{k-1} < x'_k < x_k \quad \text{per} \ \ k = 1, \ldots, n. \ \blacksquare \tag{1.3}$$

Definizione 1.7. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Siano poi $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una suddivisione di $[a,b]$ e $\sigma' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$ una scelta di punti intermedi compatibile con σ. Chiamiamo somma di Cauchy di f associata a σ e a σ' il numero reale*

$$S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x'_k). \ \blacksquare \tag{1.4}$$

Ancora, se f assume in tutti i punti di $[a,b]$ uno stesso valore c, la somma di Cauchy vale $(b-a)c$ qualunque siano la suddivisione e la scelta dei punti intermedi, mentre nel caso generale la situazione è diversa. Considerata ad esempio la funzione $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$, con $\sigma = \{0, 1/2, 1\}$ e $\sigma' = \{1/4, 3/4\}$ otteniamo

$$S = (1/2 - 0) \cdot (1/4)^2 + (1 - 1/2) \cdot (3/4)^2 = 5/16$$

mentre altre scelte di σ e di σ' porterebbero ad altri valori di S e, anzi, ciò avviene in generale cambiando anche solo la scelta σ' dei punti intermedi.

Definizione 1.8. *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Cauchy se esiste un numero reale I verificante la condizione seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni suddivisione di $[a,b]$ il cui parametro di finezza sia $< \delta$ e per ogni scelta di punti intermedi compatibile con la suddivisione considerata, la corrispondente somma di Cauchy S di f verifichi $|S - I| < \varepsilon$.* $\blacksquare$

Per esprimere l'integrabilità secondo Cauchy si usa dire che *le somme di Cauchy di f convergono al tendere a 0 del parametro di finezza della suddivisione.*

Tuttavia questa frase è scorretta se l'unica definizione di limite che si possiede riguarda funzioni di variabile reale, in quanto una somma di Cauchy dipende non solo dal valore del parametro di finezza della suddivisione considerata ma anche dalla suddivisione stessa e dalla scelta dei punti intermedi. Essa diventa invece perfettamente corretta se si generalizza opportunamente la nozione di limite.

Si noti comunque che si è detto "al tendere a 0 del parametro di finezza" e non "al tendere all'infinito del numero dei punti di suddivisione".

Proposizione 1.9. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Cauchy. Allora il numero I nelle condizioni della definizione è unico.* ■

Dimostrazione. Ricalchiamo le classiche dimostrazioni dell'unicità del limite di funzioni di variabile reale o di successioni anche se, come abbiamo osservato, la situazione è diversa.

Per assurdo, sia $J \neq I$ nelle stesse condizioni di I e scegliamo $\varepsilon = |I - J|/2$ nella Definizione 1.8: questa ci fornisce un numero $\delta > 0$ (in realtà due numeri, dei quali scegliamo il più piccolo) tale che $|S - I| < \varepsilon$ e $|S - J| < \varepsilon$ per ogni suddivisione di $[a, b]$ il cui parametro di finezza sia $< \delta$ e per ogni scelta di punti intermedi compatibile con la suddivisione considerata. Fissiamo dunque una suddivisione e una scelta di punti intermedi in queste condizioni: allora valgono contemporaneamente le due disuguaglianze $|S-I| < \varepsilon$ e $|S-J| < \varepsilon$, dalle quali deduciamo $|I-J| < 2\varepsilon$, contro la definizione di ε. ■

Definizione 1.10. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Cauchy. Allora il numero I nelle condizioni della definizione è chiamato integrale di Cauchy di f.* ■

Si può dimostrare che si ottengono definizioni equivalenti di integrabilità e di integrale se si modifica la Definizione 1.6 prendendo nella (1.3) le disuguaglianze larghe anziché quelle strette.

2. Equivalenza delle due nozioni

Il risultato centrale è il teorema successivo, che assicura che le funzioni integrabili secondo Riemann e secondo Cauchy sono le stesse e che anche i valori numerici dei corrispondenti integrali coincidono.

In esso è sostanzialmente introdotta una terza nozione di integrabilità che, in analogia con quanto si usa dire nel caso dell'integrabilità secondo Cauchy, viene espressa abitualmente con la frase: *le somme di Riemann di f superiori e inferiori convergono allo stesso limite al tendere a 0 del parametro di finezza della suddivisione*.

Premettiamo un risultato preliminare, che afferma che l'ambito in cui abbiamo dato la definizione di integrabilità secondo Cauchy è solo apparentemente più generale di quello delle funzioni limitate usato per l'integrabilità secondo Riemann, e due lemmi tecnici.

Proposizione 2.1. *Ogni funzione integrabile secondo Cauchy è limitata.* ■

Dimostrazione. Denotiamo con I l'integrale di Cauchy di f e scegliamo ad esempio $\varepsilon = 1$ nella Definizione 1.8: questa ci fornisce un numero $\delta > 0$ tale che $|S - I| < 1$ per ogni suddivisione di $[a, b]$ il cui parametro di finezza sia $< \delta$ e per ogni scelta di punti intermedi compatibile con la suddivisione considerata, S denotando la corrispondente somma di Cauchy.

Ora, per assurdo, supponiamo f non limitata, per fissare le idee non limitata superiormente, e costruiamo una suddivisione di $[a, b]$ il cui parametro di finezza sia $< \delta$ e una scelta di punti intermedi compatibile con la suddivisione considerata tale che la corrispondente somma di Cauchy S verifichi la disuguaglianza opposta $|S - I| \geq 1$, arrivando in tal modo a una contraddizione. Precisamente, cerchiamo di realizzare la disuguaglianza

$$S \geq I + 1. \tag{2.1}$$

Scegliamo una suddivisione $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ di $[a,b]$ il cui parametro di finezza sia $< \delta$ e determiniamo la scelta $\sigma' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$ di punti intermedi compatibile con σ come segue. Osserviamo che f non può essere limitata superiormente in tutti gli intervalli (x_{k-1}, x_k) e, per semplificare le notazioni, supponiamo che f non sia limitata superiormente in (x_0, x_1). Scegliamo allora ad arbitrio x'_k in (x_{k-1}, x_k) per $k = 2, \ldots, n$ e riserviamoci di determinare x'_1 in modo da soddisfare la (2.1) per la corrispondente somma di Cauchy S. La (2.1) si esplicita in

$$(x_1 - x_0) f(x'_1) > S + I - \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x'_k)$$

e l'unico parametro oramai a disposizione è x'_1. Siccome la funzione f non è limitata superiormente in (x_0, x_1), esiste $x'_1 \in (x_0, x_1)$ che verifica la disuguaglianza richiesta. ■

Lemma 2.2. *Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e σ_1 e σ_2 due suddivisioni di $[a,b]$ tali che $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ e, per $i = 1, 2$, siano $S_{*,i}$ e S^*_i le somme inferiore e superiore di f associate a σ_i. Allora valgono le disuguaglianze*

$$S^*_2 \le S^*_1 \qquad \text{e} \qquad S_{*,2} \ge S_{*1}. \; ■$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima disuguaglianza, dato che l'altra è analoga. Detti $x_0, \ldots, x_n$ i punti di σ_1, la suddivisione σ_2 contiene tutti i punti di σ_1 e altri eventuali, per cui possiamo assumere le notazioni come segue. Per $k = 1, \ldots, n$ denotiamo con $y_{0,k}, \ldots, y_{m_k,k}$ i punti di σ_2 che appartengono a $[x_{k-1}, x_k]$ ordinati in modo che $y_{i-1,k} < y_{i,k}$ per $i = 1, \ldots, m_k$. In tal modo abbiamo le inclusioni

$$(y_{i-1,k}, y_{i,k}) \subseteq (x_{k-1}, x_k) \quad \text{per} \quad i = 1, \ldots, m_k \quad \text{e} \quad k = 1, \ldots, n$$

e le uguaglianze

$$\sum_{i=1}^{m_k} (y_{i,k} - y_{i-1,k}) = x_k - x_{k-1} \quad \text{per} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Allora, per ogni k, vale la catena

$$\sum_{i=1}^{m_k} (y_{i,k} - y_{i-1,k}) \sup_{(y_{i-1,k}, y_{i,k})} f \le \sum_{i=1}^{m_k} (y_{i,k} - y_{i-1,k}) \sup_{(x_{k-1}, x_k)} f = (x_k - x_{k-1}) \sup_{(x_{k-1}, x_k)} f$$

e la disuguaglianza voluta segue sommando rispetto a k. ■

Lemma 2.3. *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione di $[a,b]$ tale che le corrispondenti somme inferiore e superiore S_* e S^* verifichino la disuguaglianza $S^* - S_* < \varepsilon$.* ■

Dimostrazione. Chiaramente, se è verificata la condizione dell'enunciato, l'insieme di tutte le somme inferiori e quello di tutte le somme superiori costituiscono una coppia di classi contingue. Dunque l'elemento di separazione è unico e f è integrabile secondo Riemann.

Viceversa supponiamo f integrabile secondo Riemann e fissiamo $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Allora esistono due suddivisioni σ_1 e σ_2 di $[a, b]$ tali che, dette $S^\#$ e $S_\#$ la somma superiore associata a σ_1 e, rispettivamente, la somma inferiore associata a σ_2, risulti $S^\# - S_\# < \varepsilon$. Siano ora $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ e S^* e S_* le somme superiore e inferiore associate a σ. Grazie al lemma precedente abbiamo allora

$$S^* - S_* \le S^\# - S_\# < \varepsilon. \blacksquare$$

Teorema 2.4. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora sono equivalenti le condizioni*

$$f \text{ è integrabile secondo Riemann} \tag{2.2}$$

$$f \text{ è integrabile secondo Cauchy} \tag{2.3}$$

e ciascuna di esse equivale alla seguente: esiste un numero reale I tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\delta > 0$ tale che, per ogni suddivisione di $[a, b]$ avente parametro di finezza $< \delta$, le corrispondenti somme superiore e inferiore di Riemann S^* e S_* verifichino le disuguaglianze

$$S^* - I < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad I - S_* < \varepsilon.$$

Inoltre, in caso di integrabilità, i valori dei due integrali di f secondo Riemann e Cauchy coincidono fra loro e con il numero I, necessariamente unico, della terza condizione dell'enunciato. $\blacksquare$

Dimostrazione. Supponendo senz'altro che f non sia la funzione identicamente nulla, denotiamo con $(*)$ la terza condizione dell'enunciato e dimostriamo il teorema controllando che valgono le seguenti quattro implicazioni: *i*) se f è integrabile secondo Riemann, allora vale la $(*)$ se prendiamo come I l'integrale di Riemann di f; *ii*) se f verifica la $(*)$ con un certo I, allora f è integrabile secondo Riemann e I è il suo integrale; *iii*) se f è integrabile secondo Cauchy, allora vale la $(*)$ se prendiamo come I l'integrale di Cauchy di f; *iv*) se f verifica la $(*)$ con un certo I, allora f è integrabile secondo Cauchy e I è il suo integrale.

Parte i) Supponiamo f integrabile secondo Riemann e denotiamo con I il corrispondente integrale. Dimostriamo che le somme di Riemann convergono a I al tendere a 0 del parametro di finezza, cioè, precisamente, che vale la $(*)$ con tale valore di I. Consideriamo tuttavia solo le somme superiori dato che il caso delle somme inferiori si tratta in modo perfettamente analogo.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Chiamata $\{y_0, \ldots, y_m\}$ una suddivisione di $[a, b]$ tale che, detta $S^\#$ la corrispondente somma superiore di Riemann, valga la disuguaglianza

$$S^\# - I < \varepsilon,$$

definiamo

$$\delta = \frac{\varepsilon}{Mm}$$

ove M denota l'estremo superiore di $|f|$ in $[a,b]$, che è strettamente positivo dato che f non è la funzione nulla.

Sia ora $\{x_0, \ldots, x_n\}$ una qualunque suddivisione di $[a,b]$ avente parametro di finezza $< \delta$ e, denotando con S^* la corrispondente somma superiore di Riemann, dimostriamo che $S^* - I < 2\varepsilon$. Poniamo per comodità

$$M_i^{\#} = \sup_{(y_{i-1},y_i)} f \qquad \text{e} \qquad M_k^* = \sup_{(x_{k-1},x_k)} f$$

per $i = 1, \ldots, m$ e $k = 1, \ldots, n$ rispettivamente. Presentiamo ora l'insieme $K = \{1, \ldots, n\}$ in cui varia k come unione di sottoinsiemi $K', K_1, \ldots, K_m$ a due a due disgiunti come segue. Per $i = 1, \ldots, m$ denotiamo con K_i l'insieme degli indici $k \in K$ tali che l'intervallo (x_{k-1}, x_k) sia incluso in (y_{i-1}, y_i) e chiamiamo K' l'insieme degli indici restanti, cioè dei $k \in K$ che non appartengono ad alcuno degli insiemi K_i. Allora vale l'uguaglianza

$$S^* = \sum_{k\in K'} M_k^*(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=1}^m \sum_{k\in K_i} M_k^*(x_k - x_{k-1}).$$

Ma abbiamo

$$\sum_{k\in K'} M_k^*(x_k - x_{k-1}) \le M \sum_{k\in K'} (x_k - x_{k-1}) \le Mm\delta = \varepsilon$$

e per ogni i risulta

$$\sum_{k\in K_i} M_k^*(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k\in K_i} M_i^{\#}(x_k - x_{k-1}) \le M_i^{\#}(y_i - y_{i-1}).$$

Concludiamo perciò

$$S^* \le \varepsilon + \sum_{i=1}^m M_i^{\#}(y_i - y_{i-1}) = \varepsilon + S^{\#} \le I + 2\varepsilon.$$

Parte ii) Supponiamo ora che valga la condizione $(*)$ con un certo I. Allora, in particolare, l'insieme delle somme inferiori e quello delle somme superiori costituiscono una coppia di classi contigue con elemento separatore I. Dunque f è integrabile secondo Riemann e I è il suo integrale.

Parte iii) Supponiamo ora che f sia integrabile secondo Cauchy e dimostriamo che la condizione $(*)$ vale se prendiamo come I l'integrale di Cauchy di f. Sia infatti $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e sia $\delta > 0$ dato dalla Definizione 1.8. Sia poi $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una qualunque suddivisione di $[a,b]$ con parametro di finezza $< \delta$ e siano S_* e S^* le corrispondenti somme di Riemann inferiore e superiore. Considerate allora tutte le scelte $\sigma' = \{x'_1, \ldots, x'_n\}$ di punti intermedi compatibili con σ, abbiamo le disuguaglianze

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x'_k) > I - \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(x'_k) < I + \varepsilon.$$

Siccome i punti x'_k possono essere scelti ad arbitrio negli intervalli (x_{k-1}, x_k) e indipendentemente fra loro, nelle due disuguaglianze possiamo passare agli estremi inferiori e, rispettivamente, superiori in ciascun termine della somma di Cauchy e dedurre

$$S_* \geq I - \varepsilon \qquad \text{e} \qquad S^* \leq I + \varepsilon.$$

Parte iv) Supponiamo infine che f verifichi la condizione $(*)$ con un certo numero reale I e dimostriamo che f è integrabile secondo Cauchy verificando che possiamo prendere lo stesso valore di I nella Definizione 1.8. Sia infatti $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e sia $\delta > 0$ dato dall'ipotesi. Se σ è una suddivisione con parametro di finezza $< \delta$ e σ' è una scelta di punti intermedi compatibile con σ, per la somma di Cauchy S e per le somme di Riemann superiore e inferiore S^* e S_* valgono le disuguaglianze

$$I - \varepsilon < S_* \leq S \leq S^* < I + \varepsilon.$$

Ciò conclude la dimostrazione. ■

3. Alcune varianti alle definizioni

Le suddivisioni dell'intervallo che intervengono nelle definizioni di integrabilità e di integrale che abbiamo dato sono completamente generiche. Si ottengono però definizioni equivalenti alle precedenti imponendo che le suddivisioni siano di qualche tipo particolare. Soffermiamoci sul caso delle suddivisioni che generano intervalli di uguale ampiezza e che chiamiamo uniformi.

Definizione 3.1. *Diciamo che la suddivisione $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$ è uniforme quando*

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \quad \textit{per} \quad k = 1, \dots, n. \ ■$$

Osservazione 3.2. Nelle condizioni e con le notazioni della definizione precedente il parametro di finezza di σ è dato semplicemente da $(b-a)/n$. Dunque, se la suddivisione è uniforme, il suo parametro di finezza è piccolo se e solo se il numero dei punti di suddivisione è grande. Questa affermazione, anche se vaga e imprecisa, è tuttavia falsa per suddivisioni generiche, come abbiamo già sottolineato. ■

A questo punto si potrebbero riscrivere i due paragrafi precedenti sostituendo il termine *suddivisione* con la locuzione *suddivisione uniforme*. A titolo esemplificativo vediamo le Definizioni 1.4 e 1.8 modificate in tal senso.

Definizione 3.3. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata è integrabile secondo Riemann se è unico il numero reale I compreso fra tutte le somme inferiori di f associate a suddivisioni uniformi e tutte le somme superiori di f associate a suddivisioni uniformi. Se f è integrabile secondo Riemann, l'unico numero I nelle condizioni dette è chiamato integrale di Riemann di f.* ■

Definizione 3.4. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Cauchy se esiste un numero reale I verificante la condizione seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni suddivisione uniforme di $[a, b]$ il cui parametro di finezza sia $< \delta$ e per ogni scelta di punti intermedi compatibile con la suddivisione considerata, la corrispondente somma di Cauchy S di f verifichi $|S - I| < \varepsilon$.* ■

Chiaramente, almeno per ora, c'è una ambiguità, in quanto sono state date due definizioni diverse di integrabilità secondo Riemann e due definizioni diverse di integrabilità secondo Cauchy. Tuttavia l'ambiguità è solo momentanea e apparente in quanto vale il risultato seguente:

Teorema 3.5. *Una funzione limitata è integrabile nel senso di una delle Definizioni 1.4, 1.8, 3.3 e 3.4 se e solo se essa è integrabile nel senso delle altre tre. Inoltre, in caso di integrabilità, i valori numerici degli integrali dati dalle rispettive teorie coincidono tutti fra loro.* ■

Dimostrazione. Ci limitiamo a un cenno. Controllando accuratamente tutti i passaggi visti a proposito dell'equivalenza fra le Definizioni 1.4 e 1.8, si vede che nulla cambia se il termine *suddivisione* viene sostituito dalla locuzione *suddivisione uniforme*, con eccezione di un punto, relativo alla dimostrazione del Lemma 2.3: anche se σ_1 e σ_2 sono suddivisioni uniformi, la suddivisione $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ può non essere uniforme. Questo inconveniente, tuttavia, si supera immediatamente come segue: se le due suddivisioni σ_1 e σ_2 generano rispettivamente m e n intervalli, basta costruire σ suddividendo $[a, b]$ in mn intervalli di uguale ampiezza. Allora σ include le due precedenti e la dimostrazione può proseguire inalterata.

Ciò dimostra che le due Definizioni 3.3 e 3.4 sono equivalenti fra loro e all'analoga della terza condizione dell'enunciato del Teorema 2.4. Dunque, per concludere, basta verificare l'equivalenza fra una qualunque delle condizioni di integrabilità di tipo vecchio e una qualunque di quelle di tipo nuovo. Dimostriamo che sono equivalenti le Definizioni 1.4 e 3.3 e che, in caso di integrabilità, anche i valori corrispondenti degli integrali coincidono.

Siccome le somme considerate nella Definizione 3.3 sono particolari fra quelle prese nella Definizione 1.4, è chiaro che, se la funzione f in esame è integrabile nel senso di quest'ultima e se I è il suo integrale, allora costituiscono a maggior ragione una coppia di classi contigue l'insieme di tutte le somme inferiori e quello di tutte le somme superiori, le quali avranno poi ancora I come elemento separatore. Dunque f è integrabile nel senso della Definizione 1.4 e il suo integrale vale I.

Sia ora f integrabile nel senso della Definizione 1.4 e sia I il suo integrale. Per dimostrare che f è integrabile anche nel senso della Definizione 3.3 e che il suo integrale vale I, basta mostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una suddivisione uniforme la cui somma superiore S^* verifichi la disuguaglianza $S^* - I < \varepsilon$ e analogamente per quanto riguarda le somme inferiori. Considerando solo il problema delle somme superiori, fissiamo $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e imitiamo il procedimento seguito nella prima parte della dimostrazione del Teorema 2.4, anche questa volta supponendo che f non sia la funzione nulla e denotando con M l'estremo superiore di $|f|$.

Chiamata $\{y_0, \ldots, y_m\}$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che, detta $S^\#$ la corrispondente somma superiore di Riemann, valga la disuguaglianza

$$S^\# - I < \varepsilon,$$

definiamo

$$\delta = \frac{\varepsilon}{Mm}$$

e scegliamo una suddivisione $\{x_0, \ldots, x_n\}$ di $[a,b]$, ora uniforme, avente parametro di finezza $< \delta$. Denotando con S^* la corrispondente somma superiore di Riemann e procedendo esattamente come nella dimostrazione citata, si arriva senza difficoltà a dimostrare che $S^* - I < 2\varepsilon$. ∎

Un'altra variante che si può considerare relativamente alla teoria di Riemann riguarda l'introduzione delle funzioni a scala nella definizione. Possiamo, anche in questo caso, prendere suddivisioni generiche oppure solo suddivisioni uniformi. Limitatamente alla prima delle due possibilità, ecco brevemente come si può procedere.

Definizione 3.6. *Diciamo che una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è a scala quando esiste una suddivisione $\{x_0, \ldots, x_n\}$ di $[a,b]$ tale che la funzione f sia costante su ciascuno degli intervalli (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \ldots, n$.* ∎

L'integrale di una funzione a scala viene poi definito in modo elementare: se, con le notazioni della definizione, chiamiamo $c_1, \ldots, c_n$ i valori costanti assunti da f nei vari intervalli della suddivisione, l'integrale di f è, *per definizione*, il numero reale

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c_k. \tag{3.1}$$

Notiamo però che tutto ciò andrebbe giustificato meglio in quanto la suddivisione di cui tratta la Definizione 3.6 non è unica: ad esempio una funzione costante può essere presentata in accordo con la definizione citata qualunque sia la suddivisione considerata. Occorrerebbe dunque dimostrare che il numero reale (3.1) non dipende dalla suddivisione scelta fra quelle ammissibili.

Fatto ciò, una definizione, che si dimostra abbastanza facilmente essere equivalente alla Definizione 1.4, è la seguente:

Definizione 3.7. *Una funzione limitata f è integrabile quando è unico il numero reale I compreso fra gli integrali di tutte le funzioni a scala $\le f$ e gli integrali di tutte le funzioni a scala $\ge f$. Se f è integrabile, l'unico numero I nelle condizioni dette è chiamato integrale di f.* ∎

L'ultima variante che prendiamo in considerazione riguarda l'integrale secondo Cauchy e si riallaccia direttamente alla nozione di limite per successioni reali. Per semplificare il linguaggio introduciamo la notazione

$$S(f; \sigma, \sigma') \tag{3.2}$$

per la somma di Cauchy di f associata alla suddivisione σ e alla scelta σ' di punti intermedi compatibile con σ.

Definizione 3.8. *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile quando esiste un numero reale I al quale convergono tutte le successioni $\{S(f;\sigma_n,\sigma'_n)\}$ di somme di Cauchy associate a suddivisioni σ_n di $[a,b]$ e a scelte σ'_n di punti intermedi verificanti le condizioni seguenti: i) per ogni n la scelta σ'_n di punti intermedi è compatibile con la suddivisione σ_n; ii) detto δ_n il parametro di finezza della suddivisione σ_n, la successione $\{\delta_n\}$ tende a 0.* ∎

Naturalmente si dimostra che il numero I è unico e lo si assume poi, *per definizione*, come valore dell'integrale di f.

Osserviamo che la condizione *ii)* della definizione precedente richiede che la suddivisione si infittisca indefinitamente. Essa, in particolare, impone che il numero dei punti di suddivisione diverga per n tendente all'infinito, ma certamente pretende ben di più.

Teorema 3.9. *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile nel senso della Definizione 1.8 se e solo se essa è integrabile nel senso della Definizione 3.8. Inoltre, in caso di integrabilità, i valori numerici dei corrispondenti integrali coincidono.* ∎

Dimostrazione. Sia f integrabile secondo la Definizione 1.8 e sia I il suo integrale. Verifichiamo che tutte le successioni di somme di Cauchy nelle condizioni della Definizione 3.8 convergono a I. Sia infatti $\{S(f;\sigma_n,\sigma'_n)\}$ una di esse. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia $\delta > 0$ dato dalla Definizione 1.8. Siccome la successione $\{\delta_n\}$ tende a 0, esiste un indice m tale che $\delta_n < \delta$ per ogni $n > m$. Per ogni $n > m$ si ha allora anche $|S(f;\sigma_n,\sigma'_n) - I| < \varepsilon$.

Supponiamo ora f integrabile nel senso della Definizione 3.8 con integrale I e dimostriamo che questo numero I soddisfa i requisiti della Definizione 1.8 ragionando per assurdo. Esista dunque un numero $\varepsilon > 0$, che fissiamo, tale che per ogni $\delta > 0$ esistano una suddivisione σ con parametro di finezza $< \delta$ e una scelta σ' di punti intermedi compatibile con σ tali che $|S(f;\sigma,\sigma') - I| \geq \varepsilon$. Scegliendo in particolare $\delta = 1/n$ con $n = 1, 2, \ldots$, costruiamo due successioni $\{\sigma_n\}$ e $\{\sigma'_n\}$ nelle condizioni della Definizione 3.8 ma tali che $|S(f;\sigma_n,\sigma'_n) - I| \geq \varepsilon$ per ogni n. Allora la successione ottenuta di somme di Cauchy non può convergere a I e siamo arrivati a una contraddizione.

4. Qualche commento

Ciò che abbiamo visto nei paragrafi precedenti assicura che è indifferente introdurre l'integrale ricorrendo all'una o all'altra delle varie definizioni, che, infatti, sono tutte equivalenti fra loro. Notiamo in particolare ancora una volta che, grazie alla Proposizione 2.1, l'ambito delle funzioni limitate in cui occorre impostare l'integrazione secondo Riemann è solo apparentemente più ristretto di quello relativo alla teoria di Cauchy.

La scelta della via da seguire è dunque dettata solo da motivi di opportunità e di carattere didattico, suggeriti dalle esigenze più disparate. Concorreranno infatti a determinare il percorso il tempo che si pensa di dedicare all'argomento, l'intenzione di spianare la strada a generalizzazioni in varie direzioni, il numero di collegamenti che si vorrebbero sottolineare con altri punti importanti (teoria della misura, rapporti fra derivazione e integrazione, tecniche di calcolo, integrazione numerica, eccetera), il fatto che si intenda o meno sviluppare in modo rigoroso almeno una parte della teoria e, certo non ultimo, il confronto fra le difficoltà concettuali che offrono le varie impostazioni.

Raccogliamo sotto forma di altrettante osservazioni alcuni dei numerosi commenti che si possono fare in proposito.

Osservazione 4.1. La teoria di Riemann sfrutta in modo essenziale l'ordinamento della retta reale come codominio della funzione: infatti già nella Definizione 1.2 è necessario saper eseguire il passaggio all'estremo superiore e all'estremo inferiore. Dunque non è possibile ridare una definizione formalmente identica nel caso in cui la funzione in esame assuma valori complessi oppure valori vettoriali. Nei due casi occorre separare le parti reale e immaginaria e, rispettivamente, considerare le varie componenti.

Al contrario, la teoria di Cauchy sfrutta a livello del codominio solo la struttura metrica e le Definizioni 1.8 e 1.10 possono essere generalizzate senza difficoltà ad esempio al caso dei valori complessi e a quello dei valori vettoriali.

Osservazione 4.2. La nozione di integrale di Cauchy si presta molto bene nelle interpretazioni che l'integrale ha nelle varie applicazioni, ad esempio nel caso della definizione di lavoro di una forza in corrispondenza a un certo spostamento. Essa ha invece qualche difetto in relazione alla teoria della misura delle figure piane. Infatti, se è suggestiva l'interpretazione geometrica dell'integrale di Cauchy di una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ non negativa come area del *rettangoloide* corrispondente, cioè dell'insieme

$$R(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x \in [a,b], \quad 0 \le y \le f(x)\}, \tag{4.1}$$

in quanto le somme di Cauchy si interpretano come aree di plurirettangoli in qualche modo vicini al rettangoloide di f, non è evidente quale spunto dia la nozione vista alla generalizzazione al caso di una figura più complessa di un semplice rettangoloide.

Al contrario, la teoria dell'integrazione secondo Riemann si collega direttamente con la *teoria della misura secondo Peano–Jordan*, che si applica a generiche *figure piane limitate*.

Richiamiamo a questo proposito la definizione di misurabilità e di misura secondo Peano–Jordan. Definiti i *plurirettangoli* come quei sottoinsiemi del piano rappresentabili come unione di un numero finito di rettangoli con i lati paralleli agli assi (inclusi i rettangoli degeneri che si riducono a segmenti o a punti) e definita la corrispondente misura per via elementare (con qualche difficoltà legata al fatto che è sì vero che un plurirettangolo può sempre essere presentato come unione di un numero finito di rettangoli a due a due disgiunti, ma che è altrettanto vero che tale rappresentazione non è unica), si passa alla misura dei sottoinsiemi limitati del piano mediante la definizione seguente:

Definizione 4.3. *Un sottoinsieme limitato S del piano è misurabile secondo Peano-Jordan quando è unico il numero A compreso fra le aree di tutti i plurirettangoli inclusi in S e le aree di tutti i plurirettangoli che includono S. In caso di misurabilità, l'unico numero A nelle condizioni dette è chiamato area di S.* ∎

Osservato che il rettangoloide (4.1) di una funzione f è limitato se e solo se la funzione f è limitata, enunciamo senza dimostrarlo il risultato seguente:

Teorema 4.4. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e non negativa è integrabile secondo Riemann se e solo se il suo rettangoloide $R(f)$ è misurabile secondo Peano-Jordan. Inoltre, in caso di integrabilità, il valore dell'integrale della funzione coincide con l'area di $R(f)$.* ■

In quest'ottica può apparire più naturale e opportuno premettere l'integrazione delle funzioni a scala e introdurre l'integrale di Riemann mediante la Definizione 3.7.

Nel parallelismo con la teoria delle aree, se l'integrale di una funzione limitata corrisponde alla nozione di area di un sottoinsieme limitato del piano, l'integrale delle funzioni a scala corrisponde alla nozione di area di un plurirettangolo. Infatti il rettangoloide di una funzione a scala non negativa è un particolare plurirettangolo.

Se si adotta questa via, sembra sensato prendere in considerazione tutte le suddivisioni e non solo quelle uniformi, altrimenti non sarebbe del tutto immediato (anche se sarebbe comunque facile) verificare che una generica funzione a scala è integrabile nel senso della Definizione 3.7.

Osservazione 4.5. Il Teorema 4.4 suggerisce per l'introduzione dell'integrale una via alternativa che ha il pregio di dare grande risalto all'aspetto geometrico.

Introdotta la Definizione 4.3, si può *definire* l'integrale di una funzione f limitata e non negativa come l'area del suo rettangoloide $R(f)$, affermando naturalmente, sempre per definizione, che f è integrabile o meno a seconda che $R(f)$ sia misurabile o meno.

Se poi f è una funzione limitata di segno qualunque, si può definirne l'integrabilità e l'integrale presentandola come differenza di funzioni limitate e non negative. La via più semplice consiste nel considerare la "decomposizione canonica" $f = f^+ - f^-$, ove le funzioni $f^\pm$, dette *parti positiva e negativa di* f, sono definite dalle formule

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad \text{e} \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Si dichiara allora f integrabile per definizione se e solo se entrambe le funzioni $f^\pm$ sono integrabili nel senso della definizione relativa a funzioni non negative, il che equivale a richiedere che i due rettangoloidi $R(f^\pm)$ siano misurabili. L'integrale di f viene poi definito per linearità come la differenza degli integrali di f^+ e di f^-.

Se si segue questa via, risulta vero per definizione che l'integrale di una funzione f vale *la differenza* delle aree di due figure collegate al grafico di f, i rettangoloidi $R(f^+)$ e $R(f^-)$, i quali possono essere poi letti direttamente anche a partire dal grafico di f. Questo fatto, che andrebbe osservato comunque almeno a livello intuitivo, è di solito meno facile da giustificare rigorosamente in altre impostazioni.

Osservazione 4.6. Anche se si abbandona per un attimo il piano logico–deduttivo e si pensa invece di dare solo una presentazione descrittiva della nozione di integrale e delle sue proprietà senza pretendere di svolgere le dimostrazioni, la teoria di Riemann basata sulla

Definizione 1.4 richiede la nozione di estremo superiore. Questo però si evita se si adotta la variante di introdurre prima le funzioni a scala e di ricorrere alla Definizione 3.7.

Notiamo poi che, se non si intendono dimostrare i teoremi successivi alla definizione di integrabilità secondo Riemann, non sarebbe nemmeno necessario disporre della nozione di coppia di classi contigue.

Inoltre la teoria è svincolata dalla nozione di limite e, di conseguenza, può essere presentata anche prima di aver dato le definizioni di limite e di funzione continua (anche se prima o poi occorre collegare la continuità alla teoria dell'integrazione).

Al contrario, benché le Definizioni 1.8 e 1.10 non facciano esplicito riferimento alla nozione di limite, questa di fatto aleggia e sembra più che mai opportuno avere già trattato i limiti di funzioni di variabile reale. A conferma di questo fatto stanno la Definizione 3.8 e il Teorema 3.9. Tuttavia è chiaro che le difficoltà concettuali connesse con la definizione di limite (legate principalmente al numero di quantificatori che vi compaiono) si ritrovano a maggior ragione nella Definizione 1.8 e nelle sue varianti.

A titolo esemplificativo descriviamo la struttura logica della Definizione 1.8 e la confrontiamo con quella della Definizione 1.4, evitando di esplicitare S_*, S^* e S in funzione di σ e di σ'. L'acquisizione da parte dell'allievo delle definizioni di somme inferiore, superiore e di Cauchy, infatti, è comunque presupposta.

La richesta di integrabilità secondo Cauchy è del tipo

$$\exists I: \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \forall\sigma \ \forall\sigma' \quad \big(\alpha(\sigma,\delta) \wedge \beta(\sigma,\sigma') \Longrightarrow \gamma(S,I,\varepsilon)\big)$$

ove i predicati $\alpha(\sigma,\delta)$, $\beta(\sigma,\sigma')$ e $\gamma(S,I,\varepsilon)$ significano rispettivamente "σ ha parametro di finezza $< \delta$", "σ' è compatibile con σ" e "$|S - I| < \varepsilon$". L'integrabilità secondo Riemann si schematizza invece in

$$!\,I: \quad \forall S_* \ \forall S^* \quad \lambda(S_*, S^*, I)$$

ove $\lambda(S_*, S^*, I)$ significa "$S_* \le I \le S^*$" e il simbolo $!$, che sta a indicare l'unicità, funge da quantificatore. La differenza di complessità logica è allora evidente.

Osservazione 4.7. Se poi si vuole sviluppare un poco la teoria in modo perfettamente rigoroso, l'integrazione secondo Riemann è più conveniente di quella di Cauchy. Confrontiamo infatti le due vie per quanto riguarda condizioni di integrabilità e di non integrabilità, in vista della dimostrazione di qualche risultato significativo della teoria e della costruzione di una funzione non integrabile.

Nella teoria di Riemann una funzione è integrabile se e solo se costituiscono una coppia di classi contigue l'insieme delle somme inferiori e l'insieme delle somme superiori o, in modo equivalente, se è unico l'elemento che le separa.

Il modo più semplice per dimostrare l'integrabilità di una funzione f è allora quello di verificare che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una somma inferiore S_* e una somma superiore S^* tali che $S^* - S_* < \varepsilon$, mentre la via naturale per controllare che una funzione non è integrabile consiste nella costruzione di due elementi separatori fra le classi delle somme inferiori e superiori.

Ebbene tutto ciò è di solito realizzabile senza eccessive difficoltà, ad esempio nella dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni continue e della non integrabilità della funzione di Dirichlet.

Vediamo invece che accade nell'ambito della teoria di Cauchy. Per dimostrare che una funzione f è integrabile conviene in genere ricorrere alla classica *condizione di Cauchy* seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni coppia di suddivisioni σ_1 e σ_2 con parametro di finezza $< \delta$ e per ogni coppia di scelte σ_1' e σ_2' di punti intermedi compatibili con σ_1 e con σ_2 rispettivamente, le corrispondenti somme di Cauchy S_1 e S_2 verifichino la disuguaglianza $|S_1 - S_2| < \varepsilon$. Si noti però che tale condizione, che si dimostra essere necessaria e sufficiente per l'integrabilità, non è di facile comprensione da parte degli allievi, essendo addirittura più complessa della condizione di Cauchy relativa alla convergenza di una successione.

Per quanto riguarda la non integrabilità di una funzione, una via leggermente più semplice della negazione della condizione di Cauchy ora enunciata è quella che presentiamo. Essa, tuttavia, è legata alla Definizione 3.8 e il suo uso comporta che anche quanto espresso da questa seconda definizione sia stato introdotto, almeno come proprietà implicata dall'integrabilità nel senso della Definizione 1.8. Se si costruiscono due successioni di somme di Cauchy, entrambe associate a suddivisioni e a scelte di punti intermedi verificanti le condizioni prescritte dalla Definizione 3.8 ma convergenti a due valori diversi, allora, chiaramente, la funzione in questione non può essere integrabile. Avvertiamo che l'esistenza di una coppia di successioni in tali condizioni è anche necessaria per la non integrabilità.

Osservazione 4.8. Torniamo sull'equivalenza data dal Teorema 3.9 fra le Definizioni 1.8 e 3.8 e, per maggior completezza, riferiamoci anche al Teorema 3.5 per quanto riguarda l'equivalenza fra le Definizioni 1.8 e 3.4. Ebbene le Definizioni 3.4 e 3.8 sono equivalenti alla Definizione 1.8 proprio perché in esse si è lasciata ampia libertà alle somme di Cauchy, soprattutto a livello delle scelte ammesse di punti intermedi. Infatti se si restringesse troppo la scelta, *non si otterrebbe più una nozione di integrabilità equivalente a quella originaria* e risulterebbero integrabili nel nuovo senso funzioni che nel senso vecchio integrabili non sono. Questa circostanza si presenta ad esempio se, nel definire l'integrabilità di una funzione cercando di imitare la Definizione 3.8, si prendono in considerazione, con la notazione (3.2), solo le successioni $\{S(f;\sigma_n,\sigma_n')\}$ di somme di Cauchy costruite come segue: per ogni n si assume come σ_n la suddivisione uniforme in n intervalli e come σ_n' si assume sistematicamente la scelta dei punti medi degli intervalli generati da σ_n, cioè

$$x_k' = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} \quad \text{per} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Con una siffatta definizione risulterebbe integrabile in $[0,1]$ con integrale pari a 1 ogni funzione che nei razionali valesse 1, indipendentemente dal suo comportamento nei punti irrazionali, quindi anche la funzione di Dirichlet, notoriamente non integrabile.

Se invece si affronta una situazione in cui non vi sono problemi di integrabilità, dato che è già noto che tutte le funzioni in gioco sono integrabili, e si è interessati solo ai valori degli integrali, allora la situazione è diversa e sarebbe perfettamente lecito riferirsi solo a somme di Cauchy di tipo molto particolare.

Questa circostanza si presenta ad esempio per *l'integrale delle funzioni continue* o, più in generale, delle funzioni limitate con al massimo un numero finito di punti di discontinuità. Dunque, se ci si vuole limitare a questo caso e non si pretende di considerare funzioni di tipo più generale, è corretto *definire* l'integrale di una funzione come il limite di una successione particolare di somme di Cauchy selezionata fra quelle della Definizione 3.8. Si possono, ad esempio, considerare solo suddivisioni uniformi e scegliere come punti intermedi i punti medi degli intervallini originati dalle suddivisioni considerate. Se così si procede, è però necessario enunciare un risultato che afferma l'esistenza del limite in questione e sarebbe anche opportuno avvertire con un teorema che altre successioni di somme di Cauchy in condizioni analoghe convergono all'integrale, ormai definito.

5. Appendice: caratterizzazione delle funzioni integrabili

Come è ben noto, sono integrabili secondo Riemann le funzioni continue e, più in generale, le funzioni limitate con al massimo un numero finito di punti di discontinuità. Inoltre sono integrabili tutte le funzioni monotone, e queste possono avere anche un'infinità numerabile di punti di discontinuità. Esistono poi funzioni integrabili, ad esempio in $[0,1]$, il cui insieme di discontinuità ha la cardinalità del continuo: è in queste condizioni, infatti, la funzione caratteristica dell'insieme di Cantor. Infine, la funzione di Dirichlet, che è discontinua in ogni punto, non è integrabile in alcun intervallo.

Queste brevi considerazioni suggeriscono che l'integrabilità secondo Riemann di una funzione limitata deve essere in qualche modo legata a quanto è "piccolo" l'insieme dei suoi punti di discontinuità. Il Teorema di Vitali–Lebesgue che vogliamo presentare precisa la congettura e risolve completamente la questione.

La dimostrazione che diamo sfrutta proprietà ben note della teoria della misura secondo Peano–Jordan e della teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue che enunciamo soltanto (le dimostrazioni si trovano in ogni testo specializzato). Altre affermazioni più specifiche, invece, verranno giustificate. La dimostrazione si basa, inoltre, su una caratterizzazione dei punti di continuità della funzione in esame e su una decomposizione opportuna della frontiera del suo rettangoloide. A questo scopo sono necessarie le nozioni di massimo e di minimo limite, che richiamiamo brevemente nel caso delle funzioni limitate. Ecco i risultati che enunciamo senza dimostrazione.

Proposizione 5.1. *Un sottoinsieme limitato del piano è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se la sua frontiera ha misura nulla secondo Peano–Jordan.* ■

Proposizione 5.2. *Siano* $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni integrabili secondo Lebesgue e tali che* $f_1(x) \le f_2(x)$ *per ogni* $x \in [a,b]$ *. Allora l'insieme*

$$\{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : \ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$

è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura vale

$$\int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \, dx. \ ■ \tag{5.1}$$

Proposizione 5.3. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa e integrabile secondo Lebesgue. Allora l'integrale di f è nullo se e solo se f è nulla quasi ovunque secondo Lebesgue, cioè se e solo se l'insieme dei punti in cui f non si annulla ha misura nulla secondo Lebesgue.* ■

Ora, come abbiamo anticipato, richiamiamo le nozioni di massimo e di minimo limite.

Definizione 5.4. *Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e $x \in (a,b)$. Definiamo*

$$\limsup_{t\to x} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{0<|t-x|<\delta} f(t) \qquad e \qquad \liminf_{t\to x} f(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{0<|t-x|<\delta} f(t). \ ■$$

Se $x = a$ o $x = b$ le definizioni sono analoghe: si sostituisce l'intorno di x di raggio δ con l'intorno destro e sinistro rispettivamente.

Notiamo che i secondi membri delle formule precedenti effettivamente esistono e sono finiti dato che le funzioni della variabile δ che vi compaiono sono monotone e limitate.

Chiaramente, vale sempre la disuguaglianza

$$\liminf_{t\to x} f(t) \le \limsup_{t\to x} f(t)$$

e si dimostra che il limite $\lim_{t\to x} f(t)$ esiste se e solo il massimo e il minimo limite coincidono. In tal caso il loro valore comune è anche il valore del limite. ■

La caratterizzazione dei punti di continuità della funzione f e lo studio della frontiera del suo rettangoloide $R(f)$ poggiano sulla costruzione delle funzioni e dell'insieme che introduciamo nella definizione data di seguito.

Definizione 5.5. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Definiamo le quattro funzioni $f^*, f_*, f^\#, f_\# : [a,b] \to \mathbb{R}$ ponendo per $x \in [a,b]$*

$$f^*(x) = \limsup_{t\to x} f(t) \tag{5.2}$$

$$f_*(x) = \liminf_{t\to x} f(t) \tag{5.3}$$

$$f^\#(x) = \max\{f(x), f^*(x)\} \tag{5.4}$$

$$f_\#(x) = \min\{f(x), f_*(x)\}. \tag{5.5}$$

Definiamo poi l'insieme

$$\mathcal{G}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \le x \le b, \quad f_\#(x) \le y \le f^\#(x)\right\}. \ ■ \tag{5.6}$$

Dalle relazioni fra limite, massimo limite e minimo limite che abbiamo richiamato deduciamo immediatamente il risultato seguente:

Proposizione 5.6. *La funzione f è continua nel punto x se e solo se $f_\#(x) = f^\#(x)$.* ■

In particolare, se f è continua in $[a,b]$, l'insieme $\mathcal{G}(f)$ coincide con il grafico di f. In generale, invece, si può solo affermare che il grafico di f è incluso in $\mathcal{G}(f)$.

Osserviamo inoltre che, grazie all'ipotesi di limitatezza fatta su f e alla teoria generale dell'integrazione, le quattro funzioni introdotte sono integrabili secondo Lebesgue.

Lemma 5.7. *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata non negativa. Allora la frontiera del rettangoloide $R(f)$ è l'unione dei tre segmenti*

$$\{a\}\times[0,f(a)],\qquad \{b\}\times[0,f(b)]\qquad e\qquad [a,b]\times\{0\}$$

e dell'insieme $\mathcal{G}(f)$. ■

Dimostrazione. Siccome è chiaro che i tre segmenti dell'enunciato sono inclusi nella frontiera del rettangoloide, basta controllare che un punto (x,y) tale che

$$a<x<b \qquad \text{e} \qquad y>0 \tag{5.7}$$

è di frontiera per $R(f)$ se e solo se valgono le disuguaglianze

$$f_{\#}(x)\le y\le f^{\#}(x). \tag{5.8}$$

Supponiamo che (x,y) verifichi le (5.7) e sia di frontiera per $R(f)$ e dimostriamo che valgono le (5.8). Siano $\{(x'_n,y'_n)\}$ e $\{(x''_n,y''_n)\}$ due successioni di punti di $R(f)$ e, rispettivamente, del complementare di $R(f)$ convergenti a (x,y). Grazie alle (5.7) non è restrittivo supporre che per ogni n valgano le disuguaglianze

$$a<x'_n<b,\quad a<x''_n<b,\quad 0<y'_n\le f(x'_n)\quad \text{e}\quad y''_n>f(x''_n). \tag{5.9}$$

Inoltre, pur di passare a sottosuccessioni opportune, possiamo supporre che ciascuna delle due successioni $\{x'_n\}$ e $\{x''_n\}$ assuma solo il valore x per ogni n oppure solo valori diversi da x e diciamo che le successioni sono di tipo (a) o di tipo (b) nei due casi. Si hanno allora quattro combinazioni possibili.

Supponiamo dapprima che entrambe le successioni siano di tipo (a). Allora $y'_n\le f(x)<y''_n$ per ogni n, da cui $y=f(x)$, e dunque le (5.8).

Supponiamo ora che le due successioni siano di tipo (a) e (b) rispettivamente. Abbiamo allora $y'_n\le f(x)$ per ogni n, da cui $y\le f(x)$; d'altra parte, passando al minimo limite nell'ultima disuguaglianza delle (5.9), deduciamo $y\ge f_*(x)$. Dunque le (5.8) sono soddisfatte anche in questo caso.

Se le due successioni sono di tipo (b) e (a) rispettivamente, si ragiona come nel caso precedente prendendo ora il massimo limite.

Supponendo infine che entrambe le successioni $\{x'_n\}$ e $\{x''_n\}$ siano di tipo (b), passando al minimo e massimo limite nelle (5.9) deduciamo $y\ge f_*(x)$ e $y\le f^*(x)$, da cui ancora le (5.8).

Viceversa, nell'ipotesi che valgano le (5.7) e le (5.8), dimostriamo che (x,y) è un punto della frontiera di $R(f)$. Osserviamo subito che ogni punto (x,y) del grafico di f è di frontiera: infatti esso appartiene a $R(f)$ e, contemporaneamente, è il limite della successione $\{(x, y+1/n)\}$, che è costituita da punti del complementare. Rimangono allora da considerare i punti verificanti le (5.7) e le (5.8) tali che $y \neq f(x)$ e a questo scopo distinguiamo tre casi.

Supponiamo dapprima $f_{\#}(x) = f(x)$. Allora $f(x) \leq y \leq f^*(x)$ e $y > f(x)$. In particolare (x, y) non appartiene a $R(f)$ e dobbiamo vedere che esso è il limite di una successione $\{(x_n, y_n)\}$ di punti di $R(f)$. Come $\{x_n\}$ prendiamo una successione di numeri reali diversi da x convergente a x e tale che $\{f(x_n)\}$ converga a $f^*(x)$ e definiamo $y_n = \min\{f(x_n), y\}$. Allora $y_n \leq f(x_n)$, per cui $(x_n, y_n) \in R(f)$, e $\lim y_n = \min\{f^*(x), y\} = y$.

Supponiamo ora $f^{\#}(x) = f(x)$. Allora $f_*(x) \leq y < f(x)$. In particolare (x, y) appartiene a $R(f)$ e dobbiamo vedere che esso è il limite di una successione $\{(x_n, y_n)\}$ di punti non appartenenti a $R(f)$. Come $\{x_n\}$ prendiamo una successione di numeri reali diversi da x convergente a x e tale che $\{f(x_n)\}$ converga a $f_*(x)$ e definiamo $y_n = \max\{f(x_n), y\} + 1/n$. Allora $y_n > f(x_n)$, per cui $(x_n, y_n) \notin R(f)$, e $\lim y_n = \max\{f_*(x), y\} = y$.

Nel caso restante abbiamo $f_*(x) < f(x) < f^*(x)$ e $f_*(x) \leq y \leq f^*(x)$. Se $y \leq f(x)$, per cui $(x, y) \in R(f)$, procediamo come nel secondo caso per costruire $\{(x_n, y_n)\}$; se invece $y > f(x)$, per cui $(x, y) \notin R(f)$, procediamo come nel primo. ■

Lemma 5.8. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora l'insieme $\mathcal{G}(f)$ definito dalla* (5.6) *è compatto.* ■

Dimostrazione. Sia $M = \sup|f|$. Allora $-M \leq f_{\#}(x) \leq f^{\#}(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, per cui $\mathcal{G}(f)$ è limitato. Occorre allora solo dimostrare che $\mathcal{G}(f)$ è anche chiuso. Sia $\{(x_n, y_n)\}$ una successione di punti dell'insieme $\mathcal{G}(f)$ convergente a un certo punto (x, y): dobbiamo dedurre che $(x, y) \in \mathcal{G}(f)$.

Chiaramente $a \leq x \leq b$. Per dimostrare le (5.8) fissiamo $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Per definizione di massimo e di minimo limite esiste un numero $\delta > 0$, che fissiamo, tale che

$$f_*(x) - \varepsilon \leq f(z) \leq f^*(x) + \varepsilon \quad \text{per} \quad 0 < |z - x| < \delta.$$

Deduciamo

$$f_{\#}(x) - \varepsilon \leq f(z) \leq f^{\#}(x) + \varepsilon \quad \text{per} \quad |z - x| < \delta.$$

Ma per ogni n maggiore di un certo indice m risulta $|x_n - x| < \delta/2$. Per $n > m$ abbiamo allora

$$f_{\#}(x) - \varepsilon \leq f(x_n) \leq f^{\#}(x) + \varepsilon. \tag{5.10}$$

Per tali n abbiamo anche

$$f_{\#}(x) - \varepsilon \leq f(t) \leq f^{\#}(x) + \varepsilon \quad \text{per} \quad |t - x_n| < \delta/2$$

e prendendo il minimo e il massimo limite per $t \to x_n$ deduciamo

$$f_{\#}(x) - \varepsilon \leq f_*(x_n) \leq f^{\#}(x) + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad f_{\#}(x) - \varepsilon \leq f^*(x_n) \leq f^{\#}(x) + \varepsilon. \tag{5.11}$$

Combinando la (5.10), la (5.11) e l'ipotesi su y_n, otteniamo

$$f_{\#}(x) - \varepsilon \le f_{\#}(x_n) \le y_n \le f^{\#}(x_n) \le f^{\#}(x) + \varepsilon$$

per $n > m$. Passando al limite concludiamo

$$f_{\#}(x) - \varepsilon \le y \le f^{\#}(x) + \varepsilon$$

e le (5.8) seguono dall'arbitrarietà di ε. ■

Lemma 5.9. *Sia K una compatto del piano. Allora K ha misura nulla nel senso di Lebesgue se e solo se ha misura nulla nel senso di Peano–Jordan.* ■

Dimostrazione. La misura esterna secondo Peano–Jordan di un insieme piano limitato K e la sua misura esterna secondo Lebesgue sono definite come l'estremo inferiore degli insiemi

$$\left\{ \sum_i \operatorname{area}(R_i) : \; K \subseteq \bigcup_i R_i \right\}$$

ottenuti prendendo tutte le famiglie $\{R_i\}$, rispettivamente finite e numerabili nei due casi, di rettangoli (aperti senza perdita di generalità) che ricoprono l'insieme K considerato.

Ora, se K è compatto, da ogni suo ricoprimento costituito da aperti si può estrarre un ricoprimento finito. Segue allora facilmente che, nel caso dei compatti, le due misure esterne secondo Peano–Jordan e secondo Lebesgue coincidono, per cui affermare che una di esse è nulla equivale a dire che è nulla l'altra.

D'altra parte gli insiemi di misura nulla sono gli insiemi di misura esterna nulla in ciascuna delle due teorie, da cui l'affermazione dell'enunciato. ■

Possiamo finalmente dimostrare il risultato finale:

Teorema 5.10. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è un insieme di misura nulla secondo Lebesgue.* ■

Dimostrazione. Siccome f è limitata e, per ogni costante c, l'integrabilità di f equivale a quella di $f + c$, non è restrittivo supporre f non negativa.

Grazie al Teorema 4.4 e alla Proposizione 5.1, la funzione f è integrabile secondo Riemann se e solo se la frontiera del suo rettangoloide $R(f)$ ha misura nulla secondo Peano–Jordan. Tenendo conto dei Lemmi 5.7, 5.8 e 5.9, deduciamo che f è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme $\mathcal{G}(f)$ ha misura di Lebesgue nulla.

D'altra parte, grazie alla Proposizione 5.2, la misura di Lebesgue di $\mathcal{G}(f)$ vale

$$\int_a^b \left(f^{\#}(x) - f_{\#}(x) \right) \, dx \tag{5.12}$$

e siccome la funzione integranda è non negativa, deduciamo, grazie alla Proposizione 5.3, che l'integrale (5.12) è nullo se e solo se l'insieme dei punti in cui non è nulla la funzione integranda ha misura nulla secondo Lebesgue.

Infine, per la Proposizione 5.6, l'uguaglianza $f_{\#}(x) = f^{\#}(x)$ vale se e solo se f è continua nel punto x considerato. Dunque l'annullamento dell'integrale (5.12), equivalente all'integrabilità di f secondo Riemann, equivale anche al fatto che l'insieme dei punti di discontinuità di f abbia misura nulla secondo Lebesgue. ■