Equazioni paraboliche astratte: impostazione variazionale

Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^n$ di frontiera Γ. Denotati con ν la derivata normale esterna sul bordo Γ e con Δ e ∇ il laplaciano e il gradiente rispetto alle variabili spaziali, consideriamo il problema di Cauchy–Neumann per l'equazione del calore

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) - \Delta u(t) &= g(t) &&\text{in } \Omega \times (0,T) \\ \nabla u(t) \cdot \nu &= h(t) &&\text{su } \Gamma \times (0,T) \\ u(0) &= u_0 &&\text{in } \Omega \end{aligned}$$

dove, in un'impostazione classica, l'incognita u e il dato g sono funzioni definite e regolari in $\overline{\Omega} \times [0,T]$, i dati h e u_0 sono definiti e regolari su $\Gamma \times [0,T]$ e in $\overline{\Omega}$ rispettivamente e, ad esempio, $u(t)$ sta per $u(\,\cdot\,,t)$.

Sia ora v una funzione regolare in $\overline{\Omega}$. Moltiplicando l'equazione per v con t fissato, integrando in Ω e usando la formula di integrazione per parti e la condizione al bordo, deduciamo formalmente

$$\int_\Omega \partial_t u(t)\, v\, dx + \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega g(t)\, v\, dx + \int_\Gamma h(t)\, v\, ds$$

ove ds denota l'elemento di superficie. Nell'uguaglianza ottenuta intervengono in modo naturale due spazi, $H = L^2(\Omega)$ e $V = H^1(\Omega)$, e due forme bilineari su questi, il prodotto scalare $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ di H e la forma a su $V \times V$ definita da

$$a(w,v) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v\, dx, \qquad w, v \in V.$$

Detta $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ la dualità fra V' e V, il problema si riscrive

$$(u'(t), v) + \langle Au(t), v\rangle = \langle f(t), v\rangle \qquad \forall\, v \in V, \quad \forall\, t \in [0,T] \tag{1}$$

se conveniamo di denotare con u' la derivata di u rispetto al tempo e se definiamo l'operatore A da V in V' e l'elemento $f(t)$ di V' mediante le formule

$$\begin{aligned} \langle Aw, v\rangle &= \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v\, dx, \qquad w, v \in V \\ \langle f(t), v\rangle &= \int_\Omega g(t)\, v\, dx + \int_\Gamma h(t)\, v\, ds \qquad v \in V. \end{aligned}$$

La (1) può a sua volta essere trasformata nell'equazione $u'(t) + Au(t) = f(t)$, i cui termini sono tutti elementi di V', se riusciamo a interpretare $u'(t)$ come elemento di V' e riscrivere il prodotto scalare in H come dualità fra V' e V. Ciò è il frutto dell'identificazione dello spazio H con un sottospazio di V' che discutiamo ora in generale.

1. Costruzione della terna hilbertiana. Siano V e H due spazi di Hilbert reali verificanti le condizioni seguenti:

$$V \text{ è un sottospazio vettoriale di } H \text{ denso in } H \tag{2}$$

$$\text{l'immersione di } V \text{ in } H \text{ è continua.} \tag{3}$$

Per più di un motivo sarà comodo aggiungere l'ipotesi

$$V \text{ è separabile} \tag{4}$$

che implica la separabilità anche di H e di V'.

Mentre nel caso di un generico spazio di Hilbert W i simboli $\|\cdot\|$ e $(\cdot\,,\cdot)$ denoteranno la norma e il prodotto scalare di W appunto, nel contesto che stiamo considerando usiamo le notazioni che ora introduciamo, pensando di fissare una volta per tutte una norma e un prodotto scalare in H e intendendo invece che norma e prodotto scalare in V siano fissati solo quando essi giocano un ruolo preciso (in tali condizioni la struttura hilbertiana nel duale V' è determinata di conseguenza).

Denotiamo con $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ e $\|\cdot\|_*$ le norme nei tre spazi V, H e V' rispettivamente, con $(\!(\cdot\,,\cdot)\!)$, $(\cdot\,,\cdot)$ e $(\!(\cdot\,,\cdot)\!)_*$ i corrispondenti prodotti scalari e con $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ la dualità fra V' e V. La (3) equivale allora all'esistenza di una costante $c_*>0$ tale che

$$|v| \le c_*\|v\| \qquad \forall\, v\in V. \tag{5}$$

Fissato ora $u\in H$, consideriamo il funzionale

$$Iu : v \mapsto (u,v), \qquad v\in V$$

e osserviamo che Iu è lineare e continuo su V. Abbiamo infatti

$$|(u,v)| \le |u|\,|v| \le c_*|u|\,\|v\| \qquad \forall\, v\in V.$$

Dunque $Iu\in V'$ e $\|Iu\|_* \le c_*|u|$, per cui l'applicazione $I : u\mapsto Iu$ opera da H in V' in modo lineare e continuo. Osserviamo che essa è anche iniettiva. Infatti $Iu=0$ significa che u è ortogonale a V in H, da cui $u=0$ per la (2). Interpretiamo allora I come identificazione, cioè denotiamo ancora con u l'elemento Iu di V' per ogni $u\in H$. Abbiamo dunque l'inclusione $H\subseteq V'$ e la disuguaglianza

$$\|u\|_* \le c_*|u| \qquad \forall\, u\in H. \tag{6}$$

Tutto ciò viene espresso comunemente con la frase (V,H,V') *è una terna hilbertiana*. Si osservi che l'identificazione fatta si riassume nella formula

$$\langle u,v\rangle = (u,v) \qquad \forall\, u\in H \quad \forall\, v\in V. \tag{7}$$

Si noti inoltre che nella costruzione della terna hilbertiana la scelta del prodotto scalare di V non ha giocato alcun ruolo. Al contrario, l'identificazione di H con un sottospazio di V' mediante l'applicazione I necessita della scelta preventiva, che pensiamo appunto di aver operato una volta per tutte, del prodotto scalare di H (scelte diverse porterebbero a diverse identificazioni). La scelta effettiva del prodotto scalare di V è invece essenziale nel punto successivo e scelte diverse portano a diversi isomorfismi.

2. L'isomorifismo di Riesz di V. Per ogni $u\in V$ consideriamo il funzionale

$$Ju : v \mapsto (\!(u,v)\!), \qquad v\in V$$

che risulta lineare e continuo su V. Il Teorema di rappresentazione di Riesz afferma che l'applicazione $J : u \mapsto Ju$ è un isomorfismo isometrico di V su V'. Abbiamo allora

$$\langle Ju, v\rangle = (\!(u, v)\!) = (\!(Ju, Jv)\!)_* \qquad \forall\, u, v \in V. \tag{8}$$

In particolare

$$\|u\|^2 = \langle Ju, u\rangle \quad \forall\, u \in V \qquad \text{e} \qquad \|w\|_*^2 = \langle w, J^{-1}w\rangle \quad \forall\, w \in V'. \tag{9}$$

3. Osservazione. Conviene chiarire subito un fatto molto importante. In generale, non possiamo interpretare anche J come identificazione. Denotando infatti con i l'immersione di V in H e tornando a denotare con I quella di H in V', abbiamo che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\;i\;} & H \\ & {\scriptstyle J}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle I} & \\ & V' & \end{array}$$

non è in generale commutativo. L'uguaglianza $J = I \circ i$ equivale infatti a

$$\langle Ju, v\rangle = \langle Iu, v\rangle \quad \forall\, u, v \in V, \qquad \text{cioè a} \qquad (\!(u, v)\!) = (u, v) \quad \forall\, u, v \in V,$$

dunque al fatto che la struttura hilbertiana di V coincide con quella che H induce su V. Per la (2) e per la completezza di V, l'uguaglianza $J = I \circ i$ equivale allora la fatto che V e H sono lo stesso spazio di Hilbert con lo stesso prodotto scalare.

4. Densità di V in V'. Si potrebbe procedere dimostrando che l'unico elemento di V' ortogonale a V in V' è l'elemento nullo. Sebbene questa via sia semplice, preferiamo seguirne un'altra, più complessa ma più redditizia. Per ogni $u \in V'$ costruiamo una famiglia $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ di elementi di V che converge a u in V' per $\varepsilon \to 0$. Consideriamo il problema di *perturbazioni singolari* che consiste nel trovare

$$u_\varepsilon \in V \qquad \text{tale che} \qquad u_\varepsilon + \varepsilon^2 Ju_\varepsilon = u. \tag{10}$$

La convergenza voluta è allora conseguenza della proposizione successiva, che fornisce anche informazioni ulteriori sull'approssimazione considerata e alla quale premettiamo un lemma di carattere generale, molto semplice e utile.

5. Lemma. *Siano W uno spazio di Hilbert, $\{w_n\}$ una successione in W e w un elemento di W. Allora condizione sufficiente perché $\{w_n\}$ converga fortemente a w in W è che essa vi converga debolmente e che valga la disuguaglianza*

$$\|w_n\| \le \|w\| \qquad \forall\, n. \;\blacksquare \tag{11}$$

Dimostrazione. Se vale la (11) abbiamo per ogni n

$$\|w_n - w\|^2 = \|w_n\|^2 + \|w\|^2 - 2(w_n, w) \le 2\,\|w\|^2 - 2(w_n, w).$$

Se poi $w_n \rightharpoonup w$, l'ultimo membro tende a $2\|w\|^2 - 2(w,w) = 0$. ■

Con una lievissima modifica nella dimostrazione possiamo sostituire la (11) con

$$\|w_n\| \le c_n \|w\| \qquad \forall\, n$$

ove $\{c_n\}$ è una successione numerica che converge a 1 .

6. Proposizione. *Per ogni* $u \in V'$ *e* $\varepsilon > 0$, *il problema* (10) *ha una e una sola soluzione* u_ε . *Abbiamo inoltre*

$$\|u_\varepsilon\|_* \le \|u\|_*, \qquad \varepsilon|u_\varepsilon| \le \|u\|_* \qquad \text{e} \qquad \varepsilon^2\|u_\varepsilon\| \le \|u\|_* \tag{12}$$

$$u_\varepsilon \to u \quad \textit{in } V' \quad \textit{per } \varepsilon \to 0. \ ■ \tag{13}$$

Dimostrazione. L'equazione in (10) si riscrive come

$$(u_\varepsilon, v) + \varepsilon^2(\!(u_\varepsilon, v)\!) = \langle u, v\rangle \qquad \forall\, v \in V. \tag{14}$$

Osserviamo ora che la forma

$$(\!(w,v)\!)_\varepsilon = (w,v) + \varepsilon^2(\!(w,v)\!), \qquad w, v \in V$$

è bilineare e simmetrica su $V \times V$ e che, per ogni $v \in V$, valgono le disuguaglianze

$$(\!(v,v)\!)_\varepsilon \le (c_*^2 + \varepsilon^2)\|v\|^2 \qquad \text{e} \qquad (\!(v,v)\!)_\varepsilon \ge \varepsilon^2\|v\|^2.$$

Deduciamo che $(\!(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\!)_\varepsilon$ è un prodotto scalare in V equivalente a quello preesistente e, dunque, possiamo applicare il Teorema di Riesz. Quindi (10) ha effettivamente una e una sola soluzione.

Dimostriamo ora le (12). Prendiamo $v = J^{-1}u_\varepsilon$ in (14). Usando le (7), (8) e (9), abbiamo

$$\begin{aligned}
&(u_\varepsilon, J^{-1}u_\varepsilon) = \langle u_\varepsilon, J^{-1}u_\varepsilon\rangle = \|u_\varepsilon\|_*^2 \\
&(\!(u_\varepsilon, J^{-1}u_\varepsilon)\!) = (\!(J^{-1}u_\varepsilon, u_\varepsilon)\!) = \langle u_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle = |u_\varepsilon|^2 \\
&\langle u, J^{-1}u_\varepsilon\rangle = (\!(u, u_\varepsilon)\!)_* \le \|u\|_*\|u_\varepsilon\|_*
\end{aligned}$$

e la (14) fornisce

$$\|u_\varepsilon\|_*^2 + \varepsilon^2|u_\varepsilon|^2 \le \|u\|_*\|u_\varepsilon\|_*.$$

Trascurando il secondo addendo deduciamo allora la prima delle (12). Trascurando invece il primo addendo e usando la disuguaglianza appena dimostrata, deduciamo

$$\varepsilon^2|u_\varepsilon|^2 \le \|u\|_*\|u_\varepsilon\|_* \le \|u\|_*^2$$

cioè la seconda delle (12). Per dimostrare la terza prendiamo invece $v = u_\varepsilon$. Otteniamo

$$|u_\varepsilon|^2 + \varepsilon^2\|u_\varepsilon\|^2 \le \|u\|_*\|u_\varepsilon\|$$

e trascurando il primo addendo concludiamo.

Dimostriamo infine la (13). Dalle (12) deduciamo

$$u_\varepsilon \rightharpoonup w \quad \text{in } V' \qquad \text{e} \qquad \varepsilon^2 u_\varepsilon \rightharpoonup z \quad \text{in } V$$

per certe $w \in V'$ e $z \in V$ e almeno per una certa sottosuccessione estratta (ma non vogliamo appesantire le notazioni). Queste convergenze implicano

$$\varepsilon^2 u_\varepsilon \to 0, \qquad \varepsilon^2 u_\varepsilon \rightharpoonup z \qquad \text{e} \qquad \varepsilon^2 J u_\varepsilon \rightharpoonup Jz \qquad \text{in } V'.$$

Per confronto otteniamo $z = 0$ e passando al limite in (10) vediamo che $w = u$. Dunque tutta la famiglia $\{u_\varepsilon\}$ converge a u debolmente in V' e la convergenza forte segue dal Lemma 5. ■

7. Osservazione. Con tecniche dello stesso tipo si dimostrano altre stime a priori e convergenze più precise in ipotesi più forti su u. Ad esempio

$$|u_\varepsilon| \le |u|, \quad \varepsilon\|u_\varepsilon\| \le |u|, \quad \|u_\varepsilon - u\|_* \le \varepsilon|u| \qquad \text{e} \qquad u_\varepsilon \to u \quad \text{in } H$$
$$\|u_\varepsilon\| \le \|u\|, \quad |u_\varepsilon - u| \le \varepsilon\|u\|, \quad \|u_\varepsilon - u\|_* \le \varepsilon^2\|u\| \qquad \text{e} \qquad u_\varepsilon \to u \quad \text{in } V$$

rispettivamente nelle ipotesi $u \in H$ e $u \in V$.

8. Osservazione. Si può anche iterare il procedimento. Dato $u \in V'$ e introdotta la soluzione u_ε di (10), si può prendere in considerazione la soluzione dell'analogo problema

$$u_{\varepsilon\varepsilon} \in V \qquad \text{tale che} \qquad u_{\varepsilon\varepsilon} + \varepsilon^2 J u_{\varepsilon\varepsilon} = u_\varepsilon.$$

Le (12) forniscono

$$\|u_{\varepsilon\varepsilon}\|_* \le \|u_\varepsilon\|_* \le \|u\|_* \qquad \text{e} \qquad \varepsilon^2\|u_{\varepsilon\varepsilon}\| \le \|u_\varepsilon\|_* \le \|u\|_*.$$

Ragionando come nella dimostrazione precedente vediamo allora che $\{u_{\varepsilon\varepsilon}\}$ converge a u fortemente in V' per $\varepsilon \to 0$. Si noti che $u_{\varepsilon\varepsilon}$ ha, rispetto a u_ε, l'ulteriore proprietà $Ju_{\varepsilon\varepsilon} \in V$. Nelle applicazioni concrete ciò significa che $u_{\varepsilon\varepsilon}$ è più regolare di u_ε.

Tuttavia la maggior regolarità dell'approssimazione può essere ottenuta con strumenti diversi. Ad esempio, volendo partire ancora da u_ε e supponendo che V_0 sia un sottospazio denso di V, per ogni ε possiamo scegliere $u^\varepsilon \in V_0$ tale che $\|u^\varepsilon - u_\varepsilon\| \le \varepsilon$. Allora anche la famiglia $\{u^\varepsilon\}$ converge a u in V' per $\varepsilon \to 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ vale la regolarità ulteriore $u^\varepsilon \in V_0$. ■

Ora introduciamo vari spazi funzionali a partire da uno spazio W. Per semplicità supponiamo che W sia di Hilbert, in aggiunta separabile, anche se molto (ma non tutto!) di quanto diciamo si estende al caso degli spazi di Banach, separabili o meno. Nel seguito, T è un fissato numero reale positivo.

9. Spazi di funzioni continue a valori vettoriali. Con $C^0([0,T];W)$ denotiamo lo spazio delle funzioni $v : [0,T] \to W$ continue munito della norma del massimo

$$\|v\|_{C^0([0,T];W)} = \max_{0 \le t \le T} \|v(t)\|.$$

Chiaramente otteniamo uno spazio di Banach. Inoltre, se $W_1 \subseteq W_2$ con immersione continua, abbiamo $C^0([0,T];W_1) \subseteq C^0([0,T];W_2)$ con immersione continua. In particolare, se (V,H,V') è una terna hilbertiana, abbiamo

$$C^0([0,T];V) \subseteq C^0([0,T];H) \subseteq C^0([0,T];V')$$

le immersioni essendo continue, e considerazioni analoghe valgono per gli spazi successivi.

Se $v : [0,T] \to W$ e $t \in [0,T]$, possiamo definire la derivata $v'(t)$ come limite del rapporto incrementale, non appena il limite esista nel senso della convergenza forte di W. In tal caso diciamo che v è derivabile in t. Diciamo poi che v è derivabile se è derivabile in ogni punto $t \in [0,T]$. Come nel caso scalare la derivabilità implica la continuità.

Con $C^1([0,T];W)$ denotiamo lo spazio delle funzioni derivabili con derivata continua e, iterando il procedimento, definiamo $C^k([0,T];W)$ per ogni $k \geq 0$ intero. Questi sono spazi di Banach rispetto alla norma

$$\|v\|_{C^k([0,T];W)} = \sum_{i=0}^{k} \|v^{(i)}\|_{C^0([0,T];W)} .$$

Con $C^\infty([0,T];W)$ denotiamo poi l'intersezione di tutti gli spazi $C^k([0,T];W)$. Diciamo infine che una funzione $v \in C^\infty([0,T];W)$ è una funzione a supporto compatto se essa è nulla in un intorno di 0 e in un intorno di T e denotiamo con $\mathcal{D}(0,T;W)$ il sottospazio di $C^\infty([0,T];W)$ delle funzioni a supporto compatto. In questi spazi non mettiamo alcuna norma.

10. Spazi di funzioni integrabili a valori vettoriali. Per funzioni a valori in uno spazio di Banach o di Hilbert W si possono dare più nozioni naturali di misurabilità. Queste sono distinte nel caso generale (nel senso che alcune sono molto più restrittive di altre) e invece equivalenti se W è uno spazio di Hilbert separabile, come noi stiamo supponendo. In questa ipotesi, sostanzialmente, risulta misurabile ogni funzione costruita con procedimenti abituali a partire da funzioni misurabili, per cui, come nel caso scalare, le richieste di misurabilità diventano blande al punto che possiamo addirittura non curarcene e, ai fini dell'integrabilità, badare solo ai problemi di convergenza.

In particolare, per ogni funzione (misurabile) u e per ogni $p \in [1,\infty)$, ha senso considerare l'integrale di Lebesgue (che potrà eventualmente assumere valore infinito)

$$\int_0^T \|v(t)\|^p \, dt$$

e definire $L^p(0,T;W)$ come lo spazio delle funzioni (misurabili) tali che l'integrale precedente sia finito. La norma naturale in $L^p(0,T;W)$ è definita da

$$\|v\|_{L^p(0,T;W)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|^p \, dt \right)^{1/p} .$$

Con modifiche abituali si definisce poi $L^\infty(0,T;W)$, del quale $C^0([0,T];W)$ risulta sottospazio chiuso.

Gli spazi $L^p(0,T;W)$ sono spazi di Banach per ogni $p \in [1,\infty]$ e decrescono al crescere di p, le immersioni essendo tutte continue grazie alla disuguaglianza di Hölder. Lo spazio $L^2(0,T;W)$ è poi di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(u,v)_{L^2(0,T;W)} = \int_0^T (u(t),v(t))\,dt.$$

Se $v \in L^1(0,T;W)$ e E è un sottoinsieme (misurabile) di $[0,T]$, con un opportuno procedimento di approssimazione mediante funzioni che assumono solo un numero finito di valori, si definisce l'integrale

$$\int_E v(t)\,dt. \tag{15}$$

Esso è un elemento di W. La teoria che ne deriva è simile a quella del caso scalare (grazie al fatto che W è uno spazio di Hilbert separabile, mentre certi risultati *non si estendono* al caso in cui W è un generico spazio di Banach). In particolare valgono le proprietà di linearità, completa additività e assoluta continuità (con enunciati analoghi a quelli usuali), il fatto che una funzione v (misurabile) è integrabile se e solo se è integrabile la funzione $t \mapsto \|v(t)\|$, la disuguaglianza e l'uguaglianza

$$\Big\| \int_E v(t)\,dt \Big\| \le \int_E \|v(t)\|\,dt \qquad \text{e} \qquad \int_E (v(t),w)\,dt = \Big(\int_E v(t)\,dt, w \Big)$$

per ogni $w \in W$. Inoltre la funzione integrale che si costruisce di conseguenza, cioè la funzione che a ogni $t \in [0,T]$ associa l'integrale di v su $[0,t]$, è continua in ogni punto e derivabile con derivata $v(t)$ in quasi ogni punto, abbiamo cioè

$$\frac{d}{dt}\int_0^t v(s)\,ds = v(t) \qquad \text{q.o. in } (0,T)\,. \tag{16}$$

Notiamo che ciò non vale più se W è un generico spazio di Banach.

Analogamente si introducono gli spazi $L^p(-\infty,+\infty;W)$ e l'integrale sulla retta per funzioni a valori in W. Ciò consente, in particolare, di definire la convoluzione

$$(u*v)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-s)\,v(s)\,ds$$

di una funzione u a valori in W con una funzione v reale (o viceversa) verificanti condizioni di sommabilità e di sviluppare una teoria simile a quella nota per funzioni scalari. Valgono ad esempio i risultati di regolarità della convoluzione quando uno dei due fattori è regolare e l'estensione del Teorema di Young, di cui citiamo solo un caso particolare: se $u \in L^p(-\infty,+\infty;W)$ con $1 \le p \le \infty$ e $v \in L^1(-\infty,+\infty)$, allora la convoluzione $u*v$ è ben definita q.o., appartiene a $L^p(-\infty,+\infty;W)$ e verifica la disuguaglianza

$$\|u*v\|_{L^p(-\infty,+\infty;W)} \le \|u\|_{L^p(-\infty,+\infty;W)}\,\|v\|_{L^1(-\infty,+\infty)}\,.$$

Come nel caso scalare abbiamo di conseguenza:

$$\mathcal{D}(0,T;W) \text{ è denso in } L^p(0,T;W) \text{ se } 1 \le p < \infty \,. \tag{17}$$

Tornando alla terna hilbertiana (V,H,V'), possiamo combinare la (17) con un uso accorto della Proposizione 6 e dedurre altri risultati di densità.

11. Proposizione. *Sia* $1 \le p < \infty$ *. Data* $u \in L^p(0,T;V')$ *, per ogni* $\varepsilon > 0$ *e per quasi ogni* $t \in (0,T)$ *, sia* $u_\varepsilon(t) \in V$ *la soluzione dell'equazione*

$$u_\varepsilon(t) + \varepsilon^2 J u_\varepsilon(t) = u(t). \tag{18}$$

Allora $u_\varepsilon \in L^p(0,T;V)$ *per ogni* $\varepsilon > 0$ *. Inoltre* u_ε *converge a* u *in* $L^p(0,T;V')$ *per* $\varepsilon \to 0$ *. Infine* u_ε *converge a* u *in* $L^p(0,T;H)$ *e in* $L^p(0,T;V)$ *nelle rispettive ipotesi supplementari* $u \in L^p(0,T;H)$ *e* $u \in L^p(0,T;V)$ *.* ■

Dimostrazione. Le (12) e (13) implicano la prima tesi e il fatto che all'integrale

$$\int_0^T \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_*^p \, dt$$

si possa applicare il Teorema della convergenza dominata di Lebesgue, cioè la seconda tesi. L'ultima parte dell'enunciato si ottiene usando analogamente le stime e le convergenze elencate nell'Osservazione 7. ■

Combinando questo risultato con la (17) applicata a V otteniamo:

12. Corollario. *Se* $1 \le p < \infty$ *, allora* $\mathcal{D}(0,T;V)$ *è un sottospazio denso anche negli spazi* $L^p(0,T;H)$ *e* $L^p(0,T;V')$ *.* ■

Ora ci occupiamo di derivate in senso generalizzato di funzioni a valori in uno spazio di Hilbert separabile W. Premettiamo due risultati. Nella dimostrazione del primo di essi presupponiamo l'analogo risultato per funzioni reali.

13. Lemma. *Sia* $u \in L^1(0,T;W)$ *tale che*

$$\int_0^T (u(t), v(t)) \, dt = 0 \qquad \forall \, v \in \mathcal{D}(0,T;W).$$

Allora $u(t) = 0$ *q.o. in* $(0,T)$ *.* ■

Dimostrazione. Prendendo in particolare $v(t) = \varphi(t) z$ con $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $z \in W$ ad arbitrio, deduciamo dall'ipotesi che

$$\int_0^T (u(t), z) \, \varphi(t) \, dt = 0 \qquad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(0,T) \qquad \forall \, z \in W.$$

Dunque, per ogni $z \in W$, risulta $(u(t), z) = 0$ q.o. in $(0,T)$, esiste cioè un insieme $E_z \subset (0,T)$ di misura nulla tale che $(u(t), z) = 0$ per ogni $t \notin E_z$. Scelta una base hilbertiana $\{z_n\}$ per W, esiste allora un insieme $E \subset (0,T)$ di misura nulla tale che $(u(t), z_n) = 0$ per ogni n e per ogni $t \notin E$, da cui $u(t) = 0$ per ogni $t \notin E$. ■

14. Proposizione. *Siano $u, w \in L^1(0,T;W)$. Allora sono equivalenti le tre condizioni seguenti:*

$$\text{esiste } c \in W \text{ tale che} \quad u(t) = c + \int_0^t w(s)\,ds \qquad \text{q.o. in } [0,T] \tag{19}$$

$$\int_0^T (w(t), v(t))\,dt = -\int_0^T (u(t), v'(t))\,dt \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(0,T;W) \tag{20}$$

$$\int_0^T (w(t), z)\,\varphi(t)\,dt = -\int_0^T (u(t), z)\,\varphi'(t)\,dt \qquad \forall\, z \in W, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T). \ ■ \tag{21}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che (19) implica (20), supponendo $c = 0$ senza ledere la generalità. Se $v \in \mathcal{D}(0,T;W)$ abbiamo

$$-\int_0^T (u(t), v'(t))\,dt = -\int_0^T \Bigl(\int_0^t w(s)\,ds, v'(t)\Bigr)\,dt = -\int_0^T \Bigl\{\int_0^t (w(s), v'(t))\,ds\Bigr\}\,dt$$

$$= -\int_0^T \Bigl\{\int_s^T (w(s), v'(t))\,dt\Bigr\}\,ds = -\int_0^T \Bigl(w(s), \int_s^T v'(t)\,dt\Bigr)\,ds = \int_0^T (w(s), v(s))\,ds.$$

Dimostriamo ora che (20) implica (19) considerando dapprima il caso particolare $w = 0$. Dimostriamo cioè che la (20) con $w = 0$ implica la (19) con $w = 0$. Fissiamo

$$\varphi \in \mathcal{D}(0,T) \quad \text{tale che} \quad \int_0^T \varphi(t)\,dt = 1$$

e definiamo

$$c = \int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt$$

osservando che $c \in W$. Per ogni $v \in \mathcal{D}(0,T;W)$ poniamo ora

$$I(v) = \int_0^T v(t)\,dt \qquad \text{e} \qquad v_*(t) = \int_0^t \bigl(v(s) - \varphi(s) I(v)\bigr)\,ds, \quad t \in [0,T]$$

e osserviamo che $I(v) \in W$, $v_* \in \mathcal{D}(0,T;W)$ e $v_*' = v - \varphi I(v)$. Abbiamo allora

$$\int_0^T (u(t), v(t))\,dt = \int_0^T \bigl(u(t), v_*'(t) + \varphi(t) I(v)\bigr)\,dt = \int_0^T \bigl(u(t)\,\varphi(t), I(v)\bigr)\,dt$$

$$= \Bigl(\int_0^T u(t)\,\varphi(t)\,dt, I(v)\Bigr) = (c, I(v)) = \Bigl(c, \int_0^T v(t)\,dt\Bigr) = \int_0^T (c, v(t))\,dt.$$

Applicato il Lemma 13 alla funzione $t \mapsto u(t) - c$, concludiamo.

Valga ora la (20) con $w \in L^1(0,T;W)$ generica. Introduciamo la funzione

$$\underline{u}(t) = \int_0^t w(s)\,ds, \qquad t \in [0,T]$$

per cui la (19) diventa $u(t) - \underline{u}(t) = c$ quasi ovunque, per un'opportuna costante $c \in W$. Per la prima parte, vediamo che vale la (20) con $\underline{u}$ al posto di u. Dunque vale la stessa (20) con $u - \underline{u}$ al posto di u e 0 al posto di w. Siamo dunque ricondotti al caso particolare considerato sopra e la (19) segue.

Prendendo $v(t) = \varphi(t)z$ nella (20), deduciamo immediatamente che la (20) implica la (21) e, per concludere, dimostriamo che la (21) implica la (20). Dalla (21) deduciamo che la (20) vale per tutte le v del tipo $v(t) = \varphi(t)\,z$ con $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $z \in W$, dunque anche per tutte le combinazioni lineari finite di funzioni di questo tipo. Sia ora $v \in \mathcal{D}(0,T;W)$ ad arbitrio. Ricordato che W è separabile, fissiamo una base hilbertiana $\{z_n\}$ di W e per ogni $n \geq 1$ intero introduciamo la funzione

$$v_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (v(t), z_k) z_k, \qquad t \in [0,T]$$

che è del tipo appena considerato. Abbiamo dunque

$$\int_0^T (w(t), v_n(t))\,dt = -\int_0^T (u(t), v_n'(t))\,dt$$

e ora dimostriamo che i due membri di questa formula tendono ai due membri della (20) per $n \to \infty$. Infatti, per ogni t e n, i valori $v_n(t)$ e $v_n'(t)$ sono le ridotte delle serie di Fourier di $v(t)$ e di $v'(t)$ rispetto alla base hilbertiana considerata. Dunque esse convergono fortemente in W a $v(t)$ e a $v'(t)$ per $n \to \infty$. Per lo stesso motivo valgono le disuguaglianze

$$\|v_n(t)\| \leq \|v(t)\| \leq \sup_{0 \leq s \leq T} \|v(s)\|$$

e l'analoga per v'. Quindi, essendo $u, w \in L^1(0,T;W)$, è possibile passare al limite in entrambi gli integrali mediante il Teorema di Lebesgue. ∎

Notiamo che, chiaramente, se $u \in C^1([0,T];W)$, nelle formule precedenti possiamo prendere come w la derivata classica di u. Dunque la definizione che ora diamo generalizza la nozione di derivata di una funzione regolare.

15. Definizione. *Siano $u, w \in L^1(0,T;W)$. Diciamo che w è la derivata di u in $L^1(0,T;W)$ quando valgono le condizioni del risultato precedente.* ∎

Se $u \in L^1(0,T;W)$ e se esiste $w \in L^1(0,T;W)$ nelle condizioni della definizione precedente, scriviamo più semplicemente

$$w = u' \qquad \text{e} \qquad u' \in L^1(0,T;W).$$

Questo modo di dire è giustificato dall'unicità di w, che segue dal Lemma 13. Notiamo inoltre che la (20) si esprime dicendo che *w è la derivata di u nel senso delle distribuzioni a valori in W* e che che la (21) esprime il fatto che, per ogni $z \in W$, la funzione $t \mapsto (w(t), z)$ è la derivata della funzione $t \mapsto (u(t), z)$ nel senso delle distribuzioni in $(0, T)$. Notiamo infine che, se (V, H, V') è una terna hilbertiana e $u, w \in L^1(0, T; V')$, la (20) con $W = V'$ equivale alla condizione

$$\int_0^T \langle w(t), v(t) \rangle \, dt = - \int_0^T \langle u(t), v'(t) \rangle \, dt \qquad \forall \, v \in \mathcal{D}(0, T; V). \tag{22}$$

Osservato che la (19) implica $u \in C^0([0, T]; W)$, diamo il risultato seguente:

16. Proposizione. *Sia $u \in L^1(0, T; W)$ dotata di derivata in $L^1(0, T; W)$. Allora $u \in C^0([0, T]; W)$ e vale la disuguaglianza*

$$\|u\|_{C^0([0,T];W)} \le C \left(\|u\|_{L^1(0,T;W)} + \|u'\|_{L^1(0,T;W)} \right) \tag{23}$$

ove C dipende solo da T. ■

Dimostrazione. Dalla (19) deduciamo che la formula fondamentale del calcolo

$$u(t) = u(\tau) + \int_\tau^t u'(s) \, ds$$

vale per ogni $t, \tau \in [0, T]$ e da questa ricaviamo

$$\|u(t)\| \le \|u(\tau)\| + \int_0^T \|u'(s)\| \, ds$$

per ogni $t, \tau \in [0, T]$. Integrando rispetto a τ su $[0, T]$ e prendendo l'estremo superiore rispetto a t su $[0, T]$ concludiamo. ■

17. Spazi di Sobolev. Ci limitiamo agli spazi di tipo hilbertiano H^k costruiti su uno spazio di Hilbert separabile W. Il più semplice di questi è

$$H^1(0, T; W) = \left\{ v \in L^2(0, T; W) : \quad v' \in L^2(0, T; W) \right\}. \tag{24}$$

Il senso preciso di tale definizione è il seguente: data $u \in L^2(0, T; W)$, si richiede che u abbia derivata nel senso detto sopra e che questa appartenga a $L^2(0, T; W)$. Si noti che, grazie alla Proposizione 16, vale l'inclusione

$$H^1(0, T; W) \subseteq C^0([0, T]; W) \qquad \text{con immersione continua.} \tag{25}$$

Con tecniche di prolungamento e regolarizzazione mediante convoluzione, si vede poi che

$$C^\infty([0, T]; W) \ \text{è denso in} \ H^1(0, T; W). \tag{26}$$

Procedendo per induzione su k, si introducono gli spazi $H^k(0,T;W)$

$$H^{k+1}(0,T;W) = \left\{ v \in H^k(0,T;W) : \quad v^{(k)} \in H^1(0,T;W) \right\}.$$

Ad esempio, dire che $u \in H^2(0,T;W)$ significa richiedere che $u, u', u'' \in L^2(0,T;W)$, tutte le derivate essendo intese nel senso specificato sopra. Si dimostra che $H^k(0,T;W)$ è uno spazio di Hilbert rispetto alla norma e al prodotto scalare dati dalle formule

$$\|v\|^2_{H^k(0,T;W)} = \sum_{i=0}^{k} \int_0^T \|v^{(i)}(t)\|^2 \, dt$$

$$(u,v)_{H^k(0,T;W)} = \sum_{i=0}^{k} \int_0^T (u^{(i)}(t), v^{(i)}(t)) \, dt.$$

Nell'ambito della terna hilbertiana (V, H, V'), possiamo anche imporre alle derivate dei vari ordini di appartenere a spazi L^2 costruiti su spazi diversi fra loro.

18. Definizione. *Poniamo*

$$H^1(0,T;V,V') = \left\{ v \in L^2(0,T;V) : \quad v' \in L^2(0,T;V') \right\} \tag{27}$$

e muniamo lo spazio introdotto della norma data dalla formula

$$\|v\|^2_{H^1(0,T;V,V')} = \int_0^T \left(\|v(t)\|^2 + \|v'(t)\|_*^2 \right) dt. \ \blacksquare \tag{28}$$

Tale spazio è di Hilbert. Esso è legato agli spazi di Sobolev usuali dalla formula

$$H^1(0,T;V,V') = L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;V')$$

e la norma (28) è equivalente a quella, pure hilbertiana, definita da

$$\|v\|^2_{H^1(0,T;V,V')} = \|v\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|v'\|^2_{H^1(0,T;V')}$$

Lo spazio (27) è particolarmente importante nella teoria delle equazioni paraboliche, per la quale è utile il risultato successivo, al quale premettiamo due lemmi.

19. Lemma. *Lo spazio* $C^\infty([0,T];V)$ *è denso in* $H^1(0,T;V,V')$. $\blacksquare$

Dimostrazione. Grazie alla (26), basta dimostrare che $H^1(0,T;V)$ è un sottospazio denso di $H^1(0,T;V,V')$. Data $u \in H^1(0,T;V,V')$, per ogni $\varepsilon > 0$ e per quasi ogni $t \in (0,T)$ definiamo $u_\varepsilon(t) \in V$ e $w_\varepsilon(t) \in V$ come le soluzioni delle due equazioni

$$u_\varepsilon(t) + \varepsilon^2 J u_\varepsilon(t) = u(t) \qquad \text{e} \qquad w_\varepsilon(t) + \varepsilon^2 J w_\varepsilon(t) = u'(t).$$

Per la Proposizione 11 abbiamo $u_\varepsilon, w_\varepsilon \in L^2(0,T;V)$ per ogni $\varepsilon > 0$ e le convergenze

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{in } L^2(0,T;V) \qquad \text{e} \qquad w_\varepsilon \to u' \quad \text{in } L^2(0,T;V')\,.$$

Per concludere basta allora dimostrare che $w_\varepsilon = u'_\varepsilon$. A questo scopo introduciamo l'operatore A_ε, lineare e continuo da V' in V, che a ogni $v \in V'$ associa la soluzione $v_\varepsilon \in V$ dell'equazione $v_\varepsilon + \varepsilon^2 J v_\varepsilon = v$ e osserviamo che

$$u_\varepsilon(t) = A_\varepsilon u(t) \qquad \text{e} \qquad w_\varepsilon(t) = A_\varepsilon u'(t).$$

Osserviamo inoltre che A_ε è simmetrico, cioè che

$$\langle u^*, A_\varepsilon v^* \rangle = \langle v^*, A_\varepsilon u^* \rangle \qquad \forall\, u^*, v^* \in V'.$$

Se $v \in \mathcal{D}(0,T;V)$ abbiamo allora

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle w_\varepsilon(t), v(t) \rangle\, dt &= \int_0^T \langle A_\varepsilon u'(t), v(t) \rangle\, dt = \int_0^T \langle u'(t), A_\varepsilon v(t) \rangle\, dt \\ &= -\int_0^T \langle u(t), (A_\varepsilon v)'(t) \rangle\, dt = -\int_0^T \langle u(t), A_\varepsilon v'(t) \rangle\, dt \\ &= -\int_0^T \langle A_\varepsilon u(t), v'(t) \rangle\, dt = -\int_0^T \langle u_\varepsilon(t), v'(t) \rangle\, dt. \ \blacksquare\end{aligned}$$

20. Lemma. *Siano $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ due spazi di Banach inclusi in uno spazio di Banach $\mathcal{V}$ con immersione continua. Sia inoltre $\mathcal{V}_0$ un sottospazio di $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ denso in $\mathcal{V}_1$ e si supponga che esista una costante C tale che valga la maggiorazione*

$$\|v\|_{\mathcal{V}_2} \le C\, \|v\|_{\mathcal{V}_1} \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}_0. \tag{29}$$

Allora $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ e la (29) vale per ogni $v \in \mathcal{V}_1$. $\blacksquare$

Dimostrazione. Sia $v \in \mathcal{V}_1$. Fissata una successione $\{v_n\}$ di elementi di $\mathcal{V}_0$ che converge a v in $\mathcal{V}_1$ e applicata la (29) alle differenze $v_n - v_m$, vediamo che $\{v_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{V}_2$, dunque convergente in $\mathcal{V}_2$ a un certo elemento $w \in \mathcal{V}_2$. Allora $\{v_n\}$ converge a v e a w in $\mathcal{V}$. Concludiamo che $v = w \in \mathcal{V}_2$. Scritta poi la (29) per le v_n, si vede che la stessa vale per v passando al limite. $\blacksquare$

Le ipotesi sugli spazi sono chiaramente sovrabbondanti: infatti nella dimostrazione l'unica completezza che si usa è quella di $\mathcal{V}_1$ e della topologia di $\mathcal{V}$ interessa solo la separazione, che garantisce l'unicità dei limiti. Tuttavia le ipotesi enunciate sono soddisfatte in molte applicazioni.

21. Teorema. *Vale l'inclusione*

$$H^1(0,T;V,V') \subseteq C^0([0,T];H) \tag{30}$$

con immersione continua. Inoltre, se $u, v \in H^1(0,T;V,V')$ *, valgono le formule*

$$\int_\tau^t \big(\langle u'(s), v(s)\rangle + \langle v'(s), u(s)\rangle\big)\, ds = (u(t), v(t)) - (u(\tau), v(\tau)) \tag{31}$$

$$\int_\tau^t \langle v'(s), v(s)\rangle\, ds = \frac{1}{2}|v(t)|^2 - \frac{1}{2}|v(\tau)|^2 \tag{32}$$

per ogni coppia di punti $\tau, t \in [0,T]$ *.* ■

Dimostrazione. Se $u, v \in C^1([0,T];V)$, prendendo il limite del rapporto incrementale come nel caso scalare, si vede che vale la formula di Leibniz

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t)) = \frac{d}{dt}\langle u(t), v(t)\rangle = \langle u'(t), v(t)\rangle + \langle u(t), v'(t)\rangle.$$

Deduciamo la (31) per integrazione. La (32) è poi caso particolare della precedente nell'ipotesi $v \in C^1([0,T];V)$.

Dalla formula appena dimostrata deduciamo una stima che ci consente di applicare il Lemma 20. Per ogni $v \in C^1([0,T];V)$ e per ogni t, τ abbiamo

$$\begin{aligned} |v(t)|^2 &\le |v(\tau)|^2 + 2\int_0^T |\langle v'(s), v(s)\rangle|\, ds \le |v(\tau)|^2 + 2\int_0^T \|v'(s)\|_* \|v(s)\|\, ds \\ &\le |v(\tau)|^2 + \int_0^T \big(\|v(s)\|^2 + \|v'(s)\|_*^2\big)\, ds \le c_* \|v(\tau)\|^2 + \int_0^T \big(\|v(s)\|^2 + \|v'(s)\|_*^2\big)\, ds \end{aligned}$$

e integrando su $(0,T)$ rispetto a τ deduciamo per ogni $t \in [0,T]$

$$T|v(t)|^2 \le c_* \int_0^T \|v(\tau)\|^2\, d\tau + T\int_0^T \big(\|v(s)\|^2 + \|v'(s)\|_*^2\big)\, ds.$$

Abbiamo pertanto

$$\|v\|^2_{C^0([0,T];H)} \le C\, \|v\|^2_{H^1(0,T;V,V')}$$

con ovvia scelta di C . Siamo allora nelle condizioni del Lemma 20 con

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= H^1(0,T;V,V'), \qquad & \mathcal{V}_2 &= C^0([0,T];H) \\ \mathcal{V} &= L^2(0,T;V'), \qquad & \mathcal{V}_0 &= C^1([0,T];V). \end{aligned}$$

Il lemma citato fornisce allora l'inclusione voluta e l'immersione continua.

Per ottenere poi le (31) e (32) per generiche funzioni $u, v \in H^1(0,T;V,V')$, basta approssimare u e v nella norma (28) con successioni $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ di elementi dello spazio $C^1([0,T];V)$, scrivere le formule stesse per le approssimanti e passare al limite. ■

Nello studio delle equazioni paraboliche astratte è poi utile poter disporre di un'analoga immersione e di una formula fondamentale del calcolo legate all'operatore A che interviene nel problema parabolico che si vuole studiare. A questo scopo introduciamo alcuni spazi nuovi che dipendono dall'operatore A.

22. Definizione. *Sia* $A : V \to V'$ *un operatore lineare e continuo. Poniamo*

$$D(A;H) = A^{-1}(H) \tag{33}$$
$$H^1(0,T;D(A;H),H) = \big\{ v \in L^2(0,T;D(A;H)) : \quad v' \in L^2(0,T;H) \big\} \tag{34}$$

e muniamo tali spazi delle norme definite dalle formule

$$\|w\|^2_{D(A;H)} = \|w\|^2 + |Aw|^2 \tag{35}$$
$$\|v\|^2_{H^1(0,T;D(A;H),H)} = \int_0^T \big(\|v(t)\|^2 + |Av(t)|^2 + |v'(t)|^2 \big)\, dt. \ \blacksquare \tag{36}$$

23. Teorema. *Nelle ipotesi della Definizione 22, si supponga che* A *sia anche simmetrico e che sia soddisfatta la seguente ipotesi di coercività debole: esistono* $\alpha, \lambda > 0$ *tali che*

$$\langle Av, v \rangle + \lambda |v|^2 \ge \alpha \|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V. \tag{37}$$

Allora vale l'inclusione

$$H^1(0,T;D(A;H),H) \subseteq C^0([0,T];V) \tag{38}$$

con immersione continua. Inoltre, se $u, v \in H^1(0,T;D(A;H),H)$ *, valgono le formule*

$$\int_\tau^t \big((Au(s), v'(s)) + (Av(s), u'(s)) \big)\, ds = \langle Au(t), v(t) \rangle - \langle Au(\tau), v(\tau) \rangle \tag{39}$$
$$\int_\tau^t (Av(s), v'(s))\, ds = \frac{1}{2} \langle Av(t), v(t) \rangle - \frac{1}{2} \langle Av(\tau), v(\tau) \rangle \tag{40}$$

per ogni coppia di punti $\tau, t \in [0,T]$. $\blacksquare$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $\lambda = 0$. In tal caso la (37) diventa

$$\langle Av, v \rangle \ge \alpha \|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V \tag{41}$$

e viene detta $V-$ ellitticità. La dimostrazione è simile a quella del teorema precedente e necessita di preliminari che si dimostrano in modo analogo. Per questo diamo solo lo schema di ciò che andrebbe fatto. Innanzi tutto si osservi che la forma bilineare a su $V \times V$ definita dalla formula

$$a(u,v) = \langle Au, v \rangle$$

è anche simmetrica. Usando poi la continuità di A e la (41) vediamo che essa è un prodotto scalare su V equivalente a quello preesistente. Se allora muniamo V del prodotto scalare a, abbiamo

$$\|v\|^2 = a(v,v) = \langle Av, v \rangle \qquad \forall\, v \in V$$

e l'isomorfismo di Riesz di V è proprio l'operatore A.

Ciò premesso, si dimostra che

$$C^1([0,T];D(A;H)) \text{ è denso in } H^1(0,T;D(A;H),H)$$

e ciò può essere fatto imitando la dimostrazione del Lemma 19, nella quale $H^1(0,T;V)$ va sostituito con $H^1(0,T;D(A;H))$. Per $u,v \in C^1([0,T];W)$ si dimostra poi la formula di Leibniz

$$\frac{d}{dt}(Au(t),v(t)) = (Au(t),v'(t)) + (Av(t),u'(t))$$

e la si usa, sfruttando in particolare la simmetria di A, per dedurre la stima analoga a quella ottenuta nella dimostrazione del teorema precedente

$$\|v\|^2_{C^0([0,T];V)} \le C\,\|v\|^2_{H^1(0,T;D(A;H),H)}$$

con C dipendente solo da T, che permette di applicare il Lemma 20 con le scelte

$$\mathcal{V}_1 = H^1(0,T;D(A;H),H), \qquad \mathcal{V}_2 = C^0([0,T];V)$$
$$\mathcal{V} = L^2(0,T;H), \qquad \mathcal{V}_0 = C^1([0,T];D(A;H)).$$

Si hanno pertanto l'inclusione voluta e l'immersione continua e, per ottenere poi le (39) e (40) per generiche funzioni $u,v \in H^1(0,T;D(A;H),H)$, ancora si procede per approssimazione e passaggio al limite.

Nel caso generale della (37) possiamo applicare il discorso fatto all'operatore A_λ, che è $V-$ ellittico, definito da

$$A_\lambda u = Au + \lambda u, \qquad u \in V.$$

Notato che $D(A;H)$ e l'analogo spazio $D(A_\lambda;H)$ coincidono e hanno norme equivalenti, resta vera l'immersione (38). Inoltre, scritte le (39) e (40) per A_λ e ricordate le (31) e (32), per differenza otteniamo le (39) e (40) per l'operatore A. ∎

24. Osservazione. I Teoremi 21 e 23 sono ottimali, cioè H e V sono gli spazi più piccoli a valori nei quali riescono a essere continue tutte le funzioni di $H^1(0,T;V,V')$ e di $H^1(0,T;D(A;H),H)$ rispettivamente. Il senso preciso di questa affermazione è il seguente: se H_0 e V_0 sono spazi di Hilbert verificanti le condizioni

$$H_0 \subseteq H \quad \text{e} \quad H^1(0,T;V,V') \subseteq C^0([0,T];H_0) \tag{42}$$
$$V_0 \subseteq V \quad \text{e} \quad H^1(0,T;D(A;H),H) \subseteq C^0([0,T];V_0) \tag{43}$$

con immersioni continue, allora $H_0 = H$ e $V_0 = V$ algebricamente e topologicamente. Dimostriamo queste affermazioni appoggiandoci alla teoria delle equazioni paraboliche astratte, della quale daremo i risultati principali. Le (42) e (43) implicano infatti che sono ben definite, lineari e continue le applicazioni

$$v \mapsto v(0) \quad \text{da } H^1(0,T;V,V') \text{ in } H_0 \quad \text{e} \quad v \mapsto v(0) \quad \text{da } H^1(0,T;D(A;H),H) \text{ in } V_0$$

D'altra parte, grazie appunto ai risultati che dimostreremo, vediamo (applicando il teorema di esistenza e unicità all'operatore $A = J$ e il teorema di regolarità all'operatore A cui siamo interessati scegliendo, ad esempio, $f = 0$ in entrambi casi) che ogni elemento $u_0 \in H$ ha la forma $v(0)$ per una opportuna $v \in H^1(0,T;V,V')$ e che ogni elemento $u_0 \in V$ ha la forma $v(0)$ per una opportuna $v \in H^1(0,T;D(A;H),H)$. Deduciamo $H \subseteq H_0$ e $V \subseteq V_0$, quindi $H_0 = H$ e $V_0 = V$ almeno algebricamente. L'uguaglianza topologica segue poi dal Teorema dell'applicazione aperta di Banach. ∎

Impostiamo ora il problema di Cauchy per un'equazione parabolica astratta nell'ambito della terna hilbertiana (V,H,V') nell'ipotesi che V sia separabile e diamo il corrispondente risultato di esistenza e unicità.

Assegnati un operatore A lineare e continuo da V in V', una funzione f appartenente a $L^2(0,T;V')$ e un dato iniziale $u_0 \in H$, cerchiamo una funzione u nello spazio $H^1(0,T;V,V')$ che risolve il problema di Cauchy

$$u'(t) + Au(t) = f(t) \quad \text{q.o. in } (0,T) \tag{44}$$

$$u(0) = u_0. \tag{45}$$

Si noti che da $u \in H^1(0,T;V,V')$ segue $u \in C^0([0,T];H)$. In particolare ha senso richiedere la condizione di Cauchy (45) ed è chiaro che, se u_0 non appartiene a H, il problema non può avere soluzioni nel senso detto.

Si noti inoltre che la richiesta di regolarità fatta a priori su u assicura che u' è la derivata nel senso delle distribuzioni a valori in V' e non solo il limite puntuale (q.o.) del rapporto incrementale.

Nelle ipotesi fatte su A e su f, la richiesta di regolarità per u e l'equazione (44) possono essere formulate anche in questo altro modo. Cerchiamo u a priori solo in $L^2(0,T;V)$ e tale che la funzione $f - Au$, che appartiene a $L^2(0,T;V')$, verifichi la definizione di derivata di u nel senso delle distribuzioni a valori in V', cioè che

$$\int_0^T \langle f(t) - Au(t), v(t)\rangle \, dt = -\int_0^T \langle u(t), v'(t)\rangle \, dt \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(0,T;V)$$

vale a dire che

$$\int_0^T \Big(-\langle u(t), v'(t)\rangle + \langle Au(t), v(t)\rangle \Big) \, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle \, dt \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(0,T;V). \tag{46}$$

Ciò implica automaticamente $u \in H^1(0,T;V,V')$ e, grazie al Lemma 13, la (44).

Ancora, grazie alla Proposizione 14, è equivalente imporre a priori solo che u appartenga a $L^2(0,T;V)$ e richiedere che la funzione $f - Au \in L^2(0,T;V')$ verifichi la formula (21) relativamente a V', formula che, riordinata e scritta in termini di dualità, diventa

$$\begin{aligned} &\int_0^T \Big(-\langle u(t), z\rangle \, \varphi'(t) + \langle Au(t), z\rangle \, \varphi(t) \Big) \, dt \\ &= \int_0^T \langle f(t), z\rangle \, \varphi(t) \, dt \qquad \forall\, z \in V, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{47}$$

L'ipotesi che facciamo su A è che esso verifichi la condizione di coercività debole (37), che riscriviamo: esistono $\alpha, \lambda > 0$ tali che

$$\langle Av, v\rangle + \lambda|v|^2 \geq \alpha\|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V. \tag{48}$$

Osserviamo che la (48) è molto più generale dell'ipotesi di $V-$ ellitticità (41), che si ottiene prendendo formalmente $\lambda = 0$ nella (48) stessa. Ad esempio, se A verifica la (48) e B è un operatore lineare e continuo di V in H (in particolare un operatore lineare e continuo di H in sé), anche $A + B$ verifica la (48) come si vede facilmente, mentre la $V-$ ellitticità di A non implica quella di $A + B$.

Il fatto che riusciamo a risolvere il problema in queste condizioni più generali non deve stupire più di tanto, e ora facciamo qualche osservazione che giustifica questa affermazione.

Il caso più banale è quello in cui V e H sono lo stesso spazio di dimensione finita. In tali condizioni il nostro problema diventa il problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali ordinarie e, fissata una base per V, l'operatore A si scrive in termini di una matrice quadrata. Ebbene la $V-$ ellitticità equivale al fatto che la matrice in questione sia definita positiva, mentre il problema in esame è risolubile qualunque sia la matrice e la (48) è soddisfatta per ogni matrice (con opportuni α e λ dipendenti da A, ovviamente).

Nel caso generale di una terna hilbertiana qualunque il problema nell'ipotesi (48) può essere ricondotto al caso $V-$ ellittico. Con il cambiamento di incognita

$$u(t) = e^{\lambda t}\, w(t)$$

la (45) diventa $w(0) = u_0$ e la (44) si riscrive come

$$w'(t) + (A + \lambda I)w(t) = e^{-\lambda t} f(t) \quad \text{q.o. in} \quad (0, T)$$

ove I denota l'immersione di V in V' ed è chiaro che la (48) equivale alla $V-$ ellitticità di $A + \lambda I$ con costante di ellitticità α. Dunque, se sappiamo risolvere il problema nel caso $V-$ ellittico, possiamo risolvere lo stesso tipo di problema anche nel caso debolmente coercivo. Notiamo incidentalmente che i due tipi di ipotesi non sono intercambiabili per quanto riguarda lo studio del comportamento asintotico delle soluzioni per $t \to +\infty$, come risulta chiaro dalla trasformazione del secondo membro quando si passa dall'incognita u alla nuova incognita w.

Tuttavia noi, pur volendo studiare solo questioni di esistenza, unicità e regolarità per tempi finiti, non sfrutteremo la possibilità di cambiare incognita. Conserveremo cioè l'ipotesi (48) e gestiremo il termine aggiuntivo che contiene λ sfruttando il fatto che l'equazione è di tipo evolutivo e lasciando intravvedere generalizzazioni possibili. Si immagini infatti che al primo membro della (44) venga aggiunto un termine del tipo $\gamma(u(t))$ ove γ è un operatore non lineare, ad esempio di H in sé. Il cambiamento di incognita visto sopra introddurrebbe nell'equazione trasformata il termine

$$e^{-\lambda t}\gamma\bigl(e^{\lambda t} w(t)\bigr)$$

che è del tipo $\gamma_1(t, w(t))$ e non del tipo $\gamma_1(w(t))$. Il cambiamento di incognita avrebbe, in questo caso, un rovescio della medaglia negativo. Al contrario, un termine $\gamma(u(t))$ con

γ lipschitziano "pesa" più o meno quanto un termine del tipo $\mu u(t)$ con μ reale, che può compromettere la $V-$ ellitticità ma non la coercività debole.

Per gestire il termine aggiuntivo $\lambda|v|^2$ sfruttando il carattere evolutivo dell'equazione useremo il semplice ma fondamentale lemma seguente:

25. Lemma di Gronwall. *Siano* $a, b \geq 0$ *e* $\varphi \in L^1(0,T)$ *tali che*

$$\varphi(t) \leq a + b \int_0^t \varphi(s)\, ds \qquad \textit{q.o. in } \ (0,T). \tag{49}$$

Allora vale la disuguaglianza

$$\varphi(t) \leq a\, e^{bt} \qquad \textit{q.o. in } \ (0,T). \tag{50}$$

Di conseguenza esiste una costante c *che dipende solo da* b *e da* T *tale che*

$$\varphi(t) \leq ca \qquad \textit{q.o. in } \ (0,T). \ \blacksquare \tag{51}$$

Dimostrazione. Supponiamo senz'altro $b > 0$. Riscriviamo la (49) come

$$\frac{d}{dt}\Bigl(e^{-bt} \int_0^t \varphi(s)\, ds\Bigr) \leq a\, e^{-bt} \qquad \text{q.o. in } \ (0,T)$$

e osserviamo che la funzione sotto il segno di derivazione è assolutamente continua. Integrando su $(0,t)$ e usando la formula fondamentale del calcolo otteniamo allora

$$e^{-bt} \int_0^t \varphi(s)\, ds \leq \frac{a}{b}\bigl(1 - e^{-bt}\bigr)$$

per ogni $t \in [0,T]$. Moltiplicando per $b\, e^{bt}$ e sommando a deduciamo

$$a + b \int_0^t \varphi(s)\, ds \leq a\, e^{bt}$$

sempre per ogni $t \in [0,T]$. Riutilizzando la (49), concludiamo che vale la (50). La disuguaglianza (51) vale poi evidentemente con $c = e^{bT}$. $\blacksquare$

Ecco il risultato di esistenza e unicità:

26. Teorema. *Sia* $A : V \to V'$ *lineare, continuo e verificante la condizione di coercività debole* (48)*. Allora, per ogni* $f \in L^2(0,T;V')$ *e* $u_0 \in H$*, esiste una e una sola* u *in* $H^1(0,T;V,V')$ *che risolve il problema di Cauchy* (44) *e* (45)*. Questa verifica inoltre*

$$\|u\|_{H^1(0,T;V,V')} \leq c\Bigl(|u_0| + \|f\|_{L^2(0,T;V')}\Bigr) \tag{52}$$

ove c *dipende solo da* α, λ, T *e dalla norma dell'operatore* A. $\blacksquare$

Notiamo che $u \in H^1(0,T;V,V')$ implica $u(0) \in H$ e $u'+Au \in L^2(0,T;V')$. Dunque il risultato enunciato di esistenza e unicità è il migliore possibile e può essere espresso dicendo che l'applicazione lineare che alla generica $u \in H^1(0,T;V,V')$ associa la coppia $(u(0), u'+Au)$ è un isomorfismo algebrico di $H^1(0,T;V,V')$ su $H \times L^2(0,T;V')$. Questo isomorfismo è poi anche topologico in quanto non solo è continuo, ma ha anche inverso continuo. Infatti la (52) afferma proprio che la soluzione u del problema di Cauchy (44) e (45) di dati u_0 e f dipende da questi con continuità, la continuità essendo intesa appunto rispetto alle norme che compaiono nella (52) stessa.

Dimostrazione. L'unicità si dimostra facilmente e il calcolo successivo potrebbe essere semplificato ulteriormente, essendo lecito supporre f e u_0 nulli data la linearità del problema. Tuttavia, in vista di osservazioni che intendiamo fare, lasciamo i dati generici. Moltiplicando nella dualità fra V' e V l'equazione (44) per $u(t)$ e integrando sul generico intervallo $(0,t)$ con $0 \le t \le T$, abbiamo

$$\int_0^t \langle u'(s), u(s) \rangle \, ds + \int_0^t \langle Au(s), u(s) \rangle \, ds = \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle \, ds.$$

Il primo integrale si tratta con la (32), che possiamo applicare dato che $u \in H^1(0,T;V,V')$, e sostituendo $u(0)$ con u_0 . Stimiamo dal basso il secondo usando la (48)

$$\int_0^t \langle Au(s), u(s) \rangle \, ds \ge \alpha \int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds - \lambda \int_0^t |u(s)|^2 \, ds$$

e stimiamo invece il terzo dall'alto come segue

$$\int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle \, ds = \int_0^t \|f(s)\|_* \|u(s)\| \, ds \le \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds + \frac{1}{2\alpha} \int_0^t \|f(s)\|_*^2 \, ds.$$

Combinando, otteniamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|u(t)|^2 - \frac{1}{2}|u_0|^2 + \alpha \int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds - \lambda \int_0^t |u(s)|^2 \, ds \\ &\le \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds + \frac{1}{2\alpha} \int_0^T \|f(s)\|_*^2 \, ds \end{aligned}$$

dalla quale deduciamo

$$|u(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds \le |u_0|^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|f(s)\|_*^2 \, ds + 2\lambda \int_0^t |u(s)|^2 \, ds.$$

Aggiungendo termini positivi ulteriori al secondo membro, ci riconduciamo alla possibilità di applicare il Lemma di Gronwall con le scelte seguenti:

$$\varphi(t) = |u(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u(s)\|^2, \qquad a = |u_0|^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|f(s)\|_*^2 \, ds \qquad \text{e} \qquad b = 2\lambda.$$

Otteniamo la stima

$$|u(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u(s)\|^2 \le c \left(|u_0|^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|f(s)\|_*^2 \, ds \right)$$

ove c dipende solo da α, λ, T, stima che vale per ogni $t \in [0,T]$ dato che φ è anche continua e che implica la seguente

$$\|u\|^2_{C^0([0,T];H)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;V)} \le c \left(|u_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;V')} \right) \tag{53}$$

con una nuova c nelle stesse condizioni della precedente. Già questa, nel caso dei dati nulli, implica che u è nulla. Ciò dimostra l'unicità della soluzione in ogni caso. Osservato poi che

$$\|Au\|_{L^2(0,T;V')} \le M \, \|u\|_{L^2(0,T;V)} \quad \text{e} \quad \|u'\|_{L^2(0,T;V')} \le \|Au\|_{L^2(0,T;V')} + \|f\|_{L^2(0,T;V')}$$

ove M è la norma dell'operatore A, dalla (53) deduciamo facilmente la (52) con una nuova c che dipende anche da M.

Prima di passare all'esistenza, preferiamo cogliere l'occasione per fare un'osservazione di carattere generale, che dunque si estende anche a problemi di tipo diverso. Sopra abbiamo ottenuto una stima a priori. In questo caso la dimostrazione era rigorosa, in altri potrebbe essere formale, cioè giustificata solo in opportune condizioni di regolarità, non necessariamente soddisfatte da ogni (eventuale) soluzione del problema considerato. Ciò nonostante, la stima suggerirebbe comunque una possibile via che spesso conduce all'esistenza della soluzione. Questa consiste nei punti seguenti: 1) si costruisce un problema approssimato di qualche tipo, che dipende da un parametro e che si sa risolvere, e lo si risolve; 2) si dimostra rigorosamente la stima precedente (o qualche sua variante) per la soluzione del problema approssimato con una costante c che non dipende dal parametro dell'approssimazione; 3) si usa la stima per applicare teoremi di compattezza e si estrae una successione convergente a un limite in qualche topologia; 4) si dimostra che il limite trovato risolve il problema in esame.

Commentiamo brevemente alcuni punti. Il problema approssimato potrebbe essere ottenuto per regolarizzazione. Ad esempio si sa già risolvere il problema in esame quando i dati sono regolari e si vuole dimostrare l'esistenza in condizioni più generali sui dati; in questo caso si regolarizzano i dati. Oppure il problema contiene un operatore "brutto" (tipicamente nel caso non lineare) e si approssima quell'operatore con operatori migliori.

Il problema approssimato potrebbe essere invece ottenuto per "discretizzazione" ed essere dunque un problema di natura abbastanza diversa rispetto a quello dato. Ad esempio, in riferimento all'equazione (44), si può pensare di discretizzare la derivata sostituendola con il rapporto incrementale: in questo caso il problema approssimato risulterebbe di tipo ellittico. Oppure si può discretizzare in qualche modo l'operatore A e questa è la via che seguiremo.

La compattezza fornita dalle stime a priori consentirà, in generale, solo l'estrazione di successioni debolmente convergenti e la topologia in cui queste convergono dovrà essere "abbastanza robusta" da consentire il passaggio al limite. Nei problemi lineari, in generale, basta poco; nei problemi non lineari, invece, occorre spesso avere qualche convergenza forte, e questa può essere ottenuta per via diretta stimando qualche norma della differenza fra il limite e l'elemento generico della successione oppure essere conseguenza di teoremi generali di compattezza forte, ad esempio di tipo Ascoli.

Abbandoniamo ora indicazioni metodologiche di carattere generale e dimostriamo l'esistenza della soluzione del problema (44) e (45) utilizzando il *metodo di Faedo–Galerkin*. Questo consiste nel discretizzare l'operatore A discretizzando in realtà lo spazio V. Precisamente, usando la separabilità di V, fissiamo una successione non decrescente $\{V_n\}$ di sottospazi di V di dimensione finita la cui unione, che denotiamo con V_∞, sia densa in V e, per ogni n fissato, consideriamo il problema approssimato di trovare $u_n \in H^1(0,T;V_n)$ tale che

$$\langle u_n'(t), v\rangle + \langle Au_n(t), v\rangle = \langle f(t), v\rangle \qquad \forall\, v \in V_n \quad \text{q.o. in } (0,T) \tag{54}$$

$$\langle u_n(0), v\rangle = \langle u_0, v\rangle \qquad \forall\, v \in V_n. \tag{55}$$

Detta m la dimensione di V_n, scelta una base $(v^1,\dots,v^m)$ per V_n, rappresentato il generico valore $u_n(t)$ della funzione u_n che stiamo cercando nella forma

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^m y_j(t) v^j$$

e definiti, per $j = 1,\dots,m$, i valori scalari

$$g_j(t) = \langle f(t), v^j\rangle \qquad \text{e} \qquad y_{0j} = \langle u_0, v^j\rangle$$

si vede facilmente che il problema approssimato si scrive come

$$B_n y'(t) + A_n y(t) = g(t) \quad \text{q.o. in } (0,T) \qquad \text{e} \qquad y(0) = y_0 \tag{56}$$

ove $y(t) \in \mathbb{R}^m$ è il vettore $(y_1(t),\dots,y_m(t))$ da intendersi colonna, i vettori $g(t)$ e y_0 sono definiti analogamente e A_n e B_n sono le matrici $m \times m$ di elementi generici a_{ij} e b_{ij} definiti dalle formule

$$a_{ij} = \langle Av^j, v^i\rangle \qquad \text{e} \qquad b_{ij} = (v^j, v^i).$$

Siccome i vettori v^i sono indipendenti, la matrice B_n è invertibile e il problema approssimato consiste in un problema di Cauchy per un sistema lineare di m equazioni differenziali ordinarie in m incognite. Osservato poi che, per $i = 1,\dots,m$, possiamo stimare il modulo di $g_i(t)$ come segue

$$|g_i(t)| \le \|f(t)\|_* \|v^i\| \le \|f(t)\|_* \max_{k=1,\dots,m} \|v^k\|$$

vediamo che l'ipotesi $f \in L^2(0,T;V')$ implica $g_i \in L^2(0,T)$ per ogni i e deduciamo che il problema di Cauchy in esame ha una e una sola soluzione y le cui componenti y_i

appartengono a $H^1(0,T)$. Dunque il problema approssimato ha una e una sola soluzione nello spazio $H^1(0,T;V_n)$ e la trattazione del primo punto del procedimento è conclusa.

Passiamo alla stima a priori. Per questo riprendiamo il problema approssimato nella forma (54) e (55), abbandonando cioè la sua versione (56), e ripercorriamo la prima parte della dimostrazione (che ci ha condotto alla (53)), sostituendo V con V_n, la funzione u con u_n, eccetera. Procedendo esattamente come sopra, otteniamo

$$\|u_n\|^2_{C^0([0,T];H)} + \|u_n\|^2_{L^2(0,T;V)} \le c\left(|u_n(0)|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;V')}\right)$$

ove c è la stessa costante della (53), in particolare indipendente da n. Dobbiamo allora stimare $|u_n(0)|$. Per far questo osserviamo che, essendo $u_n(0)$ e u_0 elementi di H, la (55) può essere riscritta nella forma

$$(u_n(0), v) = (u_0, v) \qquad \forall\, v \in V_n.$$

Dunque $u_n(0)$ è la proiezione ortogonale, nell'ambito dello spazio di Hilbert H, di u_0 sul sottospazio V_n, che è chiuso in quanto ha dimensione finita. Abbiamo allora $|u_n(0)| \le |u_0|$ e la stima ottenuta fornisce

$$\|u_n\|^2_{C^0([0,T];H)} + \|u_n\|^2_{L^2(0,T;V)} \le c\left(|u_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;V')}\right). \tag{57}$$

Cogliamo l'occasione per dedurre un'informazione che utilizzeremo nell'ultimo passo del procedimento. Osserviamo che, grazie alla definizione stessa di proiezione ortogonale, valgono le relazioni

$$|u_n(0) - u_0| = \min_{w \in V_n} |u_0 - w| \le |u_0 - v| \qquad \forall\, v \in V_n$$

e che queste implicano

$$u_n(0) \to u_0 \quad \text{in } H \tag{58}$$

come ora mostriamo. Poniamo $d_n = |u_n(0) - u_0|$ e ricordiamo che $\{V_n\}$ è una successione di sottospazi di V la cui unione V_∞ è densa in V. Dunque V_∞ è densa anche in H e possiamo scegliere una successione $\{v_k\}$ di elementi di V_∞ che converge a u_0 in H. Per ogni k, scegliamo n_k tale che $v_k \in V_{n_k}$. Vediamo allora che tende a 0 la sottosuccessione $\{d_{n_k}\}$. Siccome però la successione $\{d_n\}$ è non crescente in quanto è non decrescente la successione di sottospazi, deduciamo che anche l'intera successione $\{d_n\}$ è infinitesima.

Torniamo all'uso della stima a priori (57), che addirittura utilizziamo solo in parte, deducendo che la successione $\{u_n\}$ è limitata in $L^2(0,T;V)$. Possiamo allora estrarre una sottosuccessione convergente debolmente in $L^2(0,T;V)$. Per non appesantire le notazioni continuiamo a denotare con $\{u_n\}$ la sottosuccessione estratta, ma osserviamo che sostituendo la successione $\{V_n\}$ di sottospazi con una sua sottosuccessione non si perdono proprietà. Detto u il limite debole di $\{u_n\}$, dimostriamo che u risolve il problema di Cauchy in esame, ove la (44) viene sostituita dall'equivalente (47). Abbiamo dunque

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{in } L^2(0,T;V) \tag{59}$$

e osserviamo che la linearità e la continuità di A implicano

$$Au_n \rightharpoonup Au \qquad \text{in } L^2(0,T;V'). \tag{60}$$

Ora fissiamo ad arbitrio una funzione $\varphi \in H^1(0,T)$ nulla in T, moltiplichiamo la (54) per φ, integriamo su $(0,T)$ e usiamo la formula di integrazione per parti. Otteniamo l'uguaglianza

$$-\int_0^T \langle u_n(t), z\rangle \, \varphi'(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t) - Au_n(t), z\rangle \, \varphi(t)\, dt + (u_n(0), z)\, \varphi(0) \qquad \forall\, z \in V_n$$

che vale per ogni indice (estratto) n. Osserviamo inoltre che, per ogni n e $k \geq n$, abbiamo $V_n \subseteq V_k$ grazie alla monotonia della successione di sottospazi. Deduciamo l'informazione più interessante

$$-\int_0^T \langle u_k(t), z\rangle \, \varphi'(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t) - Au_k(t), z\rangle \, \varphi(t)\, dt + (u_k(0), z)\, \varphi(0)$$
$$\forall\, z \in V_n \quad \forall\, k \geq n$$

che, abbinata alle (58), (59) e (60), ci consente di passare al limite per $k \to \infty$ a n fissato. Deduciamo che l'uguaglianza

$$-\int_0^T \langle u(t), z\rangle \, \varphi'(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t) - Au(t), z\rangle \, \varphi(t)\, dt + (u_0, z)\, \varphi(0) \tag{61}$$

vale per ogni n e per ogni $z \in V_n$, dunque per ogni $z \in V_\infty$. Fissata ora $z \in V$, scelta una successione $\{z_k\}$ in V_∞ convergente a z in V, scritta la (61) per gli elementi z_k, notato che

$$\varphi\, z_k \to \varphi z \quad \text{e} \quad \varphi'\, z_k \to \varphi' z \qquad \text{in } L^2(0,T;V)$$

e passando al limite per $k \to \infty$, si conclude che la (61) stessa vale per ogni $z \in V$ e, lo ricordiamo, per ogni $\varphi \in H^1(0,T)$ nulla in T, dato che tale scelta di φ era completamente arbitraria. In particolare deduciamo la (47). Per concludere la dimostrazione ricordiamo che l'appartenenza di u a $L^2(0,T;V)$ e la (47) implicano $u \in H^1(0,T;V,V')$ e la (44) e deduciamo la (45) come segue. Moltiplichiamo la (44) per φz, ove $z \in V$ e $\varphi \in H^1(0,T)$ nulla in T sono ad arbitrio, e integriamo per parti il primo termine. Otteniamo

$$\int_0^T \Bigl(-\langle u(t), z\rangle \, \varphi'(t) + \langle Au(t), z\rangle \, \varphi(t) \Bigr)\, dt = \int_0^T \langle f(t), z\rangle \, \varphi(t)\, dt + (u(0), z)\, \varphi(0)$$

e, confrontando con la (61), deduciamo

$$(u(0), z)\, \varphi(0) = (u_0, z)\, \varphi(0) \qquad \forall\, z \in V$$

e per tutte le φ di tipo detto. Scelta ad esempio $\varphi(t) = T - t$ e ricordato che V è denso in H, deduciamo finalmente la (45). ∎

27. Osservazione. Come traspare dalla dimostrazione, per il problema approssimato avremmo potuto prendere un dato di Cauchy più generale e sostituire la (55) con la condizione iniziale

$$u_n(0) = u_{0n}$$

ove $u_{0n} \in V_n$ per ogni n e la successione $\{u_{0n}\}$ converge a u_0 in H, il che implica anche la limitatezza in H della stessa successione, che è ciò che veramente occorre per arrivare alla stima a priori.

28. Teorema. *Nelle ipotesi precedenti si supponga A anche simmetrico e si assumano le notazioni* (33) *e* (34)*. Se $f \in L^2(0,T;H)$ e $u_0 \in V$, allora la soluzione u del problema* (44) *e* (45) *appartiene a $H^1(0,T;D(A;H),H)$ e vale la stima*

$$\|u\|_{H^1(0,T;D(A;H),H)} \le c\left(\|u_0\| + \|f\|_{L^2(0,T;H)}\right) \tag{62}$$

ove c dipende solo da α, λ, T e dalla norma dell'operatore A. ■

Si può commentare questo risultato analogamente a quanto abbiamo fatto a proposito del Teorema 26 ed esprimerlo in termini di isomorfismi. Esso, infatti, afferma che l'applicazione che a u associa la coppia $(u(0), u' + Au)$, quando viene ristretta allo spazio $H^1(0,T;D(A;H),H)$, fornisce un isomorfismo algebrico e topologico di questo spazio su $V \times L^2(0,T;H)$.

Osserviamo inoltre che questo risultato di regolarità abbina, e ciò è tipico dei problemi parabolici, regolarità in tempo a una versione astratta della regolarità in spazio. Infatti esso fornisce, in particolare, $u(t) \in D(A;H)$ per quasi ogni t e nel caso concreto di certi problemi ai limiti importanti per equazioni a derivate parziali ciò significa proprio che $u(t)$ è una funzione più regolare rispetto alle variabili spaziali.

Dimostrazione. Riprendiamo il metodo di Galerkin usato nella dimostrazione del Teorema 26 e, conservandone le notazioni, dimostriamo una stima a priori in più per la successione $\{u_n\}$ delle soluzioni dei problemi approssimanti, per i quali però prendiamo dati iniziali opportuni. In riferimento all'osservazione precedente, richiediamo ora che la successione $\{u_{0n}\}$ converga a u_0 in V, il che implica le proprietà richieste nell'osservazione stessa. Per comodità assumiamo anche una stima del tipo $\|u_{0n}\| \le c\|u_0\|$. Queste condizioni si possono realizzare prendendo come u_{0n}, ad esempio, la proiezione di u_0 su V_n rispetto al prodotto scalare di V.

Per dimostrare la stima voluta scegliamo $v = u_n'(t)$ nella (54), osservando che la scelta fatta è lecita in quanto $u_n \in H^1(0,T;V_n)$, e integriamo sull'intervallo $(0,t)$. Otteniamo

$$\int_0^t |u_n'(s)|^2\, ds + \int_0^t \langle Au_n(s), u_n'(s)\rangle\, ds = \int_0^t (f(s), u_n'(s))\, ds$$

e ora stimiamo dal basso e dall'alto il secondo addendo del primo membro e il secondo membro rispettivamente. Grazie alla regolarità di u_n, alla simmetria di A e alla (48) abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \langle Au_n(s), u_n'(s)\rangle\, ds = \frac{1}{2}\langle Au_n(t), u_n(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle Au_{0n}, u_{0n}\rangle \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 - \frac{\lambda}{2}|u_n(t)|^2 - \frac{M}{2}\|u_{0n}\|^2 \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 - \frac{\lambda}{2}|u_n(t)|^2 - c\|u_0\|^2
\end{aligned}$$

ove M è la norma di A e c dipende anche da M. D'altra parte, vale banalmente la disuguaglianza

$$\int_0^t (f(s), u_n'(s))\, ds \leq \frac{1}{2}\int_0^T |f(s)|^2\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t |u_n'(s)|^2\, ds.$$

Otteniamo pertanto

$$\frac{1}{2}\int_0^t |u_n'(s)|^2\, ds + \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 \leq \frac{\lambda}{2}|u_n(t)|^2 + c\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T |f(s)|^2\, ds.$$

Ricordando che la successione $\{u_n\}$ è limitata in $C^0([0,T];H)$, come risulta dalla dimostrazione del Teorema 26, vediamo allora che il secondo membro si mantiene limitato e concludiamo in particolare che la successione $\{u_n'\}$ è limitata in $L^2(0,T;H)$. Dunque, a meno di estrarre una sottosuccessione, deduciamo che essa converge nello stesso spazio. Siccome il suo limite nel senso di $L^2(0,T;V')$ è u', concludiamo che $u' \in L^2(0,T;H)$ e che vale la stima

$$\|u'\|_{L^2(0,T;H)} \leq c\Big\{\|u_0\| + \|f\|_{L^2(0,T;H)}\Big\}$$

con una nuova costante c.

Dall'equazione (44) scritta nella forma $Au = f - u'$ deduciamo poi che anche Au appartiene a $L^2(0,T;H)$ e che la sua norma si stima analogamente. ∎

29. Osservazione. Qualche semplice modifica nella dimostrazione precedente consente di arrivare allo stesso risultato di regolarità in condizioni un po' più generali. Precisamente, per quanto riguarda l'ipotesi di simmetria, è possibile trattare il caso in cui A è sostituito da $A+B$, ove A verifica le ipotesi richieste e B è lineare e continuo da V in H.

D'altra parte, per quanto riguarda il secondo membro dell'equazione, possiamo supporre che f si possa decomporre nella forma $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in L^2(0,T;H)$ e $f_2 \in H^1(0,T;V')$. Questa generalizzazione consente, ad esempio nel caso di un problema concreto con condizioni del tipo di Neumann, la trattazione di dati di Neumann non omogenei dipendenti regolarmente dal tempo.

Infine scelte di v nel problema approssimato del tipo $v = \zeta(t)\, u_n'(t)$, con ζ funzione scalare regolare in $[0,T]$ e nulla in 0, consentono di ottenere analoghi risultati di regolarità, ma sull'intervallo $[\delta,T]$ per ogni $\delta \in (0,T)$, senza richiedere che il dato di Cauchy appartenga a V.